FOKKO DU CLOUX

Sur les représentations différentiables des groupes de Lie algébriques

Annales scientifiques de l'É.N.S. 4e série, tome 24, nº 3 (1991), p. 257-318

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1991_4_24_3_257_0>

Ann. scient. Éc. Norm. Sup.,
4e série, t. 24, 1991, p. 257 à 318.

SUR LES REPRÉSENTATIONS DIFFÉRENTIABLES DES GROUPES DE LIE ALGÉBRIQUES

PAR Fokko DU CLOUX

Introduction

L'objet du présent travail est d'établir quelques fondements de la « théorie différentiable des représentations » pour un groupe de Lie algébrique G (*cf.* le chapitre 0 pour une description précise de la classe de groupes considérée). Le but ultime que l'on pourrait fixer à cette théorie serait d'arriver pour un groupe de Lie à une analyse harmonique au sens des espaces $\mathscr{S}$ et $\mathscr{S}'$ de Schwartz, de même que la théorie habituelle des représentations unitaires peut être considérée comme un analogue de l'analyse harmonique L^2. Bien entendu, il ne pourra s'agir ici que de faire quelques pas dans cette direction; nous voudrions surtout attirer l'attention sur l'existence qui ne semble pas avoir été soupçonnée jusqu'à une date récente d'une théorie harmonieuse et cohérente, et possédant un contenu géométrique (au sens de la « géométrie différentielle non commutative ») bien plus grand que la théorie purement unitaire − sur ce dernier point, nous renvoyons le lecteur à l'introduction de [9]. En particulier, on dispose dans le cadre différentiable d'une notion satisfaisante de module de longueur finie, totalement absente de la théorie unitaire; malheureusement, nous ne pourrons pas l'aborder dans le présent article.

Notons $\mathscr{S}\mathbf{mod}_G$ la catégorie des G-modules différentiables à croissance modérée [cela veut dire que l'action naturelle de l'algèbre de convolution $C_c^\infty(G)$ se prolonge en une action de l'algèbre de Schwartz $\mathscr{S}(G)$ définie en termes de la structure de variété algébrique de G, *cf.* chap. 1]. Dans [8], nous avons montré que lorsque G est unipotent, on peut entièrement classifier les objets topologiquement irréductibles de $\mathscr{S}\mathbf{mod}_G$: on trouve qu'une telle représentation est nécessairement isomorphe à l'espace des vecteurs C^∞ d'une représentation unitaire irréductible de G. Dans [32], [6], N. Wallach et W. Casselman ont montré en substance que si G est réductif, les classes d'isomorphisme d'objets admissibles topologiquement irréductibles de $\mathscr{S}\mathbf{mod}_G$ sont en bijection canonique avec les classes d'isomorphisme de ($\mathfrak{g}$, K)-modules simples, où $\mathfrak{g}$ est l'algèbre de Lie de G, K un sous-groupe compact maximal. De manière précise, ils démontrent que deux telles représentations sont topologiquement équivalentes si et seulement si leurs espaces de vecteurs K-finis sont algébriquement équivalents; en d'autres termes, tous les phénomènes d'« équivalence de Naimark » qui empoisonnent la théorie des représentations banachiques (et même hilbertiennes non unitaires) disparaissent lorsqu'on passe aux vecteurs C^∞ (*cf.* chap. 3 pour plus de détails).

La raison profonde de ce type de résultat est sans doute le fait que, dans les deux cas ci-dessus, les représentations considérées sont algébriquement simples sous l'action de l'algèbre de Schwartz; en fait, on peut montrer que l'on obtient ainsi *toutes* les représentations topologiques algébriquement simples de $\mathscr{S}(G)$, qui sont donc susceptibles d'être entièrement classifiées. Nous verrons qu'un phénomène analogue a lieu pour tout groupe de Lie algébrique : nous définissons les représentations minimales de G (déf. 5.1.1) par le fait d'être algébriquement simples sous l'action de $\mathscr{S}(G)$, et nous montrons que l'on peut les classifier sur le modèle de la classification de Duflo [15] du dual unitaire. A une représentation minimale on associe une orbite coadjointe de type unipotent (*cf.* n° 5.1.6), et l'espace des représentations associées à une orbite de type unipotent donnée est en bijection canonique avec le dual au sens des $(\mathfrak{g}, K)$-modules d'un certain groupe de Lie réductif, éventuellement tordu par un 2-cocycle à valeurs dans $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ (la classification de Duflo est identique, à ceci près qu'au niveau réductif on se limite au dual unitaire).

Dans le cas unipotent, tous les objets topologiquement simples de $\mathscr{S}\mathbf{mod}_G$ sont minimaux; dans le cas réductif, la minimalité équivaut à l'admissibilité. Dans le cas général, les choses sont plus compliquées, comme le montre déjà l'exemple du groupe affine de la droite (« groupe des $ax+b$ ») : même lorsque la condition d'admissibilité appropriée est vérifiée, on peut avoir des objets topologiquement simples dans $\mathscr{S}\mathbf{mod}_G$ non minimaux, par exemple l'espace des vecteurs C^∞ d'une des deux représentations unitaires irréductibles de dimension infinie. On peut cependant espérer obtenir des conditions suffisantes de « minimalité automatique » en termes de la fermeture de certaines orbites. Nous donnons au théorème 4.3.6 (iv) un résultat en ce sens. Quoiqu'il en soit, nous démontrons que toute représentation topologiquement irréductible « raisonnable » de G, en particulier toute représentation unitaire irréductible, contient une unique représentation minimale (th. 5.1.12), que nous appelons son espace de vecteurs de Schwartz. Dans le cas unitaire, on définit ainsi un sous-espace $\mathscr{H}_s$ de $\mathscr{H}$, un peu plus petit en général que son espace de vecteurs C^∞, et bien plus commode à manier; l'application $\mathscr{H} \to \mathscr{H}_s$ définit une injection du dual unitaire dans le « dual minimal » (cor. 5.1.13) qui généralise l'injection du dual unitaire dans l'espace des classes de $(\mathfrak{g}, K)$-modules simples du cas réductif.

Un des aspects les plus frappants de la théorie est le rôle universel joué par l'espace $s(\mathbf{N})$ des suites à décroissance rapide. Nous montrons en effet (th. 5.2.7) qu'une représentation minimale de dimension infinie de G est toujours isomorphe, en tant qu'espace de Fréchet, à $s(\mathbf{N})$; en particulier, c'est toujours un espace nucléaire. De plus, une certaine algèbre de Fréchet universelle $\mathscr{W}$ (*cf.* n° 0.7) joue un rôle tout à fait analogue à celui des opérateurs compacts dans la théorie unitaire. Dans les cas réductif et unipotent, $\mathscr{W}$ apparaît comme l'image de $\mathscr{S}(G)$ dans les endomorphismes de la représentation; dans le cas général ce sera seulement un idéal canonique dans cette image. Ceci est à rapprocher avec la distinction entre représentations liminaires et postliminaires pour les C*-algèbres.

Les démonstrations se basent sur une version C^∞ de la « machine de Mackey » (th. 2.5.8 et 4.2.3), dont la construction occupe la majeure partie de l'article. La notion principale est celle de représentation induite « au sens $\mathscr{S}$ », définie au chapitre 2; pour donner un sens à cette notion, nous sommes amenés au chapitre 1 à définir l'espace de Schwartz d'une variété algébrique réelle, et en démontrons quelques propriétés importantes (th. 1.2.4). Bien que cela ne soit sans doute pas toujours indispensable, nous avons systématiquement utilisé le théorème de résolution des singularités d'Hironaka, dont nous avons pu admirer à cette occasion la puissance et la commodité d'emploi.

L'idée de ce travail a été conçue pendant mon séjour au Mathematical Sciences Research Institute de Berkeley au cours de l'année 1987-1988, où j'ai pu rencontrer Bill Casselman et Nolan Wallach. Pendant la rédaction, j'ai beaucoup profité de conversations avec Jean-Michel Bony, François Loeser et Claude Sabbah du Centre de Mathématiques de l'École polytechnique, et avec Rudolf Rentschler de l'Université Paris-Sud; qu'ils en soient tous chaleureusement remerciés.

TABLE DES MATIÈRES

0. Conventions et rappels

0.1. Dans ce travail, nous appellerons simplement variétés algébriques les variétés algébriques quasi projectives complexes définies sur $\mathbf{R}$. Sauf mention du contraire, les morphismes et sous-variétés seront toujours supposés définis sur $\mathbf{R}$. Si $\mathbf{X}$ est une variété algébrique, on désigne par $\mathbf{X}(\mathbf{R})$ l'ensemble des points réels de $\mathbf{X}$. Nous ne distinguerons pas dans les notations entre $\mathbf{X}(\mathbf{R})$ et l'espace analytique réel sous-jacent; nous appellerons « topologie analytique » la topologie d'espace analytique de $\mathbf{X}(\mathbf{R})$.

0.2. Par abus de langage, nous appellerons groupe de Lie semi-algébrique la donnée d'un groupe algébrique affine $\mathbf{G}$, d'un sous-groupe ouvert (pour la topologie analytique) $G' \subset \mathbf{G}(\mathbf{R})$, et d'un revêtement fini $G \to G'$ (ce sont les « groupes de classe $\mathscr{C}_{\mathbf{R}}$ » de [15]). En général, nous ne ferons figurer que G dans la notation, les autres éléments de la définition restant implicites. En remplaçant $\mathbf{G}$ par l'adhérence de Zariski de G', on peut d'ailleurs toujours supposer que G' est Zariski-dense dans $\mathbf{G}$.

Il est clair qu'un revêtement fini d'un groupe de Lie semi-algébrique est de façon naturelle un groupe de Lie semi-algébrique. Si $\mathbf{H}$ est un sous-groupe fermé de $\mathbf{G}$, on pose $H' = \mathbf{H}(\mathbf{R}) \cap G'$, et on note H l'image réciproque de H' dans G; on dit que H est le sous-groupe de G défini par $\mathbf{H}$. Il est clair que si $\mathbf{V}$ est une représentation linéaire régulière de dimension finie de $\mathbf{G}$ (comme toujours, tout est défini sur $\mathbf{R}$), si $x \in \mathbf{V}(\mathbf{R})$ et $\mathbf{H} = \mathbf{G}(x)$ est le stabilisateur de x, alors le sous-groupe de G défini par $\mathbf{H}$ est simplement le stabilisateur de x dans G.

0.3. Soit G un groupe de Lie semi-algébrique (*cf.* n° 0.2). Soit $\mathbf{U}$ le radical unipotent de $\mathbf{G}$. Alors $\mathbf{U}(\mathbf{R})$ est isomorphe à $\mathbf{R}^n$ comme variété analytique réelle, donc $\mathbf{U}(\mathbf{R}) \subset G'$. Par abus de notation, nous noterons U la composante neutre de l'image réciproque de $\mathbf{U}(\mathbf{R})$ dans G, et nous dirons que U est le radical unipotent de G. Nous noterons parfois aussi $U = {}^u G$.

On dit que G est réductif si $\mathbf{G}$ l'est, *i.e.* si $\mathbf{U} = \{1\}$. Si $\mathbf{G}$ est quelconque, $\mathbf{G}/\mathbf{U}$ est toujours réductif, et se relève en un sous-groupe fermé $\mathbf{L}$ de $\mathbf{G}$; nous dirons qu'un tel $\mathbf{L}$ est un facteur de Levi de $\mathbf{G}$. On sait (*cf.* [23]) que tous les facteurs de Levi sont conjugués sous l'action de $\mathbf{U}(\mathbf{R})$. Soit L le sous-groupe de G défini par $\mathbf{L}$ (nous dirons que L est un facteur de Levi de G); alors il est clair qu'on a une décomposition $G = L.U$ de G comme produit semi-direct d'un groupe réductif et d'un groupe unipotent.

0.4. Voici la forme que nous utiliserons du théorème de résolution des singularités (*cf.* [17], chap. I, §2, th. $I_2^{N,n}$) :

THÉORÈME. — *Soit* $\mathbf{V}$ *une variété algébrique lisse,* $\mathbf{W}$ *une sous-variété fermée de* $\mathbf{V}$, $\mathbf{U}$ *un ouvert dense de* $\mathbf{V}$ *tel que* $\mathbf{U} \cap \mathbf{W}$ *soit lisse. Alors il existe une variété algébrique lisse* $\mathbf{V}'$, *et un morphisme* $f : \mathbf{V}' \to \mathbf{V}$ (*obtenus par une succession finie d'éclatements de sous-variétés lisses disjointes de* $\mathbf{U}$) *avec les propriétés suivantes :*

(i) *f induit un isomorphisme de* $\mathbf{U}' = f^{-1}(\mathbf{U})$ *sur* $\mathbf{U}$.

(ii) $\mathbf{E}' = \mathbf{V}' \setminus \mathbf{U}'$ *est un diviseur à croisements normaux.*

(iii) *La transformée stricte* $\mathbf{W}'$ *de* $\mathbf{W}$ *dans* $\mathbf{V}$ (i.e. *l'adhérence de* $\mathbf{W} \cap \mathbf{U}$ *dans* $\mathbf{V}'$) *est une sous-variété lisse, et a des croisements normaux avec* $\mathbf{E}'$.

COMMENTAIRES. — (*a*) Rappelons que toutes les variétés et tous les morphismes sont supposés définis sur $\mathbf{R}$, ici comme ailleurs.

(*b*) Un diviseur à croisements normaux $\mathbf{E}$ sur une variété lisse $\mathbf{V}$ est une sous-variété fermée de codimension 1 telle qu'en tout point x de $\mathbf{E}$ il existe un système de coordonnées locales $z_1, \ldots, z_n$ pour $\mathbf{V}$, et un entier p, $1 \leqq p \leqq n$, tels que localement $\mathbf{E}$ soit la réunion des hyperplans $z_j=0$, $1 \leqq j \leqq p$. En particulier, toutes les composantes irréductibles de $\mathbf{E}$ sont lisses, et il y a au plus n composantes passant par un point x donné.

(*c*) Si $\mathbf{W}$ est une sous-variété lisse de $\mathbf{V}$, on dit que $\mathbf{W}$ est à croisements normaux avec $\mathbf{E}$ comme ci-dessus, si en tout point x de $\mathbf{E} \cap \mathbf{W}$ on peut choisir les z_j pour qu'en outre $\mathbf{W}$ soit localement définie par l'annulation de certains des z_j.

(*d*) Si $\mathbf{V}$ est projective, il en va de même pour $\mathbf{V}'$ (on sait que l'éclatement d'une sous-variété fermée lisse dans une variété projective lisse donne à nouveau une variété projective lisse).

0.5. Soit G un groupe de Lie. Dans tout cet article, nous appellerons G-module un espace de Fréchet E muni d'une action continue de G. Nous notons $\mathbf{mod}_G$ la catégorie des G-modules, où les morphismes sont les entrelacements linéaires continus. Si E est un G-module, nous notons E_∞ l'espace des vecteurs C^∞ de E, *i.e.*

$$E_\infty = \{ v \in E \mid g \to g.v \in C^\infty(G, E) \};$$

il porte une topologie naturelle d'espace de Fréchet qui en fait un G-module. Nous disons que E est différentiable, ou C^∞, si $E = E_\infty$.

Nous disons qu'un morphisme $u: E_1 \to E_2$ est fort, s'il existe une application linéaire continue (pas nécessairement G-invariante) $v: E_2 \to E_1$ telle que $uvu = u$. Il est équivalent de supposer qu'il existe des sous-espaces vectoriels fermés F_j dans E_j, $j=1, 2$, tels que $E_1 = \mathrm{Ker}(u) \oplus F_1$, $E_2 = \mathrm{Im}(u) \oplus F_2$; en particulier, $\mathrm{Im}(u)$ doit être fermé dans E_2.

0.6. Notre référence pour les produits tensoriels topologiques est [31]. Dans cet article, le seul produit tensoriel topologique qui intervient est le produit tensoriel projectif (complété) d'espaces de Fréchet ([31], déf. 43.2) que nous noterons simplement $\hat{\otimes}$. De plus, dans presque tous les cas, l'un des deux espaces qui interviennent sera nucléaire, auquel cas tous les produits tensoriels topologiques raisonnables coïncident ([31], th. 50.1).

Rappelons que le produit tensoriel projectif possède la propriété universelle suivante : si E_1, E_2, E sont trois espaces localement convexes séparés, toute application bilinéaire continue $E_1 \times E_2 \to E$ se prolonge en une application linéaire continue $E_1 \hat{\otimes} E_2 \to E$.

0.7. On note $\mathscr{W}$ l'algèbre des matrices infinies $(a_{mn})_{m, n \in \mathbf{N}}$ à coefficients complexes, et « à décroissance rapide », *i.e.* $\sup_{m,n} (m+n)^k |a_{mn}| < +\infty$, $\forall k \in \mathbf{N}$. C'est une algèbre de Fréchet pour le produit ordinaire des matrices (que l'on peut munir de l'involution $a^*_{mn} = \bar{a}_{nm}$, mais cela ne nous servira guère ici). On peut faire agir $\mathscr{W}$ dans l'espace $S = s(\mathbf{N})$

des suites à décroissance rapide, considérées comme des vecteurs-colonnes. Il est clair que S est un $\mathscr{W}$-module fréchétique algébriquement simple, que nous appellerons le $\mathscr{W}$-module standard.

Un résultat fondamental ([8], th. 3.4) est la classification complète des $\mathscr{W}$-modules différentiables (déf. 2.3.1). Un tel module E est nécessairement de la forme $E = S \hat{\otimes} F$, avec $F = \mathrm{Hom}_{\mathscr{W}}(S, E)$ (on peut montrer que F est de Fréchet). En particulier, E ne peut être topologiquement irréductible que si F est de dimension 1, d'où $E = S$.

Soit $\mathscr{B}$ une algèbre de Fréchet, $\mathscr{A} = \mathscr{W} \hat{\otimes} \mathscr{B}$. Supposons que $\mathscr{B}$ possède une unité approchée (*cf.* n° 2.3.5), et remarquons que $\mathscr{W}$ possède une unité approchée (e_n) définie par $e_{nij} = 1$ si $i = j \leqq n$, 0 sinon. Alors on démontre comme au lemme 2.3.6 que tout $\mathscr{A}$-module différentiable E est canoniquement muni d'actions de $\mathscr{W}$ et de $\mathscr{B}$ commutant entre elles. En particulier, l'espace F ci-dessus devient un $\mathscr{B}$-module, dont on peut montrer qu'il est différentiable.

1. Espaces de Schwartz

1.1. Variétés semi-algébriques.

1.1.1. Proposition. — *Soit* $\mathbf{X}$ *une variété algébrique* (cf. *n°* 0.1). *Alors il existe un ouvert affine* $\mathbf{U}$ *de* $\mathbf{X}$ *tel que* $\mathbf{U}(\mathbf{R}) = \mathbf{X}(\mathbf{R})$ (*de façon un peu abusive, on peut donc dire que « les variétés réelles sont toujours affines »*).

Démonstration. — (*a*) Supposons que $\mathbf{X} = \mathbf{P}_n$ soit l'espace projectif tout entier. On définit $\mathbf{U}$ par l'équation homogène $x_0^2 + \ldots + x_n^2 \neq 0$. Clairement $\mathbf{U}(\mathbf{R}) = \mathbf{X}(\mathbf{R}) = \mathbf{P}_n(\mathbf{R})$, et $\mathbf{U}$ est affine comme complémentaire d'une hypersurface dans $\mathbf{P}_n$ ([11], chap. 3, prop. 6).

(*b*) D'après (*a*), on peut supposer $\mathbf{X}$ quasi affine, *i.e.* $\mathbf{X}$ ouverte dans $\mathbf{Y}$ affine. Soit $\mathbf{Y}_1 = \mathbf{Y} \setminus \mathbf{X}$. Alors $\mathbf{Y}_1$ est définie par des équations $f_1 = 0, \ldots, f_s = 0$, où l'on peut supposer que $f_1, \ldots, f_s$ sont réels. Posant alors $f = f_1^2 + \ldots + f_s^2$, on voit que $\mathbf{Y}_1(\mathrm{R})$ est aussi l'ensemble des points réels de l'hypersurface de $\mathbf{Y}$ d'équation $f = 0$. Donc $\mathbf{X}(\mathbf{R})$ est l'ensemble des points réels de l'ouvert principal $\mathbf{U}$ défini par $f \neq 0$, qui est affine et contenu dans $\mathbf{X}$.

C.Q.F.D.

1.1.2. Définition. — *Si* $\mathbf{X}$ *est une variété algébrique, un ouvert affine* $\mathbf{U}$ *de* $\mathbf{X}$ *tel que* $\mathbf{U}(\mathbf{R}) = \mathbf{X}(\mathbf{R})$ *sera appelé un ouvert de définition pour* $\mathbf{X}$. *Si* $\mathbf{X}_1$ *et* $\mathbf{X}_2$ *sont deux variétés algébriques, nous dirons que* $\mathbf{X}_1$ *et* $\mathbf{X}_2$ *définissent la même variété algébrique réelle, s'il existe des ouverts de définition* $\mathbf{U}_j$ *pour* $\mathbf{X}_j$, $j = 1, 2$, *tels que* $\mathbf{U}_1 \simeq \mathbf{U}_2$. (*On pourra dire que «* $\mathbf{X}_1$ *et* $\mathbf{X}_2$ *sont isomorphes au voisinage de leurs points réels ».*)

1.1.3. Exemple. — L'espace projectif $\mathbf{P}_1$ et le groupe $\mathbf{G} = \mathbf{GL}_1$ anisotrope, *i.e.* défini sur $\mathbf{R}$ pour avoir $\mathbf{G}(\mathbf{R}) = \mathrm{U}(1)$, sont des variétés algébriques isomorphes au voisinage de leurs points réels [par l'application $z \to (z+i)/(z-i)$, de $\mathbf{P}_1 \setminus \{\pm i\}$ sur $\mathbf{GL}_1$].

1.1.4. Une variété algébrique réelle sera pour nous la donnée d'une variété algébrique lisse, modulo la relation d'isomorphisme au voisinage des points réels [déf. 1.1.2. (on pourrait parler de « germe de variété algébrique au voisinage de $\mathbf{X}(\mathbf{R})$ »]. De plus, nous supposerons que $\mathbf{X}(\mathbf{R})$ est Zariski-dense dans $\mathbf{X}$, *i.e.* que toutes les composantes de $\mathbf{X}$ contiennent au moins un point réel. Nous noterons $X = \mathbf{X}(\mathbf{R})$, et nous dirons souvent par abus de langage que X « est » une variété algébrique réelle; un ouvert de définition pour $\mathbf{X}$ sera aussi appelé un ouvert de définition pour X.

Si $\mathbf{U}$ est un tel ouvert de définition, on note Reg (X) l'algèbre des fonctions rationnelles sur $\mathbf{U}$ définies en tout point de X; il est clair que cela ne dépend pas du choix de $\mathbf{U}$.

Nous dirons qu'un champ de vecteurs ξ sur X est à coefficients réguliers, s'il est la restriction à X d'un champ de vecteurs régulier sur un ouvert de définition $\mathbf{U}$ convenable. De même, nous dirons qu'un opérateur différentiel D sur X est à coefficients réguliers, s'il appartient à la sous-algèbre engendrée par Reg (X) et par les champs de vecteurs à coefficients réguliers. Nous noterons Diffreg (X) l'algèbre des opérateurs différentiels à coefficients réguliers sur X.

1.1.5. Un peu plus généralement, nous définirons une variété semi-algébrique X comme une réunion de composantes connexes (pour la topologie analytique) d'une variété algébrique réelle (rappelons que les composantes connexes d'une variété algébrique réelle sont nécessairement en nombre fini). Lorsqu'il sera utile de choisir une variété algébrique ambiante, nous dirons aussi que $(X, \mathbf{X})$ est une variété semi-algébrique, où $\mathbf{X}$ est affine, lisse, et où X est Zariski-dense dans $\mathbf{X}$, et ouvert dans $\mathbf{X}(\mathbf{R})$.

On peut montrer que si $(X, \mathbf{X})$ est une variété semi-algébrique, alors X est une partie semi-algébrique de $\mathbf{X}(\mathbf{R})$, *i.e.* une réunion finie de parties de $\mathbf{X}(\mathbf{R})$ définies par des équations et inéquations polynomiales ([2], th. 2.4.5). Les algèbres Reg (X) et Diffreg (X) sont définies comme pour les variétés algébriques réelles. Par abus de langage, nous appellerons ouvert de Zariski de X un ouvert de la forme $\mathbf{Y}(\mathbf{R}) \cap X$ où $\mathbf{Y}$ est un ouvert de Zariski de $\mathbf{X}$; et ouvert semi-algébrique, un ouvert qui est réunion de composantes connexes d'un ouvert de Zariski. Il est clair que les ouverts semi-algébriques engendrent la topologie analytique X (plonger X dans un espace $\mathbf{R}^n$ et considérer l'intersection de X avec les boules de $\mathbf{R}^n$).

On dit que $Y \subset X$ est une sous-variété semi-algébrique, si l'on peut trouver un ouvert de définition $\mathbf{X}$ pour X, et une sous-variété lisse $\mathbf{Y} \subset \mathbf{X}$ ($\mathbf{Y}$ est donc localement fermée, mais non nécessairement fermée), tels que Y soit une réunion de composantes connexes de $\mathbf{Y}(\mathbf{R})$. Quitte à diminuer $\mathbf{Y}$, on peut bien sûr toujours supposer $\mathbf{Y}$ affine.

1.1.6. Soit $\mathbf{X}$ une variété algébrique affine lisse, et $\mathbf{C}[\mathbf{X}]$ l'algèbre des fonctions régulières sur $\mathbf{X}$. Alors il est bien connu (c'est même la définition) que les champs de vecteurs (complexes) réguliers sur $\mathbf{X}$ s'identifient aux dérivations de l'algèbre $\mathbf{C}[\mathbf{X}]$; on obtient ainsi un $\mathbf{C}[\mathbf{X}]$-module de type fini noté $\mathrm{Der}(\mathbf{C}[\mathbf{X}])$. Pour que des champs de vecteurs $\xi_1, \ldots, \xi_s$ engendrent $\mathrm{Der}(\mathbf{C}[\mathbf{X}])$, il faut et il suffit que $\xi_1(x), \ldots, \xi_s(x)$ engendrent l'espace tangent $\mathbf{T}_x\mathbf{X}$ en tout point $x \in \mathbf{X}$.

On en déduit facilement que si $(X, \mathbf{X})$ est une variété semi-algébrique, les champs de vecteurs à coefficients réguliers définis au n° 1.1.4 s'identifient aux dérivations sur $\mathbf{C}$ de l'algèbre Reg (X), et qu'ils forment un Reg (X)-module de type fini [il suffit de remarquer que $\mathrm{Der}(\mathrm{Reg}(X)) = \mathrm{Reg}(X) \otimes_{\mathbf{C}[\mathbf{X}]} \mathrm{Der}(\mathbf{C}[\mathbf{X}])$].

1.1.7. REMARQUE. — Montrons qu'un groupe de Lie semi-algébrique G est muni d'une structure canonique de variété semi-algébrique. Considérons la décomposition $G = LU$ du n° 0.3, et écrivons $L = KAN$ dans la décomposition d'Iwasawa. Alors il est clair que L est une réunion de composantes connexes de $\mathbf{K}(\mathbf{R}) \times \mathbf{A}(\mathbf{R}) \times \mathbf{N}(\mathbf{R})$, où $\mathbf{K}$, $\mathbf{A}$ et $\mathbf{N}$ sont les complexifiés de K, A et N respectivement; et l'application naturelle $\mathbf{K} \times \mathbf{A} \times \mathbf{N} \to \mathbf{L}$ est un morphisme qui se restreint en un revêtement de L' par KAN (bien entendu, $\mathbf{K} \times \mathbf{A} \times \mathbf{N}$ n'est pas en général muni d'une structure de groupe, et même lorsque $L = L'$ l'application $\mathbf{K} \times \mathbf{A} \times \mathbf{N} \to \mathbf{L}$ n'est pas birationnelle en général). On obtient donc bien une structure de variété semi-algébrique sur L, puis sur G; de plus, il est facile de montrer que la multiplication $G \times G \to G$ (resp. l'application $g \to g^{-1}$) est semi-algébrique, en ce sens que son graphe est une partie semi-algébrique de $G \times G \times G$ (resp. $G \times G$); ceci justifie la terminologie du n° 0.2. Comme il existe des groupes de Lie semi-algébriques qui ne sont pas linéaires [par exemple les revêtements finis de $\mathbf{SL}(2, \mathbf{R})$], on voit qu'il y a des groupes de Lie semi-algébriques pour lesquels on ne peut pas choisir d'ouvert de définition qui soit un groupe algébrique. Pour éviter de trop longs développements sur la « catégorie semi-algébrique », nous avons (peut-être à tort) préféré définir au n° 1.3.1 l'algèbre de Schwartz de G à partir du revêtement $G \to G'$; on obtiendrait le même résultat en partant de la structure de variété semi-algébrique ci-dessus.

1.2. L'ESPACE DE SCHWARTZ D'UNE VARIÉTÉ SEMI-ALGÉBRIQUE.

1.2.1. DÉFINITION. — *Soit* X *une variété semi-algébrique* (cf. *n°* 1.1.5). *On appelle espace de Schwartz de* X *l'espace*

$$\mathscr{S}(X) = \{\varphi \in C^\infty(X) \mid \sup_{x \in X} |D\varphi(x)| < +\infty, \forall D \in \mathrm{Diffreg}(X)\}.$$

On munit (X) *de la topologie définie par les semi-normes* $q_D(\varphi) = \sup_{x \in X} |D\varphi(x)|$. *Il est clair que l'on obtient ainsi un espace localement convexe complet.*

1.2.2. THÉORÈME. — *Soit* $(X, \mathbf{X})$ *une variété semi-algébrique.*

(i) *Dans la définition de* $\mathscr{S}(X)$ *on peut remplacer* Diffreg(X) *par* Diffreg($\mathbf{X}$), *défini de façon évidente, qui en est une sous-algèbre de type fini.*

(ii) *Soit* $(Y, \mathbf{Y})$ *une deuxième variété semi-algébrique, et soit* $u : X \to Y$ *un difféomorphisme qui soit la restriction à* X *d'un morphisme encore noté* $u : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$. *Alors l'application* $\varphi \to u^*(\varphi) = \varphi \circ u$ *est un isomorphisme de* $\mathscr{S}(Y)$ *sur* $\mathscr{S}(X)$.

Démonstration. — (i) Des remarques du n° 1.1.6 on déduit aussitôt que $\mathrm{Diffreg}(X) = \mathrm{Reg}(X) \otimes_{\mathbf{C}[\mathbf{X}]} \mathrm{Diffreg}(\mathbf{X})$. Si l'on note $\mathscr{S}(X; \mathbf{X})$ l'espace de Schwartz défini à l'aide de Diffreg($\mathbf{X}$), il suffit donc de prouver que $\mathscr{S}(X; \mathbf{X})$ est stable par multiplication par les éléments de Reg(X). Comme tout élément de Reg(X) est le quotient de deux éléments de $\mathbf{C}[\mathbf{X}]$, il suffit de montrer que $\mathscr{S}(X; \mathbf{X})$ est stable par multiplication par les fonctions de la forme $1/P$, où $P \in \mathbf{C}[\mathbf{X}]$ ne s'annule pas sur X; et quitte à remplacer P par $|P|^2$, on peut supposer que $P(x) > 0$, $\forall x \in X$.

Réalisons $\mathbf{X}$ comme une sous-variété fermée de $\mathbf{C}^n$ de telle sorte que $\mathbf{X}(\mathbf{R}) = \mathbf{X} \cap \mathbf{R}^n$. Il suffira alors de montrer qu'il existe $N \in \mathbf{N}$ et $A > 0$ tels que $1/P(x) \leqq$

$A(x_1^2+\ldots+x_n^2)^N$ pour tout $x \in X$. Or, posons pour tout $r \geqq 0$:

$$f(r)=\sup_{x\in X,\ x_1^2+\ldots+x_n^2=r^2}\frac{1}{P(x)}.$$

Alors, comme X est une partie semi-algébrique de $\mathbf{R}^n$, f est une fonction semi-algébrique de r au sens de [18], appendice A2. Si X est compacte, on a $\mathscr{S}(X)=\mathscr{S}(X, \mathbf{X})=C^\infty(X)$ et il n'y a rien à démontrer. Sinon, f est finie et non nulle pour $r \gg 0$; d'après *loc. cit.*, th. A.2.5, il existe $A>0$, $a \in \mathbf{Q}$ tels que $f(r) \sim A r^a$ pour $r \to \infty$. Donc avec $N \geqq a/2$, on a bien le résultat cherché.

(ii) Il résulte en particulier de (i) que $\mathscr{S}(X)=\bigoplus_j \mathscr{S}(X_j)$, où les X_j sont les composantes connexes de X. En raisonnant séparément sur chaque composante, on peut donc supposer X et Y connexes, ce qui entraîne que **X** et **Y** sont irréductibles. Soient $R(\mathbf{X})$, $R(\mathbf{Y})$ les corps de fonctions rationnelles sur **X** et **Y** respectivement.

Comme **X** et **Y** ont même dimension, et que le morphisme u est dominant, $R(\mathbf{X})$ est une extension finie de $R(\mathbf{Y})$. Soit $\xi \in \mathrm{Der}(\mathbf{C}[\mathbf{Y}])$. Alors ξ se prolonge de manière unique en une dérivation de $R(\mathbf{Y})$, puis de $R(\mathbf{X})$, notée $u^*(\xi)$. On peut interpréter $u^*(\xi)$ comme un champ de vecteurs rationnel sur **X**, et il est clair que $u^*(\xi)$ est régulier en dehors du lieu singulier de u; en particulier, $u^*(\xi)$ est défini partout sur X, et $u^*(\xi)|_X$ n'est autre que le champ de vecteurs sur X transporté de ξ par u^{-1}. Si $\varphi \in \mathscr{S}(Y)$, on a donc $u^*(\xi\varphi)=u^*(\xi).u^*(\varphi)$.

