D. ROBERT

Asymptotique de la phase de diffusion à haute énergie pour des perturbations du second ordre du laplacien

Annales scientifiques de l'É.N.S. 4e série, tome 25, nº 2 (1992), p. 107-134
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1992_4_25_2_107_0>

Ann. scient. Éc. Norm. Sup.,
4[e] série, t. 25, 1992, p. 107 à 134.

ASYMPTOTIQUE DE LA PHASE DE DIFFUSION A HAUTE ÉNERGIE POUR DES PERTURBATIONS DU SECOND ORDRE DU LAPLACIEN

PAR D. ROBERT

1. Introduction

Dans un précédent travail $[\mathrm{Ro}]_1$ nous avions considéré le cas de perturbations de l'opérateur de Laplace par un potentiel (perturbation d'ordre 0). Soit $L_0=-\Delta$, Δ étant le laplacien usuel sur $\mathbb{R}^n$ et $L=-\Delta+V$ où V est un potentiel C^∞ vérifiant :

(1.1) Il existe $\rho>n$ tel que pour tout multi-indice α on ait :

$$|\partial^\alpha V(x)|\leqq C_\alpha\langle x\rangle^{-\rho-|\alpha|}\qquad \text{où}\quad \langle x\rangle=(1+|x|^2)^{1/2},\quad \partial=(\partial_1,\ \dots,\ \partial_n),\quad \partial_j=\partial/\partial x_j$$

La phase de diffusion pour la paire (L, L_0) se définit usuellement à partir de la matrice de diffusion $S(\lambda)$, $\lambda>0$ étant une variable d'énergie, par la formule :

$$\det(S(\lambda))=e^{-2i\pi s(\lambda)}\tag{1.2}$$

Nous considérons dans cet article le cas où $L=-\Delta_g+b(x, D)$, où g est une métrique sur $\mathbb{R}^n$, Δ_g étant l'opérateur de Laplace-Beltrami symétrique associé à la métrique riemannienne g sur $\mathbb{R}^n$, $b(x, D)$ est un opérateur différentiel symétrique du premier ordre à coefficients matriciels C^∞ :

$$b(x, D)=-(a(x).D+D.a(x))+V$$

où $a=(a_1,\ \dots,\ a_n)$ les a_j et V étant des matrices carrées hermitiennes de taille m et $D=i^{-1}\partial$.

On introduit, pour $\rho>0$, l'hypothèse suivante :

(H_ρ) Pour tout $\alpha\in\mathbb{N}^n$, il existe $C_\alpha>0$ telle que :

$$|\partial^\alpha(g(x)-1)|+|\partial^\alpha a(x)|+|\partial^\alpha V(x)|\leqq C_\alpha\langle x\rangle^{-\rho-|\alpha|}$$

Des hamiltoniens de ce type interviennent en mécanique quantique sous la forme suivante :

$$L=-G^{-1/4}\sum_{1\leqq j,\, k\leqq n}(\partial_j+A_j)\,G^{1/2}g^{jk}(\partial_k+A_k)\,G^{-1/4}+V$$

où : $g=[g_{jk}]$, $[g^{jk}]=g^{-1}$, $G=\det(g)$, $A=(A_1, \ldots, A_n)$ représente un potentiel de Yang-Mills dont les composantes A_j agissent sur un espace hermitien de dimension m, $\mathscr{E}_m$, algèbre de Lie d'un groupe de jauge. Dans cette classe d'opérateurs on trouve également les laplaciens de De Rham et les laplaciens spinoriels (carré d'opérateurs de Dirac).

Pour $\rho > 1$, on a les propriétés suivantes (*cf.* [Co-Kr-Sc]) :

(i) Les opérateurs d'onde pour (L_0, L) existent et sont complets.

(ii) Le spectre essentiel de L est égal à $[0, +\infty[$

(iii) L n'a pas de spectre singulièrement continu.

(iv) L n'a pas de valeur propre positive.

Remarquons que (H_ρ) pour $\rho > 0$ entraîne que $(\mathbb{R}^n, g)$ est une variété asymptotiquement plate; en d'autres termes g est une perturbation au voisinage de l'infini de la métrique standard g_0 sur $\mathbb{R}^n$. Cette notion est utile en théorie de la relativité (*cf.* par exemple [Le-Pe] sur le problème de Yamabe). Par analogie avec la célèbre question posée par M. Kac : « Can you hear the shape of a drum? » R. Schrader [Sc] pose la question : « Can you measure the deviation of an asymptotically flat space from a flat one by scattering experiments? ». Cette question a été la motivation de départ de notre travail.

Pour $\rho > n$, (1.2) définit la phase de diffusion modulo $\mathbb{Z}$. La théorie de Birman-Krein [Bi-Kr] permet de lever cette ambiguïté. De toute manière nous nous intéresserons essentiellement à sa dérivée. On a en particulier la formule de trace suivante :

$$\forall \varphi \in C_0^\infty(]0, +\infty), \quad \operatorname{tr}(\varphi(L)-\varphi(L_0)) = -\int \frac{ds}{d\lambda}\varphi(\lambda)\, d\lambda. \tag{1.3}$$

L'hypothèse (H_ρ) entraîne que $s \in C^\infty\,]0, \infty[$ (*cf.* § 5).

Il résulte de (1.2) :

$$\frac{d}{d\lambda} s(\lambda) = -\frac{1}{2i\pi}\operatorname{tr}\left(\frac{dS}{d\lambda}(\lambda) . S(\lambda)^*\right) \quad \text{pout tout } \lambda > 0 \tag{1.4}$$

Plusieurs travaux ont déjà consacrés à l'étude asymptotique de $ds/d\lambda$ lorsque λ tend vers l'infini, pour diverses perturbations du laplacien sur $\mathbb{R}^n$; citons essentiellement pour les obstacles : Buslaev [Bu], Jensen-Kato [Je-Ka], Majda-Ralston [Ma-Ra], Bardos, Guillot, Ralston [Ba-Gu-Ra] Petkov-Popov [Pe-Po]; pour les potentiels réguliers à support compact : Colin de Verdière [CdV], Guillopé [Gu], Popov [Po]; pour les métriques riemanniennes coïncidant avec la métrique euclidienne en dehors d'un borné : Majda-Ralston [Ma-Ra]. Notons que dans tous ces travaux l'opérateur perturbé L coïncide avec l'opérateur non perturbé L_0 en dehors d'un borné. L'objectif principal de cette étude est d'étendre ces résultats à une classe de perturbations de L_0 qui, en un certain sens, est optimale car il est raisonnable de supposer $\rho > n$ pour que la phase de diffusion existe !

Il est bien connu que dans ces questions la présence ou non de géodésiques captées pour la métrique g modifie profondément la nature des comportements asymptotiques par rapport à l'énergie. Dans le cas général nous donnons deux types de résultats : une asymptotique « faible, du type noyau de la chaleur » [th. 2.1)] et une formule « du type

Weyl ». Par contre lorsque la métrique n'a pas de géodésiques captées, nous montrons que la phase de diffusion (et ses dérivées) a un développement asymptotique complet [th. (2.5)]. Étant donné l'importance de cette condition de non-capture nous l'avons discutée en détail dans le paragraphe 5. Nous montrons en particulier qu'elle est équivalente à des conditions quantiques portant sur la résolvante ou sur le propagateur associé à l'hamiltonien L [th. (5.1)].

Remerciements

Ce travail a été commencé alors que j'étais en détachement auprès du Centre de Mathématiques Pures de l'École Polytechnique. Je remercie les chercheurs du centre avec lesquels j'ai eu des discussions très stimulantes. Je remercie également les collègues qui m'ont permis de présenter ces résultats ou leurs prolongements à l'occasion de séminaires ou de colloques : J. M. Bony (séminaire E.D.P. de Polytechnique), R. Seiler (conférence T.U., Univ. Berlin), V. Petkov (colloque de Varna), M. Ben Artzi (colloque en l'honneur de S. Agmon, Jérusalem), L. Brüning (colloque « 25 ans d'analyse microlocale » I.R.S.E.E.-R.F.A.).

2. Énoncés des résultats

Nous utiliserons librement la théorie des opérateurs pseudo-différentiels, sous une forme adaptée à notre étude, par exemple telle qu'elle est exposée dans $[\mathrm{Ro}]_2$, auquel nous renvoyons pour les détails concernant les classes de symboles utilisées. Nous adoptons en particulier la convention suivante : à tout $h>0$, b étant un symbole, u une fonction [par exemple dans l'espace de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$] on associe :

$$(\mathrm{Op}^w{}_h(b)\,u)(x)=(2\pi)^{-n}\int e^{i(x-y,\,\xi)}\,b\left(\frac{x+y}{2},h\xi\right)u(y)\,dy\,d\xi$$

(quantification de Weyl)

Dans la suite l_2 (resp. $l_{0,2}$) désigne le symbole principal de L (resp. L_0) et v_g (resp. v_0) désigne la forme volume associée à g (resp. g_0).

THÉORÈME (2.1) (asymptotique au sens faible) :

(i) *On suppose* (H_ρ), $\rho>0$. *Alors pour tout* $\varphi\in \mathrm{C}_0^\infty(\mathbb{R})$, $\varphi(h^2.\mathrm{L})$ *est un opérateur h-admissible au sens de* [He-Ro]. *On a donc* $\varphi(h^2.\mathrm{L})=\mathrm{Op}_h(a_\varphi(h)$ *avec* : $a_\varphi(h)\approx\sum_{j\geq 0} a_{\varphi,j}h^j$, *dans une classe convenable de symboles.*

Les coefficients $a_{\varphi,j}$ *sont de la forme*

$$a_{\varphi,j}=\sum_{i\leq k\leq 2j-1} d_{j,k}(x,\xi)(-1)^k\varphi^{(k)}\circ l_2 \qquad \textit{pour}\quad j\geq 1 \textit{ et } a_{\varphi,0}=\varphi\circ l_2$$

Les $d_{j,k}$ sont des symboles indépendants de φ, homogènes de degré $2k-j$ en ξ, calculables en fonction du symbole de L.

(ii) *Si de plus $\rho > n$ alors on a le développement asymptotique suivant :*

$$\operatorname{tr}((\varphi(h^2 L) - \varphi(h^2 L_0)) \approx h^{-n} \sum_{j \geqq 0} \gamma_{2j}(\varphi) h^{2j} \quad \text{lorsque } h \downarrow 0 \tag{2.1}$$

et on peut calculer les coefficients $\gamma_j(\varphi)$:

$$\gamma_0(\varphi) = (2\pi)^{-n} m \int [\varphi(l_2(x, \xi)) - \varphi(l_{0,2}(x, \xi))] \, dx \, d\xi$$

(m est la taille du symbole matriciel de L défini dans l'introduction)

$$\gamma_j(\varphi) = (2\pi)^{-n} \operatorname{tr}\left[\sum_{1 \leqq k \leqq 2j-1} (-1)^k \int d_{jk}(x, \xi) \, \varphi^{(k)}(l_2(x, \xi)) \, dx \, d\xi\right].$$

En particulier $\gamma_j(\varphi) = 0$ si j est impair

Remarque (2.2). — *Les $d_{j,k}$ peuvent se calculer en construisant une parametrix pour $(L - z)^{-1}$ par la méthode de Seeley* [Se] *en regroupant les termes par degré d'homogénéité en ξ.*

THÉORÈME (2.3) (formules du type Weyl). — *On suppose* (H_ρ), $\rho > n$. *On a alors une asymptotique du type Weyl pour $s(\lambda)$:*

$$s(\lambda) = (2m\alpha_0/n) \, . \, \lambda^{n/2} + O(\lambda^{(n-1)/2}), \qquad \lambda \to +\infty \tag{2.2}$$

la constante de volume α_0 est donnée par :

$$\alpha_0 = [2\pi^{n/2+1}/\Gamma(n/2+1)] \int (dv_g - dv_0)$$

De plus si la mesure de l'ensemble des géodésiques fermées sur l'hypersurface $\Sigma = \{(x, \xi) : l_2(x, \xi) = 1\}$ est nulle, pour la mesure euclidienne induite sur Σ, on a alors :

$$s(\lambda) = 2m\alpha_0/n \, . \, \lambda^{n/2} + o(\lambda^{(n-1)/2}), \qquad \lambda \to +\infty \tag{2.2*}$$

Remarques (2.4). — (i) Les résultats précédents restent valables si l'on remplace L par un opérateur pseudo-différentiel classique elliptique (que l'on peut toujours supposer d'ordre 2 et que l'on suppose scalaire pour simplifier). Plus précisément supposons que le symbole $l(x, \xi)$ de L vérifie :

$$l(x, \xi) \approx \sum_{j \leqq 2} l_j(x, \xi),$$

l_j étant homogène de degré j en ξ, l_2 est elliptique. L'hypothèse (H_ρ) s'écrit alors :

pour tout N, entier; pour tous multi-indices α, β on a :

$$\left|\partial^\alpha{}_x \partial^\beta{}_\xi \Big(l(x, \xi) - \sum_{2-N \leqq j \leqq 2} l_j(x, \xi)\Big)\right| \leqq C_{N,\alpha,\beta} \langle x \rangle^{-\rho-|\alpha|} \langle \xi \rangle^{-N-1-|\beta|}$$

$$|\partial^\alpha_x(l_2(x,\xi)-1|+\sum_{1-N\leq j\leq 1}\partial^\alpha_x l_j(x,\xi)|\leq C_\alpha\langle x\rangle^{-\rho-|\alpha|}\qquad \text{pour}\quad |\xi|=1 \text{ et } x\in\mathbb{R}^n$$

(ii) L'équivalent du théorème (2.3) pour la diffusion par un obstacle est dû à R. Melrose $[\mathrm{Me}]_1$. Il a obtenu ce résultat en utilisant son estimation sur le nombre de pôles $[\mathrm{Me}]_2$. Notre méthode est différente et n'utilise pas ce genre d'information pour la diffusion par une métrique qui par ailleurs n'est pas encore connue avec une précision suffisante (*voir* [Vo], [Pe], [Sj – Zw]).

THÉORÈME (2.5). — *On suppose* (H_ρ) *avec* $\rho>n$ *et on suppose de plus que la métrique* g n'a pas de trajectoire captée. *On a alors l'asymptotique complète suivante :*

$$\frac{ds}{d\lambda}(\lambda)\approx\lambda^{(n/2)-1}\Big(\sum_{j\geq 0}\alpha_j\lambda^{-j}\Big),\qquad \lambda\to+\infty \tag{2.3}$$

De plus on peut dériver l'asymptotique (2.3) *à tout ordre en* λ.

Enfin les coefficients α_j *du développement* (2.3) *s'expriment par les formules*

$$\alpha_j=\sum_{j\leq k\leq 4j-1}\Gamma(n/2+k-j)\,.\,\Gamma^{-1}(n/2-j-1)\int_\Sigma \operatorname{tr}(d_{2jk})\,.\,\omega$$

les symboles d_{jk} *étant définis dans le théorème* (2.1) *et où* ω *est la forme différentielle quotient de Leray :*

$$\omega=dx\,d\xi/dl_2\qquad [l_2(x,\xi)=\langle g(x)^{-1}\xi,\xi\rangle \text{ et } \Sigma=l_2^{-1}(1)].$$

Remarques (2.6). — 1) Les invariants spectraux α_j de la formule (2.1) sont identiques à ceux intervenant dans la géométrie d'une variété riemannienne compacte (*cf.* [Gi]). En utilisant cette analogie, R. Schrader [Sc] a donné l'expression suivante de α_2 (en utilisant la convention de sommation) :

$$\alpha_2=\frac{\pi^{(n/2)+1}}{180\,\Gamma((n/2)-1)}\operatorname{tr}\Big\{\int_{\mathbb{R}^n}(-12\,\partial^2_{k,k}R^{ij}_{ij}+5\,R^{ij}_{ij}\,.\,R^{kl}_{kl}-2\,R^{ik}_{ij}\,.\,R^{lk}_{lj}$$
$$+2\,R^{kl}_{ij}\,.\,R^{kl}_{ij}+60\,V\,.\,R^{ij}_{ij}+180\,V^2-60\,\partial^2_{kk}V-30\,F^{kl}\,.\,F_{kl})\,dv_g\Big\}$$

où R_{ij} désigne le tenseur courbure de g, $F_{kl}=\partial_l A_k-\partial_k A_l+i[A_k,A_l]$ est le tenseur des forces magnétiques, F^{kl} son conjugué de Hodge.

2) Si l'on modifie L comme dans la remarque (2.4) alors les asymptotiques (2.1) et (2.3) sont en puissances demi-entières de λ et l'asymptotique (2.2) devient :

$$s(\lambda)=2\,m\,\alpha_0/m\,.\,\lambda^{n/2}+C_1\,\lambda^{(n-1)/2}+o(\lambda^{(n-1)/2}) \tag{2.2*}$$

la constante C_1 étant donnée par : $C_1=-\int_\Sigma(l_1/|\nabla l_0|)\,d\Sigma$ (*cf.* [Pe-Ro].

3) Des travaux sur le comportement semi-classique ([Ge-Ma-Ro]) suggèrent que $ds/d\lambda$ a une croissance très rapide (du type exponentiel) si la métrique g possède des trajectoires captées car alors on a des résonances près de l'axe réel (*cf.* [Ra], [De-Hi], [Pe]).

3. Asymptotique faible

L'homogénéité de ξ permet de regarder $h^2 . \mathrm{L}$ comme un opérateur h-admissible. Cela résulte immédiatement du fait que le symbole $l(x, \xi)$ de l'opérateur L s'écrit :

$$l(x, \xi)=\sum_{j \leqq 2} l_j(x, \xi)$$

où l_j est homogène de degré j en ξ. D'où :

$$h^2 . l(x, \xi)=\sum_{j \leqq 2} h^{j-2} . l_j(x, h, \xi) \tag{3.1}$$

On peut donc utiliser le résultat principal de [He-Ro] en tenant compte de l'amélioration apportée dans [Da-Ro] qui permet en particulier d'estimer les restes en norme-trace d'opérateur.

Pour l'expression des coefficients nous reprenons la méthode de Seeley [Se], utilisée dans des contextes voisins dans [Ro] et [He-Ro]. L'adaptation au cas considéré ici ne posant pas de problèmes, nous renvoyons le lecteur à ces travaux pour les détails. En particulier il en résulte que les symboles d_{jk} intervenant dans l'expression des $\gamma_j(\varphi)$ sont polynomiaux et homogènes dans la variable ξ, ayant la parité de j. On en déduit alors que $\gamma_j(\varphi)=0$ si j est impair.

4. Formule de Weyl

La démonstration du théorème (2.2) se fait en plusieurs étapes. La première consiste à remplacer la paire d'opérateurs $(\mathrm{L}_0, \mathrm{L})$ par $(\mathrm{P}_0, \mathrm{P})$ où :

$$\mathrm{P}_0=\sqrt{\mu^2-\Delta}, \qquad \mathrm{P}=\sqrt{\mu^2+\mathrm{L}}$$

où $\mu>0$ est un réel choisi assez grand pour que l'opérateur $\mu^2+\mathrm{L}$ soit injectif, positif. Il est clair que $(\mathrm{P}_0, \mathrm{P})$ admet une phase de diffusion σ et que l'on a d'après (1.3) :

$$\frac{ds}{d\lambda}(\lambda)=\frac{1}{2\sqrt{\mu^2+\lambda}} \frac{d\sigma}{d\lambda}(\sqrt{\mu^2+\lambda}), \qquad \lambda>0 \tag{4.1}$$

D'autre part le calcul fonctionnel sur les opérateurs pseudo-différentiels (*cf.* [Se], $[\text{Ro}]_2$) entraîne le lemme suivant :

LEMME (4.1). — P *est un opérateur pseudo-différentiel classique d'ordre* 1 *sur* $\mathbb{R}^n$ *de symbole* $p(x, \xi)$ *admettant le développement asymptotique :*

$$p(x, \xi) \approx \sum_{j \leqq 1} p_j(x, \xi)$$

où :

(i) p_j *est homogène de degré* j *en dehors de* O *en* ξ. *En particulier* $p_1(x, \xi) = (g(x)\xi, \xi)^{1/2}$.

(ii) *Pour tous* $j \leqq 0$ *et* $\alpha \in \mathbb{N}^n$ *on a* $\partial_x^\alpha p_j(x, \xi) = O(\langle x \rangle^{-\rho - |\alpha|})$ *uniformément pour* $\xi \in S_{n-1}$.

(iii) *Pour tout entier* $N \geqq -1$, *pour tout* α, $\beta \in \mathbb{N}^n$, *on a :*

$$\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta \left(p(x, \xi) - \sum_{j=1}^{-N} p_j(x, \xi) \right) = O(\langle \xi \rangle^{-N-1-|\beta|} . \langle x \rangle^{-\rho-|\alpha|}). \quad \blacksquare$$

La deuxième étape consiste à relier $d\sigma/d\lambda$ à la densité spectrale locale $(\partial e_p/\partial\lambda)(\lambda; x, x)$ relative à P. Rappelons que $e_p(\lambda; x, y)$ est le noyau du projecteur spectral $E_p(\lambda)$ de l'opérateur P sur $]-\infty, \lambda]$.

Commençons par faire le calcul heuristique suivant. On désigne par $\mathscr{A}$ le générateur des dilatations : $\mathscr{A} = (1/2)(x . D + D . x)$. Un calcul immédiat donne :

$$i[P_0, \mathscr{A}] = \chi_0(P_0) \quad \text{avec} \quad \chi_0(\lambda) = \lambda^{-1}(1 - \mu^2 \lambda^2) \tag{4.2}$$

$$i[P, \mathscr{A}] = \chi_0(P) + R \quad \text{où} \quad R = i[P - P_0] + \chi_0(P_0) - \chi_0(P) \tag{4.3}$$

En particulier $R = r(x, D_x)$ où r est un symbole classique d'ordre 1 en ξ, de poids $\langle \xi \rangle \langle x \rangle^{-\rho}$. Utilisant (4.2), (4.3) et le caractère cyclique de la trace il vient, pour tout $\varphi \in C_0^\infty(]0, +\infty[)$:

$$\operatorname{tr}(\chi_0(P)\varphi(P) - \chi_0(P_0) . \varphi(P_0)) = \operatorname{tr}(R . \varphi(P)) = \int \operatorname{tr}\left(R . \frac{\partial E_p}{\partial \lambda} \right) . \varphi(\lambda)\, d\lambda \tag{4.4}$$

D'où d'après la formule de Birman-Krein il vient :

$$\frac{d\sigma}{d\lambda}(\lambda) = \operatorname{tr}\left(W(x, D) . \frac{\partial E_p}{\partial \lambda} \right), \tag{4.5}$$

au sens des distributions en λ sur $]0, +\infty[$, avec :

$$W(x, D) = r(x . D) . (\chi_0(P))^{-1}$$

En particulier W est un O.P.D. classique d'ordre 0, de poids : $\langle x \rangle^{-\rho}$.

On donnera dans l'appendice (A) une preuve rigoureuse de (4.4), dont l'interprétation n'est pas tout à fait évidente (*cf.* aussi $[\text{Ro}]_3$ pour une interprétation ponctuelle de (4.5)) car *a priori* $W(x, D) . \partial E_p/\partial\lambda$ n'est pas de classe trace si $n < \rho \leqq n+1$. Par contre si

$\rho > n+1$ il n'y a pas de problème car on sait d'après le principe d'absorption limite que $\langle x \rangle^{-s} . \partial E_p / \partial \lambda . \langle x \rangle^{-s}$ est un opérateur borné sur $L^2(\mathbb{R}^n)$ pour tout $s > 1/2$ (*cf.* le paragraphe 5 et la formule de Stone : $(\partial/\partial\lambda) E_p = (2 i \pi)^{-1} [(P - \lambda - i0)^{-1} - (P - \lambda + i0)^{-1}]$).

Suivant la méthode classique de Lévitan-Hörmander, nous allons analyser la transformation de Fourier près de l'origine de $d\sigma/d\lambda$ en utilisant (4.4).

Soient χ, $\zeta \in C_0^\infty(\mathbb{R})$; $\zeta = 1$ près de 0.

On introduit la fonction :

$$(4.6) \quad \tilde{\tau}_{\zeta, W}(\lambda) = \frac{1}{2\pi} . \operatorname{tr}\left[W(x, D) . \chi\left(\frac{P-\lambda}{\lambda^\theta}\right) \int \zeta(t) e^{it(P-\lambda)} dt \right] \qquad \text{avec} \quad \frac{1}{3} < \theta \leqq 1.$$

Pour étudier l'asymptotique de $\tilde{\tau}_{\xi, W}(\lambda)$ lorsque $\lambda \to +\infty$ il est commode de se ramener à une asymptotique semi-classique en posant :

$$\lambda = 1/h \qquad (h \downarrow 0).$$

On est alors ramené à étudier :

$$(4.7) \qquad \tau_{\zeta, W}(h) = \frac{1}{2\pi} . \operatorname{tr}\left[W(h) . \chi\left(\frac{P(h) - 1}{h^{1-\theta}}\right) . \int \zeta(t) . e^{i(t/h)(P(h)-1)} dt \right]$$

$W(h)$ et $P(h)$ sont des opérateurs pseudo-différentiels h-admissibles (*cf.* [He-Ro], $[Ro]_2$) de poids respectifs : $\langle x \rangle^{-\rho}$, $\langle \xi \rangle \langle x \rangle^{-\rho}$, de h-symboles :

$$W(h) \approx \sum_{j \geqq 0} h^j w_j; \qquad p(h) \approx \sum_{j \leqq 1} h^{j-1} p_j.$$

Notons que la condition : $1/3 < \theta$ assure que l'on peut utiliser le calcul fonctionnel pour représenter $\chi(P(h) - 1/h^{1-\theta})$ comme O.P.D. (*cf.* [Da-Ro]).