Si $\xi_1, \ldots, \xi_s$ engendrent $\mathrm{Der}(\mathbf{C}[\mathbf{Y}])$ comme $\mathbf{C}([\mathbf{Y}])$-module, $u^*(\xi_1)(x), \ldots, u^*(\xi_s)(x)$ engendrent $\mathbf{T}_x\mathbf{X}$ en tout point $x \in X$, donc $u^*(\xi_1), \ldots, u^*(\xi_s)$ engendrent $\mathrm{Der}(\mathrm{Reg}(X))$ comme $\mathrm{Reg}(X)$-module. D'après ce qui précède, pour montrer que $u^*(\mathscr{S}(Y)) \subset \mathscr{S}(X)$, il suffit donc de montrer que $u^*(\mathscr{S}(Y))$ est stable par multiplication par les fonctions de $\mathrm{Reg}(X)$. Pour cela, il suffit de montrer que si $P \in \mathbf{C}[\mathbf{X}]$ ne s'annule pas sur X, alors la fonction $1/P$ multiplie $u^*(\mathscr{S}(Y))$ dans lui-même, et pour cela, que $1/Q$ multiplie $\mathscr{S}(Y)$ dans lui-même, avec $Q=P\circ u^{-1}$. Or il est clair que pour cela on peut procéder exactement comme en (i), en choisissant un plongement affine de **Y** et en introduisant la fonction semi-algébrique :

$$f(r)=\sup_{x\in X,\ |u(x)|^2=r^2}\frac{1}{|P(x)|^2}.$$

Nous avons donc montré que $u^*(\mathscr{S}(Y)) \subset \mathscr{S}(X)$; l'inclusion en sens inverse est facile, puisque $\mathrm{Diffreg}(Y)$ s'identifie à une sous-algèbre de $\mathrm{Diffreg}(X)$.

1.2.3. COROLLAIRE. — *L'espace* $\mathscr{S}(X)$ *est un espace de Fréchet.*

Démonstration. — L'algèbre $\mathrm{Diffreg}(\mathbf{X})$ est de type fini sur **C**, donc possède une base dénombrable.

1.2.4. THÉORÈME. — *Soit* (X, **X**) *une variété semi-algébrique* (cf. *n*° 1.1.5).

(i) *Soit* (Y, $\mathbf{Y}$) *un ouvert semi-algébrique de* X, *où* $\mathbf{Y} \subset \mathbf{X}$ *est un ouvert de Zariski,* $\mathrm{Y} = \mathrm{X} \cap \mathbf{Y}$. *Alors*

$$\mathscr{S}(\mathrm{Y}) = \{\varphi \in \mathscr{S}(\mathrm{X}) \mid \mathrm{D}\varphi|_{\mathrm{X} \setminus \mathrm{Y}} = 0, \ \forall \, \mathrm{D} \in \mathrm{Diffreg}(\mathbf{X})\}.$$

(ii) *Soient* (X, $\mathbf{X}$) *et* (Y, $\mathbf{Y}$) *deux variétés semi-algébriques,* $u : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ *un morphisme se restreignant en une application propre de* X *vers* Y. *Alors* $u^* : \varphi \to \varphi \circ u$ *applique* $\mathscr{S}(\mathrm{Y})$ *dans* $\mathscr{S}(\mathrm{X})$.

(iii) *Soit* Y *une sous-variété semi-algébrique fermée de* X (*n*° 1.1.5). *Alors l'application de restriction* $\mathscr{S}(\mathrm{X}) \to \mathscr{S}(\mathrm{Y})$ *est surjective.*

Démonstration. — (*a*) Il résulte du théorème 1.2.2 (i) que $\varphi \in \mathscr{S}(\mathrm{X})$ si et seulement si son prolongement par 0 en dehors de X est dans $\mathscr{S}(\mathbf{X}(\mathbf{R}))$; remarque analogue pour Y. On peut donc sans perte de généralité supposer dans (i) que $\mathrm{X} = \mathbf{X}(\mathbf{R})$, $\mathrm{Y} = \mathbf{Y}(\mathbf{R})$. Posons alors $\mathrm{X}_1 = \mathrm{X} \setminus \mathrm{Y}$.

(*b*) Soit $\varphi \in \mathscr{S}(\mathrm{Y})$, et définissons la fonction $\bar{\varphi}$ sur X en prolongeant φ par 0 sur X_1. Montrons que $\bar{\varphi} \in \mathscr{S}(\mathrm{X})$. Comme Diffreg($\mathbf{X}$) s'identifie à une sous-algèbre de Diffreg($\mathbf{Y}$), il suffira de prouver que la fonction $\bar{\varphi}$ est C^∞; en effet pour tout $\mathrm{D} \in \mathrm{Diffreg}(\mathbf{X})$ la fonction $\mathrm{D}\bar{\varphi}$ sera alors le prolongement par zéro de $\mathrm{D}\varphi$, donc sera bornée sur X.

On est donc ramené à un problème local sur X. Soit $\mathbf{X}_1 = \mathbf{X} \setminus \mathbf{Y}$, $\mathbf{S}$ le lieu singulier de $\mathbf{X}_1$. Quitte à remplacer $\mathbf{X}$ par $\mathbf{X} \setminus \mathbf{S}$, puis par un ouvert de définition pour $\mathrm{X} \setminus \mathbf{S}(\mathbf{R})$, et à faire une récurrence sur la dimension de $\mathbf{X}_1$, on peut supposer que $\mathbf{X}_1$ est lisse. Il s'agit donc du prolongement d'une fonction C^∞ sur le complémentaire d'une sous-variété lisse de X. Comme $\mathscr{S}(\mathrm{Y})$ est stable sous l'action des champs de vecteurs réguliers sur $\mathbf{X}$, il suffira en fait de montrer que $\bar{\varphi}$ est continue.

Or, soit $f \in \mathrm{Reg}(\mathbf{X})$ telle que $\mathrm{X}_1 = \{x \in \mathrm{X} \mid f(x) = 0\}$ (on sait qu'il est toujours possible de trouver une telle fonction). Alors $1/f \in \mathrm{Reg}(\mathbf{Y})$, donc $\psi = (1/f)\,\varphi \in \mathscr{S}(\mathrm{Y})$. On peut donc écrire $\bar{\varphi} = f\bar{\psi}$, où $\bar{\psi}$ est une fonction bornée sur X tout entier. Comme $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$ si $x_0 \in \mathrm{X}_1$, on en déduit bien que $\bar{\varphi}$ est continue.

(*c*) Montrons maintenant que si $\varphi \in \mathscr{S}(\mathrm{X})$ vérifie $\mathrm{D}\varphi|_{\mathrm{X}_1} = 0$ pour tout $\mathrm{D} \in \mathrm{Diffreg}(\mathbf{X})$, alors $\varphi|_{\mathrm{Y}} \in \mathscr{S}(\mathrm{Y})$. Compte tenu de (*b*), qui montre que tous les éléments de $\mathscr{S}(\mathrm{Y})$ sont de cette forme, on aura bien démontré l'assertion (i) du théorème. Tout d'abord, il résulte du théorème de résolution des singularités (th. 0.4, avec $\mathbf{V} = \mathbf{P}_{\mathrm{N}}$, $\mathbf{W}$ l'adhérence de $\mathbf{X}$ dans $\mathbf{P}_{\mathrm{N}}$, $\mathbf{U} = \mathbf{C}^{\mathrm{N}}$), que l'on peut considérer $\mathbf{X}$ comme un ouvert de Zariski dans une variété projective lisse $\mathbf{X}'$; soit $\mathrm{X}' = \mathbf{X}'(\mathbf{R})$. On a vu que pour une variété compacte on a simplement $\mathscr{S}(\mathrm{X}') = \mathrm{C}^\infty(\mathrm{X}')$; et d'après (*b*) les éléments de $\mathscr{S}(\mathrm{X})$ peuvent être considérés comme des fonctions C^∞ sur X′, plates le long de $\mathrm{X}' \setminus \mathrm{X}$. On peut donc sans perte de généralité remplacer X par X′, *i.e.* supposer $\mathrm{X} = \mathbf{X}'(\mathbf{R})$ compacte.

Appliquons une nouvelle fois le théorème 0.4, avec $\mathbf{V} = \mathbf{X}'$, $\mathbf{W} = \mathbf{X}' \setminus \mathbf{Y}$, $\mathbf{U} = \mathbf{Y}$. On obtient une variété projective lisse $\mathbf{X}''$ et un morphisme $f : \mathbf{X}'' \to \mathbf{X}'$ tel que si $\mathbf{Y}'' = f^{-1}(\mathbf{Y})$, $f|_{\mathbf{Y}''}$ soit un isomorphisme, et tel que $\mathbf{W}'' = f^{-1}(\mathbf{W})$ soit un diviseur à croisements normaux. Soient $\mathrm{X}'' = \mathbf{X}''(\mathbf{R})$, $\mathrm{Y}'' = \mathbf{Y}''(\mathbf{R})$. Il est clair que $f^* : \varphi \to \varphi \circ f$ induit un isomorphisme $\mathscr{S}(\mathrm{Y}) \to \mathscr{S}(\mathrm{Y}'')$. D'autre part, si $\varphi \in \mathrm{C}^\infty(\mathrm{X})$ est plate le long de X_1, alors

$f^*(\varphi) \in C^\infty(X')$ est plate le long de $X_1'' = \mathbf{W}''(\mathbf{R})$. Donc il suffit de démontrer le théorème pour X″, *i.e.* lorsque **W** est un diviseur à croisements normaux.

En tout point x_0 de **X**′, on peut alors trouver un système de coordonnées locales $z_1, \ldots, z_n$ centré en x_0, et un entier p, $0 \leqq p \leqq n$, tels que **W** soit défini par l'équation $z_1 \ldots z_p = 0$ au voisinage de x_0. Puisque X est compacte, quitte à faire une partition de l'unité, on peut supposer que φ est à support compact contenu dans un tel ouvert **U**.

Compte tenu du théorème 1.2.2 (i), il suffit de prouver que $D\varphi$ est bornée sur Y pour tout $D \in \mathrm{Diffreg}(\mathbf{Y})$; et comme $\mathrm{Diffreg}(\mathbf{Y})$ est engendré par $\mathrm{Diffreg}(\mathbf{X})$ et $\mathbf{C}[\mathbf{Y}]$, il suffit de prouver que $a.\varphi$ est bornée pour $a \in \mathbf{C}[\mathbf{Y} \cap \mathbf{U}]$, donc pour $a = 1/z_j$, $1 \leqq j \leqq p$, puisque $\mathbf{C}[\mathbf{Y} \cap \mathbf{U}]$ est engendré par $\mathbf{C}[\mathbf{U}]$ et les $1/z_j$; mais ceci est un exercice facile laissé au lecteur, conséquence de la platitude de φ le long des sous-variétés $z_j = 0$.

(*d*) Passons à la démonstration de l'assertion (ii). Ici encore on peut supposer sans perte de généralité que $Y = \mathbf{Y}(\mathbf{R})$. On peut considérer **Y** comme un ouvert de Zariski dans une variété projective lisse **Y**′, de manière à ce que $\mathbf{F} = \mathbf{Y}' \setminus \mathbf{Y}$ soit un diviseur à croisements normaux. Soient $Y' = \mathbf{Y}'(\mathbf{R})$, $F = \mathbf{F}(\mathbf{R})$; alors d'après (i), $\mathscr{S}(Y)$ est l'espace des fonctions C^∞ sur Y′ qui sont plates le long de F. Faisons de même pour **X**, et posons $\mathbf{E} = \mathbf{X}' \setminus \mathbf{X}$, $X' = \mathbf{X}'(\mathbf{R})$, $E = \mathbf{E}(\mathbf{R})$, de sorte que X s'identifie à une réunion de composantes connexes de $X' \setminus E$.

Soit $\mathbf{\Gamma}$ le graphe de u, $\mathbf{\Gamma}'$ son adhérence dans $\mathbf{X}' \times \mathbf{Y}'$, et identifions **X** à un ouvert de Zariski de $\mathbf{\Gamma}'$ via la première projection. Alors la deuxième projection est un morphisme de $\mathbf{\Gamma}'$ vers **Y**′ qui prolonge u. Par application du théorème de résolution des singularités, on peut trouver une variété projective lisse $\mathbf{\Gamma}''$ et un morphisme $\mathbf{\Gamma}'' \to \mathbf{\Gamma}'$ qui soit un isomorphisme au-dessus de **X**; en d'autres termes, on peut choisir la compactification **X**′ de telle sorte que u se prolonge en un morphisme $\mathbf{X}' \to \mathbf{Y}'$. Alors l'hypothèse de propreté entraîne que $(E \cap \bar{X}) \subset u^{-1}(F)$. En effet, soit $x \in E$, et soit (x_n) une suite de points de X convergeant vers x. Soit $y_n = u(x_n)$, et $y = u(x) = \lim_{n \to \infty} y_n$. Si l'on avait $y \in Y$, on pourrait prendre un voisinage compact K de y dans Y, d'où $x_n \in u^{-1}(K)$ pour n assez grand, et comme $u^{-1}(K) \cap X$ est compact par hypothèse, la suite (x_n) aurait un point d'accumulation dans X, ce qui est absurde. Donc $y \in F$, ce qui prouve notre assertion.

Mais il est clair que pour toute $\varphi \in \mathscr{S}(Y)$, $u^*(\varphi)$ est plate le long de $u^{-1}(F) \cap X'$. D'après ce qui précède, sa restriction à $\bar{X}$ est donc plate le long de $E \cap \bar{X}$, donc le prolongement par 0 en dehors de $\bar{X}$ de cette restriction est dans $C^\infty(X')$, et on a bien $u^*(\varphi) \in \mathscr{S}(X)$ d'après (i) d'où notre assertion.

(*e*) Démontrons enfin (iii). Choisissons comme au n° 1.1.5 un ouvert de définition **X** pour X, et une sous-variété lisse **Y** de **X** telle que Y soit une réunion de composantes connexes de $\mathbf{Y}(\mathbf{R})$.

Il est clair que l'on peut supposer que $X = \mathbf{X}(\mathbf{R})$. Soit **Y**′ l'adhérence de **Y** dans **X**, et posons $\mathbf{Z} = \mathbf{Y}' \setminus \mathbf{Y}$, $\mathbf{U} = \mathbf{X} \setminus \mathbf{Z}$. Appliquant le théorème de résolution des singularités, on trouve un morphisme $u : \mathbf{X}' \to \mathbf{X}$, induisant un isomorphisme au-dessus de **U**, et tel que l'adhérence de $\mathbf{Y} \subset \mathbf{U}$ dans **X**′ soit lisse. Soit $X' = \mathbf{X}'(\mathbf{R})$. Comme u est propre, on a d'après (ii) que $\varphi \circ u \in \mathscr{S}(X')$ pour toute $\varphi \in \mathscr{S}(X)$; il suffit donc de prouver le théorème lorsque $\mathbf{X}=\mathbf{X}'$; cela nous ramène au cas où Y est une réunion de composantes connexes de $\mathbf{Y}(\mathbf{R})$, avec $\mathbf{Y} \subset \mathbf{X}$ fermée lisse, puis au cas où $\mathrm{Y}=\mathbf{Y}(\mathbf{R})$.

Utilisant à nouveau le théorème 0.4, on peut réaliser $\mathbf{X}$ comme un ouvert de Zariski dans une variété projective lisse $\mathbf{X}'$, de telle sorte que $\mathbf{E}=\mathbf{X}' \setminus \mathbf{X}$ soit un diviseur à croisements normaux, que l'adhérence $\mathbf{Y}'$ de $\mathbf{Y}$ dans $\mathbf{X}'$ soit lisse, et à croisements normaux avec $\mathbf{E}$. Soient $\mathrm{X}'=\mathbf{X}'(\mathbf{R})$, $\mathrm{Y}'=\mathbf{Y}'(\mathbf{R})$, $\mathrm{E}=\mathbf{E}(\mathbf{R})$. D'après (i), $\mathscr{S}(\mathrm{X})$ s'identifie aux fonctions C^∞ sur X′ plates le long de E, et on a une description analogue pour $\mathscr{S}(\mathrm{Y})$; il est donc clair que l'application de restriction applique $\mathscr{S}(\mathrm{X})$ dans $\mathscr{S}(\mathrm{Y})$. Pour démontrer la surjectivité, tout revient à prouver que si $\varphi \in \mathscr{S}(\mathrm{Y})$ est donnée, alors la fonction $\bar{\varphi}$ égale à φ sur Y′ et identiquement nulle sur E se prolonge en une fonction C^∞ sur X′. Ainsi formulé, il s'agit d'un problème local de géométrie différentielle élémentaire, que nous laissons au lecteur.

1.2.5. Corollaire. — *Pour toute variété semi-algébrique* X, *l'espace* $\mathscr{S}(\mathrm{X})$ *est nucléaire.*

Démonstration. — On peut réaliser X comme sous-variété fermée d'un espace $\mathbf{R}^\mathrm{N}$. D'après (iii), $\mathscr{S}(\mathrm{X})$ est alors un quotient de $\mathscr{S}(\mathbf{R}^\mathrm{N})$. Comme $\mathscr{S}(\mathbf{R}^\mathrm{N})$ est nucléaire ([31], corollaire au théorème 51.5), il en va de même pour $\mathscr{S}(\mathrm{X})$ (*loc. cit.*, prop. 50.1).

1.2.6. Proposition. — (i) *Soit* E *un espace de Fréchet, et définissons de manière évidente l'espace* $\mathscr{S}(\mathrm{X}, \mathrm{E})$. *Alors l'application naturelle* $\mathscr{S}(\mathrm{X}) \hat{\otimes} \mathrm{E} \to \mathscr{S}(\mathrm{X}, \mathrm{E})$ *est un isomorphisme.*

(ii) *Soient* X *et* Y *deux variétés semi-algébriques. Alors l'application naturelle*

$$\mathscr{S}(\mathrm{X}) \hat{\otimes} \mathscr{S}(\mathrm{Y}) \to \mathscr{S}(\mathrm{X} \times \mathrm{Y})$$

est un isomorphisme.

Démonstration. — Laissée au lecteur (*cf.* [31], th. 51.6).

1.2.7. Lemme (« partitions de l'unité à croissance lente »). — *Soit* $(\mathrm{X}, \mathbf{X})$ *une variété semi-algébrique, et soit* $(\mathrm{X}_j)_{1 \leqq j \leqq n}$ *un recouvrement fini de* X *par des ouverts de Zariski* [i. e. $\mathrm{X}_j=\mathrm{X} \cap \mathbf{X}_j(\mathbf{R})$, *où* $\mathbf{X}_j$ *est un ouvert de Zariski de* $\mathbf{X}$]. *Alors il existe une partition* C^∞ *de l'unité* (α_j) *sur* X, *subordonnée à* (X_j), *telle que* $\alpha_j \mathscr{S}(\mathrm{X}) \subset \mathscr{S}(\mathrm{X}_j)$ *pour* $1 \leqq j \leqq n$.

Démonstration. — (*a*) Compte tenu du fait qu'une fonction φ sur X est dans $\mathscr{S}(\mathrm{X})$ si et seulement si sa restriction à chaque composante connexe X′ de X est dans $\mathscr{S}(\mathrm{X}')$ [conséquence du théorème 1.2.2 (i)] on se ramène facilement au cas où $\mathrm{X}=\mathbf{X}(\mathbf{R})$, $\mathrm{X}_j=\mathbf{X}_j(\mathbf{R})$.

Supposons le lemme démontré pour $n=2$, et passons de là au cas général, par récurrence sur n. Soit $\mathbf{Y}=\mathbf{X}_2 \cup \ldots \cup \mathbf{X}_n$, $\mathrm{Y}=\mathbf{Y}(\mathbf{R})$, où l'on peut sans perte de généralité supposer que $\mathbf{Y}$ est un ouvert affine de $\mathbf{X}$. Par hypothèse de récurrence, il existe une partition de l'unité $(\beta_j)_{2 \leqq j \leqq n}$ sur Y, subordonnée au recouvrement par les X_j, telle que $\beta_j \mathscr{S}(\mathrm{Y}) \subset \mathscr{S}(\mathrm{X}_j)$ pour $2 \leqq j \leqq n$. Si (α_1, β) est une partition de l'unité sur X subordonnée au recouvrement $(\mathrm{X}_1, \mathrm{Y})$ et vérifiant la condition du lemme, il est clair que l'on a la partition voulue avec $\alpha_j=\beta\beta_j$ pour $j > 1$.

(*b*) Supposons donc dorénavant que $n=2$. Pour $j=1, 2$, posons $\mathbf{F}_j=\mathbf{X}\setminus\mathbf{X}_j$, et soit $\mathbf{F}=\mathbf{F}_1 \cup \mathbf{F}_2$. Par une première application du théorème de résolution des singularités (th. 0.4), on peut considérer $\mathbf{X}$ comme un ouvert de Zariski dans une variété projective lisse $\mathbf{V}$. Appliquons alors une nouvelle fois la résolution des singularités, avec $\mathbf{U}=\mathbf{X}\setminus\mathbf{F}$, $\mathbf{W}=\varnothing$. On obtient une variété projective lisse $\mathbf{V}'$, et un morphisme $f:\mathbf{V}'\to\mathbf{V}$, tels que si $\mathbf{U}'=f^{-1}(\mathbf{U})$, $\mathbf{E}'=\mathbf{V}'\setminus\mathbf{U}'$, alors $\mathbf{E}'$ est un diviseur à croisements normaux, et $f:\mathbf{U}'\to\mathbf{U}$ est un isomorphisme. Pour $j=1, 2$, on pose $\mathbf{X}'_j=f^{-1}(\mathbf{X}_j)$, $X'_j=\mathbf{X}'_j(\mathbf{R})$, et $\mathbf{X}'=f^{-1}(\mathbf{X})$, $X'=\mathbf{X}'(\mathbf{R})$. Montrons que si l'on sait résoudre le problème pour X' et son recouvrement par les X'_j, alors on sait le résoudre pour X.

Soit donc $(\alpha'_j)_{j=1,2}$ une partition C^∞ de l'unité sur X' répondant à la question. Comme $\alpha'_1\equiv 1$ au voisinage de $F'_2=X'\setminus X'_2$, et $\alpha'_1\equiv 0$ au voisinage de F'_1, et de même pour α'_2, les α'_j passent au quotient en des fonctions C^∞ sur X, notées α_j, qui forment manifestement une partition de l'unité subordonnée au recouvrement (X_j) (pour la différentiabilité des α_j, on utilise le fait que les fibres de l'application f sont compactes). Reste à montrer que $\alpha_j\mathscr{S}(X)\subset\mathscr{S}(X_j)$. Pour fixer les idées, prenons $j=1$.

Soit ξ un champ de vecteurs régulier sur X', et montrons que $\xi\alpha'_1$ multiplie $\mathscr{S}(X')$ dans $\mathscr{S}(X'_1\cap X'_2)$. Comme $(\xi\alpha'_1)\varphi=\xi(\alpha'_1\varphi)-\alpha'_1(\xi\varphi)$, il est clair que $(\xi\alpha'_1)\varphi$ est dans $\mathscr{S}(X'_1)$; mais comme α'_1 est localement constante au voisinage de F'_2, $\xi\alpha'_1$ est nulle sur un voisinage de F'_2, donc $(\xi\alpha'_1)\varphi\in\mathscr{S}(X'_1\cap X'_2)$ d'après le théorème 1.2.4 (i). De plus, il est clair que pour tout champ de vecteurs seulement régulier sur $X'_1\cap X'_2$, la fonction $\xi\alpha'_1$ s'étend en une fonction C^∞ sur X' tout entier, et multiplie $\mathscr{S}(X')$ dans $\mathscr{S}(X'_1\cap X'_2)$.

Soit maintenant $\varphi\in\mathscr{S}(X)$. En considérant φ comme une fonction C^∞ sur V plate le long de $V\setminus X$, on voit que $\varphi\circ f=\varphi'\in\mathscr{S}(X')$. Si ξ est un champ de vecteurs régulier sur X, il définit un champ de vecteurs régulier sur $X'_1\cap X'_2$ via l'isomorphisme f, soit ξ'. Alors il est clair que $((\xi\alpha_1)\varphi)\circ f=(\xi'\alpha'_1)\varphi'$, et comme f induit un isomorphisme de $\mathscr{S}(X_1\cap X_2)$ sur $\mathscr{S}(X'_1\cap X'_2)$, on a bien $(\xi\alpha_1)\varphi\in\mathscr{S}(X_1\cap X_2)$.

Montrons maintenant que α_1 multiplie $\mathscr{S}(X)$ dans $\mathscr{S}(X_1)$. Il est clair que si $\varphi\in\mathscr{S}(X)$, la fonction $\alpha_1\varphi$ est plate le long de F_1; il suffit donc de montrer que $\alpha_1\varphi\in\mathscr{S}(X)$. Il est clair que $\alpha_1\varphi$ est bornée, puisque $(\alpha_1\varphi)\circ f=\alpha'_1\varphi'\in\mathscr{S}(X')$; de même, $a.\alpha_1\varphi$ est bornée pour tout $a\in\mathbf{C}[\mathbf{X}]$. Si ξ est un champ de vecteurs régulier sur $\mathbf{X}$, on a $\xi(\alpha_1\varphi)=(\xi\alpha_1)\varphi-\alpha_1(\xi\varphi)$. Or nous avons déjà vu que $(\xi\alpha_1)$ multiplie $\mathscr{S}(X)$ dans $\mathscr{S}(X_1\cap X_2)$; donc $\xi(\alpha_1\varphi)$ est encore bornée. On raisonnerait de manière analogue pour prouver que $D(\alpha_1\varphi)$ est bornée pour tout $D\in\mathrm{Diffreg}(X)$, d'où le résultat cherché.

(*c*) Nous pouvons donc supposer que dans les notations précédentes on a $\mathbf{V}=\mathbf{V}'$. En particulier, les adhérences $\mathbf{E}_j$ des $\mathbf{F}_j$ dans $\mathbf{V}$ sont des diviseurs à croisements normaux, et sont à croisements normaux avec $\mathbf{V}\setminus\mathbf{X}=\mathbf{E}_0$. Comme $\mathbf{F}_1\cap\mathbf{F}_2=\varnothing$ par hypothèse, on a $\mathbf{E}_1\cap\mathbf{E}_2\subset\mathbf{E}_0$; or à cause des croisements normaux cela n'est possible que si $\mathbf{E}_1\cap\mathbf{E}_2=\varnothing$. Soit alors $\mathbf{V}_j=\mathbf{V}\setminus\mathbf{E}_j$, $V_j=\mathbf{V}_j(\mathbf{R})$. Les V_j forment un recouvrement ouvert de la variété compacte V, et $V_j\cap X=X_j$. Toujours en vertu de l'interprétation de $\mathscr{S}(X)$ comme l'espace des fonctions C^∞ sur V plates le long de $V\setminus X$, il est clair que si (β_j) est une partition C^∞ de l'unité arbitraire sur V subordonnée au recouvrement (V_j), les $\alpha_j=\beta_j|_{X_j}$ répondent à la question.

C.Q.F.D.

1.3. L'ALGÈBRE DE SCHWARTZ D'UN GROUPE SEMI-ALGÉBRIQUE.

1.3.1. Soit G un groupe de Lie semi-algébrique (*cf.* n° 0.2). Soit $\pi: G \to G'$ le revêtement apparaissant dans la définition. Il est clair que pour tout $D \in \mathrm{Diffreg}(G')$ on peut définir un unique opérateur différentiel $\pi^* D$ sur G tel que $(\pi^* D)(\pi^* \varphi) = \pi^* (D\varphi)$ pour toute $\varphi \in \mathscr{S}(G')$. Nous notons Diffreg(G) l'algèbre d'opérateurs différentiels sur G ainsi obtenue, et nous définissons l'espace $\mathscr{S}(G)$ comme à la définition 1.2.1. Il est clair en particulier que si $\varphi \in \mathscr{S}(G')$, alors $\pi^* \varphi \in \mathscr{S}(G)$. Inversement, soit Z le noyau de π, $|Z|$ son cardinal. Pour $\varphi \in \mathscr{S}(G)$, posons $\pi_* \varphi(g) = 1/|Z| \sum_{z \in Z} \varphi(gz)$, et considérons $\pi_* \varphi$ comme une fonction sur G'. Alors il est clair que $\pi_* \varphi \in \mathscr{S}(G')$.

1.3.2. LEMME. — *Soit* (X, **X**) *une variété semi-algébrique,* ω *une forme différentielle régulière de degré maximal sur* **X**. *Alors la densité* $|\omega|$ *est tempérée sur* X. $\Big[$*Cela veut dire que pour toute* $\varphi \in \mathscr{S}(X)$, *on a* $\int_X |\varphi(x)|.|\omega| < +\infty.\Big]$

Démonstration. — D'après le théorème de résolution des singularités (th. 0.4), on peut considérer **X** comme un ouvert de Zariski dans une variété projective lisse **V**. Soit $V = \mathbf{V}(\mathbf{R})$; alors d'après le théorème 1.2.4, $\mathscr{S}(X)$ s'identifie à l'espace des fonctions C^∞ sur V plates le long du complémentaire de X. Comme ω peut s'écrire localement comme un multiple rationnel d'une forme différentielle régulière sur V, la densité $\varphi(x)|\omega|$ se prolonge par zéro en une densité continue sur V tout entier; donc elle est évidemment intégrable.

1.3.3. COROLLAIRE. — *Réalisons* **X** *comme sous-variété fermée de* $\mathbf{C}^n$ *de telle sorte que* $\mathbf{X}(\mathbf{R}) = \mathbf{X} \cap \mathbf{R}^n$. *Alors il existe un entier* N *tel que* $\int_X (1/(1+\|x\|)^N)|\omega| < +\infty$.

Démonstration. — Classique $\Big[$supposer le contraire, et construire $\varphi \geqq 0 \in \mathscr{S}(\mathbf{R}^n)$ telle que $\int_X \varphi|\omega| = +\infty\Big]$.

1.3.4. Soit G comme en 1.3.1, et fixons une mesure de Haar à gauche dg sur G, que l'on peut écrire $dg = |\omega|$, où ω est une forme différentielle invariante à gauche de degré maximal. Soit dg' la mesure de Haar correspondante sur G'. D'après le corollaire 1.3.3, il existe $a > 0$ dans Reg(G') telle que $\int_{G'} (1/a(g'))\, dg' < +\infty$. Or, par définition, pour toute $\varphi \in \mathscr{S}(G)$ la fonction $a(g)\varphi(g)$ est bornée, disons par $M > 0$ (dépendant de φ). Donc :

$$\int_G |\varphi(g)|\, dg \leqq M \int_G \frac{1}{a(g)}\, dg = M\,|Z| \int_{G'} \frac{1}{a(g')}\, dg' < +\infty$$

ce qui prouve que $\mathscr{S}(G) \subset L^1(G, dg)$.

1.3.5. PROPOSITION. — *$\mathscr{S}$(G) est une sous-algèbre de convolution de* $L^1(G, dg)$*; on dira que $\mathscr{S}$(G) est l'algèbre de Schwartz du groupe de Lie semi-algébrique* G.

Démonstration. — Soient $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathscr{S}(G)$, et montrons que $\varphi_1 * \varphi_2 \in \mathscr{S}(G)$. Puisque

$$|\varphi_1 * \varphi_2(g)| \leqq \left(\int_G |\varphi_2(g')|\, dg'\right) \sup_{g'' \in G} |\varphi_1(g'')|$$

il est clair que la fonction $\varphi_1 * \varphi_2$ est bornée.

D'après le théorème 1.2.2 (i), dans la définition de $\mathscr{S}$(G) on peut remplacer Diffreg (G) par Diffreg (**G**). Or celle-ci est engendrée par les champs de vecteurs invariants à droite (par exemple), que nous identifierons à l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de G agissant par convolution à gauche, et par l'algèbre des fonctions régulières $\mathbf{C}[\mathbf{G}]$.

Pour $\xi \in \mathfrak{g}$, on a $\xi * (\varphi_1 * \varphi_2) = (\xi * \varphi_1) * \varphi_2$, donc $\xi * (\varphi_1 * \varphi_2)$ est encore une fonction bornée. Soit maintenant $a \in \mathbf{C}[\mathbf{G}]$. Par définition d'un groupe algébrique affine, il existe des fonctions $b_j, c_j \in \mathbf{C}[\mathbf{G}]$, $1 \leqq j \leqq n$, telles que $a(g_1 g_2) = \sum_{j=1}^{n} b_j(g_1) c_j(g_2)$ pour tous $g_1, g_2 \in G$. D'où :

$$\begin{aligned} a(g)\, \varphi_1 * \varphi_2(g) &= \int_G a(g)\, \varphi_1(g_1)\, \varphi_2(g_1^{-1} g)\, dg_1 \\ &= \sum_{j=1}^{n} \int_G b_j(g_1)\, \varphi_1(g_1)\, c_j(g_1^{-1} g)\, \varphi_2(g_1^{-1} g)\, dg_1 \\ &= \left(\sum_{j=1}^{n} (b_j \varphi_1) * (c_j \varphi_2)\right)(g) \end{aligned}$$

C.Q.F.D.

1.3.6. EXEMPLES. — (i) Si G = K est compact, nous avons déjà remarqué que $\mathscr{S}(G) = C^\infty(K)$.

(ii) Si $G = \mathbf{R}_+^*$, on a $\mathscr{S}(G) = \{\varphi \in \mathscr{S}(\mathbf{R}) \mid \varphi \equiv 0 \text{ sur }]-\infty, 0]\}$, *i.e.* ce sont les fonctions C^∞ sur $]0, +\infty]$, plates en 0 et « Schwartz en $+\infty$ ».

(iii) Si G = N est unipotent, alors $\mathscr{S}(G) = \mathscr{S}(N)$ est l'espace de Schwartz usuel de N, identifié à son algèbre de Lie à l'aide de l'application exponentielle.

(iv) Si G = KAN est réductif, écrit dans la décomposition d'Iwasawa, alors $\mathscr{S}(G) = C^\infty(K) \hat{\otimes} \mathscr{S}(A) \hat{\otimes} \mathscr{S}(N)$ d'après la proposition 1.2.6 (ii).