En procédant comme dans [He-Ro] et $[Ro\text{-}Ta]_2$ on obtient :

PROPOSITION (4.2). — *Il existe $T_0 > 0$ ne dépendant que de la métrique g tel que pour tout $\zeta \in C_0^\infty(]-T_0, T_0[)$, $\tau_{\zeta, W}(h)$ admet le développement asymptotique complet :*

$$\tau_{\zeta, W}(h) \approx h^{1-n} . \sum_{j \geqq 0} C_{j, W}(\zeta) . h^j$$

De plus les distributions $C_{j, W}(\zeta)$ ne dépendent que du germe de ζ à l'origine.

Remarque (4.3). — (i) Puisque 1 n'est pas valeur critique du symbole principal $l_2(x, \xi) = \langle g^{-1}(x) \xi, \xi \rangle$ cela entraîne qu'il existe $T_0 > 0$ tel que le flot géodésique de g n'a pas de période dans $]0, T_0[$. La conclusion de la proposition (4.2) reste valide tant que g n'a pas de période $]0, T_1[$, pour tout $\zeta \in C_0^\infty(]-T_1, T_1[)$.

(ii) Il résulte également des travaux de [He-Ro], [Ro-Ta], [Pe-Ro] que si W est un symbole classique d'ordre 0 en ξ et de poids total $\langle x \rangle^{-\delta}$ avec $\delta > n$, la conclusion de la proposition (4.2) est valide pour tout $\rho > 0$. De plus si le support de W ne rencontre pas de trajectoires périodiques de période $T \in]0, T_1[$ on a encore le résultat. Cela sera détaillé dans un travail ultérieur.

Preuve du théorème (2.2). – Soit donc W comme ci-dessus. On pose : $s_{\mathrm{W}}(\lambda)=\operatorname{tr}(\mathrm{W}(x, \mathrm{D}).\mathrm{E}_{\mathrm{P}}(\lambda))$, W est supposé à valeurs réelles. Afin de pouvoir utiliser l'argument taubérien de Levitan-Hörmander, on commence par se ramener au cas où s_{W} est une fonction monotone croissante de la manière suivante : posons : $a(x, \mathrm{D})=\langle x\rangle^{\delta/2}.\mathrm{W}(x, \mathrm{D}).\langle x\rangle^{\delta/2}$, $a(x, \mathrm{D})$ est un opérateur borné sur $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n)$. Introduisons :

$$\mathrm{M}=\|a(x, \mathrm{D})\|, \qquad \mathrm{W}^+(x, \mathrm{D})=2\mathrm{M}.\langle x\rangle^{-\delta},$$
$$\mathrm{W}^-(x, \mathrm{D})=\langle x\rangle^{-\delta/2}.(2\mathrm{M}-a(x, \mathrm{D})).\langle x\rangle^{-\delta/2}.$$

On a alors :

$$s_{\mathrm{W}}(\lambda)=s_{\mathrm{W}}^+(\lambda)-s_{\mathrm{W}}^-(\lambda)$$

avec :

$$s_{\mathrm{W}}^+(\lambda)=2\mathrm{M}.\operatorname{tr}(\langle x\rangle^{-\delta/2}.\mathrm{E}_{\mathrm{P}}(\lambda).\langle x\rangle^{\delta/2})$$

et

$$s_{\mathrm{W}}^-(\lambda)=\operatorname{tr}(b(x, \mathrm{D}).\mathrm{E}_{\mathrm{P}}(\lambda).b(x, \mathrm{D}))$$

où : $b(x, \mathrm{D})=\sqrt{2\mathrm{M}-a(x, \mathrm{D})}$ qui est également un O.P.D. classique sur $\mathbb{R}^n$ d'ordre 0, de poids $\langle x\rangle^{-\delta/2}$.

D'autre part il résulte facilement du théorème (2.1) que l'on a :

$$s_w(\lambda)=O(\lambda^{n/2}), \qquad \lambda\to+\infty \tag{4.7}$$

Les fonctions $s_w^{\pm}$ étant croissantes on peut alors appliquer à $\mathrm{W}=\mathrm{W}^{\pm}$ la proposition (4.2), (4.7) et l'argument taubérien standard (*cf.* [Ho], [He-Ro]) et ainsi obtenir l'asymptotique de Weyl (2.2). Pour obtenir (2.2)* on utilise le théorème (3.1) de [Pe-Ro]).

5. Estimations à haute énergie et métriques captantes

On suppose que l'opérateur $\mathrm{L}=-\Delta_g-(a(x).\mathrm{D}_x+\mathrm{D}_x a(x))+\mathrm{V}(x)$ vérifie (H_ρ) avec $\rho>0$. On suppose également que L n'a pas de valeur propre positive (pour $\rho>1$ cela résulte de [Co-Kr-Sc]). Il résulte de la méthode des commutateurs de Mourre [Je-Pe-Mo] que pour tout $\lambda>0$, pour tout $s>1/2$, $\langle x\rangle^{-s}.(\mathrm{L}-\lambda\pm i0)^{-1}.\langle x\rangle^{-s}$ existe comme opérateur borné sur $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n)$. Il est bien connu depuis S. Agmon [Ag] que ces estimations des valeurs aux bords de résolvantes dans des espaces à poids jouent un rôle important en théorie de la diffusion.

Le résultat principal de ce paragraphe est le suivant :

THÉORÈME (5.1). — *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *La métrique g n'a pas de géodésiques captées.*

(ii) *Pour tout entier k, pour tout réel* $s>k-(1/2)$, *on a :*

$$\|\langle x\rangle^{-s}.(\mathrm{L}-\lambda\pm i0)^{-k}\langle x\rangle^{-s}\|=O(\lambda^{-k/2}),\qquad \textit{pour}\quad \lambda\to+\infty$$

(iii) *Pour tout* $s>1/2$ *on a*

$$\|\langle x\rangle^{-s}(\mathrm{L}-\lambda\pm i0)^{-1}\langle x\rangle^{-s}\|=O(\lambda^{-1/2})$$

(iv) *Pour tout entier k, pour tout réel* $s>k+(1/2)$, *pour toute fonction* $\varphi\in \mathrm{C}_0^\infty(]0,+\infty[)$, *on a :*

$$\left\|\langle x\rangle^{-s}.\varphi\left(\frac{\mathrm{L}}{\lambda}\right)e^{-it\mathrm{L}}\langle x\rangle^{-s}\right\|=O((1+|t|\sqrt{\lambda})^{-k}),\qquad \text{pour}\quad \lambda\to+\infty\quad\blacksquare$$

Preuve. — Il est commode de se ramener à un problème avec petit paramètre (semi-classique) en posant : $\lambda=\mu/h^2$.

(ii) est alors équivalente à :

(ii)* $\|\langle x\rangle^{-s}.(\mathrm{L}(h)-\mu\pm i0)^{-k}\langle x\rangle^{-s}\|=O(h^{-k})$, pour $h\to 0$,
uniformément par rapport à $\mu\in[a, b]$ où $0<a<b<+\infty$, et $\mathrm{L}(h)$ est un opérateur h-admissible [He-Ro] car de la forme : $\mathrm{L}(h)=l(x, h\mathrm{D}_x)+hl_1(x, h\mathrm{D}_x)+h^2\mathrm{V}$.

Montrons alors que (i) entraîne (ii)*. Pour cela nous utiliserons la théorie de Mourre des commutateurs positifs [Je-Pe-Mo] et une construction de fonction fuite due à C. Gérard et A. Martinez [Ge-Ma]. Pour simplifier la présentation nous supposerons que L est réduit à sa partie principale et donc que $l(x,\xi)=\langle g(x)^{-1}\xi, \xi\rangle$. Le cas général ne présente pas de difficultés supplémentaires.

On désigne par $\mathscr{H}_l$ le champ hamiltonien associé à l :

$$\mathscr{H}_l=\frac{\partial l}{\partial\xi}\frac{\partial}{\partial x}-\frac{\partial l}{\partial x}\frac{\partial}{\partial\xi}$$

et $(z(t, x, \xi), \zeta(t, x, \xi))=\exp(t.\mathscr{H}_l)(x, \xi)$ (composantes du flot hamiltonien dans $\mathbb{R}^n_x\times\mathbb{R}^n_\xi$).

LEMME (5.2). — *Supposons que la métrique g n'ait pas de géodésiques captées dans* $\mathbb{R}^n$. *Il existe alors une fonction fuite* $\mathrm{F}\in \mathrm{C}^\infty(\mathbb{R}^n_x\times\mathbb{R}^n_\xi)$ *possédant les propriétés suivantes :*

(F_i) $\mathscr{H}_l F(x, \xi)\geqq\delta>0$ *si* $l(x, \xi)\in[1/2, 3/2]$.

(F_2) *Pour tous multi-indices* α *et* β *on a :*

$$\partial_x^\alpha\partial_\xi^\beta\,\mathrm{F}(x, \xi)=O(\langle(x, \xi)\rangle^{(2-|\alpha|-|\beta|)_+})$$

Preuve du lemme (5.2). — Pour être complet nous reprenons l'argument de [Ge-Ma]. L'idée est de perturber la fonction fuite standard :

$$\mathrm{F}_0(x, \xi)=\langle x, \xi\rangle$$

[symbole du générateur des dilatations : $1/2\,(x.\mathrm{D}+\mathrm{D}.x)$]

On a alors : $\mathscr{H}_l(\mathrm{F}_0)(x, \xi)=2\langle g^{-1}(x)\xi, \xi\rangle-\langle (x.\partial_x) g^{-1}(x)\xi, \xi\rangle$.

Si $|x|\geqq \mathrm{R}$ et $1/2\leqq l(x, \xi)\leqq 3/2$ alors : $\mathscr{H}_l(\mathrm{F}_0)(x, \xi)\geqq\delta_0$.

Soit $\theta\in\mathrm{C}_0^\infty(|x|<\mathrm{R}+1)$, $\theta(x)=1$ si $|x|\leqq \mathrm{R}$, $0\leqq\theta\leqq 1$.

Posons : $\mathrm{K}(x, \xi)=-\int_0^\infty \theta(z(t, x, \xi)\,dt$.

On a : $\mathrm{K}\in\mathrm{C}^\infty(\mathbb{R}_x^n\times\mathbb{R}_\xi^n)$ car g n'a pas de trajectoire captée. On a de plus :

$$(5.1)\qquad |\mathrm{K}(x, \xi)|\leqq \mathrm{T}_{\mathrm{R}+1},$$

T_R étant le temps de séjour dans la boule $\{|x|<\mathrm{R}+1\}$.

$$(5.2)\qquad \mathscr{H}_l(K)(x, \xi)=\theta(x)$$

Pour $l(x, \xi)\in[1/2, 3/2]$ on définit :

$$(5.3)\qquad \mathrm{F}(x, \xi)=\mathrm{C}_1.\theta(x/\mathrm{M}).\mathrm{K}(x, \xi)+\langle x, \xi\rangle$$

On choisit d'abord $\mathrm{C}_1>0$ assez grand de sorte que :

$$\mathrm{C}_1\,\theta+\mathscr{H}_l(\mathrm{F}_0)\geqq\delta_0$$

puis $\mathrm{M}>0$ assez grand de sorte que :

$$|\mathrm{C}_1\,\mathrm{K}.\mathscr{H}_p(\theta_\mathrm{M})(x, \xi)|\leqq\frac{\delta_0}{2}\qquad [\theta_\mathrm{M}(x)=\theta(x/\mathrm{M})]$$

On déduit donc de (5.3) que l'on a :

$$\mathscr{H}_l(\mathrm{F})(x, \xi)\geqq\frac{\delta_0}{2}\qquad\text{dans}\quad l^{-1}\left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]$$

On prolonge ensuite F à tout $\mathbb{R}_x^n\times\mathbb{R}_\xi^n$ pour avoir la propriété (F_2).

Preuve de (i) $\Rightarrow$ (ii)* [*théorème* (5.1)]. — On utilise les résultats de [Je-Pe-Mo] (*voir* aussi [Je]) en choisissant comme opérateur conjugué : $\mathrm{A}(h)=\mathrm{Op}_h^w\,\mathrm{F}$, F étant la fonction fuite du lemme (5.2). Pour appliquer les techniques de [Je-Pe-Mo] nous devons contrôler la positivité du commutateur $[\mathrm{L}(h), \mathrm{A}(h)]$ par rapport h lorsque $h\to 0$. Cela se fait en utilisant le calcul fonctionnel sur les opérateurs h-admissibles [He-Ro]. Le lemme (5.2) et les résultats de [He-Ro] donnent :

$$(5.4)\qquad \chi(\mathrm{L}(h))[\mathrm{L}(h), \mathrm{A}(h)]\chi(\mathrm{L}(h))$$
$$\geqq(\delta_0/2)\,h\,\chi^2(\mathrm{L}(h)+h^2.\mathrm{R}_\chi(h)\ \text{pour tout}\ \chi\in\mathrm{C}_0^\infty(]1/2, 3/2[)\ \text{où}\ \|\mathrm{R}_\chi h)\|=O(1),\qquad h\searrow 0.$$

On déduit de (5.4) qu'il existe $h_0>0$, tels que :

$$(5.5)\qquad \mathrm{E}_\mathrm{I}(\mathrm{L}(h))[\mathrm{L}(h), \mathrm{A}(h)]\mathrm{E}_\mathrm{I}(\mathrm{L}(h))\geqq(\delta_0/4)\,h\,\mathrm{E}_\mathrm{I}(\mathrm{L}(h))\quad\text{avec}\ \mathrm{I}=\left[\frac{3}{4}, \frac{5}{4}\right],\qquad 0<h\leqq h_0$$

A partir de (5.5) les techniques de [Je-Pe-Mo] permettent d'obtenir (ii)*.