(v) Dans le cas général, on a G = LU avec L réductif et U unipotent (*cf.* n° 0.3). Alors $\mathscr{S}(G) = \mathscr{S}(L) \hat{\otimes} \mathscr{S}(U)$.

1.3.7. REMARQUE. — D'après ce qui précède, on voit en particulier que l'on a toujours $\mathscr{S}(G) \simeq s(\mathbf{N})$ comme espace de Fréchet, où $s(\mathbf{N})$ est l'espace des suites à décroissance rapide (sauf dans le cas trivial où G est un groupe fini). En fait, nous verrons plus tard (th. 5.2.7) que $\mathscr{S}(X) \simeq s(\mathbf{N})$ pour toute variété semi-algébrique de dimension > 0.

1.4. REPRÉSENTATIONS À CROISSANCE MODÉRÉE.

1.4.1. DÉFINITION. — *Soient* G *un groupe semi-algébrique,* E *un* G*-module* (cf. *n°* 0.5). *Nous dirons que* E *est à croissance modérée, si pour toute semi-norme continue* q *sur* E *il existe une semi-norme continue* q' *et une fonction* $a > 0$ *dans* Reg(G) *telles que pour tous* $v \in \mathrm{E}$, $g \in \mathrm{G}$ *l'on ait :*

$$q(g.v) \leqq a(g)\, q'(v).$$

Nous noterons $\mathscr{S}\mathbf{mod}_{\mathrm{G}}$ *la sous-catégorie pleine de* $\mathbf{mod}_{\mathrm{G}}$ *formée des* G*-modules différentiables à croissance modérée.*

1.4.2. EXEMPLE (*cf.* [32], lemma 2.2). – Supposons que G soit réductif. Alors *toute* représentation banachique continue de G est à croissance modérée.

En revanche, si G est unipotent, les seules représentations de dimension finie de G qui soient à croissance modérée sont celles dont tous les sous-quotients simples sont unitaires.

1.4.3. PROPOSITION. — *Soit* E *un* G*-module à croissance modérée. Alors tout sous-module fermé et tout quotient de* E *par un sous-module fermé sont des* G*-modules à croissance modérée. Le* G*-module* E_∞ *est à croissance modérée* (*et donc dans* $\mathscr{S}\mathbf{mod}_{\mathrm{G}}$).

Démonstration. – Laissée au lecteur (*cf.* [8], prop. 1.4).

1.4.4. Il est clair que si E est un G-module à croissance modérée, l'action de $\mathrm{C}_c^\infty(\mathrm{G})$ sur E par convolution se prolonge en une action de l'algèbre de Fréchet $\mathscr{S}(\mathrm{G})$. Nous noterons $\varphi * v = \int_{\mathrm{G}} \varphi(g).gv\,dg$.

Il est facile de voir que $\mathscr{S}(\mathrm{G})$ est dans $\mathscr{S}\mathbf{mod}_{\mathrm{G}}$ pour l'action de G à gauche ou à droite, et en fait pour l'action de $\mathrm{G}\times\mathrm{G}$. En réalité, il est préférable de définir l'action à droite de G sur $\mathscr{S}(\mathrm{G})$ par la formule $\varphi * g(g_1) = \Delta_{\mathrm{G}}(g)\,\varphi(g_1 g^{-1})$, où $\Delta_{\mathrm{G}}(g) = |\det \mathrm{Ad}_{\mathfrak{g}}(g)|$ est la fonction modulaire de G (cela revient à traiter les éléments de $\mathscr{S}(\mathrm{G})$ comme des densités); nous adopterons toujours cette convention. De même, si E est un espace de Fréchet arbitraire, $\mathscr{S}(\mathrm{G}, \mathrm{E}) = \mathscr{S}(\mathrm{G}) \hat{\otimes} \mathrm{E}$ est un G-module à croissance modérée pour l'action de G par translations à gauche, sans action sur E.

1.4.5. LEMME. — *Soient* $\mathrm{E}_1, \mathrm{E}_2 \in \mathscr{S}\mathbf{mod}_{\mathrm{G}}$; *alors* $\mathrm{E}_1 \hat{\otimes} \mathrm{E}_2 \in \mathscr{S}\mathbf{mod}_{\mathrm{G}\times\mathrm{G}}$.

Démonstration. – D'après l'exemple 2.3.3 ci-dessous, un G-module à croissance modérée E est différentiable si et seulement si l'application canonique $\mathscr{S}(\mathrm{G}) \hat{\otimes} \mathrm{E} \to \mathrm{E}$ est surjective. Comme $\mathrm{E}_1 \hat{\otimes} \mathrm{E}_2$ est évidemment un $(\mathrm{G}\times\mathrm{G})$-module à croissance modérée, et que $\mathscr{S}(\mathrm{G}\times\mathrm{G}) = \mathscr{S}(\mathrm{G}) \hat{\otimes} \mathscr{S}(\mathrm{G})$ d'après la proposition 1.2.6, la surjectivité de $\mathscr{S}(\mathrm{G}) \hat{\otimes} \mathrm{E}_j \to \mathrm{E}_j$ pour $j = 1, 2$ entraîne celle de $\mathscr{S}(\mathrm{G}\times\mathrm{G}) \hat{\otimes} (\mathrm{E}_1 \hat{\otimes} \mathrm{E}_2) \to \mathrm{E}_1 \hat{\otimes} \mathrm{E}_2$.

2. Représentations induites au sens $\mathscr{S}$

Dans tout ce chapitre, on note $(\mathrm{G}, \mathrm{G}', \mathbf{G})$ *un groupe de Lie semi-algébrique* (cf. *n°* 0.2), $\mathbf{H}$ *un sous-groupe fermé de* $\mathbf{G}$, $\mathrm{H}' = \mathbf{H} \cap \mathrm{G}'$, H *l'image réciproque de* H' *dans* G. *On fixe* *des mesures de Haar à gauche dg et dh sur* G *et* H *respectivement. On note* $\Delta_G(g) = |\det_{\mathfrak{g}}(\mathrm{Ad}(g))|$ *la fonction modulaire de* G, *où* $\mathfrak{g}$ *est l'algèbre de Lie de* G; *on définit de même* Δ_H, *et on note* $\Delta_{G/H}$ *le caractère* $\Delta_G . \Delta_H^{-1}$ *de* H. *On rappelle que* $d(gg_1) = \Delta_G^{-1}(g_1)\, dg$, *de sorte que* $\Delta_G(g)\, dg$ *est une mesure de Haar à droite sur* G. *On dit que c'est la mesure de Haar à droite définie par dg.*

2.1. DÉFINITION DES REPRÉSENTATIONS INDUITES.

2.1.1. Soit $F \in \mathscr{S}\mathbf{mod}_H$ (*cf.* n° 1.4.1). Nous nous proposons de définir l'induite « au sens $\mathscr{S}$ » (*i.e.* au sens des espaces de Schwartz) de H à G de F. Il sera commode de procéder de manière un peu inhabituelle, comme suit.

Soit $\mathscr{S}(G, F)$ l'espace des fonctions de Schwartz sur G à valeurs dans F, muni de l'action de G par translations à gauche, sans action sur F. Pour $\varphi \in \mathscr{S}(G, F)$ on définit la fonction $\bar{\varphi} \in C^\infty(G, F)$ par la formule $\bar{\varphi}(g) = \int_H h . \varphi(gh)\, dh$. On vérifie immédiatement que l'application $\varphi \to \bar{\varphi}$ est continue, et que $\bar{\varphi}$ vérifie la relation de covariance usuelle $\bar{\varphi}(gh) = h^{-1} \bar{\varphi}(g)$ pour tous $g \in G$, $h \in H$; de plus, l'application $\varphi \to \bar{\varphi}$ commute aux actions de G par translations à gauche. On a donc défini un opérateur d'entrelacement de $\mathscr{S}(G, F)$ vers $C^\infty \mathrm{Ind}_H^G(F)$.

2.1.2 DÉFINITION. — *Dans la situation ci-dessus, on note* $\mathscr{S}\,\mathrm{Ind}_H^G(F)$ *l'image dans* $C^\infty \mathrm{Ind}_H^G(F)$ *de l'application* $\varphi \to \bar{\varphi}$, *et on la munit de la topologie quotient de celle de* $\mathscr{S}(G, F)$. *Comme* $\mathscr{S}(G, F) \in \mathscr{S}\mathbf{mod}_G$ (cf. *n°* 1.4.4), *il résulte de la proposition* 1.4.3 *que* $\mathscr{S}\,\mathrm{Ind}_H^G(F) \in \mathscr{S}\mathbf{mod}_G$.

On note $\mathscr{S}^{1/2}\,\mathrm{Ind}_H^G(F) = \mathscr{S}\,\mathrm{Ind}_H^G(\Delta_{G/H}^{-1/2} \otimes F)$; *c'est l'induite « au sens des demi-densités* $\mathscr{S}$ ». *Il est clair que si* F *possède un produit scalaire préhilbertien* H-*invariant*, $\mathscr{S}^{1/2}\,\mathrm{Ind}_H^G(F)$ *possède un produit scalaire préhilbertien* G-*invariant*.

2.1.3. DÉFINITION. — *Si* X *est une variété semi-algébrique*, F *un espace de Fréchet, on dit qu'une fonction* $\varphi \in C^\infty(X, F)$ *est dans* $\mathscr{O}_M(X, F)$ *si* $\psi . \varphi \in \mathscr{S}(X, F)$ *pour toute* $\psi \in \mathscr{S}(X)$. *On identifie* $\mathscr{O}_M(X, F)$ *à un sous-espace de* $\mathrm{Hom}(\mathscr{S}(X), \mathscr{S}(X, F))$, *et on le munit de la topologie de la convergence compacte* [*qui est la même que la topologie de la convergence bornée puisque* $\mathscr{S}(X)$ *est un espace de Montel*]. *Ce n'est donc pas en général un espace de Fréchet.*

Si $F \in \mathscr{S}\mathbf{mod}_H$, *on définit* $\mathscr{O}_M\,\mathrm{Ind}_H^G(F)$ *comme le sous-espace fermé de* $\mathscr{O}_M(G, F)$ *formé des fonctions* φ *vérifiant* $\varphi(gh) = h^{-1}\varphi(g)$ *pour tous* $g \in G$, $h \in H$. *Il est clair que l'on obtient ainsi un* G-*module localement convexe complet. On pose*

$$\mathscr{O}_M^{1/2}\,\mathrm{Ind}_H^G(F) = \mathscr{O}_M\,\mathrm{Ind}_H^G(\Delta_{G/H}^{-1/2} \otimes F).$$

2.1.4. REMARQUE. — En utilisant au besoin un recouvrement trivialisant de X (lemme 2.2.5) il est facile de voir que $\mathscr{S}\,\mathrm{Ind}_H^G(F)$ contient toujours $C_c^\infty \mathrm{Ind}_H^G(F)$ (induite C^∞ « à support compact modulo H »). En particulier, si G/H est compact, on a $\mathscr{S}\,\mathrm{Ind}_H^G(F) = \mathscr{O}_M\,\mathrm{Ind}_H^G(F) = C^\infty \mathrm{Ind}_H^G(F)$.

Toujours par trivialisation locale, on voit aussi que $\mathscr{S}\,\mathrm{Ind}_H^G(\mathbf{C})$ s'identifie canoniquement à $\mathscr{S}(G/H)$, avec l'action de G par translations à gauche.

2.1.5. Nous énonçons dans les deux lemmes suivants quelques propriétés formelles de ces représentations induites, dont nous laisserons la démonstration au lecteur.

LEMME. — *Soient* $E \in \mathscr{S}\mathbf{mod}_G$, $F \in \mathscr{S}\mathbf{mod}_H$. *Alors on a une bijection canonique :*

$$\mathrm{Hom}_H(E, F) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_G(E, \mathscr{O}_M \mathrm{Ind}_H^G(F))$$

(cf. *déf.* 2.1.3), *donnée par* $u \to \bar{u}$, *où* $\bar{u}(v)(g) = u(g^{-1} v)$.

2.1.6. LEMME (transitivité des inductions $\mathscr{S}$ et $\mathscr{O}_M$). — *Soit* $\mathbf{H}_1$ *un sous-groupe fermé de* $\mathbf{H}$, $H_1 \subset G$ *le sous-groupe correspondant*, $F_1 \in \mathscr{S}\mathbf{mod}_{H_1}$. *Alors on a un isomorphisme canonique :*

$$\mathscr{S}\,\mathrm{Ind}_{H_1}^G(F_1) \simeq \mathscr{S}\,\mathrm{Ind}_H^G(\mathscr{S}\,\mathrm{Ind}_{H_1}^H(F_1))$$

et des isomorphismes analogues pour $\mathscr{O}_M \mathrm{Ind}$, $\mathscr{S}^{1/2} \mathrm{Ind}$, $\mathscr{O}_M^{1/2} \mathrm{Ind}$.

2.2. TRIVIALISATION LOCALE DES INDUITES AU SENS $\mathscr{S}$.

2.2.1. Notre référence pour la notion de fibré principal en géométrie algébrique sera [29]. Si $\mathbf{X}$ est une variété algébrique, un fibré principal de base $\mathbf{X}$ et de groupe $\mathbf{H}$ sera donc la donnée d'une variété algébrique $\mathbf{P}$, d'un morphisme $\mathbf{P} \times \mathbf{H} \to \mathbf{P}$ définissant une action à droite de $\mathbf{H}$, et d'un morphisme $\pi : \mathbf{P} \to \mathbf{X}$ tel que $\pi(ph) = \pi(p)$ pour tous $p \in \mathbf{P}$, $h \in \mathbf{H}$, et « localement trivial en topologie étale » (« localement isotrivial » dans la terminologie de [29]) au sens suivant :

(LTE) *Pour tout* $x \in \mathbf{X}$ *il existe un ouvert* $\mathbf{U}$ *de* $\mathbf{X}$ *contenant* x, *et un revêtement fini non ramifié* (*on dit aussi un morphisme étale et fini*) $\mathbf{U}' \to \mathbf{U}$ *tel que le fibré* $\mathbf{U}' \times_{\mathbf{U}} \pi^{-1}(\mathbf{U})$ *soit isomorphe à* $\mathbf{U}' \times \mathbf{H}$.
(en particulier ceci entraîne que l'action de $\mathbf{H}$ est simplement transitive sur chaque fibre de π).

D'après [29], prop. 3, l'action à droite de $\mathbf{H}$ sur $\mathbf{G}$ et la projection canonique $\pi : \mathbf{G} \to \mathbf{G}/\mathbf{H}$ définissent une structure de $\mathbf{H}$-fibré principal. Comme le montre l'exemple $\mathbf{G} = \mathbf{GL}_1$, $\mathbf{H} = \{\pm 1\}$, on ne peut pas en général remplacer la condition (LTE) par la trivialité locale en topologie de Zariski, *a priori* plus naturelle. Cependant, nous verrons que la trivialité locale est rétablie dans la catégorie semi-algébrique, ce qui suffira à nos besoins.

2.2.2. Soit X une variété semi-algébrique, $\pi : X' \to X$ un revêtement fini de X, considéré *a priori* comme une variété analytique réelle. Généralisant le n° 1.3.1, on définit Diffreg(X') comme l'image réciproque de Diffreg(X) par π, et $\mathscr{S}(X')$ comme à la définition 1.2.1.

Lorsque le revêtement est trivial, X' est la réunion disjointe d'un nombre fini de sous-variétés ouvertes X'_j, et la restriction de π à chaque X'_j est un difféomorphisme. Alors $\mathscr{S}(X') = \oplus_j \mathscr{S}(X'_j)$, et chaque $\mathscr{S}(X'_j)$ est simplement déduit de $\mathscr{S}(X)$ par transport de structure. La plupart des questions concernant les espaces $\mathscr{S}(X')$ se ramènent à ce cas, en considérant un recouvrement trivialisant de X muni d'une partition de l'unité à croissance lente, comme nous l'avons fait dans la démonstration du lemme 2.2.5 (*b*) ci-dessous. On montre par exemple ainsi que l'espace $\mathscr{S}(X')$ est nucléaire, et on en déduit l'analogue de la proposition 1.2.6.

Nous laisserons au lecteur le soin de démontrer suivant ce schéma l'analogue suivant du théorème 1.2.2 (ii) :

2.2.3. PROPOSITION. — *Soient* X, Y *deux variétés semi-algébriques,* $X' \to X$, $Y' \to Y$ *des revêtements finis de même rang n, et soit* $u: X \to Y$ *un difféomorphisme vérifiant l'hypothèse du théorème* 1.2.2 (ii). *Soit* $u': X' \to Y'$ *un difféomorphisme au-dessus de u. Alors u' induit un isomorphisme* $\mathscr{S}(Y') \to \mathscr{S}(X')$.

2.2.4. Si Y est une sous-variété semi-algébrique de $X = G/H$, on définit $G|_Y$ (resp. $G'|_Y$) comme l'image réciproque de Y dans G (resp. G'). D'après le n° 2.2.2, l'espace de Schwartz $\mathscr{S}(G|_Y)$ est défini. Il est clair alors que dans la définition 2.1.2 on peut remplacer G par le H-fibré principal $G|_Y$; on obtient un espace de Fréchet noté $\mathscr{S}\operatorname{Ind}_H^{G|_Y}(F)$.

Nous dirons qu'un ouvert semi-algébrique $(Y, \mathbf{Y})$ de X (*cf.* n° 1.1.5) est un ouvert de trivialité semi-algébrique pour G si les conditions suivantes sont remplies :

(*a*) On a un revêtement fini non ramifié $\mathbf{Y}' \to \mathbf{Y}$ et un isomorphisme $\mathbf{Y}' \times \mathbf{H} \xrightarrow{\sim} \mathbf{Y}' \times_{\mathbf{Y}} \pi^{-1}(\mathbf{Y})$.

(*b*) Le revêtement $\mathbf{Y}'$ est trivial au-dessus de Y, et l'on a fait choix d'un relèvement de Y dans $\mathbf{Y}'$. On obtient donc une inclusion de $Y \times H'$ comme réunion de composantes connexes de $\mathbf{Y}'(\mathbf{R}) \times \mathbf{H}(\mathbf{R})$, et l'application naturelle $\mathbf{Y}' \times \mathbf{H} \to \pi^{-1}(\mathbf{Y})$ se restreint en un isomorphisme $Y \times H' \to G'|_Y$, qui d'après le théorème 1.2.2 (ii) induit un isomorphisme $\mathscr{S}(Y \times H') = \mathscr{S}(Y) \hat{\otimes} \mathscr{S}(H') \to \mathscr{S}(G'|_Y)$.

(*c*) Le revêtement $G|_Y \to Y \times H'$ est trivial au-dessus de $Y \times \{1\} \simeq Y$, et l'on a fait choix d'un relèvement de Y dans $G|_Y$. On obtient un isomorphisme $Y \times H \to G|_Y$ au-dessus de $Y \times H' \to G'|_Y$, d'où d'après la proposition 2.2.3 un isomorphisme $\mathscr{S}(G|_Y) \to \mathscr{S}(Y \times H) = \mathscr{S}(Y) \hat{\otimes} \mathscr{S}(H)$.

Pour abréger, nous dirons que le fibré principal $G|_Y$ est semi-algébriquement trivial. On obtient alors un isomorphisme $\mathscr{S}\operatorname{Ind}_H^{G|_Y}(F) \xrightarrow{\sim} \mathscr{S}(Y, F)$ par restriction à la sous-variété $Y \subset G|_Y$ de la fonction $\bar{\varphi}$ introduite en 2.1.1. [Pour montrer que l'application de restriction est surjective, on pourra choisir une fonction $\chi \in C_c^\infty(H)$ d'intégrale 1, et associer à $\psi \in \mathscr{S}(Y, F)$ la fonction φ définie par $\varphi(y, h) = h^{-1}\psi(y)\chi(h)$. Alors on vérifie aussitôt que $\bar{\varphi}|_Y = \psi$.]

2.2.5. LEMME. — *Soit* $X = G/H$, *et* $\pi: G \to X$ *la projection canonique. Alors il existe un recouvrement fini de* X *par des ouverts semi-algébriques* $(X_j)_{1 \leqq j \leqq n}$ *avec les propriétés suivantes :*

(i) *Pour chaque* $1 \leqq j \leqq n$, *il existe un difféomorphisme* $X_j \to \mathbf{R}^d$ $[d = \dim(X)]$ *vérifiant l'hypothèse du théorème* 1.2.2 (ii).

(ii) *Chaque fibré principal* $G_j = G|_{X_j}$ *est semi-algébriquement trivial* (cf. *n°* 2.2.4).

(iii) *Il existe une partition de l'unité* C^∞, *soit* (α_j), *subordonnée à* (X_j), *telle que* $\alpha_j \mathscr{S}(X) \subset \mathscr{S}(X_j)$ *pour tout* $1 \leqq j \leqq n$.

Démonstration. — (*a*) Supposons qu'il existe un recouvrement ouvert de X par des ouverts de Zariski $(Y_i)_{1 \leqq i \leqq m}$, tel que l'on sache démontrer le lemme pour chaque $G|_{Y_i}$. Cela donne des ouverts semi-algébriques X_{ij} et des partitions de l'unité (α_{ij}). D'après le lemme 1.2.7, il existe une partition de l'unité (β_i) subordonnée à (Y_i) telle que $\beta_i \mathscr{S}(X) \subset \mathscr{S}(Y_i)$. Alors on peut prendre l'ensemble de tous les X_{ij} comme recouvrement de X, avec la partition de l'unité formée des $\beta_i \alpha_{ij}$.

(*b*) D'après (*a*), la question est locale en topologie de Zariski. Vu la propriété (LTE) du n° 2.2.1, on peut donc supposer qu'il existe un revêtement fini X′ de X tel que le fibré $X' \times_X G$, que nous noterons simplement $G|_{X'}$, soit trivial.

D'après le théorème 0.4, on peut plonger **X** dans une variété projective lisse **V** de telle sorte que $\mathbf{V} \setminus \mathbf{X} = \mathbf{E}$ soit un diviseur à croisements normaux. Si $V = \mathbf{V}(\mathbf{R})$, $E = \mathbf{E}(\mathbf{R})$, il en résulte que X est réunion de composantes du complémentaire de E dans V.

Soit $x_0 \in V$, et soit $(z_1, \ldots, z_d)$ un système de coordonnées locales pour **V** en x_0. Alors on peut considérer $x \to z(x) = (z_1(x), \ldots, z_d(x))$ comme un morphisme d'un ouvert de Zariski **U** convenable de **V** contenant x_0 vers $\mathbf{C}^d$, et il est clair que z induit un difféomorphisme d'un voisinage semi-algébrique $Y(x_0)$ de x_0 dans V sur le pavé ouvert $]-\varepsilon, \varepsilon[^d$ de $\mathbf{R}^d$, pour $\varepsilon > 0$ assez petit. Puisque V est compacte, on peut trouver un recouvrement fini de V par de tels ouverts, où en outre on peut supposer que $Y(x_0) \cap E = \varnothing$ si $x_0 \notin E$, et que si $x_0 \in E$, alors il existe un p, $1 \leqq p \leqq d$, tel que $E \cap Y(x_0)$ soit la réunion des hyperplans $z_1 = 0, \ldots, z_p = 0$. Soit $(Y_i)_{1 \leqq i \leqq m}$ un tel recouvrement, et (β_i) une partition C^∞ de l'unité sur V subordonnée à (Y_i). Notons (X_j) le recouvrement ouvert de X obtenu en prenant les composantes connexes des $Y_i \cap X$, et (α_j) la partition de l'unité formée des restrictions correspondantes des β_i.

D'après le théorème 1.2.4 (i), on peut interpréter $\mathscr{S}(X)$ comme l'espace des $\varphi \in C^\infty(V)$ qui sont plates le long de $V \setminus X$, et on a une interprétation analogue pour les $\mathscr{S}(X_j)$. On en déduit aussitôt que α_j multiplie $\mathscr{S}(X)$ dans $\mathscr{S}(X_j)$. De plus, chaque X_j est difféomorphe à un produit d'intervalles $]0, \varepsilon[^p \times]-\varepsilon, \varepsilon[^{d-p}$ par la restriction d'un morphisme de variétés algébriques; or c'est un exercice élémentaire de trouver une fonction rationnelle $\mathbf{C} \to \mathbf{C}$ qui induise un difféomorphisme d'un intervalle $]a, b[$ donné sur **R**, donc la condition (i) est évidente. Enfin comme les X_j sont contractiles, la trivialité des revêtements apparaissant dans les conditions (*b*) et (*c*) du n° 2.2.4 est automatique, la condition (*a*) étant vérifiée par hypothèse. Donc la condition (ii) est elle aussi remplie, et le lemme est démontré.

2.2.6. LEMME. — *Soit* $F \in \mathscr{S}\mathbf{mod}_H$, $E = \mathscr{S}\,\mathrm{Ind}_H^G(F)$ (*déf.* 2.1.2).

(i) *Si* $\alpha \in \mathscr{O}_M(X)$ (*déf.* 2.1.3), $X = G/H$, *alors* α *multiplie* E *dans lui-même.*

(ii) *Reprenons les notations du lemme* 2.2.5, *et posons* $E_j = \mathscr{S}\,\mathrm{Ind}_H^{G_j}(F)$. *Alors* $\alpha_j E \subset E_j$; *en particulier, tout* $v \in E$ *possède une écriture* $v = \sum_{j=1}^{n} v_j$, *avec* $v_j \in E_j$.

Démonstration. — (i) Il est clair que l'application $\varphi \to \bar{\varphi}$ de $\mathscr{S}(G, F)$ dans $C^\infty\,\mathrm{Ind}_H^G(F)$ définie au n° 2.1.1 commute aux actions de $\mathscr{O}_M(X)$. Il suffit donc de montrer que α multiplie $\mathscr{S}(G, F)$ dans lui-même, et pour cela, que la fonction $\tilde{\alpha}=\alpha\circ\pi$, où $\pi: G\to X$ est la projection canonique, appartient à $\mathscr{O}_M(G)$. Comme dans le cas classique où $G=\mathbf{R}^n$, cela revient à montrer que pour tout $u\in U(\mathfrak{g})$ il existe $a\in \operatorname{Reg}(G)$, $a>0$, telle que $|u*\tilde{\alpha}(g)|\leqq a(g)$, $\forall g\in G$; en général, a dépendra de u. Comme la projection canonique $G\to X$ est un G-morphisme, l'application $\alpha\to\tilde{\alpha}$ commute aux actions de $U(\mathfrak{g})$. Or par hypothèse il existe $b\in\operatorname{Reg}(X)$, $b>0$, telle que $|u*\alpha(x)|\leqq b(x)$, $\forall x\in X$; alors $a=\tilde{b}$ répond à la question.

(ii) Si (α_j) est la partition de l'unité du lemme 2.2.5 (iii), il est clair que $\alpha_j\varphi\in\mathscr{S}(G_j, F)$ pour toute $\varphi\in\mathscr{S}(G, F)$. Donc $\alpha_j\bar{\varphi}=(\alpha_j\varphi)^-\in E_j$.

C.Q.F.D.

2.2.7. Proposition. — *Le foncteur* $\mathscr{S}\operatorname{Ind}_H^G$ *est exact et fidèle de* $\mathscr{S}\mathbf{mod}_H$ *vers* $\mathscr{S}\mathbf{mod}_G$. *Si* $u: F_1\to F_2$ *est un morphisme surjectif* (*resp. fort*, cf. *n°* 0.5) *dans* $\mathscr{S}\mathbf{mod}_H$, *le morphisme* $\bar{u}: E_1\to E_2$ *correspondant, avec* $E_j=\mathscr{S}\operatorname{Ind}_H^G(F_j)$, *est encore surjectif* (*resp. fort*).

Démonstration. — Laissée au lecteur.

2.3. Modules différentiables.

2.3.1. Définition. — *Soit* $\mathscr{A}$ *une algèbre de Fréchet*, E *un* $\mathscr{A}$*-module fréchétique. On dit que* E *est non dégénéré* (*resp. différentiable*), *si* $\{v\in E\mid \mathscr{A}*v=0\}=\{0\}$, *et si l'application canonique* $\mathscr{A}\hat{\otimes}E\to E$ *définissant l'action de* $\mathscr{A}$ *est d'image dense* (*resp. est surjective*). *Si* E *est non dégénéré, on note* $E_s(\mathscr{A})$ (*ou simplement* E_s *s'il n'y a pas d'ambigüité*), *et on appelle espace des vecteurs de Schwartz de* E *relativement à* $\mathscr{A}$, *l'image de l'application canonique* $\mathscr{A}\hat{\otimes}E\to E$. *On munit* $E_s(\mathscr{A})$ *de la topologie quotient de celle de* $\mathscr{A}\hat{\otimes}E$, *ce qui en fait un* $\mathscr{A}$*-module fréchétique. Enfin on dit que* $\mathscr{A}$ *est différentiable, si elle est différentiable comme module à droite et à gauche sur elle-même*, i.e. *si les conditions* $a*\mathscr{A}=0$ *ou* $\mathscr{A}*a=0$ *entraînent* $a=0$, *et si l'application canonique* $\mathscr{A}\hat{\otimes}\mathscr{A}\to\mathscr{A}$ *est surjective.*

2.3.2. Définition. — *Soit* $\mathscr{A}$ *une algèbre de Fréchet. Nous dirons que* $\mathscr{A}$ *possède la propriété de factorisation, si* $\mathscr{A}$ *est différentiable* (*déf.* 2.3.1) *et si pour tout* $\mathscr{A}$*-module différentiable* E *on a* $\mathscr{A}*E=E$ $\Big($i.e. *tout élément de* E *s'exprime comme une combinaison linéaire finie* $v=\sum_{j=1}^{n}a_j*v_j$ *avec* $a_j\in\mathscr{A}$, $v_j\in E\Big)$. *En particulier, on a donc* $\mathscr{A}*\mathscr{A}=\mathscr{A}$.

2.3.3. Exemple. — Soit $\mathscr{A}=\mathscr{S}(G)$. Alors $\mathscr{A}$ possède la propriété de factorisation, et les $\mathscr{A}$-modules différentiables sont précisément les objets de $\mathscr{S}\mathbf{mod}_G$ (ce qui justifie la terminologie un peu curieuse).

En effet, le fait que $\mathscr{A}$ possède une unité approchée (*cf.* ci-après, n° 2.3.5) entraîne déjà que le $\mathscr{A}$-module $\mathscr{A}$ est non dégénéré. D'après le théorème de Dixmier-Malliavin ([13], th. 3.3), on a $\mathscr{A}=\mathscr{A}*\mathscr{A}$ (il est même démontré dans [13] que $\mathscr{A}=C_c^\infty(G)*\mathscr{A}$); donc *a fortiori* on voit que $\mathscr{A}$ est différentiable. De plus, le même théorème implique que pour tout $E\in\mathscr{S}\mathbf{mod}_G$ on a $\mathscr{A}*E=E$, donc *a fortiori* que E est un $\mathscr{A}$-module différentiable au sens de la définition 2.3.1. Réciproquement, tout $\mathscr{A}$-module différentiable est un quotient d'un module $\mathscr{A}\hat{\otimes}E=\mathscr{S}(G, E)$. Comme $\mathscr{S}(G, E)\in\mathscr{S}\mathbf{mod}_G$ (n° 1.4.4) et que tout sous-$\mathscr{A}$-module fermé de $\mathscr{S}(G, E)$ est un sous-G-module, comme on le vérifie aussitôt en utilisant une unité approchée, on voit que $E \in \mathscr{S}\mathbf{mod}_G$, d'où notre assertion.

2.3.4. Lemme. — *Soit $\mathscr{A}$ une algèbre de Fréchet différentiable.*

(i) *Pour tout espace de Fréchet* F, $\mathscr{A} \hat{\otimes} F$ *est un $\mathscr{A}$-module différentiable.*

(ii) *Pour tout $\mathscr{A}$-module fréchétique non dégénéré* E, *l'espace des vecteurs de Schwartz* E_s *est un $\mathscr{A}$-module différentiable.*

Démonstration. — Évident.

2.3.5. Soit $\mathscr{A}$ une algèbre de Fréchet. Nous appellerons unité approchée dans $\mathscr{A}$ une suite (e_n) d'éléments de $\mathscr{A}$ vérifiant $\lim_{n \to \infty} e_n * a = \lim_{n \to \infty} a * e_n = a$ pour tout $a \in \mathscr{A}$. Si l'on a seulement $\lim_{n \to \infty} e_n * a = a$ (resp. $\lim_{n \to \infty} a * e_n = a$), on parlera d'unité approchée à gauche (resp. à droite).

Il est bien connu que $\mathscr{S}(G)$ possède une unité approchée $\left[\text{prendre } e_n = \chi_n, \text{ où } \chi_n \in C_c^\infty(G), \int_G \chi_n(g)\, dg = 1, \text{ et } \lim_{n \to \infty} \operatorname{supp}(\chi_n) = \{1\}\right]$. De même, si X est une variété semi-algébrique, X′ un revêtement fini de X, $\mathscr{S}(X')$ possède une unité approchée $\left[\text{prendre une suite de compacts } (K_n) \text{ avec } K_n \subset \mathring{K}_{n+1}, \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n = X, \text{ et } e_n = \theta_n \in C_c^\infty(X') \text{ avec } \operatorname{supp}(\theta_n) \subset \pi^{-1}(K_{n+1}), \theta_n \equiv 1 \text{ sur } \pi^{-1}(K_n)\right]$.

2.3.6. Lemme. — *Soit $\mathscr{A}$ une algèbre de Fréchet possédant une unité approchée (e_n). Alors si* E *est un $\mathscr{A}$-module différentiable on a $\lim_{n \to \infty} e_n * v = v$ pour tout $v \in E$.*

Démonstration. — Il suffit de vérifier que la propriété du lemme a lieu pour les modules de la forme $\mathscr{A} \hat{\otimes} F$, où F est un espace de Fréchet. Or d'après [31], th. 45.1, tout élément de $\mathscr{A} \hat{\otimes} F$ est de la forme $u = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j a_j \otimes v_j$ où (λ_j) est une suite de nombres complexes telle que $\sum_{j=1}^{\infty} |\lambda_j| \leqq 1$, et où (a_j) et (v_j) sont des suites tendant vers 0 dans $\mathscr{A}$ et F respectivement. En particulier, l'ensemble des a_j est relativement compact dans $\mathscr{A}$; alors la convergence des e_n vers 1 a lieu uniformément sur $\{a_j\}$ d'où l'on déduit aussitôt que $e_n * u \to u$.