Preuve de (ii) $\Rightarrow$ (iv). — On se ramène à montrer : (ii)* $\Rightarrow$ (iii)* où :

(iii)* $\| \langle x \rangle^{-s} \varphi(\mathrm{L}(h)) e^{-ith^{-1}.\mathrm{L}(h)} \langle x \rangle^{-s} \| = O(\langle t \rangle)^{-k}$ uniformément par rapport à $h \in]0,1]$.

On démontre alors (iii)* à partir de la formule de Stone :

$$(5.6) \quad t^k \langle x \rangle^{-s} \varphi(\mathrm{L}(h)) e^{-ith^{-1}\mathrm{L}(h)} \langle x \rangle^{-s}$$
$$= \frac{1}{2i\pi} \cdot \int_0^{+\infty} \langle x \rangle^{-s} t^k e^{-ith^{-1}\mu} \cdot \varphi(\mu) (\mathrm{R}(h, \mu + i0) - \mathrm{R}(h, \mu - i0)) \langle x \rangle^{-s} d\mu$$

Il suffit alors d'intégrer par parties par rapport à μ et d'utiliser (ii)*. On a noté : $\mathrm{R}(h, z) = (\mathrm{L}(h) - z)^{-1}$.

Preuve de (iii) $\Rightarrow$ (i). — En nous inspirant de Wang $[\mathrm{Wa}]_1$ (*voir* aussi $[\mathrm{Wa}]_2$, qui a traité le cas de l'hamiltonien de Schrödinger standard : $\mathrm{L}(h) = -h^2 \Delta + \mathrm{V}$), nous allons montrer que si l'on a la propriété (iii) (ou (iii)*) alors la métrique g n'est pas captante. La propriété (iii)* entraîne que pour tout $s > 1/2$ et tout $\chi \in \mathrm{C}_0^\infty(]0, +\infty[)$ on a :

Il existe $\gamma > 0$ telle que

$$(5.7) \quad \int \| \langle x \rangle^{-s} \chi(\mathrm{L}(h)) e^{-ith^{-1}\mathrm{L}(h)} \psi \|^2 dt \leqq \gamma \| \psi \|^2, \qquad \forall \psi \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n) \quad \forall h \in]0, 1]$$

(5.7) signifie que $\langle x \rangle^{-s}$ est $\mathrm{L}(h)$-régulier, uniformément par rapport à $h \in]0, 1]$ (*cf.* théorème (XIII-25) dans [Re-Si]).

Posons :

$$\mathrm{U}(t, h) = e^{-ith^{-1}\mathrm{L}(h)}$$
$$\mathrm{A}_{2s}(h) = \chi(\mathrm{L}(h)) . \langle x \rangle^{-2s} . \chi(\mathrm{L}(h)), \qquad a(x, \xi) = \chi^2(l(x, \xi)) \langle x \rangle^{-2s}$$
$$\mathrm{A}_{2s}(t, h) = \mathrm{U}(t, h)^* . \mathrm{A}(h) . \mathrm{U}(t, h) . \mathrm{Op}_h^w(a(t, h))$$

(5.7) est clairement équivalent à la propriété suivante :

$$(5.7) \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{tr}(\mathrm{A}_{2s}(t, h) . \mathrm{S}) \, dt \leqq \gamma . \mathrm{tr}(\mathrm{S})$$

pour tout opérateur S positif, de classe trace dans $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n)$. Le lemme suivant est une application directe du théorème d'Egorov semi-classique $[\mathrm{Ro}]_2$:

LEMME (5.3). — *Pour tout* $\mathrm{T} > 0$ *il existe* $\mathrm{C_T} > 0$ *telle que*

$$\| \mathrm{A}(t, h) - \mathrm{Op}_h^w(a \circ \exp(t \mathscr{H}_l)) \|_{\mathrm{L}^2 \to \mathrm{L}^2} \leqq \mathrm{C_T} h$$

pour tout t, $|t| < \mathrm{T}$ *et pour tout* $h \in]0, 1]$.

La preuve de (iii) $\Rightarrow$ (i) résultera clairement des deux lemmes suivants :

LEMME (5.4). — *La propriété* (5.7)′ *entraîne :*

$$\chi^2(l(x,\xi)).\int_{-\infty}^{+\infty}\langle z(t,x,\xi)\rangle^{-2s}\,dt\leqq\gamma \quad \text{pour tout } (x,\xi)\in\mathbb{R}^{2n}$$

LEMME (5.5). — *Soit g vérifiant* (H_ρ) *avec* $\rho>0$. *Soit* $(x,\xi)\in l^{-1}[1/2, 3/2]$ *tel que* $\lim\limits_{t\to\pm\infty}\sup|z(t,x,\xi)|=+\infty$.

Alors il existe $\alpha(x,\xi)>0$, $\beta(x,\xi)\in\mathbb{R}$ *tels que :*

$$|z(t,x,\xi)|\geqq\alpha(x,\xi)\,|t|+\beta(x,\xi) \quad \text{pour tout } t\in\mathbb{R} \quad \blacksquare$$

Admettons ces deux lemmes.

Soit (x,ξ) tel que $l(x,\xi)=1$. D'après le lemme (5.4) on a :

$$\lim_{|t|\to+\infty}\sup|z(t,x,\xi)|=+\infty$$

d'où en utilisant le lemme (5.5) on a : $\lim\limits_{|t|\to+\infty}|z(t,x,\xi)|=+\infty$.

Preuve du lemme (5.4). – Soit $s\in C_0^\infty(\mathbb{R}^{2n})$ et pour $h>0$ formons les moyennes gaussiennes :

$$s_h(x,\xi)=(\pi h)^{-n}\int s(y,\eta).e^{-h^{-1}((x-y)^2+(\xi-\eta)^2)}\,dy\,d\eta$$

$S_h=\operatorname{op}_h^w(s_h)$ est l'opérateur anti-Wick associé à s (*cf.* [He-Ma-Ra]). Il est bien connu que si $s\geqq0$ alors S_h est un opérateur positif. On peut donc appliquer (5.7) avec $S=S_h$.

Soit $T>0$ fixé. On obtient alors en utilisant le lemme (5.3) :

$$(5.8)\quad \left\{\begin{aligned}&\int_{-T}^{T}\left(\int_{\mathbb{R}^{2n}}a(z(t,x,\xi),\zeta(t,x,\xi)).s_h(x,\xi)\,dx\,d\xi\right)dt\leqq\gamma\int_{\mathbb{R}^{2n}}s(x,\xi)\,dx\,d\xi+\tilde{C}_T.h\\&\qquad\qquad\qquad\qquad\forall h\in]0,1].\end{aligned}\right.$$

Or on a clairement : $s_h(x,\xi)-s(x,\xi)=O(h)$, uniformément par rapport à $(x,\xi)\in\mathbb{R}^{2n}$. Il en résulte donc de (5.8) en faisant tendre h vers 0 puis T vers $+\infty$, que pour tout $s\in C_0^\infty(\mathbb{R}^{2n})$, $s\geqq0$, on a :

$$(5.9)\qquad \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{\mathbb{R}^{2n}}a(z(t,x,\xi),\zeta(t,x,\xi)).s(x,\xi)\,dx\,d\xi\,dt\leqq\gamma.\int_{\mathbb{R}^{2n}}s(x,\xi)\,dx\,d\xi$$

(5.9) compte tenu de la définition de a, implique le lemme (5.4).

Preuve du lemme (5.5). — Le résultat est bien connu pour les hamiltoniens de Newton : $|\xi|^2+V(x)$ (*cf.* [Re-Si]). Le même argument marche pour $l(x, \xi)=\langle g^{-1}(x)\xi, \xi\rangle$. Vérifions le rapidement.

Posons $z(t)=z(t, x, \xi)$, $\xi(t)=\zeta(t, x, \xi)$ et étudions les variations de $J(t)=|z(t)|^2/2$.

On a $(d/dt)J(t)=\langle z(t), dz/dt\rangle=r(t).dr/dt$.

En utilisant (H_ρ) et l'équation des trajectoires on a facilement :

$$\frac{d^2 J}{dt^2}(t)=4|g^{-1}(z(t).\zeta(t)|^2+O(\langle z(t)\rangle^{-\rho}.\langle\zeta(t)\rangle^2) \tag{5.10}$$

uniformément par rapport à $t\in\mathbb{R}$.

En particulier il existe $R_0>0$ et $C_0>0$ ne dépendants que de g tel que :

$$\frac{d^2 J}{dt^2}(t)\geqq C_0 \quad \text{si} \quad |z(t)|>R_0 \ \text{et} \ (x, \xi)\in l^{-1}\left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right] \tag{5.11}$$

En raisonnant par l'absurde on montre qu'il existe $t_0>0$ tel que :

$$\begin{cases} |z(t_0)|>R_0 \\ \dfrac{dr}{dt}(t_0)>0 \end{cases} \tag{5.12}$$

De (5.11) et (5.12) on déduit que $|z(t)|>R_0$, pour tout $t>t_0$ puis utilisant à nouveau (5.11) on obtient la conclusion du lemme (5.5). ■

Pour achever la preuve du théorème (5.1) il nous reste à montrer que (iv) entraîne (ii). Pour cela remarquons d'abord que la preuve de (ii) ⇒ (i) reste valide si l'on suppose seulement que (ii) est satisfaite pour un réel $s>0$ arbitraire. Par conséquent il nous suffit de montrer que (iv) entraîne la propriété :

$(\text{ii})_f$ Il existe $s>0$ tel que : $\|(\langle x\rangle^{-s}(L(h)-\mu\pm i0)^{-1}\langle x\rangle^{-s}\|=O(h^{-1})$ uniformément pour $\mu\in[a, b]\subset]0, +\infty]$.

Cette propriété résulte facilement de l'égalité :

$$(L(h)-\mu\pm i\varepsilon)^{-1}=(ih)^{-1}\int_0^{\pm\infty} e^{-it/h(L(h)-\mu-i\varepsilon)}\,dt \quad \text{pour tout} \ \varepsilon>0$$

En effet utilisant (iv), avec $k=2$, on en déduit $(\text{ii})_f$ pour tout $s>5/2$.

Remarques. — (i) Dans le cas de l'opérateur de Schrödinger usuel, le théorème (5.1) (et son analogue semi-classique — plus intéressant) est déjà connu. En particulier les estimations (ii) ont été obtenues par Isozaki et Kitada [Is-Ki]; leur analogue semi-classique est dû à Robert-Tamura $[\text{Ro-Ta}]_1$ dont la démonstration a été simplifiée par Gérard et Martinez $[\text{Ge-Ma}]_1$ par la construction d'une fonction fuite. Enfin l'équivalence de (i) et (ii)* est due à X. P. Wang $[\text{Wa}]_1$.

(ii) Par analogie avec les travaux de Isozaki [Is] et Wang ($[\text{Wa}]_1$, $[\text{Wa}]_2$) on peut penser que la propriété (iv) est valide pour $s=k$.

Nous allons maintenant utiliser le théorème (5.1) pour obtenir des estimations sur la matrice de diffusion $S(\lambda)$ et sur la phase de diffusion pour la paire (L_0, L) lorsque $\lambda \to +\infty$.

Dans l'énoncé suivant on utilise les classes de Schatten $\sigma_p(K_1, K_2)$; p étant un nombre réel positif, K_1, K_2 des espaces de Hilbert, munies de leurs normes canoniques : $\|\cdot\|_p$ (on renvoie à [G-K] pour les définitions et propriétés). On pose : $\sigma_p(K, K)=\sigma_p(K)$

PROPOSITION (5.6). — *On suppose vérifiée la condition* (H_ρ) *avec* $\rho > 1+((n-1)/p)$, $p \geqq 1$. *Alors pour tout* $\lambda \in]0, +\infty[$, *l'opérateur* $T(\lambda)=S(\lambda)-1$ *est un opérateur de classe de Schatten* $\sigma_p[L^2(S^{n-1})]$. *En particulier si* $\rho > n$, $T(\lambda)$ *est de classe trace; si* $\rho > (n+1)/2$, $T(\lambda)$ *est de classe Hilbert-Schmidt. De plus on a également :*

$$T \in C^\infty(]0, +\infty[, \sigma_p[L^2(S^{n-1})])$$

Enfin si la métrique g n'a pas de trajectoire captée alors pour tout entier k, $\|(d/d\lambda)^k T(\lambda)\|_p$ *est à croissance polynomiale pour* $\lambda \to +\infty$

Preuve. — On part de la formule classique de représentation de la matrice de diffusion due à Kato-Kuroda [Ku]:

$$\begin{cases} S(\lambda)=I-2i\pi.\lambda^{(n-2)/2}.T(\lambda) \\ T(\lambda)=\gamma(\sqrt{\lambda})\mathscr{F}(Q-Q.R(\lambda+i0).Q).\mathscr{F}^*.\gamma^*(\sqrt{\lambda}) \end{cases}$$

où : $(\gamma(\mu)f(\omega)=f(\mu.\omega)$ pour $\mu>0$, $\omega \in S^{n-1}$, $\mathscr{F}$ désigne la transformée de Fourier et $Q=L-L_0=q(x, D_x)$, X^* désigne l'adjoint hilbertien de l'opérateur X.