C.Q.F.D.

2.3.7. Lemme. — *Soit $\mathscr{A}$ une algèbre de Fréchet différentiable, possédant une unité approchée à gauche (e_n)* (cf. *n°* 2.3.5), E *un $\mathscr{A}$-module non dégénéré. Soit $\mathscr{F}(E)$ l'ensemble ordonné des sous-$\mathscr{A}$-modules fermés de* E, *et définissons de même $\mathscr{F}(E_s)$. Alors l'application* $F \to \bar{F}$ *de $\mathscr{F}(E_s)$ dans $\mathscr{F}(E)$ est une injection croissante.*

Démonstration. — Il est clair que l'application $F \to \bar{F}$ est croissante. Soit F est un sous-module fermé de E_s. L'application canonique $\mu : \mathscr{A} \hat{\otimes} E \to E_s$ est continue et applique $\mathscr{A} \hat{\otimes} F$ dans F; comme $\mathscr{A} \hat{\otimes} F$ est dense dans $\mathscr{A} \hat{\otimes} \bar{F}$, on a donc $\mu(\mathscr{A} \hat{\otimes} \bar{F}) = \bar{F}_s \subset F$. Il est clair que si $v \in \bar{F}$, $\mathscr{A} * v = 0$ entraîne $v = 0$, puisque c'est vrai pour E. D'autre part, comme E_s est différentiable (lemme 2.3.4), on a, d'après le lemme 2.3.6 ci-dessus, $e_n * v \to v$ pour tout $v \in E_s$, donc pour tout $v \in F$. Par conséquent, F et $\bar{F}$ sont des $\mathscr{A}$-modules non dégénérés. Alors d'après le lemme 2.3.4 le module $\bar{F}_s$ est différentiable, d'où $\bar{F}_s = \mu(\mathscr{A} \hat{\otimes} \bar{F}_s) \subset \mu(\mathscr{A} \hat{\otimes} F) = F_s$; comme l'inclusion réciproque est évidente, on a donc $\bar{F}_s = F_s$, ce qui permet de retrouver F à partir de $\bar{F}$ comme l'adhérence dans E_s de $\bar{F}_s$, d'où l'injectivité. (De plus, on voit que l'image de l'application $F \to \bar{F}$ est formée des sous-$\mathscr{A}$-modules fermés *non dégénérés* de E.)

2.3.8. Corollaire. — *Si* E *est topologiquement irréductible, il en va de même pour* E_s.

2.3.9. Proposition. — *Soit* (X, **X**) *une variété semi-algébrique*, $X' \to X$ *un revêtement fini de* X. *Alors* $\mathscr{S}(X')$, *considérée comme algèbre de Fréchet pour la multiplication ordinaire des fonctions, possède la propriété de factorisation* (*déf.* 2.3.2).

Démonstration. — Cela va à nouveau résulter du théorème de Dixmier-Malliavin (exemple 2.3.3). Par un argument de partition de l'unité (*cf.* n° 2.2.2), on se ramène facilement au cas d'une variété semi-algébrique. Mais alors d'après le théorème 1.2.4 (ii), l'algèbre $\mathscr{S}(X)$ est un quotient d'une algèbre $\mathscr{S}(\mathbf{R}^n)$. Comme la propriété de factorisation est héritée par passage au quotient (compte tenu de la présence d'une unité approchée, *cf.* n° 2.3.5, pour la démonstration de la non-dégénérescence), il suffit de prouver la proposition lorsque $X = \mathbf{R}^n$. Mais par transformation de Fourier l'algèbre $\mathscr{S}(\mathbf{R}^n)$ est isomorphe à l'algèbre de Schwartz du groupe unipotent $\mathbf{R}^n$; on est donc dans la situation de l'exemple 2.3.3.

C.Q.F.D.

2.4. Produits croisés.

2.4.1. Soit **X** une variété algébrique munie d'une action de **G**, X une réunion G-stable de composantes connexes de $\mathbf{X}(\mathbf{R})$; nous dirons que X est une G-variété semi-algébrique.

Soit $E \in \mathscr{S}\mathbf{mod}_G$. Nous appellerons système d'imprimitivité de base X (dans E) la donnée d'une action de l'algèbre de Fréchet commutative $\mathscr{S}(X)$ dans E, notée π, vérifiant $g\pi(\varphi)g^{-1} = \pi(g\varphi)$ pour tous $g \in G$, $\varphi \in \mathscr{S}(X)$, où $g\varphi$ désigne la fonction $x \to \varphi(g^{-1}x)$.

Nous disons que le système d'imprimitivité est non dégénéré (resp. différentiable), si l'action de $\mathscr{S}(X)$ est non dégénérée (resp. différentiable) au sens de la définition 2.3.1. Nous noterons $\mathbf{Rep}_{G, X}$ la catégorie des systèmes d'imprimitivité de base X, $\mathbf{Rep}^{nd}_{G, X}$ (resp. $\mathscr{S}\mathbf{mod}_{G, X}$) la sous-catégorie pleine de $\mathbf{Rep}_{G, X}$ formée des systèmes d'imprimitivité non dégénérés (resp. différentiables).

2.4.2. Il est facile de construire une algèbre de Fréchet $\mathscr{A}$ telle que $\mathscr{S}\mathbf{mod}_{G, X}$ s'identifie à la catégorie des $\mathscr{A}$-modules différentiables. Comme espace de Fréchet, on a $\mathscr{A} = \mathscr{S}(G \times X) = \mathscr{S}(G) \hat{\otimes} \mathscr{S}(X)$. La définition du produit est la suivante :

$$\varphi_1 * \varphi_2(g, x) = \int_G \varphi_1(g_1, g_1^{-1} gx)\, \varphi_2(g_1^{-1} g, x)\, dg_1.$$

La vérification de la convergence de cette intégrale, et du fait que $\varphi_1 * \varphi_2 \in \mathscr{S}(G \times X)$, se fait facilement en utilisant la décomposition $\mathscr{S}(G \times X) = \mathscr{S}(G) \hat{\otimes} \mathscr{S}(X)$, qui permet de « séparer les variables ». Nous dirons que $\mathscr{A}$ est le produit croisé de $\mathscr{S}(G)$ et de $\mathscr{S}(X)$.

Si $E \in \mathbf{Rep}_{G, X}$, on définit une action de $\mathscr{A}$ dans E par la formule :

$$\varphi * v = \int_G \varphi(g, g^{-1} x) . gv \, dg$$

qu'il faut interpréter comme suit : pour chaque $g \in G$ fixé, $\varphi(g, g^{-1} x) . gv$ désigne l'élément de E obtenu en faisant agir la fonction $x \to \varphi(g, g^{-1} x)$ de $\mathscr{S}(X)$ sur l'élément gv de E. On obtient lorsque g varie une fonction de $\mathscr{S}(G, E)$, que l'on intègre par rapport à dg.

Là encore, nous laisserons au lecteur le soin de vérifier que cette intégrale a un sens, et que l'on obtient ainsi une action de l'algèbre $\mathscr{A}$ sur E. Remarquons que $\mathscr{A}$ elle-même peut être munie d'un système d'imprimitivité en faisant agir G par translations à gauche, et $\psi \in \mathscr{S}(X)$ par la formule :

$$\psi\varphi(g, x) = \psi(gx)\, \varphi(g, x).$$

L'action de $\mathscr{A}$ qui s'en déduit n'est autre que l'action par multiplication à gauche.

2.4.3. Lemme. — (i) *L'algèbre* $\mathscr{A}$ *possède la propriété de factorisation* (*déf.* 2.3.2).

(ii) *Un* $\mathscr{A}$-*module* E *est différentiable si et seulement si il provient d'un élément de* $\mathscr{S}\mathbf{mod}_{G, X}$.

(iii) *Tout sous-module fermé d'un* $\mathscr{A}$-*module différentiable est encore un* $\mathscr{A}$-*module différentiable.*

Démonstration. — (i) Soit $E \in \mathscr{S}\mathbf{mod}_{G, X}$. Alors d'après l'exemple 2.3.3 on a $\mathscr{S}(G) * E = E$, et d'après la proposition 2.3.9 on a $\mathscr{S}(X) * E = E$. Si $\chi \in \mathscr{S}(G)$ et $\theta \in \mathscr{S}(X)$, on a, pour tout $v \in E$, $\chi * \theta * v = \varphi * v$, où $\varphi \in \mathscr{A}$ est définie par $\varphi(g, x) = \chi(g)\, \theta(x)$. Donc $E = \mathscr{S}(X) * E = \mathscr{S}(G) * \mathscr{S}(X) * E = \mathscr{A} * E$.

Le même calcul montre que si (χ_n) et (θ_n) sont les unités approchées dans $\mathscr{S}(G)$ et $\mathscr{S}(X)$ respectivement introduites au n° 2.3.5, alors $e_n(g, x) = \chi_n(g)\, \theta_n(x)$ est une unité approchée à gauche dans $\mathscr{A}$ (on peut montrer que c'est aussi une unité approchée à droite). On en déduit que $\mathscr{A}$ est non dégénéré comme module à gauche sur lui-même (déf. 2.3.1). Par le changement de variables $(g, x) \to (g_1, x_1) = (g, g^{-1} x)$, l'action de $\mathscr{S}(X)$ sur $\mathscr{A}$ définie au n° 2.4.2 devient $\psi\varphi(g_1, x_1) = \psi(x_1)\, \psi(g_1, x_1)$. En d'autres termes, $\mathscr{A} \simeq \mathscr{S}(X) \hat{\otimes} \mathscr{S}(G)$ sous l'action de $\mathscr{S}(X)$, et donc $\mathscr{A} \in \mathscr{S}\mathbf{mod}_{G, X}$. Comme on l'a vu, on a alors $\mathscr{A} = \mathscr{A} * \mathscr{A}$, ce qui entraîne en particulier que $\mathscr{A}$ est différentiable.

Le même raisonnement s'applique aux $\mathscr{A}$-modules de la forme $E = \mathscr{A} \hat{\otimes} F$, où F est un espace de Fréchet. Pour un tel E, on a $E = \mathscr{A} * E$; par passage au quotient cela reste vrai pour tout $\mathscr{A}$-module différentiable, ce qui prouve bien que $\mathscr{A}$ possède la propriété de factorisation.

(ii) Nous avons déjà vu que tout $E \in \mathscr{S}\mathbf{mod}_{G, X}$ donne naissance à un $\mathscr{A}$-module différentiable. Pour montrer la réciproque, il suffit d'après ce qui précède de prouver que tout sous-$\mathscr{A}$-module fermé V de $\mathscr{A} \hat{\otimes} F$ est stable sous les actions de $\mathscr{S}(G)$ et de $\mathscr{S}(X)$. Or cela est évident : si (θ_n) et (χ_n) sont les unités approchées introduites en (i), on aura $\theta_n * v \to v$ et $\chi_n * v \to v$ pour tout $v \in V$ d'après le lemme 2.3.6 (qui montre que c'est vrai pour tout $v \in \mathscr{A} \hat{\otimes} F$). Donc si $\chi \in \mathscr{S}(G)$, $\theta \in \mathscr{S}(X)$, on aura $\chi * \theta_n * v \to \chi * v$, et $\chi_n * \theta * v \to \theta * v$, d'où notre assertion.

(iii) La propriété est évidente pour les $\mathscr{S}(G)$-modules différentiables, puisque d'après l'exemple 2.3.3 ils correspondent aux objets de $\mathscr{S}\mathbf{mod}_G$. Il en va de même pour les $\mathscr{S}(X)$-modules différentiables, car c'est une propriété qui passe au quotient, et nous avons vu dans la démonstration de la proposition 2.3.9 que $\mathscr{S}(X)$ est un quotient d'une algèbre $\mathscr{S}(\mathbf{R}^n)$. Donc la propriété a lieu pour les objets de $\mathscr{S}\mathbf{mod}_{G, X}$, qui d'après ce qui précède sont précisément les $\mathscr{A}$-modules différentiables.

2.4.4. LEMME. — *Soit* $E \in \mathbf{Rep}_{G, X}$ (cf. *n°* 2.4.1). *Alors* $E_s(\mathscr{A}) = E_s(\mathscr{S}(X))$ (*déf.* 2.3.1).

Démonstration. — On a $E_s(\mathscr{A}) \subset E_s(\mathscr{S}(X))$ parce que $\mathscr{A}$ est un $\mathscr{S}(X)$-module différentiable, et $E_s(\mathscr{S}(X)) \subset E_s(\mathscr{A})$ car $\mathscr{S}(X) \hat{\otimes} E \to E$ est un G-morphisme pour l'action diagonale de G sur $\mathscr{S}(X) \hat{\otimes} E$, ce qui montre que $E_s(\mathscr{S}(X))$ est dans $\mathscr{S}\mathbf{mod}_G$, donc dans $\mathscr{S}\mathbf{mod}_{(G, X)}$.

2.5. LE THÉORÈME D'IMPRIMITIVITÉ DIFFÉRENTIABLE.

2.5.1. Nous allons maintenant étudier plus en détail le produit croisé $\mathscr{S}(G \times X)$ (*cf.* n° 2.4.2) lorsque $X = G/H$. Nous en déduirons l' « analogue $\mathscr{S}$ » du célèbre théorème d'imprimitivité de Mackey.

Rappelons que le cas où $\mathscr{S}$ est remplacé par C_c^∞ est considéré dans la thèse de Bruhat ([4], th. 5.1); on pourrait d'ailleurs retrouver ses résultats par des méthodes proches de celles que nous allons utiliser, qui nous semblent plus élémentaires que l'utilisation massive des produits tensoriels topologiques faite par Bruhat. Bien entendu, la théorie C_c^∞ s'applique à tous les groupes de Lie et à des représentations plus générales que celles que nous considérons; en revanche, les résultats sont beaucoup moins précis, l'égalité du théorème 2.5.10 (ii) devant être remplacée par une inclusion d'image dense.

2.5.2. Faisons quelques rappels sur les densités sur un espace homogène. Soit $\alpha \in C^\infty(G)$ vérifiant $\alpha(gh) = \Delta_{G/H}(h)\,\alpha(g)$ pour tous $g \in G$, $h \in H$, et montrons comment on lui fait correspondre une densité sur $X = G/H$. Par partition de l'unité, on peut supposer que $G \simeq X \times H$ comme H-fibré principal. Faisons choix d'une densité de base dx sur X (par exemple la mesure de Lebesgue si X est un ouvert de carte). Alors on aura $dg = \lambda(x, h)\,dx\,dh$, où $\lambda(x, h) > 0$ et $\lambda(x, hh_1) = \Delta_{G/H}^{-1}(h_1)\,\lambda(x, h)$, d'après les lois de transformation pour dg et dh. On voit donc que la densité $\alpha(x, 1)\,\lambda(x, 1)\,dx$ ne dépend ni du choix de la densité de base dx ni du choix de la trivialisation $G \simeq X \times H$; c'est cette densité qui sera canoniquement associée à la fonction α.

2.5.3. LEMME (Lemme de Fubini). — *Soit* $\alpha \in \mathscr{S}(G)$. *Alors* $\int_G \alpha(g)\,dg = \int_{G/H} \bar{\alpha}(g)$, *où* $\bar{\alpha}(g) = \int_H \alpha(gh)\,\Delta_{G/H}^{-1}(h)\,dh$ *et où* $\bar{\alpha}$ *est identifié comme ci-dessus à une densité sur* G/H.

Démonstration. — Laissée au lecteur.

2.5.4. Soit $\mathscr{B}$ une algèbre de Fréchet, munie d'actions à gauche et à droite du groupe H qui en font un objet de $\mathscr{S}\mathbf{mod}_{H \times H}$, et que nous noterons comme des convolutions. On suppose en outre que les relations d'associativité suivantes sont vérifiées :

$$\left\{\begin{array}{l} h * (a_1 * a_2) = (h * a_1) * a_2 \\ a_1 * (h * a_2) = (a_1 * h) * a_2 \\ a_1 * (a_2 * h) = a_1 * (a_2 * h) \end{array}\right. \tag{1}$$

pour tous $a_1, a_2 \in \mathscr{B}$, $h \in H$. [Ceci a lieu par exemple lorsque $\mathscr{B}$ est un quotient de $\mathscr{S}(H)$ par un idéal (bilatère) fermé, à condition de traiter les éléments de $\mathscr{S}(H)$ comme des densités, comme nous l'avons expliqué au n° 1.4.4, ou lorsque $\mathscr{B}$ est un idéal fermé dans un tel quotient.]

Alors on note $\mathscr{K}_\infty \operatorname{Ind}_{H \times H}^{G \times G}(\mathscr{B}) = \mathscr{A}$ l'algèbre des « noyaux $\mathscr{S}$ à coefficients dans $\mathscr{B}$ » définie comme suit (nous introduisons les demi-densités par souci de compatibilité avec la théorie unitaire) : comme espace de Fréchet et comme $(G \times G)$-module, on a $\mathscr{A} = \mathscr{S} \operatorname{Ind}_{H \times H}^{G \times G}(\Delta_{G/H}^{-1/2} \otimes \mathscr{B} \otimes \Delta_{G/H}^{1/2})$ (déf. 2.1.2); en d'autres termes, dans les notations du n° 2.1.1 la condition de covariance s'écrit

$$\bar{\varphi}(g_1 h_1, g_2 h_2) = \Delta_{G/H}^{1/2}(h_1)\, \Delta_{G/H}^{1/2}(h_2)\, h_1^{-1} * \bar{\varphi}(g_1, g_2) * h_2.$$

La loi d'algèbre est donnée par la formule :

$$\varphi_1 * \varphi_2(g_1, g_2) = \int_{G/H} \varphi_1(g_1, g)\, \varphi_2(g, g_2)$$

où l'on remarque que l'intégrand vérifie précisément la condition de covariance nécessaire pour pouvoir être considéré comme une densité sur G/H à valeurs dans $\mathscr{B}$ (*cf.* n° 2.5.2). Il est clair que l'intégrale converge, et que l'on obtient ainsi sur $\mathscr{A}$ une structure d'algèbre de Fréchet. De plus, on voit immédiatement que les actions de G sur $\mathscr{A}$ vérifient encore les conditions de compatibilité (1).

2.5.5. Proposition. — *Soient* $X = G/H$, $\mathscr{A} = \mathscr{S}(G \times X)$ *le produit croisé de* $\mathscr{S}(G)$ *et* $\mathscr{S}(X)$ (*n°* 2.4.2). *Alors* $\mathscr{A}$ *est canoniquement isomorphe à l'algèbre* $\mathscr{K}_\infty \operatorname{Ind}_{H \times H}^{G \times G}(\mathscr{S}(H))$ *définie au n°* 2.5.4.

Démonstration. — Rappelons la formule du produit dans $\mathscr{A}$:

$$\varphi_1 * \varphi_2(g, x) = \int_G \varphi_1(g_1, g_1^{-1} g x)\, \varphi_2(g_1^{-1} g, x)\, dg_1.$$

Il est clair que $\mathscr{S}(G \times X)$ s'identifie à $\mathscr{S} \operatorname{Ind}_{\{1\} \times H}^{G \times G}(\mathbf{C})$, ce qui permet de le considérer comme au n° 2.1.1 comme un sous-espace de l'espace des fonctions C^∞ sur $G \times G$ vérifiant $\bar{\varphi}(g_1, g_2 h) = \bar{\varphi}(g_1, g_2)$ pour tous $g_1, g_2 \in G$, $h \in H$.

Sur $G \times G$, faisons le changement de variables $(g_1, g_2) \to (g_1 g_2, g_2)$. C'est un isomorphisme de H-fibrés principaux si sur le deuxième exemplaire de $G \times G$ on fait agir H par $(g_1, g_2) h = (g_1 h, g_2 h)$. Donc $\mathscr{S} \operatorname{Ind}_{\{1\} \times H}^{G \times G}(\mathbf{C})$ se transforme en $\mathscr{S} \operatorname{Ind}_{\mathrm{Diag}(H)}^{G \times G}(\mathbf{C})$. Par simple transport de structure, la loi d'algèbre devient :

$$\psi_1 * \psi_2 (g_1 g_2, g_2) = \int_G \psi_1 (g_1 g_2, g^{-1} g_1 g_2) \psi_2 (g^{-1} g_1 g_2, g_2) \, dg$$

$$= \int_G \psi_1 (g_1 g_2, g^{-1}) \psi_2 (g^{-1}, g_2) \, dg = \int_G \psi_1 (g_1 g_2, g) \psi_2 (g, g_2) \Delta_G (g) \, dg$$

[rappelons que $d(g^{-1}) = \Delta_G (g) \, dg$], d'où finalement :

$$\psi_1 * \psi_2 (g_1, g_2) = \int_G \psi_1 (g_1, g) \psi_2 (g, g_2) \Delta_G (g) \, dg.$$

Cela ressemble déjà à un produit de noyaux; reste à en faire des noyaux sur G/H à valeurs dans $\mathscr{S}(\mathrm{H})$.

Définissons une application $\mathscr{S} \operatorname{Ind}_{\mathrm{Diag(H)}}^{\mathrm{G \times G}} (\mathbf{C}) \to \mathscr{K}_\infty \operatorname{Ind}_{\mathrm{H \times H}}^{\mathrm{G \times G}} (\mathscr{S}(\mathrm{H}))$ par la formule :

$$\theta (g_1, g_2) (h_1) = \Delta_{G/H}^{-1/2} (h_1) \Delta_G (g_2) \psi (g_1 h_1, g_2).$$

La vérification du fait que c'est un isomorphisme de G × G-modules est facile, à l'aide d'une trivialisation locale par exemple (*cf.* lemme 2.2.5). Reste à voir que c'est un homomorphisme d'algèbres. Soient $\psi_1, \psi_2 \in \mathscr{A}$, et $\psi = \psi_1 * \psi_2$. On écrit :

$$\theta (g_1, g_2) (h_1) = \Delta_{G/H}^{-1/2} (h_1) \Delta_G (g_2) \int_G \psi_1 (g_1 h_1, g) \psi_2 (g, g_2) \Delta_G (g) \, dg$$

$$= \Delta_{G/H}^{-1/2} (h_1) \Delta_G (g_2)$$

$$\times \int_{G/H} \left(\int_H \psi_1 (g_1 h_1, gh) \psi_2 (gh, g_2) \Delta_G (gh) \Delta_{G/H}^{-1} (h) \, dh \right)$$

(d'après le lemme 2.5.3)

$$= \Delta_{G/H}^{-1/2} (h_1)$$

$$\times \int_{G/H} \left(\int_H \psi_1 (g_1 h_1 h^{-1}, g) \Delta_G (g) \psi_2 (gh, g_2) \Delta_G (g_2) \Delta_H (h) \, dh \right)$$

(en utilisant l'invariance de ψ_1)

$$= \int_{G/H} \left(\int_H \theta_1 (g_1, g) (h_1 h^{-1}) \theta_2 (g, g_2) (h) \Delta_H (h) \, dh \right)$$

$$= \left(\int_{G/H} \theta_1 (g_1, g) * \theta_2 (g, g_2) \right) (h_1)$$

(en faisant le changement de variables $h' = h_1 h^{-1}$),

ce qui est bien la formule voulue.

2.5.6. Le grand avantage de cette nouvelle description du produit croisé est que nous allons pouvoir travailler « localement » sur X. De manière précise, si Y est un ouvert semi-algébrique de X, on considère le fibré principal $G|_Y$ (*cf.* n° 2.2.4) et on définit comme au n° 2.5.4 une algèbre de noyaux :

$$\mathscr{A}(Y)=\mathscr{K}_\infty \operatorname{Ind}_{H\times H}^{G|_Y\times G|_Y}(\mathscr{S}(H)).$$

De même, si Y_1 et Y_2 sont deux ouverts semi-algébriques de X, on note $\mathscr{A}(Y_1, Y_2)=\mathscr{K}_\infty \operatorname{Ind}_{H\times H}^{G|_{Y_1}\times G|_{Y_2}}(\mathscr{S}(H))$; ce n'est plus une algèbre, mais c'est un $(\mathscr{A}(Y_1), \mathscr{A}(Y_2))$-bimodule fréchétique de manière évidente.

Si maintenant Y est un ouvert de trivialité pour G (n° 2.2.4), on pourra identifier $\mathscr{A}(Y)$ à $\mathscr{S}^{1/2}(Y\times Y, \mathscr{S}(H))=\mathscr{S}^{1/2}(Y\times Y)\hat{\otimes}\mathscr{S}(H)$, en notant $\mathscr{S}^{1/2}$ l'espace des « demi-densités $\mathscr{S}$ »; et on voit aussitôt que dans cette écriture la loi d'algèbre est simplement la loi de produit tensoriel des algèbres $\mathscr{S}^{1/2}(Y\times Y)$ et $\mathscr{S}(H)$. Même remarque en ce qui concerne les bimodules.

2.5.7. Lemme. — *Soit* $E\in\mathbf{Rep}_{G,X}$ (*n°* 2.4.1). *Soit* $\tilde{\mathscr{S}}(X)$ *l'algèbre déduite de* $\mathscr{S}(X)$ *par adjonction d'une unité, et* $\mathfrak{m}_{x_0}=\{\varphi\in\tilde{\mathscr{S}}(X)\mid\varphi(x_0)=0\}$, *où* x_0 *est le point distingué de* X. *Alors* $\mathfrak{m}_{x_0}*E$ *est un sous-espace fermé* H-*invariant de* E.

Démonstration. — (*a*) Il résulte du lemme 2.2.5 qu'il existe un ouvert de trivialité semi-algébrique Y pour G contenant x_0, et un isomorphisme de H-fibrés principaux $G|_Y \xrightarrow{\sim} (\mathbf{R}^m\times H)$ tels que $\mathscr{S}(G|_Y)\simeq\mathscr{S}(\mathbf{R}^n)\hat{\otimes}\mathscr{S}(H)$. Alors l'algèbre $\mathscr{S}^{1/2}(Y\times Y)$ est isomorphe à l'algèbre de noyaux $\mathscr{S}(\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n)$, donc à l'algèbre $\mathscr{W}$ définie au n° 0.7. Dans les notations du n° 2.5.6, on a donc $\mathscr{A}(Y)\simeq\mathscr{W}\hat{\otimes}\mathscr{S}(H)$.

Soit $E_0=E_s(\mathscr{A}(Y))$ (déf. 2.3.1). Il est immédiat de vérifier que $\mathscr{A}(Y)$ est une algèbre différentiable (en fait, on voit même facilement qu'elle possède la propriété de factorisation, *cf.* déf. 2.3.2), donc E_0 est un $\mathscr{A}(Y)$-module différentiable d'après le lemme 2.3.4. D'après le n° 0.7, on a donc une décomposition canonique $E_0=S\hat{\otimes}F$, où S est le $\mathscr{W}$-module standard, et où $F=\operatorname{Hom}_{\mathscr{W}}(S, E_0)$ est un espace de Fréchet; de plus, F est de manière naturelle un $\mathscr{S}(H)$-module différentiable, donc un objet de $\mathscr{S}\mathbf{mod}_H$ d'après l'exemple 2.3.3. Dans l'écriture $\mathscr{W}=\mathscr{S}^{1/2}(Y\times Y)$, il est clair que $S=\mathscr{S}^{1/2}(Y)$ pour l'action évidente, et que la décomposition ci-dessus devient $E_0=\mathscr{S}^{1/2}(Y, F)$. Enfin, si l'on revient à l'écriture intrinsèque de $\mathscr{A}(Y)$ comme $\mathscr{K}_\infty \operatorname{Ind}_{H\times H}^{G|_Y\times G|_Y}(\mathscr{S}(H))$, on aura $E_0=\mathscr{S}^{1/2}\operatorname{Ind}_H^{G|_Y}(F)$, pour l'action évidente de $\mathscr{A}(Y)$.

(*b*) Dans la description ci-dessus, on note $v\to v(1)$ l'application d'évaluation au point 1 de $G|_Y$; il est clair que c'est un H-morphisme surjectif de E_0 vers F. De plus, si l'on note $\mathfrak{n}_{x_0}=\mathfrak{m}_{x_0}\cap\mathscr{S}(Y)=\{\varphi\in\mathscr{S}(Y)\mid\varphi(x_0)=0\}$, il est classique de vérifier que le noyau de l'application $v\to v(1)$ est précisément $\mathfrak{n}_{x_0}*E_0$, qui est donc fermé dans E_0, et indépendant du choix de l'isomorphisme $E_0\simeq\mathscr{S}^{1/2}\operatorname{Ind}_H^{G|_Y}(F)$. En particulier, le H-module F est bien défini.

(*c*) Nous allons maintenant montrer que $E_0=\mathscr{S}(Y)*E$. Nous avons vu au n° 2.4.2 que l'algèbre $\mathscr{A}=\mathscr{S}(G\times X)$ est munie d'un système d'imprimitivité de base X. Dans la description en termes de noyaux, l'action de $\mathscr{S}(X)$ est simplement :

$$\psi*\varphi(x_1, x_2)=\psi(x_1)\varphi(x_1, x_2)\qquad\text{pour}\quad \psi\in\mathscr{S}(X),\quad \varphi\in\mathscr{A}.$$

On a les relations d'associativité évidentes pour les actions de $\mathcal{S}(\mathrm{X})$ et de $\mathcal{A}$ dans E; et bien sûr, il en va de même pour les sous-algèbres $\mathcal{S}(\mathrm{Y})$ et $\mathcal{A}(\mathrm{Y})$.

Comme E_0 est un $\mathcal{A}(\mathrm{Y})$-module différentiable par définition, c'est un $\mathcal{S}(\mathrm{Y})$-module différentiable, donc $\mathrm{E}_0=\mathcal{S}(\mathrm{Y})*\mathrm{E}_0\subset\mathcal{S}(\mathrm{Y})*\mathrm{E}$ [rappelons que $\mathcal{S}(\mathrm{Y})$ possède la propriété de factorisation, *cf.* prop. 2.3.9]. Réciproquement, on note que $\mathcal{S}(\mathrm{Y})*\mathrm{E}=\mathcal{S}(\mathrm{Y})*\mathcal{S}(\mathrm{X})*\mathrm{E}$ et que $\mathcal{S}(\mathrm{X})*\mathrm{E}=\mathcal{A}*\mathrm{E}$ d'après le lemme 2.4.4. Donc $\mathcal{S}(\mathrm{Y})*\mathrm{E}=\mathcal{S}(\mathrm{Y})*\mathcal{A}*\mathrm{E}\subset\mathcal{A}(\mathrm{Y},\mathrm{X})*\mathrm{E}$, et comme $\mathcal{A}(\mathrm{Y},\mathrm{X})$ est un $\mathcal{A}(\mathrm{Y})$-module à gauche différentiable, on a $\mathcal{A}(\mathrm{Y},\mathrm{X})*\mathrm{E}=\mathcal{A}(\mathrm{Y})*\mathcal{A}(\mathrm{Y},\mathrm{X})*\mathrm{E}\subset\mathrm{E}_0$, d'où notre assertion.

(*d*) D'après (*c*), $\mathcal{S}(\mathrm{Y})$ multiple E dans E_0. Soit $\alpha\in\mathrm{C}_c^\infty(\mathrm{Y})$, $\alpha\equiv 1$ sur un voisinage de x_0, et montrons que $\mathfrak{m}_{x_0}*\mathrm{E}=\{v\in\mathrm{E}\mid(\alpha*v)(1)=0\}$, ce qui prouvera bien que $\mathfrak{m}_{x_0}*\mathrm{E}$ est fermé. L'inclusion $\subset$ est claire. Inversement, si $\alpha*v(1)=0$, on a $\alpha*v\in\mathfrak{n}_{x_0}*\mathrm{E}_0$ d'après (*b*), et $v=\alpha*v+(1-\alpha)*v\in\mathfrak{m}_{x_0}*\mathrm{E}$.

C.Q.F.D.

2.5.8. THÉORÈME (théorème d'imprimitivité différentiable). — *Définissons* $\mathfrak{m}_{x_0}\subset\tilde{\mathcal{S}}(\mathrm{X})$ *comme au lemme* 2.5.7, *et notons* $\mathrm{E}\to\mathrm{E}(x_0)$ *le foncteur* $\mathrm{E}\to(\mathrm{E}/(\mathfrak{m}_{x_0}*\mathrm{E}))$ *de* $\mathbf{Rep}_{\mathrm{G},\mathrm{X}}$ (*n*° 2.4.1) *dans* $\mathcal{S}\mathbf{mod}_{\mathrm{H}}$, *et* $\mathrm{E}^{-1/2}(x_0)=\mathrm{E}(x_0)\otimes\Delta_{\mathrm{G/H}}^{1/2}$.

(i) *Il existe un unique* G-*morphisme* $u:\mathrm{E}\to\mathcal{O}_{\mathrm{M}}^{1/2}\,\mathrm{Ind}_{\mathrm{H}}^{\mathrm{G}}(\mathrm{E}^{-1/2}(x_0))$ *rendant commutatif le diagramme :*

$$\begin{array}{ccc}\mathrm{E} & \xrightarrow{u} & \mathcal{O}_{\mathrm{M}}^{1/2}\,\mathrm{Ind}_{\mathrm{H}}^{\mathrm{G}}(\mathrm{E}^{-1/2}(x_0))\\ & & \downarrow\\ & & \mathrm{E}(x_0)\end{array}$$

Ce morphisme commute aux actions de $\mathcal{S}(\mathrm{X})$, *et* $\mathrm{Ker}(u)=\{v\in\mathrm{E}\mid\mathcal{S}(\mathrm{X})*v=0\}$.