En utilisant les opérateurs de dilation : $(\mathscr{D}_\mu f)(x)=\mu^{n/2}.f(\mu.x)$, on obtient facilement :

$$T(\lambda)=\lambda^{-n/2}.\gamma(1).\mathscr{F}(Q_\lambda-\lambda^{-1}Q_\lambda.R_\lambda.Q_\lambda)\mathscr{F}^*.\gamma(1)^*$$

où : $Q_\lambda=\mathscr{D}^*_{\sqrt{\lambda}}.Q.\mathscr{D}_{\sqrt{\lambda}}=q(\lambda^{-1/2}x, \lambda^{1/2}D_x)$, $R_\lambda=\mathscr{D}^*_{\sqrt{\lambda}}.R(\lambda+i0).\mathscr{D}_{\sqrt{\lambda}}$.

Posons :

$$T_0(\lambda)=\gamma(1).\mathscr{F}.Q_\lambda.\mathscr{F}^*.\gamma(1)^*$$
$$T_1(\lambda)=\gamma(1).\mathscr{F}.(Q_\lambda R_\lambda Q_\lambda)\mathscr{F}^*.\gamma(1)^*$$

On contrôle alors $\|d^k T_i(\lambda)/d\lambda^k\|_p$ polynomialement par rapport à λ pour $\lambda \to +\infty$ $(i=0,1)$ en utilisant l'hypothèse (H_ρ), le théorème (5.1) (ii) et le lemme facile suivant dont la preuve est laissée au lecteur :

LEMME (5.7). — *Pour tout réel m et tout réel* $\delta > ((n-1)/p)+(1/2)$ *l'opérateur* $\gamma(1).\mathscr{F}.\langle x\rangle^{-\delta}.\langle D_x\rangle^m$ *est de classe de Schatten* σ_p *comme opérateur de* $L^2(\mathbb{R}^n)$ *dans* $L^2(S^{n-1})$.

Nous en déduisons alors le résultat suivant, utile pour la preuve du théorème (2.5) :

COROLLAIRE (5.8). — *Sous l'hypothèse* (H_ρ) *avec* $\rho > n$, *la phase de diffusion* $s(\lambda)$ *pour la paire* (L_0, L) *est* C^∞ *sur* $]0, +\infty[$. *Si de plus la métrique g n'a pas de trajectoire captée, alors pour tout entier k,* $d^k s/d\lambda^k$ *est à croissance polynomiale pour* $\lambda \to +\infty$.

Preuve. — Cela résulte immédiatement de (1.4) et de la proposition (5.6) appliquée avec $p=1$.

EXEMPLES ET CONTRE-EXEMPLES (5-9). — (i) Suivant [Ra] on peut discuter le cas des métriques radiales : $g(x)=[\varphi(|x|^2)]^{-2}.\mathrm{Id}$ associées au laplacien $\mathrm{L}=\sqrt{\varphi}.(\mathrm{div}.\varphi\nabla)\sqrt{\varphi}$. Pour satisfaire $(\mathrm{H})_\rho$ on suppose que φ vérifie pour tout entier k il existe $c_k>0$ tel que :

$$|(d/dr)^k(\varphi(r)-1)|\leqq c_k\langle r\rangle^{-\rho/2-k} \qquad \text{pour} \quad r\geqq 0.$$

Si $d/dr[\varphi(r)/r]<0$ pour tout $r>0$ alors la métrique g est non captante. Par contre si on a $d/dr[\varphi(r_0)/r_0]=0$ alors la sphère euclidienne $r_0.\mathrm{S}^{n-1}$ est invariante par le flot géodésique de g (remarque de P. Lax rapportée dans [Ra]).

(ii) Comme autre exemple de métrique asymptotiquement plate on peut considérer une hypersurface Σ de $\mathbb{R}^{n+1}$ définie globalement par l'équation : $x_{n+1}=f(x_1, \ldots, x_n)$. Soit $x=(x_1, \ldots, x_n)$. La métrique induite sur Σ est donnée par : $g_{kj}=\delta_{kj}+(\partial f/\partial x_k).(\partial f/\partial x_j)$. La condition $(\mathrm{H})_\rho$ s'écrit : $|\partial^\alpha f(x)|\leqq c_\alpha\langle x\rangle^{(1-|\alpha|-\rho)/2}$. En particulier $f(x)=\langle x\rangle^\theta$ vérifie $(\mathrm{H})_\rho$ avec $\rho>n$ si $\theta<1-n/2$.

6. Asymptotique spectrale et métriques non captantes

Nous conservons les notations du paragraphe 4. Soit $\mathrm{T}>0$ et une fonction paire fixée $\zeta\in\mathrm{C}_0^\infty]-2\mathrm{T}, 2\mathrm{T}[$, $\zeta\equiv 1$ sur $[-\mathrm{T}, \mathrm{T}]$.

On définit :

$$\mathrm{G}(t, h)=\mathrm{tr}[\mathrm{W}(h).\chi(\mathrm{P}(h)-1).e^{(it/h).\mathrm{P}(h)}] \tag{6.1}$$

$$\tau_\mathrm{M}(h)=\frac{1}{2\pi}\mathrm{tr}\left[\mathrm{W}(h).\chi(\mathrm{P}(h)-1).\int\zeta(h^\mathrm{M}.t)\,e^{(it/h)(\mathrm{P}(h)-1)}\,dt\right] \tag{6.2}$$

Le lemme clé pour obtenir l'asymptotique complète du théorème (2.5) est le suivant :

LEMME (6.1). — *Il existe* $\mathrm{T}_1>0$ *assez grand tel que pour tout entier* $\mathrm{N}>0$ *on ait :*

$$\mathrm{G}(t, h)=O(h^\mathrm{N}) \quad \text{pour } |t|\geqq\mathrm{T}_1, \qquad h\in]0, 1] \quad \blacksquare$$

Admettons pour le moment lemme (6.1) et achevons la preuve du théorème (2.4). Il résulte alors de (6.2) que l'on a :

$$\tau_\mathrm{M}(h)-\tau_0(h)=O(h^\infty) \tag{6.3}$$

Compte tenu de la proposition (4.2) il suffit alors de démontrer le :

LEMME (6.2). — *Pour tous entiers* M *et* N *on a*

$$\frac{d\sigma}{d\lambda}(\lambda)-\tau_\mathrm{M}(\lambda^{-1})=O(\lambda^{-\mathrm{N}}), \qquad \lambda\to+\infty$$

Preuve. — On utilise un argument standard de convolution.

On a en effet :

$$\tau_M(\lambda^{-1}) = \left(\frac{d\sigma}{d\lambda} * \eta_\lambda\right)(\lambda) \qquad \text{où} \quad \eta_\lambda(\mu) = \chi(\lambda^{-\theta}.\mu).\xi_\lambda(-\mu) \tag{6.4}$$

où $\zeta_\lambda(t) = \zeta(\lambda^{-M} t)$ et $\hat{\zeta}_\lambda$ désigne sa transformée de Fourier.

On a clairement :

$$\int \eta_\lambda(\mu)\, d\mu = 1 + O(\lambda^{-\infty}), \qquad \lambda \to +\infty \tag{6.5}$$

Utilisant que $d^2\sigma/d\lambda^2$ est à croissance polynomiale pour $\lambda \to +\infty$ [corollaire (5.8)], on déduit aisément le lemme (6.2) de (6.4) et (6.5) (*cf.* $[\mathrm{Ro}]_1$, § 6). ■

Nous allons maintenant commencer la preuve du lemme (6.1). Nous suivons le même schéma de démonstration que dans $[\mathrm{Ro-Ta}]_2$. On introduit : $\gamma \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\gamma \equiv 1$ sur $\{|x| \leqq 1\}$ et supp $\gamma \leqq \{|x| \leqq 2\}$. Posons : $\gamma_R(x) = \gamma(x/R)$ et :

$$G_{1,R}(t, h) = \operatorname{tr}(\gamma_R^2 . W(h) . \chi(P(h) - 1)\, e^{ith^{-1} P(h)})$$
$$G_{2,R}(t, h) = \operatorname{tr}((1-\gamma_R^2) . W(h) . \chi(P(h) - 1)\, e^{ith^{-1} . P(h)})$$

La preuve du lemme (6.1) se scinde dans les deux étapes suivantes :

LEMME (6.3). — *Il existe* $R > 0$ *assez grand et* $T_0 > 0$ *tels que :*

$$G_{2,R}(t, h) = O(h^N) \quad \textit{pour tout } |t| \geqq T_0, \qquad h \in]0, 1].$$

LEMME (6.4). — *Pour tout* $R > 0$ *il existe* $T_R > 0$ *tel que :*

$$G_{1,R}(t, h) = O(h^N) \quad \textit{pour } |t| \geqq T_R, \qquad h \in]0, 1]. \quad ■$$

La preuve des lemmes (6.3) et (6.4) repose essentiellement sur une construction de paramétrix pour $e^{ith^{-1}.P(h)}$ lorsque $|t| \to +\infty$. Cette construction a été faite par Isozaki-Kitada pour $P = -\Delta + V$, adaptée par Robert-Tamura [Ro-Ta] dans le cas semi-classique : $P(h) = -h^2\Delta + V$. Nous allons ici reprendre les grandes lignes de cette construction pour $P(h) = (m^2 + L(h))^{1/2}$, $L(h) = h^2.L$, L vérifiant (H_ρ). La preuve détaillée des lemmes techniques est reportée en annexe (B). Il s'agit de comparer aux temps grands les groupes unitaires : $U(t, h) = e^{-ith^{-1}.P(h)}$ et $U_1(t, h) = e^{-ith^{-1}.P_1(h)}$; $P_1(h) = (m^2 - h^2.\Delta)^{1/2}$. Le symbole principal de $P_1(h)$ étant : $p_1(x, \xi) = (m^2 + \langle g^{-1}(x)\xi, \xi\rangle^{1/2}$ la clé de la construction est la résolution de l'équation de Hamilton-Jacobi : $\langle g^{-1}(x).\partial_x\varphi, \partial_x\varphi\rangle = |\xi|^2$ dans des zones convenables de l'espace de phase :

THÉORÈME (6.5). — *Soit une métrique g sur* $\mathbb{R}^n$ *vérifiant* (H_ρ) *pour un* $\rho > 0$ *et* $d \in]0, 1[$. *Alors pour tous réels* $\sigma \in]-1, 1[$ *il existe* $R > 0$ *assez grand et* $\varphi_\pm \in C^\infty(\mathbb{R}_x^n \times \mathbb{R}_\zeta^n, \mathbb{R})$, *telle que pour* $|x| \geqq R$, $\langle x, \zeta\rangle \geqq \sigma|x|.|\zeta|$ (*resp.* $\langle x, \zeta\rangle \leqq \sigma|x||\zeta|$) *et* $d \leqq |\zeta| \leqq d^{-1}$ *on ait :*

(i) $\langle g^{-1}(x)\partial_x\varphi_\pm, \partial_x\varphi_\pm\rangle = |\zeta|^2$,

(ii) *Pour tous* $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$, *on a*

$$\partial_x^\alpha \partial_\zeta^\beta(\varphi_\pm(x, \zeta) - \langle x, \zeta\rangle)| \leqq C_{\alpha,\beta}\langle x\rangle^{1-\rho-|\alpha|}\langle\zeta\rangle^{1-|\beta|}$$

Preuve. — Il suffit de regarder la zone définie par : $\langle x, \zeta \rangle \geqq -\sigma |x|.|\zeta|$, $|x|>\mathrm{R}$, $0<\sigma<1$ fixé.

On commence par étudier l'équation de Hamilton-Jacobi dépendant du temps :

$$\text{(6.6)} \qquad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial \mathrm{S}}{\partial t} = \langle g^{-1}(x) . \partial_x \mathrm{S}(t), \partial_x \mathrm{S}(t) \rangle \\ \mathrm{S}(0, x, \xi) = \langle x, \xi \rangle \end{array} \right.$$

D'après la théorie classique de l'équation de Hamilton-Jacobi, $\mathrm{S}(t; x, \xi)$ est fonction génératrice pour le flot hamiltonien : $(x, \xi) \to \exp(t\mathscr{H}_l)(x, \xi) = (z(t, x, \xi), \zeta(t, x, \xi))$ où : $l(x, \xi) = \langle g^{-1}(x)\xi, \xi \rangle$.

Remarquons que la métrique g est complète à cause de (H_ρ), le flot existe donc globalement pour $t \in \mathbb{R}$.

Introduisons la notation :

$$\Gamma^{\pm}(\mathrm{R}, d, \sigma) = \left\{ (x, \xi) \in \mathbb{R}^{2n}, |x| > \mathrm{R}, d < |\xi|^2 < \frac{1}{d}, \pm \langle x, \xi \rangle \geqq -\sigma |x|.|\xi| \right\} \qquad (0<\sigma<1)$$

Nous suivons la démarche de [Ge-Ma], et énonçons trois lemmes techniques dont les preuves sont données en appendice :

LEMME B1. — *Pour tout* $d>0$, $\delta \in]0, \min(d, \sigma, 1-\sigma)[$, *il existe* $e_0>0$, $e_1>0$ *assez petits et* R *assez grand tels que pour tout* $t \geqq 0$ *et tout* $(x, \xi) \in \Gamma^+(\mathrm{R}, d, \sigma)$ *on ait :*

(i) $|z(t, x, \xi)| \geqq e_0(|x| + t.|\xi|)$.

(ii) $(z(t, x, \xi), \zeta(t, x, \xi)) \in \Gamma^+(e_1 \mathrm{R}, d-\delta, \sigma+\delta)$.

LEMME B2. — *Dans le lemme* B1, *on peut choisir* $e_1>0$, $\delta>0$ *assez petits*, R_0 *assez grand tels que, pour* $\mathrm{R} \geqq \mathrm{R}_0$, *on ait :*

(i) $\xi \to \zeta(t, x, \xi)$ *est un difféomorphisme de* $\Pi_\xi(\Gamma^+(\mathrm{R}, d, \sigma))$ *sur son image, où* Π_ξ *désigne la projection canonique :* $(x, \xi) \to \xi$.

(ii) $\Pi_\xi(\Gamma^+(\mathrm{R}, d+\delta, \sigma-\delta)) \subseteqq \{\zeta(t, x, \xi) : (x, \xi) \in \Gamma^+(\mathrm{R}, d, \sigma), t \geqq 0\}$. ■

On désigne alors par $\zeta \to \xi(t, x, \zeta)$ l'inverse de l'application : $\xi \to \zeta(t, x, \xi)$ et on définit : $y(t, x, \zeta) = z(t, x, \xi(t, x, \zeta))$,

On a ainsi :

$$(\exp t\mathscr{H}_l)(x, \xi(t, x, \zeta)) = (y(t, x, \zeta), \zeta)$$

LEMME B3. — *Les estimations suivantes sont vérifiées uniformément pour* $(x, \zeta) \in \Gamma^+(2\mathrm{R}, d+\delta, \sigma-\delta)$ et $0 \leqq s \leqq t$:

(i) $\zeta(s, x, \xi(t, x, \zeta)) - \zeta = O(|x|+s)^{-\rho}$.

(ii) $z(s, x, \xi(t, x, \zeta)) - (x + 2s.\zeta) = O(|x|+s)^{1-\rho}$.

(iii) *Pour tout* $\delta \in [0, 1+\rho[$,

$$|\partial_x z(s, x, \xi(t, x, \zeta)| + \langle x \rangle^{\delta} |\partial_x \zeta(s, x, \xi(t, x, \zeta)| = O(1)$$

(iv) $\partial_x y(t, x, \zeta) = O(1)$. ■

Preuve du théorème (6.5). — D'après la théorie de Hamilton-Jacobi on sait que la solution de (6.6) est donnée par :

$$\text{(6.7)} \qquad S(t, x, \zeta) = f(t, x, \xi(t, x, \zeta))$$

avec

$$f(t, x, \xi) = \langle x, \xi \rangle + \int_0^t (l - x\,\partial_x l)(\exp(s\mathscr{H}_l)(x, \xi)\,ds$$

on a alors :

$$\text{(6.8)} \qquad \begin{cases} \partial_x S(t, x, \zeta) = \xi(t, x, \zeta) \\ \partial_\zeta S(t, x, \zeta) = y(t, x, \zeta) \end{cases}$$

$$\text{(6.9)} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial S}{\partial t}(t, x, \zeta) = l(x, \partial_x S(t, x, \zeta)) = l(\partial_\zeta S(t, x, \zeta), \zeta) \\ S(0, x, \zeta) = \langle x, \delta \rangle \end{cases}$$

Comme dans [Is-Ki] (*voir* aussi [Ge-Ma]$_2$) on modifie $S(t, x, \xi)$ en introduisant : $F(t, x, \zeta) = S(r, x, \zeta) - S(t, 2R\zeta, \zeta)$.

Montrons alors que $\int_0^{+\infty} |(\partial F/\partial t)(t, x, \zeta)|\,dt < +\infty$ pour tout

$$(x, \zeta) \in \Gamma^+(2R, d+\delta, \sigma-\delta).$$

Il résulte de (6.8) et (6.9) que l'on a :

$$\text{(6.10)} \qquad \frac{\partial F}{\partial t}(t, x, \zeta) = l(y(t, x, \zeta), \zeta) - l((y(t, 2R\zeta, \zeta), \zeta)$$
$$= (y(t, x, \zeta) - y(t, 2R\zeta, \zeta)).m(t, x, \zeta)$$

où :

$$m(t, x, \zeta) = \int_0^1 \frac{\partial l}{\partial x}(0.y(t, x, \zeta) + (1-\theta)\,y(t, 2R\zeta, \zeta), \zeta)\,d\theta$$

Or le lemme (B3), (iv), donne :

$$\text{(6.11)} \qquad \theta.y(t, x, \zeta) + (1-\theta)\,y(t, 2R\zeta, \zeta) = 2t\zeta + \theta.x + 2(1-\theta)R\zeta + O(\langle x \rangle + |t|)^{1-\rho}$$

d'où (6.10) entraîne :

$$\text{(6.12)} \qquad \frac{\partial F}{\partial t}(t, x, \zeta) = O(|t|^{-1-\rho}), \qquad t \to +\infty,$$

localement uniformément pour $(x, \zeta) \in \Gamma^+(2\mathrm{R}, d+\delta, \sigma-\delta)$ par conséquent :

$$\lim_{t \to +\infty} \mathrm{F}(t, x, \zeta) = \mathrm{F}_+(x, \zeta)$$

existe sur $\Gamma^+(2\mathrm{R}, d+\delta, \sigma-\delta)$.

En dérivant (6.10) en (x, ζ) on montre aisément que F_+ est C^∞.

On définit alors :

$$\varphi_+(x, \zeta) = 2\mathrm{R}\zeta^2 + \mathrm{F}_+(x, \zeta) \tag{6.13}$$

on a également :

$$\varphi_+(x, \zeta) = \langle x, \zeta \rangle + \int_0^\infty \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial t}(t, x, \zeta)\, dt \tag{6.14}$$

On déduit alors de (6.13) :

$$l(x, \partial_x \varphi_+) = \lim_{t \to +\infty} l(x, \partial_x \mathrm{S}(t)) = \lim_{t \to +\infty} l(\zeta, \partial_\zeta \mathrm{S}(t)) = \zeta^2$$

et de (6.14) :

$$|\partial_x^\alpha \partial_\zeta^\beta (\varphi_+(x, \zeta) - \langle x, \zeta \rangle)| \leqq \mathrm{C}_\alpha \langle x \rangle^{1-\rho-|\alpha|} \langle \zeta \rangle^{1-|\beta|}$$

pour tout $(x, \zeta) \in \Gamma^+(2\mathrm{R}, d+\delta, \sigma-\delta)$.

Le cas $(-)$ $(t<0)$ se traite de la même manière. Ce qui achève la preuve du théorème (6.5) en redéfinissant les paramètres R, d et σ. ■

Suivant Isozaki-Kitada [Is-Ki] (et Robert-Tamura [Ro-Ta]$_1$ pour la dépendance en h), on construit une paramétrix pour $\mathrm{U}(t, h) = e^{-ith^{-1} \cdot \mathrm{P}(h)}$. Nous suivons ici les constructions faites dans [Ro-Ta]$_1$ pour $\mathrm{P}(h) = -h^2\Delta + \mathrm{V}$ et qui s'adaptent assez facilement au cas considéré ici :

$$\mathrm{P}(h) = (m^2 + \mathrm{L}(h))^{1/2}$$

Introduisons la classe de symboles $\mathrm{S}(q, \mu)$, $q, \mu \in \mathbb{R}$ des fonctions $s \in \mathrm{C}^\infty$, $s : \mathbb{R}_x^n \times \mathbb{R}_\xi^n \to \mathbb{C}$ vérifiant :

$$|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta s(x, \xi)| \leqq \mathrm{C}_{\alpha, \beta} \langle \xi \rangle^{q-|\beta|} \langle x \rangle^{\mu-|\alpha|} \tag{6.12}$$

Si $\Omega \subset \mathbb{R}_x^n \times \mathbb{R}_\xi^n$, $\mathrm{S}_\Omega(q, \mu)$ désigne l'ensemble des fonctions vérifiant (6.12) dans Ω. Enfin on posera : $\mathrm{S}(\mu) = \mathrm{S}(-\infty, \mu)$.

Il est classique (*cf.* [He-Ro]) que l'on a :

$$\mathrm{P}(h) = \mathrm{Op}_h^w p$$

où p est un symbole h-admissible au sens suivant : $\forall \mathrm{N} \in \mathbb{N}$, on a :

$$\mathrm{P}(h) = \sum_{j=0}^{\mathrm{N}} h^j . \mathrm{Op}_h^w p_j + h^{\mathrm{N}} r_{\mathrm{N}}(h) \tag{6.13}$$

où $p_j \in S(1-j, -j)$ est indépendant de $h \in]0, 1]$.

On pose : $\Gamma_i^+ = \Gamma^+(R_i, \sigma_i, d_i)$ où $R_{i+1} > R_i$, $\sigma_{i+1} > \sigma_i$, $d_{i+1} < d_i$ et $(R_0, \sigma_0, d_0) = (R, \sigma, d)$ choisis comme dans le théorème (6.5).

A tout $a \in S(q, \mu)$ on associe l'opérateur intégral de Fourier :

$$I_\varphi(a, h)\psi(x) = (2\pi h)^{-n} \iint \exp(ih^{-1}(\varphi(x, \xi) - \langle y, \xi \rangle))\, a(x, \xi)\, \psi(y)\, dy\, d\xi$$

où $\varphi = \varphi_\pm$ dans $\Gamma_0^\pm$ et vérifie (ii) du théorème (6.5) dans tout $\mathbb{R}^{2n}$. Soit $\omega \in S(0)$, $\operatorname{supp} \omega \subseteqq \Gamma_3^+$.

Nous construisons alors des symboles h-admissibles

$$a(h) \approx \sum_{j \geqq 0} h^j a_j, \qquad b(h) \approx \sum_{j \geqq 0} h^j b_j$$

de telle sorte que l'on ait :

$$(6.14) \qquad U(t, h) . \omega(x, hD_x) \approx I_\varphi(a, h) . U_0(t, h) I_\varphi(b, h)^*, \qquad \forall t \geqq 0 \bmod O(h^\infty)$$

Pour réaliser (6.14) on cherche a de sorte que :

$$(6.15) \qquad U(t, h) . I_\varphi(a, h) \approx I_\varphi(a, h) . U_0(t, h), \qquad \forall t \geqq 0 \bmod O(h^\infty)$$

et telle que a soit elliptique dans Γ^+.

De la formule de Duhamel :

$$(6.16) \quad U(t, h) . A - A . U_0(t, h) = ih^{-1} . \int_0^t U(t-s, h)(A . P_0(h) - P(h) . A)\, U_0(s, h)\, ds$$

où A est un opérateur borné sur $L^2(\mathbb{R}^n)$. On est ainsi amené a :

$$(6.17) \qquad P(h) . I_\varphi(a, h) - I_\varphi(a, h) . P_0(h) \approx O(h^{-\infty}), \qquad h \downarrow 0$$

on obtient les équations de transport permettant de déterminer a à l'aide du lemme suivant, que l'on démontre comme dans [He-Ro] (*voir* aussi la monographie $[Ro]_2$ p. 217 à 225).

LEMME (6.6). — *Soit* $a \in S(\mu)$, $q \in S(1, 0)$. *On a la formule :*

$$\begin{aligned}
&[e^{-ih^{-1}\varphi(\cdot, \xi)} . q(x, hD_x) . e^{ih^{-1}\varphi(\cdot, \xi)} a(\cdot, \xi)](x) \\
&\qquad = q(x, \partial_x \varphi) . a(x, \xi) + h[i^{-1} \partial_\xi q(x, \partial_x \varphi) . \partial_x a(x, \xi) \\
&\qquad\quad + (2i)^{-1} . \operatorname{tr}(\partial^2_{\xi, \xi} q(x, \partial_x S) . \partial^2_{x, x} \varphi(x, \xi)) . a(x, \xi)] \\
&\qquad\qquad + \sum_{k=2}^{N} h^k . \gamma_k(q, a)(x, \xi) + h^{N+1} . r_{N+1}(h; q, a)(x, \xi)
\end{aligned}$$

avec $\gamma_k(q, a) \in S(\mu - k)$, $r_{N+1}(h, q, a) \in S(\mu - N - 1)$ *uniformément par rapport à* $h \in]0, 1]$.