(ii) *On a toujours* $\mathcal{S}^{1/2}\,\mathrm{Ind}_{\mathrm{H}}^{\mathrm{G}}(\mathrm{E}^{-1/2}(x_0))\subset\mathrm{Im}(u)$, *et si* $\mathrm{E}\in\mathcal{S}\mathbf{mod}_{\mathrm{G},\mathrm{X}}$, *u est un isomorphisme de* E *sur* $\mathcal{S}^{1/2}\,\mathrm{Ind}_{\mathrm{H}}^{\mathrm{G}}(\mathrm{E}^{-1/2}(x_0))$.

(iii) *Le foncteur* $\mathrm{E}\to\mathrm{E}^{-1/2}(x_0)$ *est fidèle de* $\mathbf{Rep}_{\mathrm{G},\mathrm{X}}^{\mathrm{nd}}$ *vers* $\mathcal{S}\mathbf{mod}_{\mathrm{H}}$, *et est une équivalence de catégories de* $\mathcal{S}\mathbf{mod}_{\mathrm{G},\mathrm{X}}$ *vers* $\mathcal{S}\mathbf{mod}_{\mathrm{H}}$, *d'inverse* $\mathrm{F}\to\mathcal{S}^{1/2}\,\mathrm{Ind}_{\mathrm{H}}^{\mathrm{G}}(\mathrm{F})$.

Démonstration. — (i) Le fait que $\mathfrak{m}_{x_0}*\mathrm{E}$ soit un sous-H-module fermé de E est prouvé au lemme 2.5.7. Alors l'existence et l'unicité de u résultent de la propriété universelle du foncteur $\mathcal{O}_{\mathrm{M}}\,\mathrm{Ind}_{\mathrm{H}}^{\mathrm{G}}$ (lemme 2.1.5). Si $p:\mathrm{E}\to\mathrm{E}(x_0)$ est l'application canonique, on a pour $\psi\in\mathcal{S}(\mathrm{X})$:

$$\begin{aligned}u(\psi v)(g)&=p(g^{-1}\psi v)=p(g^{-1}\psi.g^{-1}v)\\&=(g^{-1}\psi)(x_0)p(g^{-1}v)=\psi(x)u(v)(g),\qquad\text{où}\quad x=gx_0,\end{aligned}$$

donc u commute bien aux actions de $\mathcal{S}(\mathrm{X})$.

Soit $(\mathrm{X}_j)_{1\leq j\leq n}$ un recouvrement trivialisant de X avec les propriétés énoncées au lemme 2.2.5, et posons $\mathrm{E}_j=\mathcal{S}(\mathrm{X}_j)*\mathrm{E}$. Alors il résulte de la démonstration du lemme 2.5.7, (*c*) et (*a*), que u se restreint en un isomorphisme de E_j sur $\mathcal{S}^{1/2}\,\mathrm{Ind}_{\mathrm{H}}^{\mathrm{G}_j}(\mathrm{E}^{-1/2}(x_0))$. En particulier, $u|_{\mathrm{E}_j}$ est injective. Donc si $u(v)=0$, on aura

$\varphi_j * v = 0$ pour tout $\varphi_j \in \mathscr{S}(X_j)$, et comme d'après le lemme 2.2.5 toute $\varphi \in \mathscr{S}(X)$ est somme finie de tels φ_j, on a bien $\mathscr{S}(X) * v = 0$.

(ii) Comme on vient de le voir, $\mathrm{Im}(u)$ contient les $\mathscr{S}^{1/2}\,\mathrm{Ind}_H^{G_j}(E^{-1/2}(x_0))$; donc d'après le lemme 2.2.6 (ii), $\mathrm{Im}(u)$ contient $\mathscr{S}^{1/2}\,\mathrm{Ind}_H^G(E^{-1/2}(x_0))$. Si $E \in \mathscr{S}\mathbf{mod}_{G,X}$, E est en particulier un $\mathscr{S}(X)$-module non dégénéré, donc u est injective; et comme $E = \mathscr{S}(X) * E$ d'après la proposition 2.3.9, on a

$$\mathrm{Im}(u) \subset \mathscr{S}(X) * \mathscr{O}_M^{1/2}\,\mathrm{Ind}_H^G(E^{-1/2}(x_0)) = \mathscr{S}^{1/2}\,\mathrm{Ind}_H^G(E^{-1/2}(x_0)).$$

(iii) Si $E \in \mathbf{Rep}_{G,X}^{nd}$, l'application u est injective d'après (i). Soit $a: E_1 \to E_2$ un $\mathscr{S}(X)$-morphisme, avec E_1 et E_2 non dégénérés. Soit $F_j = E_j^{-1/2}(x_0)$, $j = 1, 2$. Alors a induit un morphisme de $\mathscr{S}^{1/2}\,\mathrm{Ind}_H^G(F_1)$ vers $\mathscr{S}^{1/2}\,\mathrm{Ind}_H^G(F_2)$, puisque $\mathscr{S}^{1/2}\,\mathrm{Ind}_H^G(F_j) = \mathscr{S}(X) * E_j$. Il est classique de voir que a est donnée par multiplication par une fonction différentiable à valeurs opérateurs, et que si a commute aux actions de G, cette fonction est nécessairement constante, et prend sa valeur dans $\mathrm{Hom}_H(F_1, F_2)$; en d'autres termes, en considérant $v \in E_1$ comme une fonction sur G à valeurs dans F_1 on a $a(v) = a_1 \circ v$ pour un certain $a_1 \in \mathrm{Hom}_H(F_1, F_2)$. Donc le foncteur $E \to E^{-1/2}(x_0)$ induit une injection $\mathrm{Hom}_{G,X}(E_1, E_2) \to \mathrm{Hom}_H(F_1, F_2)$, ce qui prouve bien qu'il est fidèle.

A priori, il n'y a aucune raison pour que l'injection ci-dessus soit bijective; cependant, elle l'est de manière évidente lorsque les E_j sont dans $\mathscr{S}\mathbf{mod}_{G,X}$. Donc le foncteur $E \to E^{-1/2}(x_0)$ est pleinement fidèle de $\mathscr{S}\mathbf{mod}_{G,X}$ vers $\mathscr{S}\mathbf{mod}_H$, et a manifestement pour inverse $F \to \mathscr{S}^{1/2}\,\mathrm{Ind}_H^G(F)$, ce qui montre bien qu'il définit une équivalence de catégories.

2.5.9. Remarque. — Soient $E \in \mathbf{Rep}_{G,X}$, $F \in \mathscr{S}\mathbf{mod}_H$, et soit $a: E \to F$ un H-morphisme surjectif tel que $a(\varphi * v) = \varphi(x_0)\,a(v)$ pour tous $\varphi \in \mathscr{S}(X)$, $v \in E$. Alors on voit comme dans la démonstration de (i) que le morphisme $u: E \to \mathscr{O}_M\,\mathrm{Ind}_H^G(F)$ déduit de a commute aux actions de $\mathscr{S}(X)$, et que l'image de u contient toujours $\mathscr{S}\,\mathrm{Ind}_H^G(F)$. Donc on a $\mathscr{S}(X) * \mathrm{Im}(u) = \mathscr{S}\,\mathrm{Ind}_H^G(F)$, ce qui prouve que lorsque u est injectif, F s'identifie canoniquement à la fibre $E(x_0)$, et $F \otimes \Delta_{G/H}^{1/2}$ à $E^{-1/2}(x_0)$.

2.5.10. Théorème (critère de minimalité). — *Soit* $E \in \mathbf{Rep}_{G,X}^{nd}$, *et réalisons* E *comme sous-espace de* $\mathscr{O}_M^{1/2}\,\mathrm{Ind}_H^G(F)$, *avec* $F = E^{-1/2}(x_0)$ (*th.* 2.5.8). *Soit* $\mathbf{X} \subset \mathbf{G/H}$ *un ouvert de définition de* G/H (*n°* 1.1.4). *Alors* E *est dans* $\mathscr{S}\mathbf{mod}_{G,X}$ *si et seulement si il est stable sous l'action de* $\mathbf{C}[\mathbf{X}]$; *on a alors* $E = \mathscr{S}^{1/2}\,\mathrm{Ind}_H^G(F)$ *d'après le théorème* 2.5.8.

Démonstration. — La nécessité est évidente. Soit (X_j) un recouvrement ouvert semi-algébrique de X, (α_j) une partition de l'unité subordonnée, avec les propriétés du lemme 2.2.5. Il est clair qu'il suffit de montrer que pour tout $v \in E$, chaque $\alpha_j v$ est dans $\mathscr{S}^{1/2}\,\mathrm{Ind}_H^G(F)$.

Soit $p: E \to E(x_0)$ l'application canonique, et soit q une semi-norme continue sur $E(x_0)$. Alors il existe une semi-norme continue q_1 sur E telle que $q(p(v)) \leqq q_1(v)$ pour tout $v \in E$. Considérons E comme un sous-espace de $\mathscr{O}_M(G, F)$, de telle sorte que $p(v) = v(1)$. Par définition de $\mathscr{S}\mathbf{mod}_G$ (déf. 1.4.1), il existe une fonction $a \in \mathrm{Reg}(X)$, $a > 0$, et une semi-norme continue q_2 sur E telles que $q_1(g^{-1}v) \leqq a(g)\,q_2(v)$ pour tous

$g \in G$, $v \in E$. Alors

$$q(v(g)) = q(p(g^{-1} v)) \leqq q_1(g^{-1} v) \leqq a(g) q_2(v).$$

En particulier, si dans les notations du lemme 2.2.5 on identifie $G_j = G|_{X_j}$ à $X_j \times H$, on pourra identifier $\alpha_j v$ à une fonction sur X_j à valeurs dans F, et on aura $q(\alpha_j(x) v(x)) \leqq \alpha_j(x) a(x, 1) q_2(v)$ pour tout $v \in E$. Il est clair que la fonction $\alpha_j(x) a(x, 1)$, prolongée par 0 en dehors de X_j, est dans $\mathcal{O}_M(X)$ (déf. 2.1.3). Comme dans le cas de $\mathbf{R}^n$, on en déduit qu'il existe $A \in \mathbf{C}[X]$, $A > 0$ sur X, telle que $\alpha_j(x) a(x, 1) \leqq A(x)$ sur X. Comme $A . v \in E$ par hypothèse, on aura :

$$\begin{aligned} q(\alpha_j(x) v(x)) &= \frac{1}{A(x)} q(\alpha_j(x) A(x) v(x)) \\ &\leqq \frac{1}{A(x)} \alpha_j(x) a(x, 1) q_2(A v) \leqq q_2(A v) \end{aligned}$$

ce qui prouve bien que la fonction $\alpha_j v$ est bornée de X_j dans F. Comme il en va de même après application de n'importe quel opérateur différentiel de $\mathrm{Diffreg}(X_j)$, on a bien $\alpha_j v \in \mathscr{S}(X_j, F)$.

C.Q.F.D.

3. Le théorème de Casselman et Wallach dans le cas réductif

Dans ce chapitre, on note (G, G′, **G**) *un groupe de Lie semi-algébrique, et on suppose* **G** *réductif* (cf. *n*° 0.3). *On note* $\mathfrak{g}$ *l'algèbre de Lie de* G, $U = U(\mathfrak{g})$ *son algèbre enveloppante complexifiée*, K *un sous-groupe compact maximal de* G.

3.1. Énoncé du théorème. — 3.1.1. Nous appellerons modules de Harish-Chandra les ($\mathfrak{g}$, K)-modules admissibles de type fini; on sait (*cf.* [32], th. 3.11) qu'ils sont alors aussi de longueur finie. Nous notons $\mathscr{HC}_G$ la catégorie des modules de Harish-Chandra.

Soit $E \in \mathscr{S}\mathbf{mod}_G$ (*cf.* n° 1.4.4). Nous dirons que E est admissible, si le ($\mathfrak{g}$, K)-module $E_{(K)}$ des vecteurs K-finis de E est un module de Harish-Chandra; nous noterons $\mathscr{S}\mathbf{mod}_G^{\mathrm{adm}}$ la sous-catégorie pleine de $\mathscr{S}\mathbf{mod}_G$ formée des modules admissibles.

3.1.2. Parmi les divers énoncés équivalents du théorème de Casselman et Wallach, nous avons choisi celui-ci :

Théorème (*cf.* [32], th. 6.13 et [33] pour le cas non linéaire). — *Soit* $E \in \mathscr{S}\mathbf{mod}_G^{\mathrm{adm}}$. *Alors* E *est engendré sous l'action de* $\mathscr{S}(G)$ *par l'espace* $E_{(K)}$ *de ses vecteurs* K-*finis* (i.e. $E = \mathscr{S}(G) * E_{(K)}$, *dans les notations de la définition* 2.3.2).

3.1.3. Corollaire. — *Le foncteur* $E \to E_{(K)}$ *est une équivalence de catégories entre* $\mathscr{S}\mathbf{mod}_G^{\mathrm{adm}}$ *et* $\mathscr{HC}_G$. *En particulier*, E_1 *et* E_2 *dans* $\mathscr{S}\mathbf{mod}_G^{\mathrm{adm}}$ *sont topologiquement équivalents si et seulement si* $E_{1\,(K)}$ *et* $E_{2\,(K)}$ *sont algébriquement équivalents.*

(Démonstration au n° 3.2.5.)

3.1.4. Corollaire. — *La catégorie* $\mathscr{S}\mathbf{mod}_G^{adm}$ *est abélienne et finie* (i.e. *tous les objets de* $\mathscr{S}\mathbf{mod}_G^{adm}$ *sont de longueur finie*). *Tous les morphismes de* $\mathscr{S}\mathbf{mod}_G^{adm}$ *sont forts* (cf. *n*° 0.5).

(Démonstration au n° 3.2.7.)

3.1.5. Corollaire. — *Soit* $E \in \mathscr{S}\mathbf{mod}_G^{adm}$, *et supposons* E *topologiquement irréductible et de dimension infinie. Soit* M *l'annulateur de* E *dans* $\mathscr{S}(G)$. *Alors l'algèbre de Fréchet* $\mathscr{S}(G)/M$ *est isomorphe à l'algèbre* $\mathscr{W}$ *définie au n*° 0.7, *et* E *est isomorphe au* $\mathscr{W}$*-module standard.*

(Démonstration au n° 3.2.6.)

3.2. Démonstration des corollaires.

3.2.1. Nous allons faire quelques remarques élémentaires permettant de relier entre eux les divers énoncés de la section 3.1 (nous verrons que les énoncés du théorème 3.1.2, du corollaire 3.1.3 et du corollaire 3.1.5 sont équivalents).

Soit $V \in \mathscr{H}\mathscr{C}_G$. Nous dirons que $E \in \mathscr{S}\mathbf{mod}_G$ est une globalisation de V, si l'on s'est donné un isomorphisme $V \xrightarrow{\sim} E_{(K)}$; il est clair qu'alors E est admissible. Il existe toujours de telles globalisations : en effet on sait qu'il existe toujours des globalisations hilbertiennes de V (il suffit d'injecter V dans une série principale à l'aide du théorème du sous-module de Casselman, *cf.* [32], th. 3.12), et comme une telle globalisation est toujours à croissance modérée (exemple 1.4.2), on obtient une globalisation dans $\mathscr{S}\mathbf{mod}_G^{adm}$ en passant aux vecteurs C^∞ (prop. 1.4.3). Pour le présent chapitre uniquement, posons :

3.2.2. Définition. — *Soit* $V \in \mathscr{H}\mathscr{C}_G$, *et soit* $E \in \mathscr{S}\mathbf{mod}_G^{adm}$ *une globalisation de* V. *Nous dirons que* E *est minimale, si l'on a* $E = \mathscr{S}(G) * V$. *Nous disons que* $E \in \mathscr{S}\mathbf{mod}_G^{adm}$ *est une représentation minimale de* G, *si* $E = \mathscr{S}(G) * E_{(K)}$.

3.2.3. Lemme. — *Tout* $V \in \mathscr{H}\mathscr{C}_G$ *possède une globalisation minimale, unique à unique isomorphisme près; on note* $\mathscr{S}(G) * V$ *cette globalisation. On définit ainsi un foncteur* $\mathscr{H}\mathscr{C}_G \to \mathscr{S}\mathbf{mod}_G^{adm}$ *qui est adjoint au foncteur* $E \to E_{(K)}$ [*en d'autres termes, on a un isomorphisme canonique* $\mathrm{Hom}_G(\mathscr{S}(G) * V, E) \simeq \mathrm{Hom}_{(\mathfrak{g}, K)}(V, E_{(K)})$ *pour tout* $E \in \mathscr{S}\mathbf{mod}_G$, *même non admissible*].

Démonstration. – (*a*) Soit $E \in \mathscr{S}\mathbf{mod}_G^{adm}$ une globalisation quelconque de V, de sorte que l'on peut identifier V à $E_{(K)}$. Considérons alors le sous-espace vectoriel $\mathscr{S}(G) * V$ de E. Vu la compatibilité évidente entre les actions de $\mathscr{S}(G)$, de $U(\mathfrak{g})$ et de $\mathscr{S}(K) = C^\infty(K)$, on voit que si $v_1, \ldots, v_s$ engendrent V comme $(\mathfrak{g}, K)$-module, alors l'application $(\varphi_1, \ldots, \varphi_s) \to \varphi_1 * v_1 + \ldots + \varphi_s * v_s$ de $\mathscr{S}(G) \otimes \mathbf{C}^s$ vers $\mathscr{S}(G) * V$ est surjective. Cela permet de munir $\mathscr{S}(G) * V$ de la topologie quotient de celle de $\mathscr{S}(G) \otimes \mathbf{C}^s$, et comme $\mathscr{S}(G) \otimes \mathbf{C}^s \in \mathscr{S}\mathbf{mod}_G$, d'après la proposition 1.4.3 on obtient ainsi une nouvelle globalisation de V, évidemment minimale. Il est facile de vérifier que la topologie ainsi définie ne dépend pas du choix des générateurs.

(*b*) Montrons maintenant que si E est une globalisation minimale de V, et si $F \in \mathscr{S}\mathbf{mod}_G$ est arbitraire, l'application de restriction à V définit un isomorphisme $\mathrm{Hom}_G(E, F) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{(\mathfrak{g}, K)}(V, F_{(K)})$.

Il est clair que c'est une application injective. Soit donc $u \in \mathrm{Hom}_{(\mathfrak{g}, \mathrm{K})}(\mathrm{V}, \mathrm{F}_{(\mathrm{K})})$, et montrons que u se prolonge en un morphisme $\bar{u}$ de E vers F. Soit $\mathrm{Gr}(u)$ le graphe de u dans $\mathrm{V} \oplus \mathrm{F}_{(\mathrm{K})}$, et soit Γ l'adhérence de $\mathrm{Gr}(u)$ dans $\mathrm{E} \oplus \mathrm{F}$; on sait alors que Γ est un sous-espace G-stable de $\mathrm{E} \oplus \mathrm{F}$ (*cf.* [21], chap. VIII, th. 8.9). Puisque $\mathrm{Gr}(u) \simeq \mathrm{V}$ est admissible, on a $\Gamma_{(\mathrm{K})} = \mathrm{Gr}(u)$, ce qui entraîne aussitôt que Γ est encore un graphe, et donc que Γ définit un opérateur d'entrelacement fermé $\bar{u}$ de E vers F. Comme Γ est un sous-$\mathscr{S}(\mathrm{G})$-module de E, et que $\mathrm{dom}(\bar{u})$ contient V, la minimalité de E implique que $\mathrm{dom}(\bar{u}) = \mathrm{E}$, d'où notre assertion.

Ceci démontre d'une part l'unicité de la globalisation minimale à unique isomorphisme près (on convient d'appeler morphisme de globalisations les entrelacements qui induisent l'identité sur V), d'autre part la propriété de foncteur adjoint.

3.2.4. Remarque. — Le G-module $\mathscr{S}(\mathrm{G}) * \mathrm{V}$ est le module noté $\underline{\underline{\mathrm{V}}}$ dans [6], sect. 8.10.

3.2.5. Démonstration du corollaire 3.1.3. — Avec la terminologie de la définition 3.2.2, on voit que le théorème 3.1.2 affirme simplement que *toute* globalisation de V est minimale; en particulier, d'après le lemme 3.2.3, ces globalisations sont toutes isomorphes entre elles (c'est ce résultat de « globalisation canonique » qui intéresse principalement Casselman et Wallach).

Mais alors le lemme 3.2.3 nous dit que le foncteur $\mathrm{E} \to \mathrm{E}_{(\mathrm{K})}$ de $\mathscr{S}\mathbf{mod}_{\mathrm{G}}^{\mathrm{adm}}$ vers $\mathscr{H}\mathscr{C}_{\mathrm{G}}$, évidemment fidèle et essentiellement surjectif, est pleinement fidèle, ce qui suffit à prouver que c'est une équivalence de catégories. Le foncteur en sens inverse est le foncteur $\mathrm{V} \to \mathscr{S}(\mathrm{G}) * \mathrm{V}$, avec au niveau des morphismes la construction $u \to \bar{u}$ de la démonstration du lemme 3.2.3 (*b*).

3.2.6. Démonstration du corollaire 3.1.5. — Soit $\mathrm{V} \in \mathscr{H}\mathscr{C}_{\mathrm{G}}$ un $(\mathfrak{g}, \mathrm{K})$-module simple. A cause de l'existence d'une globalisation minimale contenue dans toute globalisation E de V (lemme 3.2.3), il est clair que l'annulateur M de E dans $\mathscr{S}(\mathrm{G})$ ne dépend pas du choix de E. Soit alors $\mathscr{H}$ une globalisation hilbertienne de V telle que les vecteurs C^∞ de $\mathscr{H}$ sous les actions de G et de K soient les mêmes, ce que nous noterons $\mathscr{H}_\infty(\mathrm{G}) = \mathscr{H}_\infty(\mathrm{K})$ (on obtient une telle $\mathscr{H}$ en prenant l'adhérence de V dans une série principale hilbertienne, car la propriété est évidente pour les séries principales, et passe aux sous-modules fermés). Supposons, comme on peut le faire, que l'action de K soit unitaire. On sait que l'action de $\mathscr{S}(\mathrm{G})$ dans $\mathscr{H}$ se fait par des opérateurs traçables, donc *a fortiori* de Hilbert-Schmidt, d'où un $(\mathrm{G} \times \mathrm{G})$-morphisme $\mathscr{S}(\mathrm{G}) \to \mathscr{L}^2(\mathscr{H})_\infty$ (vecteurs C^∞ pour l'action de $\mathrm{G} \times \mathrm{G}$), qui passe en une injection $\mathscr{S}(\mathrm{G})/\mathrm{M} \to \mathscr{L}^2(\mathscr{H})_\infty$.

On note $\mathscr{H}^\vee$ l'espace vectoriel complexe conjugué de $\mathscr{H}$, muni de l'action $g \to \pi(g^{-1})^*$ de G; on note $\mathrm{V}^\vee = (\mathscr{H}^\vee)_{(\mathrm{K})}$ (c'est aussi l'espace des vecteurs K-finis du dual algébrique V^*). Alors on a un isomorphisme canonique $\mathscr{L}^2(\mathscr{H}) \simeq \mathscr{H} \otimes_h \mathscr{H}^\vee$, où $\otimes_h$ est le produit tensoriel hilbertien; d'où une application canonique $\mathscr{H}_\infty \hat{\otimes} (\mathscr{H}_\infty)^\vee \to \mathscr{L}^2(\mathscr{H})_\infty$. Ainsi, on a trois globalisations de $\mathrm{V} \otimes \mathrm{V}^\vee$, à savoir $\mathscr{S}(\mathrm{G})/\mathrm{M}$, $\mathscr{H}_\infty \hat{\otimes} (\mathscr{H}_\infty)^\vee$ et $\mathscr{L}^2(\mathscr{H})_\infty$. D'après le corollaire 3.1.3, ces trois globalisations coïncident; en particulier, on a $\mathscr{S}(\mathrm{G})/\mathrm{M} \simeq \mathscr{H}_\infty \hat{\otimes} (\mathscr{H}_\infty)^\vee$, comme $(\mathrm{G} \times \mathrm{G})$-module et comme algèbre de Fréchet.

Il est clair que la structure d'algèbre sur $\mathscr{H}_\infty \hat{\otimes} (\mathscr{H}_\infty)^\vee$ est entièrement définie en termes du produit scalaire préhilbertien sur $\mathscr{H}_\infty$; et on remarque que dans la description du n° 0.7, on a de même $\mathscr{W} = s(\mathbf{N}) \hat{\otimes} s(\mathbf{N})\check{}$, pour le produit scalaire usuel sur $s(\mathbf{N})$. Donc pour montrer que $\mathscr{S}(\mathrm{G})/\mathrm{M} \simeq \mathscr{W}$, il suffit d'exhiber un isomorphisme d'espaces de Fréchet $\mathscr{H}_\infty \to s(\mathbf{N})$ préservant les produits scalaires.

C'est maintenant un simple problème sur les représentations unitaires des groupes compacts. Soit $\mathrm{K}^\wedge$ le dual unitaire de K, et $\mathscr{H}_{(\mathrm{K})} = \bigoplus_{\sigma \in \mathrm{K}^\wedge} \mathscr{H}_\sigma$; soit $m(\sigma)$ la multiplicité de σ dans $\mathscr{H}$. Soit K_0 la composante neutre de K, T un tore maximale de K_0, T′ le normalisateur de T dans K; soit $\mathfrak{k}$ l'algèbre de Lie de T. Choisissons un produit scalaire T′-invariant sur $\mathfrak{k}$, et pour σ dans $\mathrm{K}^\wedge$ notons $|\sigma|$ la norme d'un poids extrémal de σ (ils sont tous conjugués sous T′). Alors on sait qu'il existe une constante $c > 0$ et $\mathrm{N} \in \mathbf{N}$ tels que $m(\sigma) \leqq c(1+|\sigma|)^{\mathrm{N}}$ (par exemple parce que c'est vrai pour les séries principales). Nous exprimerons cela en disant que la « suite » $m(\sigma)$ est à croissance lente.

Il est classique de voir que dans la décomposition ci-dessus, on a

$$\mathscr{H}_\infty = \{(x_\sigma)_{\sigma \in \mathrm{K}^\wedge}, x_\sigma \in \mathscr{H}_\sigma \mid \forall n \in \mathbf{N}, \sup_{\sigma \in \mathrm{K}^\wedge} (1+|\sigma|)^n \|x_\sigma\| < +\infty\};$$

(en d'autres termes, $\mathscr{H}_\infty$ est l'espace des « suites à décroissance rapide »). En utilisant l'hypothèse sur les multiplicités, et le fait que $\dim(\sigma)$ croît au plus polynomialement avec $|\sigma|$, on en déduit bien que $\mathscr{H}_\infty$ est isomorphe à $s(\mathbf{N})$, par un isomorphisme qui induit une isométrie de $\mathscr{H}$ sur $l^2(\mathbf{N})$.

3.2.7. Démonstration du corollaire 3.1.4. — La première assertion résulte de l'équivalence de catégories du corollaire 3.1.3. En réalisant $\mathrm{E} \in \mathscr{S}\mathbf{mod}_{\mathrm{G}}^{\mathrm{adm}}$ comme l'espace des vecteurs C^∞ d'une représentation hilbertienne $\mathscr{H}$ de G, unitaire pour K, et telle que $\mathscr{H}_\infty(\mathrm{G}) = \mathscr{H}_\infty(\mathrm{K})$ (*cf.* n° 3.2.6), on voit directement que tout sous-G-module fermé de E possède un supplémentaire topologique. En vertu du n° 0.5, il suffit donc de prouver que tout morphisme dans $\mathscr{S}\mathbf{mod}_{\mathrm{G}}^{\mathrm{adm}}$ est d'image fermée, ce qui se fait comme dans [7], prop. 4.5.

3.2.8. Remarque. — En fait, les énoncés du théorème 3.1.2 et des corollaires 3.1.3 et 3.1.5 sont équivalents : en effet, le corollaire 3.1.3 entraîne manifestement le théorème 3.1.2, et il en va de même pour le corollaire 3.1.5 à cause du fait que l'algèbre $\mathscr{W}$ ne possède qu'une seule représentation différentiable topologiquement irréductible, à savoir la représentation standard S, qui de plus est algébriquement irréductible (*cf.* n° 0.7). On voit même que pour démontrer le corollaire 3.1.5 nous n'avons eu besoin du théorème 3.1.2 que dans le cas particulier où E est un sous-module fermé d'une série principale C^∞; ce cas particulier implique donc le cas général (malheureusement, cette remarque ne diminue pas notablement la difficulté de la démonstration du théorème 3.1.2).

3.2.9. Le lemme suivant nous sera utile au chapitre 5 :

Lemme. — *Soit* $\mathrm{E} \in \mathscr{S}\mathbf{mod}_{\mathrm{G}}$, *et supposons* E *topologiquement irréductible. Alors* E *est admissible si et seulement si il est à commutant scalaire.*

Démonstration. — La nécessité est claire. Supposons donc E à commutant scalaire, et montrons qu'il est admissible.

Soit Z le centre de $U(\mathfrak{g})$, K_0 la composante neutre de K. Alors Z est muni d'une action par automorphismes du groupe fini K/K_0, et l'hypothèse entraîne que la sous-algèbre Z^K agit dans E par un caractère; en d'autres termes, le support de E comme Z-module est réduit à une unique K-orbite $K.\chi_0$, où χ_0 est un caractère de Z, et E se décompose en $E = \bigoplus_{\chi \in K.\chi_0} E_\chi$, où dans chaque E_χ l'action de Z est scalaire. Si G_1 est le stabilisateur de χ_0 dans G, on a $E = \mathrm{Ind}_{G_1}^{G} E_{\chi_0}$, et un argument élémentaire de théorie de Mackey montre que E_{χ_0} est topologiquement irréductible et à commutant scalaire sous l'action de G_1. Donc nous sommes ramenés au cas où l'action de Z dans E est scalaire.

Mais alors $E_{(K)}$ est un $(\mathfrak{g}, K)$-module où Z agit scalairement; d'après un résultat classique d'Harish-Chandra (*cf.* [32], th. 2.10), cela entraîne que tout sous-$(\mathfrak{g}, K)$-module de type fini de $E_{(K)}$ est admissible. Mais si V est un tel sous-module, la globalisation minimale $\mathscr{S}(G) * V$ (lemme 3.2.3) s'injecte dans E, donc y est dense, ce qui prouve bien que E est admissible.

C.Q.F.D.

3.2.10. Remarque. — Un exemple récent dû à W. Soergel [30] montre qu'il existe des représentations banachiques de $\mathbf{SL}(2, \mathbf{R})$ topologiquement irréductibles et non admissibles. Comme dans le cas réductif une représentation banachique est forcément à croissance modérée, en prenant les vecteurs C^∞ on obtient un objet topologiquement irréductible $\mathscr{S}\mathbf{mod}_G$ non admissible.

4. Théorie de Mackey

Dans ce chapitre, on note $(G, G', \mathbf{G})$ *un groupe de Lie semi-algébrique* (cf. *n°* 0.2), *et on fixe comme au n°* 0.3 *une décomposition* $\mathbf{G} = \mathbf{L}.\mathbf{U}$, *d'où* $G = L.U$ *avec les notations de* loc. cit. *On note* $\mathfrak{u} = \mathrm{Lie}(U)$.

4.1. Transformation de Fourier partielle le long d'un idéal commutatif.

Dans cette section, on note $\mathbf{A}$ *un sous-groupe fermé commutatif* $\mathrm{Ad}(G)$*-stable de* $\mathbf{U}$, $A = \mathbf{A}(\mathbf{R})$, *que l'on identifie à un sous-groupe de* U. *On note* $\mathfrak{a} = \mathrm{Lie}(A)$.

4.1.1. Lemme. — *Soit* $\mathfrak{b}$ *un sous-espace vectoriel supplémentaire de* $\mathfrak{a}$ *dans* $\mathfrak{u}$. *Alors l'application* $(\xi_0, \xi_1) \to \exp(\xi_0)\exp(\xi_1)$ *est un isomorphisme de variétés algébriques de* $\mathfrak{b}_{\mathbf{C}} \oplus \mathfrak{a}_{\mathbf{C}}$ *sur* $\mathbf{U}$.

Démonstration. — Soit $g \in \mathbf{U}$; alors g s'écrit $\exp(\xi)$ pour un certain $\xi \in \mathfrak{u}_{\mathbf{C}}$. On a une décomposition $\xi = \xi_0 + \xi_1$, avec $\xi_0 \in \mathfrak{b}_{\mathbf{C}}$, $\xi_1 \in \mathfrak{a}_{\mathbf{C}}$. Comme $\mathfrak{a}_{\mathbf{C}}$ est un idéal, $\mathfrak{h} = \mathbf{C}\xi_0 \oplus \mathfrak{a}_{\mathbf{C}}$ est une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{u}_{\mathbf{C}}$ (non nécessairement définie sur $\mathbf{R}$), et alors la décomposition $\exp(\mathfrak{h}) = \exp(\mathbf{C}\xi_0)\exp(\mathfrak{a}_{\mathbf{C}})$ est classique; d'où la surjectivité.

Pour l'injectivité, il suffit de prouver que si $\exp(\xi_0)\exp(\xi_1) \in \exp(\mathfrak{b}_{\mathbf{C}})$, alors $\xi_1 = 0$. Or, avec $\mathfrak{h}$ comme ci-dessus, on pourra écrire $\exp(\xi_0)\exp(\xi_1) = \exp(\eta)$ pour un certain $\eta \in \mathfrak{h}$, et comme exp est un isomorphisme, on aura $\eta \in \mathfrak{h} \cap \mathfrak{b}_{\mathbf{C}} = \mathbf{C}\xi_0$, d'où $\xi_1 = 0$.

4.1.2. Prenons un sous-espace vectoriel $\mathfrak{b}$ L-stable supplémentaire de $\mathfrak{a}$ dans $\mathfrak{u}$. D'après le lemme 4.1.1 on en déduit une décomposition $\mathbf{U}=\mathbf{B}.\mathbf{A}$, avec $\mathbf{B}=\exp(\mathfrak{b}_{\mathbf{C}})$. On aura aussi $\mathbf{G}=(\mathbf{LB}).\mathbf{A}$ et $G=(LB).A$. Nous utiliserons cette décomposition pour identifier la variété analytique G à $G/A\times A$. On identifie A à $\mathfrak{a}$ *via* l'application exponentielle.