En particulier on a : $q(x, h\mathrm{D}_x).\mathrm{I}_\varphi(a, h)=\mathrm{I}_\varphi(s(h), \mathrm{h})$ *où* $s(h)\in \mathrm{S}(\mu)$ *et admet le développement asymptotique en* h, $h\downarrow 0$, *défini par l'égalité précédente.* ■

Le théorème (6.5), le lemme (6.6) et (6.16) nous amènent à résoudre les équations de transport :

$$(6.18)\quad \left\{\begin{array}{l} \partial_\xi \mathrm{p}_0(x, \partial_x \varphi).\partial_x a_0+\dfrac{1}{2}\operatorname{tr}(\partial^2_{\xi\xi} p_0(x, \partial_x \varphi).\partial^2_{x,x}\varphi(x, \xi)).a_0=0 \\ \lim\limits_{|x|\to+\infty} a_0(x, \xi)=1, \qquad (x, \xi)\in\Gamma_1^+ \end{array}\right.$$

$$(6.19)\quad \left\{\begin{array}{l} \partial_\xi p_0(x, \partial_x \varphi)\partial_x a_j+\dfrac{1}{2}\operatorname{tr}(\partial^2_{\xi,\xi} p_0(x, \partial_x \varphi).\partial^2_{x,x}\varphi(x, \xi)).a_j \\ \qquad\qquad\qquad =\mathrm{E}(a_0, a_1, \ldots, a_{j-1}) \qquad \text{pour} \quad j\geqq 1 \\ \lim\limits_{|x|\to+\infty} a_j(x, \xi)=0, \qquad (x, \xi)\in\Gamma_1^+ \end{array}\right.$$

Le principe de résolution de (6.18) et (6.19) par récurrence sur j est standard. Cependant ici il faut contrôler soigneusement le comportement des solutions lorsque $|x|$ tend vers l'infini. Cela est possible par le lemme suivant dont la preuve est analogue à celle du lemme B1 (*voir* appendice).

Lemme B4. — *On peut choisir* $\mathrm{R}_0>0$ *assez grand et* $e_0>0$ *assez petit tels que si pour* $(x, \zeta)\in\Gamma_0^+$ *on considère la solution* $q(t)$ *de l'équation différentielle*

$$\frac{dq}{dt}=\partial_\xi p_0(q, \partial_x\varphi(q, \zeta))$$
$$q(0)=x$$

alors $q(t)$ *existe sur* $[0, +\infty[$ *et vérifie :*

$$|q(t)|\geqq e_0(|x|+t|\zeta|) \qquad \textit{pour} \quad t>0 \textit{ et } (x, \xi)\in\Gamma_0^+ \quad ■$$

Utilisant le lemme B4 on peut donc résoudre (6.18) et (6.19) avec les conditions à l'infini et on obtient ainsi des symboles a_j vérifiant les propriétés $a_j\in\mathrm{S}_{-j}(\Gamma_1^+)$, supp $a_j\subseteqq\Gamma_0^+$, $a_0-1\in\mathrm{S}_{-1}(\Gamma_1^+)$. Cette dernière propriété (en choisissant R_1 assez grand) et la formule de composition des opérateurs intégraux de Fourier entraînent l'existence de symboles $b_j\in\mathrm{S}(-j)$, supp $b_j\subset\Gamma_2^+$ tels que :

$$\omega(x, h\mathrm{D}_x)=\mathrm{I}_\varphi(a_{(\mathrm{N})}, h).\mathrm{I}_\varphi(b_{(\mathrm{N})}, h)^*+h^{\mathrm{N}}.\omega_{\mathrm{N}}(x, h\mathrm{D}_x, h)$$

où : $a_{(\mathrm{N})}=a_0+h.a_1+\ldots+h^{\mathrm{N}}.a_{\mathrm{N}}$ et $\omega_{\mathrm{N}}\in\mathrm{S}(-\mathrm{N})$ uniformément par rapport à $h\in]0, 1]$.

On obtient donc finalement :

$$(6.20)\quad \mathrm{U}(t, h).\omega(x, h\mathrm{D}_x)=\mathrm{I}_\varphi(a_{(\mathrm{N})}, h).\mathrm{U}_0(t, h)\mathrm{I}_\varphi(b_{(\mathrm{N})}, h)^* +h^{\mathrm{N}}\mathrm{U}(t, h).\omega_{\mathrm{N}}(x, h\mathrm{D}_x, h)+h^{\mathrm{N}+1}.\mathrm{K}_{\mathrm{N}}(t, h)$$

où :

$$K_N(t, h) = \int_0^t U(t-s) \,.\, I_\varphi(r_{N+1}, h) \,.\, U_0(s) \,.\, I_\varphi(b_{(N)}, h)^* \, ds$$

avec $r_{N+1} \in S(-N-1)$.

Preuve du lemme (6.3). — Elle résulte de (6.20) en procédant comme dans [Ro-Ta]$_2$ [lemme (4.1)].

Preuve du lemme (6.4). — Comme dans la preuve du lemme (4.3) de [Ro-Ta] on utilise le théorème d'Egorov semi-classique et la condition de non-capture sur la métrique g de telle sorte que l'on puisse se mettre dans la situation d'utiliser (6.20). On a ainsi achevé la preuve du théorème (2.5). ■

APPENDICE (A)

FORMULE DE TRACE

Preuve de la relation (4.4). — De (4.2) et (4.3) on tire :

$$\chi_0(P) \,.\, \varphi(P) - \chi_0(P_0) \,.\, \varphi(P_0) = i([P, \mathscr{A}] - [P_0, A] \,.\, \varphi(P_0) + R \,.\, \varphi(P)$$

(4.4) résultera alors du :

LEMME A. — *Pour tout* $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ *on a :* $\operatorname{tr}([P, \mathscr{A}] \,.\, \varphi(P) - [P_0, \mathscr{A}] \,.\, \varphi(P_0)) = 0$.

Preuve. — Soit $\chi \in C^\infty(\mathbb{R})$, $\chi(x) = 1$ si $|x| \leqq 1/2$ et $\chi(x) = 0$ si $|x| \geqq 1$. Posons : $\chi_R(x) = \chi(x/R)$ et $\mathscr{A}_R = \chi_R \,.\, \mathscr{A}$. Soit $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, $\psi = 1$ sur le rapport de φ.

L'opérateur $[P, \mathscr{A}_R] \,.\, \varphi(P)$ est clairement de classe trace.

En outre la cyclicité de la trace entraîne :

$$\operatorname{tr}([P, \mathscr{A}_R] \,.\, \varphi(P)) = \operatorname{tr}(\psi(P) \,.\, [P, \mathscr{A}_R] \,.\, \varphi(P)) = 0$$

Il en est de même pour $P = P_0$.

Posons : $K_R = [P, \mathscr{A}_R] \varphi(P) - [P_0, \mathscr{A}_R] \varphi(P_0)$ et $K_\infty = [P, \mathscr{A}] \varphi(P) - [P_0, \mathscr{A}] \varphi(P_0)$.

Il nous reste à prouver que $\lim_{R \to +\infty} \operatorname{tr}(K_R) = \operatorname{tr}(K_\infty)$.

Or on a : $K_R = \chi_R \,.\, K_R + L_R$ où $L_R = [P, \chi_R] \,.\, \mathscr{A} \varphi(P) - [P_0, \chi_R] \,.\, \mathscr{A} \varphi(P_0)$.

Écrivons : $L_R = [P - P_0, \chi_R] \,.\, \mathscr{A} \,.\, \varphi(P) + [P_0, \chi_R] \,.\, \mathscr{A}((\varphi(P) - \varphi(P_0))$.

En utilisant l'hypothèse $(H)_\rho$, $\rho > n$, les propriétés de classe trace des opérateurs pseudo-différentiels (*voir* par exemple [Ro]$_2$, p. 101) et le lemme (4.1), on obtient facilement l'estimation : $\operatorname{tr}(L_R) = O(R^{n-\rho})$. D'autre part en utilisant un résultat classique de continuité sur la fonctionnelle trace (*cf.* [G-K]) on a : $\lim_{R \to +\infty} \operatorname{tr}(\chi_R \,.\, K_R) = \operatorname{tr}(K_\infty)$. Ce qui achève la preuve de (4.4).

APPENDICE (B)
ESTIMATIONS A L'INFINI DES GÉODÉSIQUES

1. *Preuve du lemme* ($B.1$). — Partons des équations du mouvement :

$$\frac{dz}{dt} = 2\, g(z).\zeta$$
$$\frac{d\zeta}{dt} = -\frac{\partial}{\partial z}\langle g(z)\zeta, \zeta\rangle, \qquad z(0)=x, \quad \zeta(0)=\xi$$

De l'hypothèse (H_ρ) et de la conservation de l'énergie on déduit qu'il existe $C_0>0$ ne dépendant que de g telle que :

$$\text{(B.1)} \qquad \frac{d}{dt}|z(t)|^2 \geqq 4\langle z(t), \zeta(t)\rangle - C_0\langle z(t)\rangle^{1-\rho}|\zeta(t)|$$

$$\text{(B.2)} \qquad \frac{d^2}{dt^2}|z(t)|^2 \geqq 8|\zeta(t)|^2(1-C_0\langle z(t)\rangle^{-\rho})$$

Soit $R_0>0$ tel que $C_0\langle R_0\rangle^{-\rho} \leqq \varepsilon_0 < 1$ et $\|g(x)-1\| \leqq \varepsilon_0/4$ pour tout x, $|x| \geqq R_0$.

Soit $T>0$ tel que $|z(t)| \geqq R_0$, $\forall t \in [0, T]$.

La conservation de l'énergie et (H_ρ) entraînent alors :

$$\text{(B.3)} \qquad |\zeta(t)|^2 - |\xi|^2 \leqq \varepsilon_0.|\xi|^2, \qquad \forall t \in [0, t]$$

De (B.2) et (B.3) on tire :

$$\text{(B.4)} \qquad (d/dt)^2|z(t)|^2 \geqq 8(1-\varepsilon_0)^2|\xi|^2, \qquad \forall t \in [0, T]$$

Par intégration de (B.4) on obtient :

$$\text{(B.5)} \qquad |z(t)|^2 \geqq 4(1-\varepsilon_0)^2 t^2|\xi|^2 + |x|^2 - \sigma|x|.|\xi| - C_0\langle x\rangle^{1-\rho}|\xi|$$

pour tout $\in [0, T]$, $(x, \xi) \in \Gamma^+(R, \sigma, d)$ $(0<\sigma<1)$.

Soit $R_1 > R_0$ tel que $C_0\langle R_1\rangle^{-\rho} \leqq \sigma/2$.

On déduit de (B.5) qu'il existe $e_0 \in]0, 1[$ tel que :

$$\text{(B.6)} \qquad |z(t)| \geqq e_0(|x| + t|\xi|), \qquad \forall t \in [0, T[, \quad |x| \geqq R_1$$

Définissons alors $R = \operatorname{Max}\{2R_0/e_0, R_1\}$.

Il résulte alors de (B.6) que si $(x, \xi) \in \Gamma^+(R, \sigma, d)$ alors $T = +\infty$. Ce qui prouve (i).

Ensuite de :

$$\text{(B.7)} \qquad \zeta(t, x, \xi) - \xi = -\int_0^t \partial_z\langle g(z)\zeta, \zeta\rangle\, ds$$

on obtient :

$$(B.8)\qquad |\zeta(t, x, \xi)-\xi| \leqq C(g, d)\, e_0^{-1-\rho}|x|^{-\rho}$$

et de :

$$(B.9)\qquad z(t)-x-2t\xi=2\int_0^t (g(z).\zeta-\zeta)\, ds$$

on obtient :

$$(B.10)\qquad |z(t)-x-2t\xi| \leqq c(g, d)\, e^{-1-\rho}\, t.|x|^{-\rho}$$

pour tout $t \geqq 0$, $(x, \xi) \in \Gamma^+(\mathrm{R}, d, \sigma)$ où $c(g, d)$ est une constante ne dépendant que de g et de d. De (B.8) et (B.10) on déduit facilement (ii).

2. *Preuve du lemme* (*B*.2). — Montrons d'abord que $\xi \to \zeta(t, x, \xi)$ est un difféomorphisme local. On a

$$(B.11)\qquad \partial_\xi \zeta(t, x, \xi)-\mathrm{Id}=-\int_0^t \partial_\xi \partial_z \langle g(z)\zeta, \zeta\rangle\, ds$$

$$(B.12)\qquad \partial_\xi z(t, x, \xi)=2\int_0^t \partial_\xi (g(z).\xi)\, ds$$

En utilisant (H_ρ) et le lemme B1, (i), on obtient :

$$(B.13)\qquad |\partial_\xi \zeta(t, x, \xi)-\mathrm{Id}|=O(\langle x\rangle^{-\rho})$$

d'où le difféomorphisme local.

Montrons maintenant que $\xi \to \zeta(t, x, \xi)$ est injective.

$$(B.14)\qquad \zeta(t, x, \xi_0)-\zeta(t, x, \xi_1)=\xi_0-\xi_1+\int_0^1 (\partial_\xi \zeta(t, x, \xi(\tau)-\mathrm{Id})\, \xi'(\tau)\, d\tau$$

où $\tau \to \xi(\tau)$ est un chemin de classe C^1 dans $\Pi_\xi(\Gamma^+(e, \mathrm{R}, d, \sigma))$ tel que $\xi(0)=\xi_0$, $\xi(1)=\xi_1$.