Si x_1 et x_2 sont donnés dans G/A, leur produit dans G s'écrit

$$(x_1, 0)(x_2, 0)=(x_1 x_2, a(x_1, x_2)),$$

où a est une fonction régulière sur $G'/A\times G'/A$, à valeurs dans $\mathfrak{a}$, et vérifiant la condition de 2-cocycle :

$$a(xy, z)+z^{-1}a(x, y)=a(x, yz)+a(y, z)$$

[en fait, si a_0 est la restriction de a à $U/A\simeq B$, on a $a(y_1 b_1, y_2 b_2)=a_0(y_2^{-1}b_1 y_2, b_2)$, ce qui prouve bien que a passe au quotient en une fonction sur $(G'/A)\times(G'/A)$, et qu'elle y est régulière].

On en déduit les formules suivantes pour les produits dans G :

$$(2)\qquad \begin{cases} (x_1, a_1)(x_2, a_2)=(x_1 x_2, x_2^{-1}a_1+a_2+a(x_1, x_2)) \\ (x_1, a_1)^{-1}(x_2, a_2)=(x_1^{-1}x_2, -x_2^{-1}x_1 a_1+a_2-a(x_1, x_1^{-1}x_2)). \end{cases}$$

Il est facile de voir que si dx est une mesure de Haar à gauche sur G/A, da une mesure de Haar sur A, alors $dx\,da$ est une mesure de Haar à gauche sur G.

4.1.3. D'après la proposition 1.2.6, l'algèbre $\mathcal{S}(G)$ s'identifie en tant qu'espace de Fréchet à $\mathcal{S}(G/A)\hat{\otimes}\mathcal{S}(\mathfrak{a})$. Nous identifierons l'algèbre de convolution $\mathcal{S}(\mathfrak{a})$ à l'algèbre de multiplication $\mathcal{S}(\mathfrak{a}^*)$ par (co)transformation de Fourier :

$$\bar{\mathcal{F}}\varphi(\lambda)=\int_{\mathfrak{a}}\varphi(a)\,e^{2i\pi\langle\lambda, a\rangle}\,da.$$

Dans cette écriture, la loi de produit devient :

$$(3)\qquad \varphi_1 * \varphi_2(x, \lambda)=\int_{G/A}\varphi_1(x_1, x_1^{-1}x\lambda)\,\varphi_2(x_1^{-1}x, \lambda)\,e^{2i\pi\langle\lambda, a(x_1, x_1^{-1}x)\rangle}\,dx_1$$

(on pourra comparer avec la loi du produit croisé du n° 2.4.2; la différence est dans la présence du 2-cocycle tordant).

La remarque importante est que $\varphi_1 * \varphi_2(x, \lambda)$ ne dépend que des restrictions de φ_1 et φ_2 à $G/A\times X$, où X est la G-orbite de λ. En particulier, on voit que pour tout ouvert G-stable Ω de $\mathfrak{a}^*$, $\mathcal{I}(\Omega)=C_c^\infty(\Omega, \mathcal{S}(G/A))$ est un idéal de $\mathcal{S}(G)$; lorsque Ω est semi-algébrique, il est facile de voir que l'adhérence de $\mathcal{I}(\Omega)$ dans $\mathcal{S}(G)$ est l'idéal $\mathcal{S}(\Omega, \mathcal{S}(G/A))$, noté $\bar{\mathcal{I}}(\Omega)$.

De même, si Y est une sous-variété semi-algébrique G-stable de $\mathfrak{a}^*$, on munit l'espace $\mathcal{S}(Y, \mathcal{S}(G/A))$ d'une loi d'algèbre par la formule (3) [d'après ce qui précède, c'est un quotient d'un idéal fermé de $\mathcal{S}(G)$], et on définit pour tout ouvert G-stable Ω de Y l'idéal $\mathcal{I}(\Omega)$, et $\bar{\mathcal{I}}(\Omega)$ si Ω est semi-algébrique.

4.1.4. A partir des formules (2), il est facile de déterminer les actions à gauche et à droite des algèbres $\mathcal{S}(\mathfrak{a})$ et $U(\mathfrak{a})$ sur $\mathcal{S}(G)$. En coordonnées de Fourier, ces algèbres deviennent respectivement $\mathcal{S}(\mathfrak{a}^*)$ et $\mathbf{C}[\mathfrak{a}^*_{\mathbf{C}}]$, et les actions s'écrivent :

$$\left\{\begin{array}{l}\psi * \varphi(x, \lambda)=\psi(x\lambda)\,\varphi(x, \lambda)\\ \varphi * \psi(x, \lambda)=\varphi(x, \lambda)\,\psi(\lambda)\end{array}\right. \tag{4}$$

pour $\varphi\in\mathcal{S}(G)$, $\psi\in\mathcal{S}(\mathfrak{a})$ [resp. $U(\mathfrak{a})$] (en d'autres termes, à ce niveau-là les formules sont les mêmes que pour les produits croisés non tordus).

4.2. Support d'un G-module irréductible.

4.2.1. On garde les notations de la section 4.1. Si $E\in\mathcal{S}\mathbf{mod}_G$, on appelle support de E, et on note supp(E) [ou $\mathrm{supp}_{\mathfrak{a}}(E)$ s'il y a ambigüité] le complémentaire du plus grand ouvert Ω de $\mathfrak{a}^*$ tel que $\mathcal{I}(\Omega)*E=0$. Il est facile de voir que cette définition a un sens, et que supp(E) est un fermé G-stable de $\mathfrak{a}^*$. De plus, si $E\neq 0$ on a $\mathrm{supp}(E)\neq\varnothing$ car $\mathcal{I}(\mathfrak{a}^*)$ est dense dans $\mathcal{S}(G)$, et on ne peut pas avoir $\mathcal{S}(G)*E=0$ sans que $E=0$.

Il est clair que le support de E est le même, qu'on le considère comme G-module ou seulement comme A-module. En effet, l'idéal de $\mathcal{S}(A)$ correspondant à Ω est $C_c^\infty(\Omega)$. Comme $C_c^\infty(\Omega)*\mathcal{I}(\Omega)=\mathcal{I}(\Omega)$, on voit que $\mathcal{I}(\Omega)*E\subset C_c^\infty(\Omega)*E$. Inversement, comme $C_c^\infty(\Omega)$ multiplie $\mathcal{S}(G)$ dans $\mathcal{I}(\Omega)$, on a $C_c^\infty(\Omega)*E=C_c^\infty(\Omega)*\mathcal{S}(G)*E\subset\mathcal{I}(\Omega)*E$.

4.2.2. Lemme. — *Soit* $(Z, \mathbf{Z})$ *un ouvert semi-algébrique* G-*stable de* $\mathfrak{a}^*$ (cf. *n*° 1.1.5); *ici on demande que* Z *soit* G-*stable, mais pas nécessairement* $\mathbf{Z}$. *Soit* $\mathbf{Z}_1$ *une sous-variété fermée lisse* G-*stable de* $\mathbf{G}Z$, $Z_1=\mathbf{Z}_1\cap Z$, $Y=Z\diagdown Z_1$ *l'ouvert de Zariski complémentaire. Soit* $M=\{\varphi\in\bar{\mathcal{I}}(Z)\mid \varphi|_{Z_1}=0\}$.

(i) *Soit* $\mathfrak{q}=\{a\in\mathrm{Reg}(Z)\ \text{t. q.}\ a|_{Z_1}=0\}$. *Alors* $\mathfrak{q}$ *est un idéal de type fini de* Reg(Z), *et* $M=\bar{\mathcal{I}}(Z)*\mathfrak{q}$.

(ii) *Soit* $M^k=M*\ldots*M$ (*k fois*). *Alors chaque* M^k *est un idéal fermé de* $\bar{\mathcal{I}}(Z)$, *et* $M^\infty=\bigcap_{k\geqq 1} M^k=\bar{\mathcal{I}}(Y)$.

(iii) (Lemme de Borel.) *L'application canonique* $\bar{\mathcal{I}}(Z)/M^\infty\to\varprojlim\bar{\mathcal{I}}(Z)/M^k$ *est surjective.*

Démonstration. — (i) Comme Reg(Z) est un localisé de $\mathbf{C}[\mathbf{Z}]$, on sait que $\mathfrak{q}$ est engendrée par $\mathfrak{q}\cap\mathbf{C}[\mathbf{Z}]$, qui est évidemment de type fini, donc $\mathfrak{q}$ est de type fini. Comme nous l'avons signalé au n° 4.1.4, l'action à droite de $\mathfrak{a}$ sur $\mathcal{S}(G)$, donc sur $\bar{\mathcal{I}}(Z)$, se fait en coordonnées de Fourier par multiplication. Puisque $\mathbf{Z}$ est un ouvert dans $\mathfrak{a}^*_{\mathbf{C}}$, Reg(Z) est un localisé de $\mathbf{C}[\mathfrak{a}^*_{\mathbf{C}}]$, et son action naturelle sur $\bar{\mathcal{I}}(Z)$ par multiplication est l'unique extension de celle de $\mathbf{C}[\mathfrak{a}^*_{\mathbf{C}}]=U(\mathfrak{a})$; c'est pourquoi nous la noterons comme une convolution.

Il est clair que $\bar{\mathcal{I}}(Z)*\mathfrak{q}\subset M$. La réciproque se ramène à un problème élémentaire de géométrie différentielle locale, en utilisant le théorème de résolution des singularités (th. 0.4), comme nous l'avons fait dans la démonstration du théorème 1.2.4 (e); nous ne détaillons pas à nouveau le raisonnement.

(ii) Il est clair que $\bar{\mathscr{I}}(Z)$ est un quotient du produit croisé $\mathscr{S}(G)\hat{\otimes}\mathscr{S}(Z)$; par conséquent, $\bar{\mathscr{I}}(Z)$ possède la propriété de factorisation (déf. 2.3.2). D'autre part, le changement de variables $(x, \lambda)\to(x, x\lambda)$ transforme l'action à gauche de $\mathrm{Reg}(Z)$ sur $\bar{\mathscr{I}}(Z)$ en l'action par multiplication ordinaire, tout en respectant M. Donc la même démonstration qu'en (i) prouve que l'on a aussi $M=\mathfrak{q}*\bar{\mathscr{I}}(Z)$. Par conséquent, on a

$$M^k=\bar{\mathscr{I}}(Z)^k*\mathfrak{q}^k=\bar{\mathscr{I}}(Z)*\mathfrak{q}^k.$$

Toujours par la même procédure de réduction à un problème local, on en déduit facilement que M^k est l'ensemble des $\varphi\in\bar{\mathscr{I}}(Z)$ qui sont nuls à l'ordre au moins k le long de Z_1. Comme ceci est évidemment une condition fermée, on voit bien que les M^k sont tous fermés dans $\bar{\mathscr{I}}(Z)$.

D'après ce qui précède, il est clair que $\bar{\mathscr{I}}(Y)\subset M^\infty$; l'inclusion inverse résulte du théorème 1.2.4 (i) qui s'étend trivialement aux fonctions à valeurs vectorielles.

(iii) D'après [3], ch. IV, th. 1, cor. 1, pour montrer que l'application naturelle $\bar{\mathscr{I}}(Z)/M^\infty\to\varprojlim\bar{\mathscr{I}}(Z)/M^k$ est un isomorphisme, il suffit de montrer que sa transposée est surjective. Autrement dit, il s'agit de montrer que toute forme linéaire continue u sur $\bar{\mathscr{I}}(Z)$, nulle sur M^∞, passe déjà au quotient par un M^k.

Considérant u comme une « F-distribution » sur Z, avec $F=\mathscr{S}(G/A)$, on définit de façon évidente son ordre, et la définition de la topologie de $\bar{\mathscr{I}}(Z)=\mathscr{S}(Z, \mathscr{S}(G/A))$ [par les semi-normes $q_{D, p}(\varphi)=\sup_{x\in Z} p(D\varphi(x))$, où D parcourt $\mathrm{Diffreg}(Z)$, et p parcourt une famille fondamentale de semi-normes pour $\mathscr{S}(G/A)$] entraîne aussitôt que l'ordre de u est fini, égal à un entier k. On va montrer que $u(M^k)=0$. Pour cela, on remarque que $M^k*C_c^\infty(Z)$ est dense dans M^k, ce qui nous ramène à prouver que $u(\varphi)=0$ lorsque φ est à support compact, et nulle à l'ordre k le long de Z_1. Or il est clair que M^∞ est dense dans M^k pour la topologie de la convergence d'ordre k sur tout compact; donc on a bien $u(M_k)=0$, et le lemme est démontré.

4.2.3. Lemme. — *Reprenons les notations du lemme* 4.2.2. *Soit* $E\in\mathscr{S}\mathbf{mod}_G$, *et supposons* E *topologiquement irréductible. Alors si* $(\mathrm{supp}(E)\cap Z)\subset Z_1$, *on a* $M*E=0$, *de sorte que l'action de* $\bar{\mathscr{I}}(Z)$ *sur* E *passe au quotient en une action de* $\bar{\mathscr{I}}(Z)/M=\mathscr{S}(Z_1, \mathscr{S}(G/A))$.

Démonstration. — Par définition de supp(E), on a $\mathscr{I}(Y)*E=0$, d'où $\bar{\mathscr{I}}(Y)*E=0$. D'après le lemme 4.2.2 (ii), on a donc $M^\infty*E=0$, et il s'agit d'en déduire que $M*E=0$. Nous utiliserons une idée de [22].

Soit E' le dual topologique de E, $\lambda\neq0$ dans E', $v\neq0$ dans E. Considérons la forme linéaire continue $\varphi\to\langle\lambda, \varphi*v\rangle$ sur $\bar{\mathscr{I}}(Z)$. Par hypothèse, elle passe au quotient par M^∞. D'après le lemme 4.2.2 (iii), elle passe donc au quotient par un certain M^k, ce que l'on note $\langle\lambda, M^k*v\rangle=0$.

Comme M^k est un idéal de $\mathscr{S}(G)$, M^k*v est un sous-$\mathscr{S}(G)$-module de E. Puisque E est topologiquement irréductible, on voit donc que si $M^k*v\neq0$, il est dense, ce qui entraîne que $\langle \lambda, E \rangle = 0$, contrairement à l'hypothèse. Donc $M^k * v = 0$. Toujours parce que M^k est un idéal dans $\mathscr{S}(G)$, on en déduit que $M^k * \mathscr{S}(G) * v = 0$, donc $M^k * E = 0$. Prenons $k \in \mathbf{N}$ aussi petit que possible tel que $M^k * E = 0$, et montrons que $k = 1$. Sinon, on pourrait écrire $M^{k-1} * M * E = 0$, et comme on a alors $M * E \neq 0$, on en déduit que $M^{k-1} * E = 0$, ce qui est absurde.

C.Q.F.D.

4.2.4. LEMME. — *Soit* $E \in \mathscr{S}\mathbf{mod}_G$, *et supposons* E *topologiquement irréductible. Alors il existe une unique* G-*orbite* X *dans* $\mathfrak{a}^*$ *telle que* $\operatorname{supp}(E) = \bar{X}$.

Démonstration. — (*a*) D'après [14], lemme 1.1 par exemple, il existe une suite croissante de parties Zariski-fermées **G**-stables de $\mathfrak{a}^*_{\mathbf{C}}$, soit $\mathbf{V}_0 = \varnothing \subset \mathbf{V}_1 \subset \ldots \subset \mathbf{V}_m = \mathfrak{a}^*_{\mathbf{C}}$, telles que :

(i) $\mathbf{W}_j = \mathbf{V}_j \setminus \mathbf{V}_{j-1}$ est lisse pour $1 \leqq j \leqq m$.

(ii) Le graphe de la relation de conjugaison par **G** est fermé dans $\mathbf{W}_j \times \mathbf{W}_j$.

Soient $V_j = \mathbf{V}_j(\mathbf{R})$, $W_j = \mathbf{W}_j(\mathbf{R})$. Soit $\mathbf{\Gamma}_j$ le graphe de la relation de conjugaison par **G** dans $\mathbf{W}_j$, Γ_j celui de la relation de conjugaison par G (ou par G′, c'est le même) dans W_j. Alors Γ_j est une réunion de composantes connexes de $\mathbf{\Gamma}_j(\mathbf{R})$, de sorte que (ii) entraîne que Γ_j est fermé dans $W_j \times W_j$. En particulier, l'espace W_j/G est séparé pour la topologie analytique.

(*b*) Soit j l'unique indice $\geqq 1$ tel que $\operatorname{supp}(E) \subset V_j$, $\operatorname{supp}(E) \not\subset V_{j-1}$, et posons $X = \operatorname{supp}(E) \cap V_j$. Montrons que X se réduit à une seule G-orbite.

D'après le lemme 4.2.3 avec $Z = \mathfrak{a}^* \setminus V_{j-1}$, $\mathbf{Z}_1 = V_j \setminus V_{j-1}$ (on ne précise pas **Z**), l'action de $\bar{\mathscr{I}}(\mathfrak{a}^* \setminus V_{j-1})$ dans E passe au quotient en une action de $\mathscr{S}(W_j, \mathscr{S}(G/A))$. Soit $x_0 \in X$, $y \in W_j$, $y \notin G.x_0$. D'après (*a*), il existe deux ouverts G-stables Ω_0 et Ω_1 de W_j tels que $x_0 \in \Omega_0$, $y \in \Omega_1$, et $\Omega_0 \cap \Omega_1 = \varnothing$. Avec les notations du n° 4.1.3 on a alors $\mathscr{I}(\Omega_1) * \mathscr{I}(\Omega_0) = 0$. Comme par hypothèse $\mathscr{I}(\Omega_0) * E$ est dense dans E, on a donc $\mathscr{I}(\Omega_1) * E = 0$, ce qui prouve que $y \notin \operatorname{supp}(E)$.

(*c*) Il est facile de voir que deux G-orbites dans $\mathfrak{a}^*$ qui ont même adhérence (pour la topologie analytique) sont égales. Il nous reste donc à vérifier qu'avec X comme en (*b*) on a $\operatorname{supp}(E) = \bar{X}$. Par une nouvelle application du lemme 4.2.3, on voit que l'action de $\bar{\mathscr{I}}(\mathfrak{a}^* \setminus V_{j-1})$ passe au quotient en une action de $\mathscr{S}(X', \mathscr{S}(G/A))$, avec $X' = \mathbf{G}.X \cap (\mathfrak{a}^* \setminus V_{j-1})$, puis en une action de $\mathscr{S}(X, \mathscr{S}(G/A))$ en remarquant que X est une réunion de composantes connexes de X′.

Soit maintenant $\Omega = \mathfrak{a}^* \setminus \bar{X}$, et $\psi \in \mathscr{I}(\Omega)$. Pour montrer que $\psi * E = 0$, il suffit de prouver que $\psi * \mathscr{I}(X) * E = 0$, puisque $\mathscr{I}(X) * E$ est dense dans E. Or toute $\varphi \in \mathscr{I}(X)$ peut s'écrire $\varphi = \varphi_1|_X$ avec $\varphi_1 \in \mathscr{I}(\mathfrak{a}^* \setminus V_{j-1})$ et $\operatorname{supp}(\varphi_1) \cap \operatorname{supp}(\psi) = \varnothing$. Donc $\psi * \varphi_1 = 0$, et $\psi * \varphi * E = \psi * \varphi_1 * E = 0$.

C.Q.F.D.

4.3. LE THÉORÈME DE MACKEY.

4.3.1. Soit **N** un sous-groupe fermé Ad(G)-stable de **U**, $N = \mathbf{N}(\mathbf{R})$, $\mathfrak{n} = \operatorname{Lie}(N)$. Rappelons que la méthode des orbites de Kirillov [20] établit une bijection canonique entre le dual unitaire $\hat{N}$ de N, et l'espace $\mathfrak{n}^*/N$ des orbites coadjointes. D'autre part, dans [8], th. 5.1, nous avons montré que les objets topologiquement irréductibles de $\mathscr{S}\mathbf{mod}_N$ sont précisément les espaces de vecteurs C^∞ des représentations unitaires irréductibles de N, de sorte que l'on peut aussi les paramétrer par $\mathfrak{n}^*/N$. Soit $\mathscr{H} \in \hat{N}$, Q l'annulateur de

$\mathscr{H}_\infty$ dans $\mathscr{S}(\mathrm{N})$. Alors il n'est pas difficile de voir que $\mathscr{S}(\mathrm{N})$ agit dans $\mathscr{H}$ par opérateurs de Hilbert-Schmidt, et d'après un résultat de R. Howe (*cf.* [7], th. 3.3), l'injection canonique $\mathscr{S}(\mathrm{N})/\mathrm{Q} \to \mathscr{L}^2(\mathscr{H})_\infty$ est un isomorphisme. Il en résulte facilement que $\mathscr{S}(\mathrm{N})/\mathrm{Q} \simeq \mathscr{W}$, où $\mathscr{W}$ est l'algèbre universelle introduite au n° 0.7. D'après les propriétés de $\mathscr{W}$ rappelées au n° 0.7, on voit alors que $\mathrm{E} \in \mathscr{S}\mathbf{mod}_\mathrm{N}$ est de la forme $\mathscr{H}_\infty \hat{\otimes} \mathrm{F}$, où F est un espace de Fréchet, si et seulement si l'annulateur de E dans $\mathscr{S}(\mathrm{N})$ est égal à Q; nous dirons dans ce cas que E est un multiple de $\mathscr{H}_\infty$, et nous écrirons $\mathrm{E} \approx \mathscr{H}_\infty$.

Pour $\nu \in \mathfrak{n}^*$, nous noterons $\mathcal{O}_\nu$ (resp. $\mathscr{H}^\nu$) l'orbite coadjointe (resp. l'élément de $\hat{\mathrm{N}}$) correspondants. On note $\mathrm{H} = \mathrm{G}(\mathcal{O}_\nu) = \mathrm{G}(\nu)\mathrm{N}$ le stabilisateur dans G de l'orbite $\mathcal{O}_\nu$ (ou, de façon équivalente, de $\mathscr{H}^\nu$). On note $\mathscr{Y}(\nu)$ la sous-catégorie pleine de $\mathscr{S}\mathbf{mod}_\mathrm{H}$ formée des représentations dont la restriction à N est multiple de $\mathscr{H}^\nu_\infty$.

4.3.2. Lemme. — *Soit* N *un sous-groupe fermé* Ad(G)-*stable de* U, X *une* G-*orbite dans* $\mathfrak{n}^*$, $\nu \in \mathrm{X}$, *et introduisons les notations du n°* 4.3.1. *Soit* P *l'intersection des conjugués de* Q *sous* G (*c'est donc l'intersection des annulateurs des éléments de* $\hat{\mathrm{N}}$ *qui correspondent aux orbites coadjointes de* N *contenues dans* X). *On peut faire agir le produit semi-direct* $\mathrm{G} \times \mathrm{N}$ (*resp.* $\mathrm{H} \times \mathrm{N}$) *dans* $\mathscr{S}(\mathrm{N})/\mathrm{P}$ [*resp.* $\mathscr{S}(\mathrm{N})/\mathrm{Q}$] *en faisant agir* N *par multiplication à gauche. Alors la surjection canonique* $\mathscr{S}(\mathrm{N})/\mathrm{P} \to \mathscr{S}(\mathrm{N})/\mathrm{Q}$ *donne naissance à des inclusions :*

$$\mathscr{S}\operatorname{Ind}_{\mathrm{H}\times\mathrm{N}}^{\mathrm{G}\times\mathrm{N}}(\mathscr{S}(\mathrm{N})/\mathrm{Q}) \subset \mathscr{S}(\mathrm{N})/\mathrm{P} \subset \mathcal{O}_\mathrm{M}\operatorname{Ind}_{\mathrm{H}\times\mathrm{N}}^{\mathrm{G}\times\mathrm{N}}(\mathscr{S}(\mathrm{N})/\mathrm{Q}).$$

Si l'orbite X *est fermée dans* $\mathfrak{n}^*$, *l'inclusion* $\mathscr{S}\operatorname{Ind}_{\mathrm{H}\times\mathrm{N}}^{\mathrm{G}\times\mathrm{N}}(\mathscr{S}(\mathrm{N})/\mathrm{Q}) \subset \mathscr{S}(\mathrm{N})/\mathrm{P}$ *est un isomorphisme.*

Démonstration. — On raisonne par récurrence sur $\dim\mathfrak{n} + \dim\mathfrak{g} + |\mathrm{G}/\mathrm{G}_0|$. Si $\mathfrak{n}=0$, il n'y a rien à démontrer; supposons donc $\dim\mathfrak{n} > 0$. Il est clair que la surjection canonique $p : \mathscr{S}(\mathrm{N})/\mathrm{P} \to \mathscr{S}(\mathrm{N})/\mathrm{Q}$ commute aux actions de $\mathrm{H}\times\mathrm{N}$; d'après le lemme 2.1.5 elle donne donc naissance à un morphisme de $\mathrm{G}\times\mathrm{N}$-modules

$$\mathscr{S}(\mathrm{N})/\mathrm{P} \to \mathcal{O}_\mathrm{M}\operatorname{Ind}_{\mathrm{H}\times\mathrm{N}}^{\mathrm{G}\times\mathrm{N}}(\mathscr{S}(\mathrm{N})/\mathrm{Q}),$$

qui par définition même de P est injectif. Compte tenu du théorème 2.5.8 et de la remarque 2.5.9, l'encadrement cherché équivaut à montrer que $\mathscr{S}(\mathrm{N})/\mathrm{P}$ est stable sous l'action naturelle de $\mathscr{S}(\mathrm{G}/\mathrm{H})$ par multiplication.

(*a*) Supposons $\mathfrak{n}$ commutative. Alors on peut identifier $\mathscr{S}(\mathrm{N}) = \mathscr{S}(\mathfrak{n})$ à $\mathscr{S}(\mathfrak{n}^*)$ par cotransformation de Fourier, et il est clair que dans cette écriture P n'est autre que le noyau de la restriction à X. Donc on a des inclusions $\mathscr{S}(\mathrm{X}) \subset \mathscr{S}(\mathrm{N})/\mathrm{P} \subset \mathcal{O}_\mathrm{M}(\mathrm{X})$, et le résultat est évident.

(*b*) Supposons maintenant $\mathfrak{n}$ non commutative, et soit $\mathfrak{z}$ le centre de $\mathfrak{n}$. Soit $\lambda = \nu|\mathfrak{z}$, $\mathrm{Y} = \mathrm{G}.\lambda$ l'orbite de λ, G_1 le stabilisateur de λ dans G, et supposons que $\mathrm{G}_1 \neq \mathrm{G}$.

Comme plus haut, il est clair que l'action de $\mathscr{S}(\mathfrak{z}^*)$ sur $\mathscr{S}(\mathrm{N})/\mathrm{P}$ par multiplication passe au quotient par le noyau de la restriction à Y, donc donne naissance à une action de $\mathscr{S}(\mathrm{Y})$, compatible avec l'action de G. Soit $\mathrm{X}_1 = \mathrm{G}_1.\nu \subset \mathfrak{n}^*$; c'est aussi la fibre au-dessus de λ de la projection canonique $\mathrm{X} \to \mathrm{Y}$. Soit $\mathrm{P}_1 \subset \mathscr{S}(\mathrm{N})$ l'idéal correspondant à X_1. Alors la surjection canonique $\mathscr{S}(\mathrm{N})/\mathrm{P} \to \mathscr{S}(\mathrm{N})/\mathrm{P}_1$ donne naissance à une injection $\mathscr{S}(\mathrm{N})/\mathrm{P} \to \mathcal{O}_\mathrm{M}\operatorname{Ind}_{\mathrm{G}_1\times\mathrm{N}}^{\mathrm{G}\times\mathrm{N}}(\mathscr{S}(\mathrm{N})/\mathrm{P}_1)$, qui commute aux actions de $\mathscr{S}(\mathrm{Y})$. D'après la remarque 2.5.9, on a donc des inclusions

$$\mathscr{S}\,\mathrm{Ind}_{G_1\times N}^{G\times N}(\mathscr{S}(N)/P_1)\subset\mathscr{S}(N)/P\subset\mathscr{O}_M\,\mathrm{Ind}_{G_1\times N}^{G\times N}(\mathscr{S}(N)/P_1).$$

On conclut en appliquant l'hypothèse de récurrence à G_1 et P_1, compte tenu de la transitivité des foncteurs $\mathscr{S}$ Ind et $\mathscr{O}_M$ Ind.

(*c*) Supposons maintenant $G_1=G$ dans (*b*). On peut alors supposer que $\dim\mathfrak{z}=1$, et $\nu|\mathfrak{z}\neq 0$, sans quoi tout passe au quotient par $\mathrm{Ker}(\nu|\mathfrak{z})$ et on peut appliquer l'hypothèse de récurrence.

Soit $\mathfrak{z}_2$ le deuxième terme de la suite centrale ascendante de $\mathfrak{n}$, $\mathfrak{a}$ le centre de $\mathfrak{z}_2$, et supposons $\mathfrak{a}\neq\mathfrak{z}$; notons cette fois λ la restriction de ν à $\mathfrak{a}$. Alors on vérifie aussitôt que $Y=N.\lambda=\lambda+\mathfrak{z}^\perp$ est un hyperplan de $\mathfrak{a}^*$, qui coïncide donc forcément avec $G.\lambda$. De plus, le stabilisateur N_1 de λ dans N coïncide avec le centralisateur de $\mathfrak{a}$, donc est distingué dans G. Soit $X_1\subset\mathfrak{n}_1^*$ la projection de X, $P_1\subset\mathscr{S}(N_1)$ l'idéal correspondant.

Si $\nu_1=\nu|_{\mathfrak{n}_1}$, il est classique de voir que la restriction de $\mathscr{H}^\nu$ à N_1 se désintègre suivant les représentations correspondant à l'orbite $N.\nu_1$ (on est dans la situation où l'induite unitaire de $\mathscr{H}^{\nu_1}$ de N_1 à N est irréductible). En particulier, le noyau de l'action de $\mathscr{S}(N_1)$ dans $\mathscr{H}^\nu$ est l'idéal R_1 correspondant à $N.\nu_1$; c'est aussi le noyau de l'action à gauche (ou à droite) de $\mathscr{S}(N_1)$ dans $\mathscr{S}(N)/Q$. En raisonnant de même pour les autres points de X, on voit que P_1 est exactement le noyau de l'action à gauche ou à droite de $\mathscr{S}(N_1)$ dans $\mathscr{S}(N)/P$. On peut comme d'habitude considérer $\mathscr{S}(N_1)/P_1$ comme un sous-module de $\mathscr{O}_M\,\mathrm{Ind}_{H\times N}^{G\times N}(\mathscr{S}(N_1)/R_1)$, et dans cette écriture, l'action de $\mathscr{S}(N_1)/P_1$ sur $\mathscr{S}(N)/P$ se fait fibre à fibre, donc commute aux opérateurs de $\mathscr{S}(G/H)$. Comme l'action de $\mathscr{S}(N_1)/P_1$ est évidemment différentiable, pour prouver que $\mathscr{S}(N)/P$ est stable sous l'action de $\mathscr{S}(G/H)$, il suffit de prouver que $\mathscr{S}(N_1)/P_1$ l'est [en effet tout $\varphi\in\mathscr{S}(N)/P$ s'écrit comme une somme finie $\varphi=\sum_{j=1}^{n}\psi_j*\varphi_j$, avec $\psi_j\in\mathscr{S}(N_1)/P_1$, $\varphi_j\in\mathscr{S}(N)/P$, et on peut faire porter l'action de $\alpha\in\mathscr{S}(G/H)$ sur les ψ_j].

Or, par hypothèse de récurrence, si Q_1 est l'idéal de $\mathscr{S}(N_1)$ correspondant à $\mathscr{O}_{\nu_1}=N_1.\nu_1$, H_1 le stabilisateur de cette orbite, on a des inclusions :

$$\mathscr{S}\,\mathrm{Ind}_{H_1\times N_1}^{G\times N_1}(\mathscr{S}(N_1)/Q_1)\subset\mathscr{S}(N_1)/P_1\subset\mathscr{O}_M\,\mathrm{Ind}_{H_1\times N_1}^{G\times N_1}(\mathscr{S}(N_1)/Q_1).$$

D'autre part, toujours par hypothèse de récurrence on a l'encadrement

$$\mathscr{S}\,\mathrm{Ind}_{H_1\times N_1}^{H\times N_1}(\mathscr{S}(N_1)/Q_1)\subset\mathscr{S}(N_1)/R_1\subset\mathscr{O}_M\,\mathrm{Ind}_{H_1\times N_1}^{H\times N_1}(\mathscr{S}(N_1)/Q_1).$$

Mais on vérifie aussitôt que H_1, considéré comme sous-groupe de H, est aussi le stabilisateur de $\lambda\in\mathfrak{a}^*$, *i.e.*, H/H_1 s'identifie à $\lambda+\mathfrak{z}^\perp$. Puisque $\lambda+\mathfrak{z}^\perp$ est fermé dans $\mathfrak{a}^*$, l'action de $\mathscr{S}(\mathfrak{a}^*)$ se restreint en une action différentiable de $\mathscr{S}(H/H_1)$ sur $\mathscr{S}(N_1)/R_1$. Donc, d'après le théorème 2.5.8 (iii), l'inclusion $\mathscr{S}\,\mathrm{Ind}_{H_1\times N_1}^{H\times N_1}(\mathscr{S}(N_1)/Q_1)\subset\mathscr{S}(N_1)/R_1$

est un isomorphisme. Par transitivité de $\mathscr{S}$ Ind, on obtient :

$$\mathscr{S}\,\mathrm{Ind}_{\mathrm{H}\times\mathrm{N}_1}^{\mathrm{G}\times\mathrm{N}_1}(\mathscr{S}(\mathrm{N}_1)/\mathrm{R}_1)\subset\mathscr{S}(\mathrm{N}_1)/\mathrm{P}_1\subset\mathscr{O}_{\mathrm{M}}\,\mathrm{Ind}_{\mathrm{H}\times\mathrm{N}_1}^{\mathrm{G}\times\mathrm{N}_1}(\mathscr{S}(\mathrm{N}_1)/\mathrm{R}_1)$$

ce qui termine la démonstration dans ce cas.

(*d*) Reste à traiter le cas où dans (*c*) on a $\mathfrak{a}=\mathfrak{z}$. On montre facilement que cela n'est possible que si $\mathfrak{n}=\mathfrak{z}_2$ est une algèbre de Heisenberg. Alors nécessairement $\mathrm{X}=\mathscr{O}_\nu$, donc $\mathrm{P}=\mathrm{Q}$, et il n'y a rien à démontrer.

(*e*) Supposons maintenant X fermée, et montrons que dans ce cas l'inclusion canonique $\mathscr{S}\,\mathrm{Ind}_{\mathrm{H}\times\mathrm{N}}^{\mathrm{G}\times\mathrm{N}}(\mathscr{S}(\mathrm{N})/\mathrm{P})\subset\mathscr{S}(\mathrm{N})/\mathrm{P}$ est un isomorphisme. Notons $\|\ \|_{\mathrm{HS}}$ la norme de Hilbert-Schmidt sur $\mathscr{L}^2(\mathscr{H}^\nu)$. Soit β la mesure de Kostant sur $\mathscr{O}_\nu$, normalisée pour avoir la formule des caractères de Kirillov (*cf.* [20], th. 7.4) :

$$\mathrm{Tr}(\pi(\varphi))=\int_{\mathscr{O}_\nu}\bar{\mathscr{F}}(\varphi\circ\exp)(\nu')\,d\beta(\nu')$$

d'où

$$\|\varphi\|_{\mathrm{HS}}^2=\mathrm{Tr}\,\pi(\varphi^*\varphi)=\int_{\mathscr{O}_\nu}\bar{\mathscr{F}}((\varphi^**\varphi)\circ\exp)(\nu')\,d\beta(\nu')).$$

Puisque X est fermée dans $\mathfrak{n}^*$, l'application de restriction applique $\mathscr{S}(\mathfrak{n}^*)$ dans $\mathscr{S}(\mathrm{X})$ (th. 1.2.4). Or, l'application $\varphi\rightarrow\int_{\mathscr{O}_\nu}\varphi(\nu')\,d\beta(\nu')$ de $\mathscr{S}(\mathrm{X})$ vers **C** induit un G-morphisme $u:\mathscr{S}(\mathrm{X})\rightarrow\mathscr{O}_{\mathrm{M}}(\mathrm{G}/\mathrm{H})$, la valeur de $u(\varphi)$ en $x\in\mathrm{G}/\mathrm{H}$ étant, par transport de structure, l'intégrale de φ sur l'orbite coadjointe correspondante. Comme

$$\mathscr{S}(\mathrm{X})=\mathscr{S}\,\mathrm{Ind}_{\mathrm{G}(\nu)}^{\mathrm{G}}(\mathbf{C})=\mathscr{S}\,\mathrm{Ind}_{\mathrm{H}}^{\mathrm{G}}(\mathscr{S}\,\mathrm{Ind}_{\mathrm{G}(\nu)}^{\mathrm{H}}(\mathbf{C}))$$

est évidemment un $\mathscr{S}(\mathrm{G}/\mathrm{H})$-module différentiable, et que u commute aux actions de $\mathscr{S}(\mathrm{G}/\mathrm{H})$, on voit que u prend ses valeurs dans $\mathscr{S}(\mathrm{G}/\mathrm{H})$ (d'après le théorème 2.5.8, par exemple).

Appliquant cela à $\bar{\mathscr{F}}((\varphi^**\varphi)\circ\exp)$, on voit que la fonction $x\rightarrow\|\pi_x(\varphi)\|_{\mathrm{HS}}^2$ est dans $\mathscr{S}(\mathrm{G}/\mathrm{H})$. On veut en déduire que $\varphi\in\mathscr{S}\,\mathrm{Ind}_{\mathrm{H}\times\mathrm{N}}^{\mathrm{G}\times\mathrm{N}}(\mathscr{S}(\mathrm{N})/\mathrm{Q})$. Or il est facile de vérifier, en utilisant une trivialisation locale par exemple, que cela a lieu si et seulement si pour toute $\alpha\in\mathscr{O}_{\mathrm{M}}^{1/2}\,\mathrm{Ind}_{\mathrm{H}\times\mathrm{N}}^{\mathrm{G}\times\mathrm{N}}(\mathbf{C})$ (« demi-densité à croissance lente ») on a

$$\varphi\alpha\in\mathscr{S}^{1/2}\,\mathrm{Ind}_{\mathrm{H}\times\mathrm{N}}^{\mathrm{G}\times\mathrm{N}}(\mathscr{S}(\mathrm{N})/\mathrm{Q}).$$

Posons $\pi_x(\varphi)=\varphi(x)$ pour simplifier les notations. Comme on sait déjà que $\|\varphi(x)\|_{\mathrm{HS}}$ est à décroissance rapide, il est clair en tous cas que $\varphi\alpha$ sera de carré intégrable, *i.e.* appartient à l'induite unitaire $\mathscr{I}=\mathrm{Ind}_{\mathrm{H}\times\mathrm{N}}^{\mathrm{G}\times\mathrm{N}}\mathscr{L}^2(\mathscr{H}^\nu)$; et comme c'est évidemment un vecteur C^∞, on a $\varphi\alpha\in\mathscr{I}_\infty$. Il suffira donc de prouver que

$$\mathscr{I}_\infty=\mathscr{S}^{1/2}\,\mathrm{Ind}_{\mathrm{H}\times\mathrm{N}}^{\mathrm{G}\times\mathrm{N}}(\mathscr{S}(\mathrm{N})/\mathrm{Q})$$

[comme on l'a signalé au n° 4.3.1, on a $\mathscr{L}^2(\mathscr{H}^\vee)_\infty = \mathscr{S}(\mathrm{N})/\mathrm{Q}$].

Or toute $\psi \in \mathscr{I}_\infty$ est somme finie d'éléments de la forme $\varphi_j * \psi_j$, avec $\varphi_j \in \mathscr{S}(\mathrm{N})/\mathrm{P}$, $\psi_j \in \mathscr{I}_\infty$; donc on voit que les éléments de $\mathscr{I}_\infty$ sont en fait des demi-densités à décroissance rapide. On en déduit aussitôt que pour toute $a \in \mathrm{Reg}(\mathrm{G}/\mathrm{H})$ la demi-densité $a\psi$ est encore de carré intégrable, et le reste après application d'un élément quelconque de $\mathrm{U}(\mathfrak{g})$; donc $\mathscr{I}_\infty$ est stable sous l'action de $\mathrm{Reg}(\mathrm{G}/\mathrm{H})$ par multiplication, et on peut appliquer le théorème 2.5.10.

C.Q.F.D.

4.3.3. Corollaire. — *Soit* $\mathrm{F} \in \mathscr{Y}(\mathrm{v})$, *et* $\mathrm{E} \in \mathscr{S}\mathbf{mod}_{\mathrm{G}}$. *Supposons donnée une injection continue* $\mathrm{E} \to \mathscr{O}_{\mathrm{M}}^{1/2}\,\mathrm{Ind}_{\mathrm{H}}^{\mathrm{G}}(\mathrm{F})$. *Alors* E *est stable sous l'action de* $\mathscr{S}(\mathrm{G}/\mathrm{H})$ *par multiplication, et il existe* $\mathrm{F}_1 \in \mathscr{Y}(\mathrm{v})$ *unique, avec une inclusion continue* $\mathrm{F}_1 \subset \mathrm{F}$, *tel que l'on ait des inclusions :*

$$\mathscr{S}^{1/2}\,\mathrm{Ind}_{\mathrm{H}}^{\mathrm{G}}(\mathrm{F}_1) \subset \mathrm{E} \subset \mathscr{O}_{\mathrm{M}}^{1/2}\,\mathrm{Ind}_{\mathrm{H}}^{\mathrm{G}}(\mathrm{F}_1).$$

Démonstration. — Puisque E s'injecte dans $\mathscr{O}_{\mathrm{M}}^{1/2}\,\mathrm{Ind}_{\mathrm{H}}^{\mathrm{G}}(\mathrm{F})$, l'action de $\mathscr{S}(\mathrm{N})$ passe au quotient en une action différentiable de $\mathscr{S}(\mathrm{N})/\mathrm{P}$. En exprimant $v \in \mathrm{E}$ comme une somme finie $v = \sum_{j=1}^{n} \varphi_j * v_j$, où les φ_j agissent par opérateurs décomposés, on aura, pour $\alpha \in \mathscr{S}(\mathrm{G}/\mathrm{H})$, $\alpha * v = \sum_{j=1}^{n} (\alpha * \varphi_j) * v_j$, d'où $\alpha * v \in \mathrm{E}$. Alors on peut appliquer le théorème 2.5.8.

4.3.4. Corollaire. — *Soit* $\mathrm{E} \in \mathscr{S}\mathbf{mod}_{\mathrm{G}}$, *et supposons que l'action de* $\mathscr{S}(\mathrm{N})$ *dans* E *passe au quotient par* P. *Alors* $\mathrm{Q} * \mathrm{E}$ *est un sous-*H*-module fermé de* E, *et la surjection canonique* $\mathrm{E} \to \mathrm{E}/(\mathrm{Q} * \mathrm{E})$ *donne naissance à un morphisme* $u : \mathrm{E} \to \mathscr{O}_{\mathrm{M}}^{1/2}\,\mathrm{Ind}_{\mathrm{H}}^{\mathrm{G}}(\mathrm{F})$, *où* $\mathrm{F} = \mathrm{E}/(\mathrm{Q} * \mathrm{E}) \otimes \Delta_{\mathrm{G}/\mathrm{H}}^{1/2}$, *avec des inclusions :*

$$\mathscr{S}^{1/2}\,\mathrm{Ind}_{\mathrm{H}}^{\mathrm{G}}(\mathrm{F}) \subset \mathrm{Im}(u) \subset \mathscr{O}_{\mathrm{M}}^{1/2}\,\mathrm{Ind}_{\mathrm{H}}^{\mathrm{G}}(\mathrm{F}).$$

Le noyau de u est l'espace des $v \in \mathrm{E}$ *annulés par* $\mathscr{S}^{1/2}\,\mathrm{Ind}_{\mathrm{H}\times\mathrm{N}}^{\mathrm{G}\times\mathrm{N}}(\mathscr{S}(\mathrm{N})/\mathrm{Q}) \subset \mathscr{S}(\mathrm{N})/\mathrm{P}$, *et* $\mathrm{Im}(u)$ *est stable sous l'action de* $\mathscr{S}(\mathrm{G}/\mathrm{H})$ *par multiplication; si u est injective, on a donc une action canonique de* $\mathscr{S}(\mathrm{G}/\mathrm{H})$ *sur* E, *compatible avec l'action de* G. *Enfin si* $\mathrm{E}_1 \in \mathscr{S}\mathbf{mod}_{\mathrm{G}}$ *est un deuxième module annulé par* P *vérifiant la condition d'injectivité ci-dessus, tout* $u \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{N}}(\mathrm{E}, \mathrm{E}_1)$ *commute aux actions de* $\mathscr{S}(\mathrm{G}/\mathrm{H})$.

Démonstration. — Appliquons le corollaire 4.3.3 au $(\mathrm{G}\times\mathrm{N})$-module $(\mathscr{S}(\mathrm{N})/\mathrm{P}) \hat{\otimes} \mathrm{E}$, considéré comme sous-module de $\mathscr{O}_{\mathrm{M}}\,\mathrm{Ind}_{\mathrm{H}\times\mathrm{N}}^{\mathrm{G}\times\mathrm{N}}((\mathscr{S}(\mathrm{N})/\mathrm{Q}) \hat{\otimes} \mathrm{E})$; ici l'action de N se fait à gauche sur $\mathscr{S}(\mathrm{N})/\mathrm{P}$, et l'action de G est le produit tensoriel de son action adjointe habituelle sur $\mathscr{S}(\mathrm{N})/\mathrm{P}$ et de son action sur E. L'application canonique $(\mathscr{S}(\mathrm{N})/\mathrm{P}) \hat{\otimes} \mathrm{E} \to \mathrm{E}$ commute aux actions de G et N; donc son noyau est stable sous l'action de $\mathscr{S}(\mathrm{G}/\mathrm{H})$. Par passage au quotient, on obtient une action canonique de $\mathscr{S}(\mathrm{G}/\mathrm{H})$ sur E, compatible avec celle de G, et avec l'action naturelle de $\mathscr{S}(\mathrm{G}/\mathrm{H})$ sur $\mathscr{S}(\mathrm{N})/\mathrm{P}$. Si x_0 est le point distingué de G/H, $\mathfrak{m}_{x_0} = \{\alpha \in \tilde{\mathscr{S}}(\mathrm{G}/\mathrm{H})\ \text{t. q.}\ \alpha(x_0) = 0\}$, on a donc d'après le théorème 2.5.8

un morphisme $u : \mathrm{E} \to \mathcal{O}_{\mathrm{M}} \operatorname{Ind}_{\mathrm{H}}^{\mathrm{G}}(\mathrm{E}(x_0))$, avec $\mathrm{E}(x_0) = \mathrm{E}/(\mathfrak{m}_{x_0} * \mathrm{E})$, et des inclusions

$$\mathscr{S} \operatorname{Ind}_{\mathrm{H}}^{\mathrm{G}}(\mathrm{E}(x_0)) \subset \operatorname{Im} u \subset \mathcal{O}_{\mathrm{M}} \operatorname{Ind}_{\mathrm{H}}^{\mathrm{G}}(\mathrm{E}(x_0)).$$

On sait d'après la remarque 2.5.9 que $\mathfrak{m}_{x_0} * (\mathscr{S}(\mathrm{N})/\mathrm{P})$ est le noyau de la surjection canonique $\mathscr{S}(\mathrm{N})/\mathrm{P} \to \mathscr{S}(\mathrm{N})/\mathrm{Q}$, *i.e.* $\mathfrak{m}_{x_0} * (\mathscr{S}(\mathrm{N})/\mathrm{P}) = \mathrm{Q}/\mathrm{P}$. D'après la compatibilité des actions de $\mathscr{S}(\mathrm{G}/\mathrm{H})$, on a donc $\mathfrak{m}_{x_0} * \mathrm{E} = \mathfrak{m}_{x_0} * (\mathscr{S}(\mathrm{N})/\mathrm{P}) * \mathrm{E} = \mathrm{Q} * \mathrm{E}$, ce qui montre bien que $\mathrm{Q} * \mathrm{E}$ est un sous-H-module fermé de E, et que $\mathrm{E}/(\mathrm{Q} * \mathrm{E})$ s'identifie à $\mathrm{E}(x_0)$. Toujours d'après le théorème 2.5.8, le noyau de u est le sous-espace de E formé des vecteurs annulés par $\mathscr{S}(\mathrm{G}/\mathrm{H})$; comme

$$\mathscr{S}(\mathrm{G}/\mathrm{H}) * \mathscr{S}(\mathrm{N})/\mathrm{P} = \mathscr{S}(\mathrm{N})/\mathrm{P} * \mathscr{S}(\mathrm{G}/\mathrm{H}) = \mathscr{S} \operatorname{Ind}_{\mathrm{H} \times \mathrm{N}}^{\mathrm{G} \times \mathrm{N}}(\mathscr{S}(\mathrm{N})/\mathrm{Q}),$$

on voit que c'est aussi le sous-espace des vecteurs annulés par $\mathscr{S} \operatorname{Ind}_{\mathrm{H} \times \mathrm{N}}^{\mathrm{G} \times \mathrm{N}}(\mathscr{S}(\mathrm{N})/\mathrm{Q})$.

Reste à prouver que tout N-morphisme $u : \mathrm{E} \to \mathrm{E}_1$ commute aux actions de $\mathscr{S}(\mathrm{G}/\mathrm{H})$; pour cela, il suffit d'écrire $v \in \mathrm{E}$ sous la forme $v = \sum_{j=1}^{n} \varphi_j * v_j$, $\varphi_j \in \mathscr{S}(\mathrm{N})/\mathrm{P}$, $v_j \in \mathrm{E}$, d'où, pour $\alpha \in \mathscr{S}(\mathrm{G}/\mathrm{H})$,

$$u(\alpha * v) = \sum_{j=1}^{n} u((\alpha * \varphi_j) * v_j) = \sum_{j=1}^{n} (\alpha * \varphi_j) * u(v_j) = \alpha * \sum_{j=1}^{n} u(\varphi_j * v_j) = \alpha * u(v).$$

4.3.5. LEMME. — *Reprenons les notations du lemme* 4.3.2. *Si deux orbites* X *et* X' *définissent le même idéal* P, *alors* X = X'.

Démonstration. — Nous allons voir que l'on peut reconstruire X à partir de P; comme dans la démonstration du lemme 4.3.2, on raisonne par récurrence sur $\dim \mathfrak{n} + \dim \mathfrak{g} + |\mathrm{G}/\mathrm{G}_0|$. Si $\mathfrak{n}$ est commutatif, il est clair que le support du G-module $\mathscr{S}(\mathrm{N})/\mathrm{P}$ n'est autre que $\bar{\mathrm{X}}$. Comme les G-orbites dans $\mathfrak{n}^*$ sont localement fermées, ceci détermine bien X. Supposons maintenant $\mathfrak{n}$ non commutatif, et soit $\mathfrak{z}$ le centre de $\mathfrak{n}$. Comme précédemment, on retrouve la projection Y de X sur $\mathfrak{z}^*$ à partir du support de $\mathscr{S}(\mathrm{N})/\mathrm{P}$. Fixons $\lambda \in \mathrm{Y}$, et soit G_1 le stabilisateur de λ dans G; supposons $\mathrm{G}_1 \neq \mathrm{G}$. On a vu que le $\mathrm{G} \times \mathrm{N}$-module $\mathscr{S}(\mathrm{N})/\mathrm{P}$ est contenu dans $\mathcal{O}_{\mathrm{M}} \operatorname{Ind}_{\mathrm{G}_1 \times \mathrm{N}}^{\mathrm{G} \times \mathrm{N}}(\mathscr{S}(\mathrm{N})/\mathrm{P}_1)$, où P_1 est l'idéal défini par la fibre X_1 au-dessus de λ de la projection canonique $\mathrm{X} \to \mathrm{Y}$. Comme d'après le théorème 2.5.8 l'« induisante » $\mathscr{S}(\mathrm{N})/\mathrm{P}_1$ est bien déterminée par $\mathscr{S}(\mathrm{N})/\mathrm{P}$, et qu'à son tour P_1 détermine X_1 par hypothèse de récurrence, on voit que X est bien déterminée. Si maintenant $\mathrm{G}_1 = \mathrm{G}$ dans ce qui précède, on peut comme pour le lemme 4.3.2 supposer que $\mathfrak{z}$ est de dimension 1, et que la projection de X sur $\mathfrak{z}^*$ n'est pas nulle. Soit $\mathfrak{a}$ le centre du deuxième terme de la suite centrale ascendante de $\mathfrak{n}$, et supposons $\mathfrak{a} \neq \mathfrak{z}$; soit $\mathfrak{n}_1$ le centralisateur de $\mathfrak{a}$ dans $\mathfrak{n}$. Comme on l'a vu, l'idéal P_1 de $\mathscr{S}(\mathrm{N}_1)$ associé à la projection de X sur $\mathfrak{n}_1^*$ est le noyau de l'action de $\mathscr{S}(\mathrm{N}_1)$ dans $\mathscr{S}(\mathrm{N})/\mathrm{P}$ par multiplication à gauche; il est donc entièrement déterminé par P, et par hypothèse de récurrence l'orbite X_1 est bien déterminée par P. Mais comme l'image réciproque de X_1 dans $\mathfrak{n}^*$ est formée d'une seule G-orbite, ceci détermine bien X. Enfin, dans le cas où $\mathfrak{a}=\mathfrak{z}$, on a vu que $\mathfrak{n}$ est nécessairement une algèbre de Heisenberg, et X est entièrement déterminée par sa projection sur $\mathfrak{z}^*$.

C.Q.F.D.

4.3.6. THÉORÈME. — *Soit* **N** *un sous-groupe fermé* Ad (G)-*stable de* **U**, *et introduisons les notations du n°* 4.3.1. *Soit* $E \in \mathscr{S}\mathbf{mod}_G$ *topologiquement irréductible.*

(i) *Il existe une unique* G-*orbite* X *dans* $\mathfrak{n}^*$, *et pour* $\nu \in X$ *une unique* $F \in \mathscr{Y}(\nu)$, *topologiquement irréductible, telles que l'on ait des inclusions :*

$$\mathscr{S}^{1/2}\,\mathrm{Ind}_H^G(F) \subset E \subset \mathscr{O}_M^{1/2}\,\mathrm{Ind}_H^G(F)$$

(*déf.* 2.1.2 *et* 2.1.3). *En particulier,* E *est un* $\mathscr{S}$(G/H)-*module.*

(ii) *Si* E_j, $j=1, 2$ *correspondent à deux orbites* X_1 *et* X_2 *distinctes, on a* $\mathrm{Hom}_N(E_1, E_2)=0$.

(iii) *Si* E_j, $j=1, 2$, *correspondent à la même orbite* X, *tout* $u \in \mathrm{Hom}_N(E_1, E_2)$ *commute à l'action de* $\mathscr{S}$(G/H). *Si* $u \in \mathrm{Hom}_G(E_1, E_2)$, *il est de la forme* $\varphi \to v \circ \varphi$, *avec* $v \in \mathrm{Hom}_H(F_1, F_2)$; *on définit ainsi une injection de* $\mathrm{Hom}_G(E_1, E_2)$ *dans* $\mathrm{Hom}_H(F_1, F_2)$.

(iv) *Si l'action de* $\mathscr{S}$(G/H) *sur* E *est différentiable* (*déf.* 2.3.1), *on a* $E=\mathscr{S}^{1/2}\,\mathrm{Ind}_H^G(F)$. *Cette condition est automatique si l'orbite* $X=G.\nu$ *est fermée dans* $\mathfrak{n}^*$; *on a donc dans ce cas une bijection canonique entre* (*classes d'isomorphisme d'*) *objets topologiquement irréductibles de* $\mathscr{S}\mathbf{mod}_G$ « *de support* X » *et objets topologiquement irréductibles de* $\mathscr{Y}(\nu)$.

Démonstration. — (*a*) Il suffira de démontrer l'existence d'une G-orbite $X=G.\nu$ dans $\mathfrak{n}^*$ telle que, dans les notations du lemme 4.3.2, l'idéal P soit l'annulateur de E. Puisque tout sous-G-module non nul de E est dense, la condition d'injectivité du corollaire 4.3.4 sera vérifiée, et on aura des inclusions :

$$\mathscr{S}^{1/2}\,\mathrm{Ind}_H^G(F) \subset E \subset \mathscr{O}_M^{1/2}\,\mathrm{Ind}_H^G(F)$$

avec $F=\Delta_{G/H}^{1/2} \otimes (E/Q * E) \in \mathscr{S}\mathbf{mod}_H$; en particulier, E sera un $\mathscr{S}$(G/H)-module. De plus, on voit immédiatement que F est topologiquement irréductible [si F_1 est un sous-H-module fermé non nul de F, $\mathscr{S}^{1/2}\,\mathrm{Ind}_H^G(F_1) \subset \mathscr{S}^{1/2}\,\mathrm{Ind}_H^G(F)$ sera dense dans E; en prenant les fibres en x_0, on voit que F_1 est dense dans F, donc $F_1=F$]. Par définition, l'action de $\mathscr{S}$(N) dans F passe au quotient par Q; on a donc bien $F \in \mathscr{Y}(\nu)$.

D'après le lemme 4.3.5, l'orbite X est unique; comme d'après le corollaire 4.3.4 deux réalisations de E du type précédent seront isomorphes sous l'action conjointe de G et de $\mathscr{S}$(G/H), l'unicité de F résulte du théorème 2.5.8 (iii).

Pour l'assertion (ii), on sait d'après le lemme 4.3.5 que deux orbites distinctes ne peuvent pas définir le même idéal; on peut donc supposer par exemple que $P_1 \not\subset P_2$, *i.e.* que $P_1 * E_2 \neq 0$. Soit $u \in \mathrm{Hom}_N(E_1, E_2)$; alors $P_1 * u(E_1)=0$, donc $u=0$ sans quoi $u(E_1)$ serait dense dans E_2 et on aurait une contradiction. De même, si $v \in \mathrm{Hom}_N(E_2, E_1)$, on a $v(P_1 * E_2)=0$, donc $v=0$. L'assertion (iii) résulte du corollaire 4.3.4. Enfin, pour (iv), la seule chose qui ne soit pas conséquence immédiate du théorème 2.5.8 est la minimalité automatique lorsque X est fermée; mais cela résulte aussitôt du lemme 4.3.2, puisque l'action de $\mathscr{S}(G/H)$ sur E est évidemment différentiable si

$$\mathscr{S}(N)/P=\mathscr{S}\operatorname{Ind}_{H\times N}^{G\times N}(\mathscr{S}(N)/Q).$$

(*b*) Démontrons donc l'existence de X telle que $P=\operatorname{Ann}_{\mathscr{S}(N)}(E)$. On raisonne par récurrence sur $\dim\mathfrak{n}+\dim\mathfrak{g}+|G/G_0|$, comme dans la démonstration du lemme 4.3.2.

Supposons d'abord $\mathfrak{n}$ commutatif. Alors le lemme 4.2.4 s'applique, et on a $\operatorname{supp}(E)=\bar{X}$, avec $X=G.\nu\subset\mathfrak{n}^*$. Soit $W=\{\mu\in\mathfrak{n}^*\text{ t. q. }\dim G.\mu<\dim X\}$, $Z=\mathfrak{n}^*\setminus W$, de sorte que X est une G-orbite fermée dans Z. Soit $\mathbf{Z}_1=\mathbf{G}.\nu$, $Z_1=\mathbf{Z}_1(\mathbf{R})$. Alors d'après le lemme 4.2.3 l'action de $\bar{\mathscr{I}}(Z)$ dans E passe au quotient en une action de $\mathscr{S}(Z_1,\mathscr{S}(G/N))$, puis, comme X est une réunion de composantes connexes de Z_1, en une action de $\mathscr{S}(X,\mathscr{S}(G/N))=\bar{\mathscr{I}}(Z)/M$, où $M=\{\varphi\in\bar{\mathscr{I}}(Z)\text{ t. q. }\varphi|_X=0\}$. Si P est l'idéal correspondant à X, on a clairement $P*\bar{\mathscr{I}}(Z)\subset M$, donc P annule $\bar{\mathscr{I}}(Z)*E$, et comme $\bar{\mathscr{I}}(Z)*E$ est dense dans E, P annule E. Comme on l'a signalé au n° 4.2.1, $\bar{X}$ est aussi le support de E vu comme N-module, donc $\mathscr{S}(X)\subset\mathscr{S}(N)/P$ n'annule pas E; de l'irréductibilité de E on déduit alors immédiatement que E est un $\mathscr{S}(X)$-module non dégénéré. D'après le théorème 2.5.8, E s'injecte donc dans $\mathscr{O}_M^{1/2}\operatorname{Ind}_H^G(F)$ pour un certain $F\in\mathscr{S}\mathbf{mod}_H$, ce qui prouve bien que l'annulateur de E est exactement P.

Supposons maintenant $\mathfrak{n}$ non commutatif, et soit $\mathfrak{z}$ le centre de $\mathfrak{n}$. D'après l'hypothèse de récurrence appliquée à $\mathfrak{z}$, il existe $Y=G.\lambda\subset\mathfrak{z}^*$, et $E_1\in\mathscr{S}\mathbf{mod}_{G_1}$ topologiquement irréductible, avec $G_1=G(\lambda)$, tels que l'on ait des inclusions :

$$\mathscr{S}^{1/2}\operatorname{Ind}_{G_1}^G(E_1)\subset E\subset\mathscr{O}_M^{1/2}\operatorname{Ind}_{G_1}^G(E_1).$$

Supposons $G_1\neq G$. On peut alors appliquer l'hypothèse de récurrence à G_1, N et E_1 (en remarquant que $N\subset G_1$), d'où $X_1=G_1.\nu_1\subset\mathfrak{n}^*$ telle que $\operatorname{Ann}_{\mathscr{S}(N)}(E_1)=P_1$, où P_1 est l'idéal de $\mathscr{S}(N)$ correspondant à X_1. Mais alors si $X=G.\nu$, il est clair que $\operatorname{Ann}_{\mathscr{S}(N)}(E)=P=\bigcap_{g\in G}gP_1g^{-1}$.

Supposons maintenant que $G=G_1$. On peut alors supposer que $\mathfrak{z}$ est de dimension 1 et qu'il agit dans E par un caractère non trivial. Comme dans la démonstration du lemme 4.3.2, partie (*c*), on introduit le centre $\mathfrak{a}$ du deuxième terme de la suite centrale ascendante de $\mathfrak{n}$, et on suppose $\mathfrak{a}\neq\mathfrak{z}$. En appliquant l'hypothèse de récurrence à $\mathfrak{a}$, on obtient une orbite $Y=G.\lambda\subset\mathfrak{a}^*$, nécessairement égale à $\lambda+\mathfrak{z}^\perp$, et $E_1\in\mathscr{S}\mathbf{mod}_{G_1}$ topologiquement irréductible, avec $G_1=G(\lambda)$, tels que

$$\mathscr{S}^{1/2}\operatorname{Ind}_{G_1}^G(E_1)\subset E\subset\mathscr{O}_M^{1/2}\operatorname{Ind}_{G_1}^G(E_1).$$

Soit $N_1=N(\lambda)=G_1\cap N$. Appliquant l'hypothèse de récurrence à G_1, N_1 et E_1, on obtient $X_1=G_1.\nu_1\subset\mathfrak{n}_1^*$ telle que $\operatorname{Ann}_{\mathscr{S}(N_1)}(E_1)=P_1$. D'après (*a*), il existe donc $F_1\in\mathscr{Y}(\nu_1)$ tel que l'on ait des inclusions $\mathscr{S}^{1/2}\operatorname{Ind}_{H_1}^{G_1}(F_1)\subset E_1\subset\mathscr{O}_M^{1/2}\operatorname{Ind}_{H_1}^{G_1}(F_1)$, où H_1 est le stabilisateur de $\mathscr{O}_{\nu_1}$ dans G_1. En particulier on a

$$\mathscr{S}^{1/2}\operatorname{Ind}_{H_1}^G(F_1)=\mathscr{S}^{1/2}\operatorname{Ind}_H^G(\mathscr{S}^{1/2}\operatorname{Ind}_{H_1}^H(F_1))\subset E.$$

Donc si on pose $F=\mathscr{S}^{1/2}\,\mathrm{Ind}_{H_1}^{H}(F_1)$, on voit que l'annulateur de E dans $\mathscr{S}(N)$ est aussi l'annulateur de $\mathscr{S}^{1/2}\,\mathrm{Ind}_{H}^{G}(F)$. Rappelons que tous les prolongements de ν_1 à $\mathfrak{n}$ sont conjugués entre eux sous l'action de $A=\exp(\mathfrak{a})$, ce qui entraîne que l'image réciproque X de X_1 dans $\mathfrak{n}^*$ est une seule G-orbite; on écrit $X=G.\nu$, où ν prolonge ν_1. Montrons que l'idéal P correspondant à X est l'annulateur de $\mathscr{S}^{1/2}\,\mathrm{Ind}_{H}^{G}(F)$. Pour cela, il suffit de prouver que l'idéal Q correspondant à $\mathscr{O}_\nu$ est l'annulateur de F. Or, comme on l'a indiqué au n° 4.3.1, F_1 est un multiple de $\mathscr{H}_\infty^{\nu_1}$; cela entraîne immédiatement que F est un multiple de $\mathscr{S}^{1/2}\,\mathrm{Ind}_{H_1}^{H}(\mathscr{H}_\infty^{\nu_1})$, qui n'est autre que $\mathscr{H}_\infty^{\nu}$, comme on peut le vérifier directement (on est dans les conditions où l'induite unitaire est irréductible). Donc l'annulateur de F dans $\mathscr{S}(N)$ est le même que celui de $\mathscr{H}_\infty^{\nu}$, qui est égal à Q par définition.

Enfin le cas où l'on aurait $\mathfrak{a}=\mathfrak{z}$ ne pose aucun problème, puisqu'on a vu que $\mathfrak{n}$ est alors une algèbre de Heisenberg, et que E est alors automatiquement un multiple de $\mathscr{H}_\infty^{\nu}$, où $\mathscr{H}^{\nu}$ est la représentation unitaire irréductible où $\mathfrak{z}$ agit par le caractère $2i\pi\lambda$.

C.Q.F.D.

4.3.7. Définition. — *Avec les notations du théorème* 4.3.6, *l'espace*

$$E_s(\mathscr{S}(G/H))=\mathscr{S}(G/H)*E=\mathscr{S}^{1/2}\,\mathrm{Ind}_{H}^{G}(F)$$

sera appelé l'espace minimal de E *relativement à* $\mathfrak{n}$; *nous le noterons simplement* $E_s(\mathfrak{n})$.

Muni de sa topologie canonique d'espace de Fréchet, il est clair que $E_s(\mathfrak{n})\in\mathscr{S}\mathbf{mod}_G$, *et le corollaire* 2.3.8 (*compte tenu du lemme* 2.4.4) *montre qu'il est topologiquement irréductible.*

4.3.8. Pour achever la théorie de Mackey, il nous reste à considérer le cas où $H=G$ dans le théorème 4.3.6, *i.e.* à décrire les représentations topologiquement irréductibles $E\in\mathscr{S}\mathbf{mod}_G$ telles que $E|_N\approx\mathscr{H}_\infty^{\nu}$, où $\mathscr{O}_\nu$ est une orbite coadjointe G-stable dans $\mathfrak{n}^*$. Nous utiliserons le schéma de récurrence qui nous a déjà servi dans la démonstration du théorème 4.3.6 et du lemme 4.3.2. On peut écarter le cas trivial où $\mathfrak{n}=0$. Nous allons associer canoniquement à ν deux sous-algèbres de Lie $\mathfrak{q}_1\supset\mathfrak{q}_2$ de $\mathfrak{n}$, avec $\mathfrak{q}_2$ idéal dans $\mathfrak{q}_1$, par récurrence sur $\dim(\mathfrak{n})$, comme suit (*cf.* [25]) :

(*a*) Si ν passe au quotient par un idéal central non trivial **G**-invariant $\mathfrak{c}$ de $\mathfrak{n}$, on pose $\mathfrak{n}'=\mathfrak{n}/\mathfrak{c}$, on note $\nu'\in\mathfrak{n}'^*$ la forme linéaire définie par ν, et on prend pour $\mathfrak{q}_j$, $j=1, 2$, l'image réciproque dans $\mathfrak{n}$ de la sous-algèbre $\mathfrak{q}'_j$ de $\mathfrak{n}'$ définie par ν'.