On peut montrer facilement la propriété élémentaire suivante : il existe $K>0$ dépendant de d et σ (et non de R!) tel que on puisse joindre tous points ξ_0, ξ_1 dans $\Pi_\xi(\Gamma^+(e_1 \mathrm{R}, d, \sigma))$ par un chemin de classe C^1 et de longueur $\leqq K|\xi_0-\xi_1|$. Il résulte de (B.13) et (B.14) qu'il existe $C>0$, ne dépendant que de σ et d, telle que :

$$|\zeta(t, x, \xi_0)-\zeta(t, x, \xi_1)+\xi_1-\xi_0)| \leqq CK\langle x\rangle^{-\rho}|\xi_1-\xi_0|$$

ce qui entraîne l'injectivité de $\zeta(t, x, .)$ si $\langle x\rangle$ est assez grand d'où (i).

Pour établir la propriété (ii) on applique à $\xi \to \zeta(t, x, \xi)$ l'argument élémentaire de topologie générale suivant : soient des parties A et B de $\mathbb{R}^n$, A étant connexe, B ouvert et soit $f : \bar{\mathrm{B}} \to \mathbb{R}^n$ un homéomorphisme de l'adhérence de B sur son image telle que $\mathrm{A} \cap f(\mathrm{B}) \neq \varnothing$ et $\mathrm{A} \cap f(\partial \mathrm{B}) = \varnothing$. On a alors : $\mathrm{A} \subseteqq f(\mathrm{B})$. ■

3. *Preuve du lemme* (*B*.3). — Il résulte du lemme (B.1) que l'on a :

$$|z(s, x, \xi(t, x, \zeta)| \geqq e_3(|x| + s|\zeta|), \tag{B.15}$$

pour $(x, \zeta) \in \Gamma^+(2\mathrm{R}, d+\delta, \sigma-\delta)$ et $0 \leqq s \leqq t$.

En revenant aux équations du mouvement on obtient facilement (i) et (ii) (iii) : on a les relations suivantes :

$$\partial_x z(s, x, \xi(t, x, \zeta)) = \mathrm{Id} + \int_0^s (\partial^2_{x,\xi} l(z, \zeta)\, \partial_x z + \partial^2_{\xi,\xi} l(z, \zeta) \,.\, \partial_x z)\, du \tag{B.16}$$

$$\partial_x \zeta(s, x, \xi(t, x, \zeta)) = \int_s^t (\partial^2_{x,x} l(z, \zeta)\, \partial_x z + \partial^2_{x,\xi} l(z, \xi)\, \partial_x z)\, du \tag{B.17}$$

où on a posé : $z = z(u, x, \xi(t, x, \zeta), \zeta = \zeta(u, x, \xi(t, x, \zeta))$.

Utilisant (H_ρ), (B.16) et (B.17) donnent facilement (iii)-(iv) est une conséquence de (iii) pour $s = t$. ■

BIBLIOGRAPHIE

[Ag] S. AGMON, *Spectral Properties of Schrödinger Operators and Scattering Theory* [*Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa*, (4), vol. 2, 1955, p. 151-218].

[Ba-Gu-Ra] C. BARDOS, J. C. GUILLOT et J. RALSTON, *La relation de Poisson pour l'équation des ondes dans un ouvert non borné* (*Comm. in P.D.E.*, vol. 7, 1982, p. 905-958).

[Bi-Kr] M. S. BIRMAN et M. G. KREIN, *Dokl. Akad. Nauk S.S.S.R.*, vol. 5, 1962, p. 475-478.

[Bu] V. S. BUSLAEV, *Soviet Math. Dokl.*, vol. 12, 1971, p. 591-595.

[CdV] Y. COLIN DE VERDIÈRE, *Une formule de trace pour l'opérateur de Schrödinger dans* $\mathbb{R}^3$ (*Ann. scient. Éc. Norm. Sup.*, 4, t. 14, 1981, p. 27-39).

[Co-Kr-Sc] P. COTTA-RAMUSINO, W. KRÜGER et R. SCHRADER, *Quantum Scattering by External Matrics and Yang-Mills Potentials* (*Ann. Inst. H. Poincaré, Physique Théorique*, vol. XXXI, n° 1, 1979, p. 43-71).

[Da-Ro] M. DAUGE et D. ROBERT, *Weyl's Formula for a Class of Pseudodifferential Operators with Negative Order in* $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n)$ (*Lect. Notes Math.*, n° 1256, Springer, 1986).

[De-Hi] S. DE BIÈVRE et P. HISLOP, *Spectral Resonances for the Laplace Operator* (*Ann. Inst. H. Poincaré, Physique Théorique*, vol. 48, n° 2, 1988, p. 105-143).

$[\text{Ge-Ma}]_1$ C. GÉRARD et A. MARTINEZ, *Principe d'absorption limite pour les opérateurs de Schrödinger à longue portée*, (*C. R. Acad. Sci. Paris*, t. 306, série I, 1988, p. 121-123).

$[\text{Ge-Ma}]_2$ C. GÉRARD et A. MARTINEZ, *Prolongement méromorphe de la matrice de scattering pour des problèmes à deux corps à longue portée* (*Ann. Inst. H. Poincaré, Physique-Théorique*, vol. 51, n° 1, 1989, p. 81-110).

[Ge-Ma-Ro] C. GÉRARD, A. MARTINEZ et D. ROBERT, *Breit-Wigner Formulas for the Scattering Phase and the Total Scattering Cross-Section in the Semi-Classical Limit* (*Commun. Math. Phys.*, vol. 121, 1989, p. 323-336).

[Gi] P. B. GILKEY, *Invariance Theory, the Heat Equation and the Atiyah-Singer Index Theorem*, Wilmington, Publish or Perish, 1984.

$[\text{Gu}]_1$ L. GUILLOPÉ, *Thèse de 3e cycle*, Grenoble, 1981.

[Gu]$_2$ L. GUILLOPÉ, *Asymptotique de la phase de diffusion pour l'opérateur de Schrödinger dans* $\mathbb{R}^n$ (*Sem. E.D.P.*, École polytechnique, exposé n° 5, 1984-1985).

[Go-Kr] I. C. GOHBERG et M. G. KREIN, *Introduction à l'analyse des opérateurs linéaires non auto-adjoints*, Dunod, 1972.

[He-Ma-Ro] B. HELFFER, A. MARTINEZ et D. ROBERT, *Ergodicité et limite semi-classique* (*Commun. Math. Phys.*, vol. 109, 1987, p. 313-326).

[He-Ro] B. HELFFER et D. ROBERT, *Calcul fonctionnel par la transformée de Mellin et opérateurs admissibles* (*J. Funct. Anal.*, vol. 53, n° 3, 1983, p. 246-268).

[Ho] L. HORMANDER, *The Spectral Function of an Elliptic Operator* (*Acta. Math.*, vol. 121, 1968, p. 193-218).

[Is] H. ISOZAKI, *Differentiability of Generalized Fourier Transforms Associated with Schrödinger Operators* (*J. Math. Univ. of Kyoto*, vol. 25, n° 4, 1985, p. 789-806).

[Is-Ki] H. ISOZAKI et H. KITADA, *Modified Wave Operators with Time Independant Modifiers* (*J. Fac. Sci. Univ. Tokyo*, Sect. IA, vol. 32, 1985, p. 77-104).

[Iv-Sh] V. Y. IVRII et M. A. SHUBIN, *On the Asymptotic Behavior for the Spectral Shift Function* (*Dokl. Akad. Nauk S.S.S.R.*, vol. 263, n° 2, 1982, p. 332-334).

[Je-Ka] A. JENSEN et T. KATO, *Asymptotic Behavior of the Scattering Phase for Exterior Domains* (*Comm. in P.D.E.*, vol. 3, 1978, p. 1165-1195).

[Je]$_1$ A. JENSEN, *A Stationary Proof of Lavine's Formula for Time Delay* (*Lett. Math. Phys.* vol. 7, 1983, p. 137-143).

[Je]$_2$ A. JENSEN, *High Energy Resolvent Estimates for Generalized Many Body Schrödinger operators* (*Publ. R.I.M.S. Kyoto*, 1989).

[Je-Mo-Pe] A. JENSEN, E. MOURRE et P. PERRY, *Multiple Commutator Estimates and Resolvent Smoothness in Quantum Scattering Theory* (*Ann. Inst. H. Poincaré, Physique Théorique*, vol. 41 A, 1984, p. 207-225).

[Ku] S. T. KURODA, *An Introduction to Scattering Theory* (*Lect. Notes*, *n°* 51, Mat. Inst. Aarhus Univ., 1978).

[Le-Pa] J. M. LEE et T. H. PARKER, *The Yamabe Problem* (*Bull. A.M.S.*, vol. 17, n° 1, 1987, p. 37-63).

[Ma-Ra] A. MAJDA et J. RALSTON, *An Analogue of Weyl's Theorem for Unbounded Domains* (*Duke Math. J.*, I, vol. 45, 1978, p. 183-196; II, vol. 45, 1978, p. 513-536; III, vol. 46, 1979, p. 725-731).

[Me]$_1$ R. MELROSE, *Weyl Asymptotics for the Phase in Obstacle Scattering* [*Commun. P.D.E.*, vol. 13 (11), 1988, p. 1431-1439].

[Me]$_2$ R. MELROSE, *Polynomial Bound on the Distribution of Pôles in Scattering by an Obstacle* (*Journées « Équations aux Dérivées Partielles »*, Saint-Jean-de-Monts, 1984).

[Pe] V. PETKOV, *Phase de diffusion pour des perturbations captives* (*Journées « Équations aux Dérivées Partielles »*, Saint-Jean-de-Monts, 1990).

[Pe-Po] V. PETKOV et G. POPOV, *Asymptotic Behavior of the Scattering Phase for Non Trapping Obstacles* (*Ann. Inst. Fourier Grenoble*, vol. 32, 1982, p. 111-149).

[Pe-Ro] V. PETKOV et D. ROBERT, *Asymptotique semiclassique du spectre d'hamiltoniens quantiques et trajectoires classiques périodiques* (*Comm. P.D.E.*, vol. 10, 1985, p. 365-390).

[Po] G. POPOV, *Asymptotic Behavior of the Scaterring Phase for Schrödinger Operator*, Publ. Acad. Sciences Sofia, 1982.

[Po-Sh] G. POPOV et M. A. SHUBIN, *Asymptotic Expansion of the Spectral Function for Second Order Elliptic Operators in* $\mathbb{R}^n$ (*Funct. Anal.* APP1, vol. 17, 1983, p. 37-45).

[Ra] J. RALSTON, *Trapped Rays in Spherically Symmetric Media and Pôles of the Scattering Matrix* (*C.P.A.M.*, vol. XXIV, 1971, p. 571-582).

[Re-Si] M. REED et B. SIMON, *Scattering Theory*, Academic Press, 1979.

[Ro]$_1$ D. ROBERT, *Asymptotique à grande énergie de la phase de diffusion pour un potentiel*, *Asymptotic Analysis*, vol. 3, 1991, p. 301-320.

[Ro]$_2$ D. ROBERT, *Autour de l'approximation semiclassique* (*Progress Math.*, n° 68, Birkhaüser, 1987).

[Ro]$_3$ D. ROBERT, *On Scattering Theory for Long Range Perturbations of Second Order for the Laplace Operator* [special issue of *J. Anal. Math. Jerusalem* in honor of S. Agmon, 1990 (to appear)].

[Ro]$_4$ D. ROBERT, *Sem. E.D.P.*, École polytechnique, 1988/1989, exposé, n° XVII.

[Ro-Ta]$_1$ D. ROBERT et H. TAMURA, *Semiclassical Estimates for Resolvents and Asymptotics for Total Scattering Cross-sections* (*Ann. Inst. H. Poincaré*, vol. 46, n° 4, 1987, p. 415-442).

[Ro-Ta]$_2$ D. ROBERT et H. TAMURA, *Semiclassical Asymptotics for Local Spectral Densities and Time Delay Problems in Scattering Process* (*J. Funct. Anal.*, vol. 80, n° 1, 1988, p. 124-147).

[Sc] R. SCHRADER, *High Energy Behavior for Non Relativistic Scattering by Stationary external Metrics and Yang-Mills Potentials* (*Z. Physik C. Particles and Fields*,vol. 4, 1980, p. 27-36).

[Se] R. SEELEY, *Complex Powers of Elliptic Operators* (*Proc. Symp. Pure Math. A.M.S.*, vol. 10, 1967, p. 288-307).

[Sj-Zw] J. SJÖSTRAND et M. ZWORSKI, Communication orale.

[Vo] G. VODEV, *Polynomial Bound on the Number of Scattering Pôles in the Case of Metric Perturbations*, Preprint, Sofia, 1990.

[Wa]$_1$ X. P. WANG, *Resolvent Estimates for* N-*Body Schrödinger Operators*, preprint, T.U., Berlin, 1990.

[Wa]$_2$ *Time Decay of Scattering Solutions and Classical Trajectories* (*Ann. Inst. H. Poincaré, Physique Théorique*, vol. 47, 1987, p. 25-37).

(Manuscrit reçu le 10 septembre 1990,
révisé le 31 janvier 1991).

D. ROBERT,
Département de Mathématiques,
U.R.A. C.N.R.S. n° 758,
Université de Nantes,
2, rue de la Houssinière,
44072 Nantes Cedex 03, France.