(*b*) Sinon, on a $\dim(\mathfrak{z})=1$, $\nu|_{\mathfrak{z}}\neq 0$. Alors, on note $\mathfrak{z}_2$ le deuxième terme de la suite centrale ascendante de $\mathfrak{n}$, $\mathfrak{a}$ le centre de $\mathfrak{z}_2$, et on suppose $\mathfrak{a}\neq\mathfrak{z}$. On note $\mathfrak{n}_1$ le centralisateur de $\mathfrak{a}$ dans $\mathfrak{n}$, $\nu_1=\nu|\mathfrak{n}_1$, et on prend pour $\mathfrak{q}_j$, $j=1, 2$, la sous-algèbre de $\mathfrak{n}_1$ définie par ν_1.

(*c*) Enfin, si $\mathfrak{a}=\mathfrak{z}$ dans (*b*), $\mathfrak{n}$ est une algèbre de Heisenberg, $\nu|_{\mathfrak{z}}\neq 0$, on prend $\mathfrak{q}_1=\mathfrak{n}$, $\mathfrak{q}_2=0$.

Associons de même à ν un sous-groupe fermé H de G, par récurrence sur $\dim(\mathfrak{n})$, en prenant dans (*a*) pour H l'image réciproque dans G du sous-groupe H' de $G'=G/\exp(\mathfrak{c})$ défini par ν', dans (*b*) le sous-groupe de $G_1=G(\nu|_{\mathfrak{a}})$ défini par ν_1, et dans (*c*) $H=G$.

Alors on vérifie aussitôt les propriétés suivantes :

(i) $\mathfrak{q}=\mathfrak{q}_1/\mathfrak{q}_2$ est une algèbre de Heisenberg, et $\lambda=\nu|_{\mathfrak{q}_1}$ est nulle sur $\mathfrak{q}_2$.

(ii) Le groupe $\exp(\mathfrak{q}_1)$ est distingué dans H, on a $G/H=N/\exp(\mathfrak{q}_1)$, et H stabilise l'orbite $\mathcal{O}_\lambda$ de λ dans $\mathfrak{q}_1^*$.

(iii) Le foncteur $F \to \mathcal{S}^{1/2}\,\mathrm{Ind}_H^G(F)$ est une équivalence de catégories entre $\mathcal{Y}(\lambda)$ et $\mathcal{Y}(\nu)$ (notations 4.3.1). En effet, par récurrence sur la dimension de G il suffit de démontrer que dans la situation de (*b*) ci-dessus le foncteur $E_1 \to \mathcal{S}^{1/2}\,\mathrm{Ind}_{G_1}^G(E_1)$ est une équivalence de catégories de $\mathcal{Y}(\nu_1)$ vers $\mathcal{Y}(\nu)$. Compte tenu du corollaire 4.3.3 et du théorème 2.3.6, il suffit pour cela de prouver que tout $E\in\mathcal{Y}(\nu)$ est de la forme $\mathcal{S}^{1/2}\,\mathrm{Ind}_{G_1}^G(E_1)$. Or, si on applique le théorème 4.3.6 avec $N=A$, on a vu dans la partie (*b*) de la démonstration de ce théorème que l'orbite $Y\subset\mathfrak{a}^*$ associée à E est un hyperplan, donc fermée, d'où notre assertion.

En particulier, le foncteur $F \to \mathcal{S}^{1/2}\,\mathrm{Ind}_H^G(F)$ établit une correspondance bijective entre les objets topologiquement irréductibles de $\mathcal{Y}(\lambda)$ et ceux de $\mathcal{Y}(\nu)$. Après passage au quotient par $\exp(\mathfrak{q}_2)$, nous sommes donc ramenés au cas où $\mathfrak{n}$ est une algèbre de Heisenberg.

Supposons que $\mathfrak{n}\neq\mathfrak{z}$. Alors $G(\nu)$ agit dans $\mathfrak{n}/\mathfrak{z}$ en préservant la structure symplectique définie par $\nu|_{\mathfrak{z}}$. Il est bien connu (*cf.* [15], chap. II par exemple), que si l'on note $\mathrm{Mp}(\mathfrak{n}/\mathfrak{z})$ l'unique revêtement connexe à deux feuillets du groupe symplectique $\mathrm{Sp}(\mathfrak{n}/\mathfrak{z})$, alors il y a une unique représentation $S\in\mathcal{S}\mathbf{mod}_{\mathrm{Mp}(\mathfrak{n}/\mathfrak{z})\times N}$ telle que $S|_N=\mathcal{H}^\nu_\infty$ [*i.e.* l'action de N dans $\mathcal{H}^\nu_\infty$, notée σ, se prolonge en une action de $\mathrm{Mp}(\mathfrak{n}/\mathfrak{z})\times N$].

Soit $G(\nu)^\sim=G(\nu)\times_{\mathrm{Sp}(\mathfrak{n}/\mathfrak{z})}\mathrm{Mp}(\mathfrak{n}/\mathfrak{z})$ l'image réciproque du revêtement métaplectique, et ε l'élément non trivial du noyau de la projection canonique $G(\nu)^\sim\to G(\nu)$. Soit $Z=N(\nu)$ le centre de N, $Z^\sim$ son image réciproque dans $G(\nu)^\sim$, et identifions Z à la composante neutre de $Z^\sim$. Soit χ_ν le caractère de $Z^\sim$ de différentielle $2i\pi\nu$ et tel que $\chi_\nu(\varepsilon)=-1$. Alors on a une représentation $(S,\tilde\sigma)$ de $G(\nu)^\sim\times N$ dans $S=\mathcal{H}^\nu_\infty$, telle que $\tilde\sigma|_{Z^\sim}\approx\chi_\nu^{-1}\otimes\sigma$. En effet, puisque Z agit trivialement dans $\mathfrak{n}/\mathfrak{z}$, la représentation métaplectique se fait sur $Z^\sim$ par un multiple du caractère $(\tau,z)\to(-1)^\tau$; on écrit plutôt $(\tau,z)\to\chi_\nu(z)^{-1}\sigma(z)$ pour montrer que le décalage avec σ est donné par le caractère χ_ν^{-1}. On en déduit que l'obstruction de Mackey au prolongement de $\mathcal{H}^\nu$ est le groupe $G(\nu)^\sim/\mathrm{Ker}\,\chi_\nu^{-1}$; comme celui-ci n'est pas semi-algébrique en général, nous garderons $G(\nu)^\sim$. [On peut remarquer que le quotient G/N ne change pas au cours de la construction qui nous ramène au cas Heisenberg, et que l'on obtient ainsi une variante de la construction de Duflo [16]; la différence est que Duflo prend le revêtement métaplectique « avant réduction ».] Dans le cas trivial où $N=Z$, on pose simplement $G(\nu)^\sim=G(\nu)\times\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$.

Dans tous les cas, notons $\mu=\nu|_{\mathfrak{z}}$, et notons $\mathcal{Y}(\mu,\varepsilon)$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{Y}(\mu)$ formée des représentations où $Z^\sim$ agit par un multiple de χ_ν.

4.3.9. PROPOSITION. — *Plaçons-nous dans la situation du n°* 4.3.8, *avec* N *Heisenberg. Alors le foncteur* $F\to F\hat\otimes S$ *est une équivalence de catégories de* $\mathcal{Y}(\mu,\varepsilon)$ *vers* $\mathcal{Y}(\nu)$.

Démonstration. — Notons $\mathcal{S}(G)_\mu$ le quotient de $\mathcal{S}(G)$ obtenu en composant la transformation de Fourier partielle le long de $\mathfrak{z}$ (section 4.1) avec l'évaluation au point μ de $\mathfrak{z}^*$. Comme nous l'avons rappelé au n° 4.3.1, l'algèbre $\mathcal{S}(N)_\mu$ construite de manière analogue est isomorphe à $\mathscr{W}$, et tout $E \in \mathscr{Y}(\nu)$ possède une décomposition canonique $E = F \hat{\otimes} \mathscr{H}_\infty^\vee$, où $F = \mathrm{Hom}_N(\mathscr{H}_\infty^\vee, E)$.

D'après un principe général ([8], lemme 3.13), on sait que l'on aura une décomposition $\mathscr{S}(G)_\mu = \mathscr{A} \hat{\otimes} \mathscr{S}(N)_\mu$, où $\mathscr{A}$ est le « commutant » de $\mathscr{S}(N)_\mu$ dans $\mathscr{S}(G)_\mu$, défini par $\mathscr{A} = \mathrm{Hom}_{N \times N}(\mathscr{S}(N)_\mu, \mathscr{S}(G)_\mu)$; et le même lemme montre que $F \to F \hat{\otimes} \mathscr{H}_\infty^\vee$ est une équivalence de catégories de $\mathscr{S}\mathbf{mod}_{\mathscr{A}}$ vers $\mathscr{Y}(\nu)$.

On peut réaliser G comme un quotient de $G(\nu)^\sim \times N$, en identifiant les éléments de $Z^\sim \subset G(\nu)^\sim$ à leur image dans N. Alors $\mathscr{S}(G)$ sera un quotient de $\mathscr{S}(G(\nu)^\sim \times N)$, qui peut s'écrire comme un produit croisé de $\mathscr{S}(G(\nu)^\sim)$ et de $\mathscr{S}(N)$ (*cf.* section 2.4). Si l'on écrit les éléments de $\mathscr{S}(G(\nu)^\sim \times N)$ comme des fonctions sur $G(\nu)^\sim$ à valeurs dans $\mathscr{S}(N)$, la formule du produit croisé est :

$$\varphi_1 * \varphi_2(g) = \int_{G(\nu)^\sim} [(g^{-1} g_1) \cdot (\varphi_1(g_1))] * \varphi_2(g_1^{-1} g)\, dg_1.$$

Il est clair que l'on peut définir par la même formule le produit croisé de $\mathscr{S}(G(\nu)^\sim)$ avec n'importe quelle algèbre de Fréchet munie d'une action de $G(\nu)^\sim$ par automorphismes qui en fasse un objet de $\mathscr{S}\mathbf{mod}_{G(\nu)^\sim}$. En particulier, $\mathscr{S}(G)_\mu$ est un quotient du produit croisé $\mathscr{S}(G(\nu)^\sim) \hat{\otimes} \mathscr{S}(N)_\mu$.

Remarquons maintenant que la représentation métaplectique permet de définir deux nouvelles actions de $G(\nu)^\sim$ sur $\mathscr{S}(N)_\mu$, notées $a \to g * a$ et $a \to a * g$. Ce ne sont pas des morphismes d'algèbres, mais ils vérifient les conditions (1) du n° 2.5.4, et l'action de $G(\nu)^\sim$ qui définit le produit croisé est simplement $a \to g * a * g^{-1}$. On vérifie aussitôt que dans l'écriture en produit croisé l'action de $\mathscr{S}(G(\nu)^\sim) \hat{\otimes} \mathscr{S}(N)_\mu$ dans S s'écrit :

$$\varphi * v = \int_{G(\nu)^\sim} (g\, \varphi(g)) * g * v\, dg = \int_{G(\nu)^\sim} g * \varphi(g) * v\, dg.$$

Alors on voit que la formule $\varphi \to \psi$, où $\psi(g) = g * \varphi(g)$ « redresse » le produit croisé, *i.e.* $\psi_1 * \psi_2(g) = \int_{G(\nu)^\sim} \psi_1(g_1) * \psi_2(g_1^{-1} g)\, dg_1$, de sorte que $\mathscr{S}(G(\nu)^\sim) \hat{\otimes} \mathscr{S}(N)_\mu$ devient le produit tensoriel de $\mathscr{S}(G(\nu)^\sim)$ et de $\mathscr{S}(N)_\mu \simeq \mathscr{W}$; dans cette écriture, S devient le produit tensoriel de la représentation triviale de $G(\nu)^\sim$ avec $\mathscr{H}_\infty^\vee$. Le quotient $\mathscr{S}(G)_\mu$ est défini par un certain caractère θ de $Z^\sim \times Z$; si l'on identifie Z à $\mathfrak{z}$ par l'application exponentielle, on a évidemment $\theta(\tau, z_1, z_2) = e^{2i\pi\langle \mu, z_1 + z_2 \rangle}$ dans l'écriture en produit croisé. Comme on l'a vu, la représentation métaplectique se restreint à $Z^\sim$ en $(\tau, z_1) \to (-1)^\tau$. Alors on voit immédiatement qu'après transformation le caractère θ devient $(\tau, z_1, z_2) \to (-1)^\tau e^{2i\pi\langle \mu, z_1 + z_2 \rangle} = \chi_\nu(\tau, z_1) e^{2i\pi\langle \mu, z_2 \rangle}$. Donc $\mathscr{S}(G)_\mu$ s'identifie bien au produit tensoriel de $\mathscr{S}(N)_\mu$ avec le quotient $\mathscr{A}$ de $\mathscr{S}(G(\nu)^\sim)$ défini par le caractère χ_ν, et comme il est clair que $\mathscr{Y}(\mu, \varepsilon)$ est aussi la catégorie des $\mathscr{A}$-modules différentiables, la proposition est démontrée.

4.3.10. Remarque. — Les considérations des n$^{\text{os}}$ 4.3.8 et 4.3.9 se simplifient dans le cas où $\mathbf{N} = \mathbf{U}$ est le radical unipotent de $\mathbf{G}$, qui sera le plus important pour nous. En effet, on peut alors supposer que $L \subset G(\nu)$, et remplacer $G(\nu)$ par L dans la construction.

On obtient un revêtement à deux feuillets de L que nous noterons $\mathrm{Ma}(\nu)$, et l'analogue de la proposition 4.3.9 donne une équivalence de catégories entre $\mathscr{Y}(\nu)$ et la sous-catégorie pleine $\mathscr{S}\mathbf{mod}_{(\mathrm{Ma}(\nu);\varepsilon)}$ de $\mathscr{S}\mathbf{mod}_{\mathrm{Ma}(\nu)}$ formée des représentations où ε agit par -1 [dans cette situation, le groupe $\mathrm{G}(\nu)^{\sim}$ se décompose simplement en produit direct $\mathrm{G}(\nu)^{\sim}=\mathrm{Ma}(\nu)\times\mathrm{Z}$.]

4.3.11. REMARQUE. — Soit $\mathscr{A}$ une algèbre de Fréchet différentiable (déf. 2.3.1). Notons $\mathscr{S}\mathbf{mod}_{\mathscr{A}}$ la catégorie des $\mathscr{A}$-modules différentiables. Disons que $\mathrm{E}\in\mathscr{S}\mathbf{mod}_{\mathscr{A}}$ est minimal, si pour tout $\mathrm{E}_1\in\mathscr{S}\mathbf{mod}_{\mathscr{A}}$ et tout $u\neq 0$ dans $\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(\mathrm{E}_1, \mathrm{E})$, $u(\mathrm{E}_1)$ est égal à E (comme la surjectivité de u équivaut au fait que $\bar{u}: \mathrm{E}_1/\mathrm{Ker}\, u\to\mathrm{E}$ soit inversible, il s'agit bien d'une notion « catégorique »). Alors on voit aussitôt que E est minimal si et seulement si pour tout $x\neq 0$ dans E l'application canonique $a\to a*x$ de $\mathscr{A}$ dans E est surjective, *i.e.* si et seulement si E est algébriquement simple et non dégénéré sous l'action de $\mathscr{A}$. On voit ainsi que les équivalences de catégories des n$^{\text{os}}$ 4.3.8 et 4.3.9 préservent l'irréductibilité algébrique pour les algèbres de Fréchet correspondantes.

5. Représentations minimales

On garde les mêmes conventions générales qu'au chapitre 4. *On note* $\mathfrak{g}=\mathrm{Lie}(\mathrm{G})$, $\mathfrak{l}=\mathrm{Lie}(\mathrm{L})$.

5.1. DUAL MINIMAL D'UN GROUPE DE LIE SEMI-ALGÉBRIQUE.

5.1.1. DÉFINITION. — *Nous dirons que* $\mathrm{E}\in\mathscr{S}\mathbf{mod}_{\mathrm{G}}$ *est une représentation minimale de* G, *si* E *est algébriquement irréductible sous l'action de* $\mathscr{S}(\mathrm{G})$. *Nous noterons* $\mathrm{G}^{\hat{}}$, *et appellerons dual minimal de* G, *l'ensemble des* (*classes d'isomorphisme de*) *représentations minimales de* G.

5.1.2. REMARQUE. — On peut aussi décrire $\mathrm{G}^{\hat{}}$ comme l'ensemble des classes d'isomorphisme de $\mathscr{S}(\mathrm{G})$-modules topologiques et algébriquement simples [cela résulte aussitôt de l'exemple 2.3.3, en remarquant qu'un $\mathscr{S}(\mathrm{G})$-module topologique algébriquement simple est automatiquement différentiable au sens de la définition 2.3.1].

5.1.3. LEMME. — *Soit* E *une représentation minimale de* G. *Alors il existe une suite décroissante de représentations banachiques à croissance modérée de* G, *soit* $(\mathrm{E}_n, \|\ \|_n)$ *telle que* $\mathrm{E}=\bigcap_{n\in\mathbf{N}}\mathrm{E}_n$ *et telle que la topologie de* E *soit définie par les normes* $\|\ \|_n$.

Démonstration. — Il suffira de trouver une suite croissante $(\|\ \|_n)$ de normes sur E, telle que pour tout $n\in\mathbf{N}$ il existe une fonction $a>0$ dans $\mathrm{Reg}(\mathrm{G})$ (dépendant de n) vérifiant $\|gx\|_n\leqq a(g)\|x\|_n$ pour tous $g\in\mathrm{G}$, $x\in\mathrm{E}$, et telle que les $\|\ \|_n$ définissent la topologie de E. En effet, on pourra alors prendre pour E_n le complété de E pour la norme $\|\ \|_n$.

Or, remarquons d'abord que sur $\mathscr{S}(\mathrm{G})$ lui-même il existe une telle suite de normes. En effet, soit $\mathrm{Diffreg}(\mathbf{G})$ l'algèbre d'opérateurs différentiels sur G engendrée par $\mathrm{U}(\mathfrak{g})$ et $\mathbf{C}[\mathbf{G}]$. Alors comme l'action naturelle de $\mathbf{G}$ sur $\mathrm{Diffreg}(\mathbf{G})$ est localement finie, on peut trouver une filtration croissante $V_0 = \mathbf{C} \subset V_1 \subset \ldots \subset V_n \subset \ldots$ de Diffreg$(\mathbf{G})$ par des sous-$\mathbf{G}$-modules de dimension finie. Soit $(e_j)_{j \in \mathbf{N}}$ une base de Diffreg$(\mathbf{G})$ adaptée à la filtration, en ce sens qu'il existe une suite $j_0 = 0 < j_1 < \ldots < j_n < \ldots$ telle que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $(e_{j_0}, \ldots, e_{j_n})$ soit une base de V_n; on prendra $e_0 = 1$. Posons $\| \varphi \|_n = \sup_{g \in G,\, 0 \leqq j \leqq j_n} | e_j * \varphi(g) |$. D'après le théorème 1.2.2, les $\| \ \|_n$ définissent la topologie de $\mathscr{S}(G)$. D'autre part, les modules V_n sont à croissance modérée, parce qu'ils proviennent d'une représentation rationnelle de $\mathbf{G}$. Il existe donc des fonctions $a_n \in \operatorname{Reg}(G)$, $a_n > 0$, telles que $|g_1 v| \leqq a_n(g_1) |v|$ pour tous $g_1 \in G$, $v \in V_n$, où $|v| = \sup_{0 \leqq j \leqq j_n} |v_j|$, si v s'écrit $\sum_{j=0}^{j_n} v_j e_j$. Mais alors :

$$\begin{aligned} \| g_1 \varphi \|_n &= \sup_{g,\, j} | e_j * (g_1 \varphi)(g) | = \sup_{g,\, j} | ((g_1^{-1} e_j) * \varphi)(g_1^{-1} g) | \\ &= \sup_{g,\, j} | (g_1^{-1} e_j * \varphi)(g) | \quad \text{(par le changement de variables } g \to g_1 g) \\ &\leqq a_n(g_1^{-1}) \sup_{g,\, k} | e_k * \varphi(g) | = a_n(g_1^{-1}) \| \varphi \|_n \end{aligned}$$

d'où notre assertion.

Écrivons maintenant $E = \mathscr{S}(G)/L$, où L est un idéal à gauche maximal fermé de $\mathscr{S}(G)$. Soit q_n la semi-norme quotient sur E définie par $\| \ \|_n$. Alors les q_n vérifient les propriétés voulues, à ceci près qu'elles pourraient ne pas être des normes. Comme il est clair que le noyau F_n de q_n est un sous-G-module fermé de E, on a en fait $q_n = 0$ ou $F_n = 0$. Mais comme on ne peut avoir $q_n = 0$ pour tout n, on voit que q_n est une norme pour n assez grand, et le lemme est démontré.

5.1.4. Proposition. — *Soit* E *une représentation minimale de* G. *Alors le commutant de* E *est scalaire.*

Démonstration. — Soit $\mathscr{S}^\sim$ l'algèbre déduite de $\mathscr{S}(G)$ par adjonction d'une unité, et écrivons $E = \mathscr{S}^\sim / L$, où L est un idéal à gauche maximal de $\mathscr{S}^\sim$. Soit $\mathscr{I} = \{ a \in \mathscr{S}^\sim \mid L * a \subset L \}$. Alors $\mathscr{I}$ est une sous-algèbre de $\mathscr{S}^\sim$ contenant L, et L est un idéal bilatère dans $\mathscr{I}$.

Soit K le commutant de G dans E; alors K est aussi le commutant de E considéré comme $\mathscr{S}(G)$-module purement algébrique [en effet un endomorphisme de l'espace vectoriel E qui commute à $\mathscr{S}(G)$ est automatiquement continu]. D'après le lemme de Schur, K est en tous cas un corps gauche, que nous faisons agir à droite sur E.

Soit v_0 un élément non nul de E annulé par L. Alors il est facile de voir que $\mathscr{I} * v_0 = v_0 * K = \{ v \in E \mid L * v = 0 \}$ (*cf.* [19], chap. 4, prop. 4.6), et que l'on obtient ainsi un isomorphisme de K avec l'algèbre $\mathscr{I}/L$. Posons $E_0 = \mathscr{I} * v_0$; il résulte de ce qui précède que E_0 est un sous-espace vectoriel fermé de E, muni d'une structure de K-espace vectoriel à gauche. Mais soit maintenant $\| \ \|_n$ une suite de normes vérifiant les conditions du lemme 5.1.3. Comme les opérateurs à gauche de K proviennent de l'action de $\mathscr{I} \subset \mathscr{S}^\sim$, ils sont continus pour la topologie définie par chaque $\| \ \|_n$, et en particulier pour $\| \ \|_0$. On a donc une action de K par opérateurs continus dans un espace de Banach; d'après le théorème de Gelfand-Mazur, cela n'est possible que si $K = \mathbf{C}$ (*cf.* [28], th. 1.7.1).

5.1.5. Nous allons montrer que l'on peut entièrement classifier les représentations minimales de G. Plus précisément, nous allons ramener le cas général au cas réductif, pour lequel nous avons rappelé au chapitre 3 le résultat de Casselman et Wallach, qui établit en particulier une bijection entre représentations minimales et $(\mathfrak{g}, K)$-modules simples.

Notre paramétrisation se fera sur le modèle de celle de Duflo [15] pour le dual unitaire, la seule différence étant qu'une fois ramenés au cas réductif, on remplace le dual unitaire par le dual minimal, qui comme nous venons de le dire se ramène au dual « $(\mathfrak{g}, K)$-modules ». Comme pour ce dernier on dispose, au moins dans le cas linéaire, de la classification de Langlands, on voit que la situation est plutôt plus simple pour le dual minimal que pour le dual unitaire.

5.1.6. Commençons par définir les éléments de $\mathfrak{g}^*$ qui interviennent dans la paramétrisation, appelés formes linéaires de type unipotent. Nous en donnerons une définition « opérationnelle », renvoyant à [15], chap. I pour des caractérisations plus directes.

Soit $f \in \mathfrak{g}^*$. En raisonnant par récurrence sur la dimension de $\mathfrak{g}$, nous allons associer à f une orbite coadjointe d'un type particulier, dite orbite de type unipotent associée à f, de la manière suivante. Soit $\mu = f|_{\mathfrak{u}}$, $G_1 = G(\mu)U$, $\mathfrak{g}_1 = \mathrm{Lie}(G_1) = \mathfrak{g}(\mu) + \mathfrak{u}$. Soit $f_1 = f|_{\mathfrak{g}_1}$. On remarque que si $f_1' \in \mathfrak{g}_1^*$ prolonge μ, tous les prolongements de f_1' à $\mathfrak{g}$ sont conjugués entre eux sous l'action de $U(\mu)$, et appartiennent donc à la même orbite coadjointe.

Si $\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{g}$, on prolonge μ par 0 sur $\mathfrak{l}$ et on dit que c'est la forme de type unipotent associée à f. Comme tous les facteurs de Levi de $\mathfrak{g}$ sont conjugués sous l'action de U, l'orbite coadjointe du prolongement $\bar{\mu}$ de μ ainsi défini ne dépend pas du choix de $\mathfrak{l}$; par définition, nous dirons que c'est l'orbite de type unipotent associée à f.

Si $\mathfrak{g}_1 \neq \mathfrak{g}$, on note f_1' un élément de l'orbite de type unipotent associée à f_1. Il est clair que $f_1'|_{\mathfrak{u}} \in G_1 . \mu$; d'après une remarque précédente, tous les prolongements de f_1' à $\mathfrak{g}$ appartiennent à la même orbite coadjointe; nous dirons que c'est l'orbite de type unipotent associée à f.

Par définition, nous dirons que f est de type unipotent, si l'orbite de type unipotent associée à f est sa propre orbite coadjointe $G.f$. Il apparaîtra clairement par la suite que les orbites de type unipotent constituent exactement l'espace de paramètres adapté à une application répétée de la théorie de Mackey au radical unipotent.

Nous appellerons sous-algèbre coïsotrope canonique associée à f, et noterons $\mathfrak{b}(f)$, la sous-algèbre définie par récurrence sur $\dim(\mathfrak{g})$ en posant $\mathfrak{b}(f) = \mathfrak{g}$ si $\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{g}$ ci-dessus, et $\mathfrak{b}(f) = \mathfrak{b}(f_1) \subset \mathfrak{g}_1$ sinon. De même, nous appellerons sous-groupe induisant canonique associé à f, et noterons $B(f)$, le sous-groupe fermé de G égal à G_1 si $\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{g}$, et à $B(f_1) \subset G_1$ sinon. On note $\mathfrak{n}(f)$ le radical unipotent de $\mathfrak{b}(f)$, $N(f) = \exp(\mathfrak{n}(f))$, et $\nu = f|_{\mathfrak{n}(f)}$.

5.1.7. Soit $f \in \mathfrak{g}^*$ de type unipotent, et considérons comme au n° 5.1.6 ci-dessus $B(f)$ et $\mathfrak{b}(f)$. Il est clair que $B(f)$ stabilise $N(f).\nu$; il y a donc lieu d'introduire la sous-catégorie $\mathscr{Y}(\nu)$ de $\mathscr{S}\mathbf{mod}_{\mathrm{B}(f)}$ (*cf.* n° 4.3.1), que nous noterons aussi $\mathscr{Y}(f)$. D'après la remarque 4.3.10, la catégorie $\mathscr{Y}(f)$ est canoniquement équivalente à $\mathscr{S}\mathbf{mod}_{(\mathrm{Ma}(\nu),\,\varepsilon)}$, où $\mathrm{Ma}(\nu)$ est un certain revêtement à deux feuillets de $\mathrm{B}(f)/\mathrm{N}(f)$. Nous dirons que $\mathrm{F}\in\mathscr{Y}(f)$ est admissible, si l'objet correspondant de $\mathscr{S}\mathbf{mod}_{(\mathrm{Ma}(\nu),\,\varepsilon)}$ l'est (*cf.* 3.1.1); nous noterons $\mathrm{Y}^{\mathrm{adm}}(f)$ [resp. $\mathrm{Y}^{\mathrm{irr}}(f)$, $\mathrm{Y}^{\mathrm{min}}(f)$] l'ensemble des classes d'isomorphisme d'objets admissibles (resp. topologiquement irréductibles, minimaux) de $\mathscr{Y}(f)$. On note $\mathrm{Ma}(\nu)^{\wedge}_{\varepsilon}$ l'ensemble des $\mathrm{E}\in\mathrm{Ma}(\nu)^{\wedge}$ où ε agit par -1; on a donc une bijection canonique entre $\mathrm{Ma}(\nu)^{\wedge}_{\varepsilon}$ et $\mathrm{Y}^{\mathrm{min}}(f)$ (remarque 4.3.11).

5.1.8. Théorème. — *Soit* $\mathfrak{g}^*_u$ *l'espace des formes linéaires de type unipotent sur* $\mathfrak{g}$ (cf. *n°* 5.1.6), *et adoptons les notations de* 5.1.6 *et* 5.1.7. *Soit* $\mathrm{E}\in\mathscr{S}\mathbf{mod}_{\mathrm{G}}$ *topologiquement irréductible. Alors il existe une unique orbite* $\mathscr{O}\in\mathfrak{g}^*_u/\mathrm{G}$, *et pour* $f\in\mathscr{O}$ *une unique* $\mathrm{F}\in\mathrm{Y}^{\mathrm{irr}}(f)$, *telles que l'on ait des inclusions :*

$$\mathscr{S}^{1/2}\,\mathrm{Ind}^{\mathrm{G}}_{\mathrm{B}(f)}(\mathrm{F})\subset\mathrm{E}\subset\mathscr{O}^{1/2}_{\mathrm{M}}\,\mathrm{Ind}^{\mathrm{G}}_{\mathrm{B}(f)}(\mathrm{F}).$$

Si $\mathrm{E}\in\mathrm{G}^{\wedge}$ (*déf.* 5.1.1), *alors* $\mathrm{F}\in\mathrm{Y}^{\mathrm{min}}(f)$, *et l'inclusion* $\mathscr{S}^{1/2}\,\mathrm{Ind}^{\mathrm{G}}_{\mathrm{B}(f)}(\mathrm{F})\subset\mathrm{E}$ *est un isomorphisme. On obtient ainsi une bijection canonique de* $\mathrm{G}^{\wedge}$ *sur* $\coprod_{\mathscr{O}\in\mathfrak{g}^*{}_u/\mathrm{G}}\mathrm{Ma}(\nu)^{\wedge}_{\varepsilon}$.

Démonstration. — On raisonne par récurrence sur $\dim(\mathfrak{g})$. Si $\mathfrak{u}=0$, alors 0 est la seule forme linéaire de type unipotent sur $\mathfrak{g}$, et il n'y a rien à démontrer. Supposons donc $\dim(\mathfrak{u})>0$.

Appliquons le théorème 4.3.6 à l'idéal $\mathfrak{u}$. On obtient une unique G-orbite $\mathrm{X}=\mathrm{G}.\mu$ dans $\mathfrak{u}^*$, et une unique $\mathrm{E}_1\in\mathscr{S}\mathbf{mod}_{\mathrm{G}_1}$, avec $\mathrm{G}_1=\mathrm{G}(\mu).\mathrm{U}$, telles que :

$$\mathscr{S}^{1/2}\,\mathrm{Ind}^{\mathrm{G}}_{\mathrm{G}_1}(\mathrm{E}_1)\subset\mathrm{E}\subset\mathscr{O}^{1/2}_{\mathrm{M}}\,\mathrm{Ind}^{\mathrm{G}}_{\mathrm{G}_1}(\mathrm{E}_1);$$

de plus, la représentation E_1 est topologiquement irréductible.

Montrons que E_1 est minimale si E l'est. En effet, si E est minimale, l'inclusion $\mathscr{S}^{1/2}\,\mathrm{Ind}^{\mathrm{G}}_{\mathrm{G}_1}(\mathrm{E}_1)\subset\mathrm{E}$ est nécessairement un isomorphisme. Si $v\neq 0\in\mathrm{E}_1$, on pose $\mathrm{V}_1=\mathscr{S}(\mathrm{G}_1)*v$, et on munit V_1 de la topologie quotient de celle de $\mathscr{S}(\mathrm{G}_1)$; alors V_1 est un sous-$\mathscr{S}(\mathrm{G}_1)$-module non nul de E_1. On a donc $\mathrm{V}=\mathscr{S}^{1/2}\,\mathrm{Ind}^{\mathrm{G}}_{\mathrm{G}_1}(\mathrm{V}_1)\subset\mathrm{E}$, d'où $\mathrm{V}=\mathrm{E}$, et comme $\mathscr{S}^{1/2}\,\mathrm{Ind}$ est une équivalence de catégories, $\mathrm{V}_1=\mathrm{E}_1$, ce qui prouve bien que E_1 est algébriquement irréductible. Inversement, le même raisonnement montre que si E_1 est minimale, alors $\mathscr{S}^{1/2}\,\mathrm{Ind}^{\mathrm{G}}_{\mathrm{G}_1}(\mathrm{E}_1)$ est minimale, donc on obtient bien tous les objets minimaux de $\mathscr{Y}(\mu)$ à partir d'éléments de $\mathrm{G}^{\wedge}$.

Si $\mathfrak{g}_1=\mathfrak{g}$, ou plus généralement si $\mathfrak{u}$ est le radical unipotent de $\mathfrak{g}_1$, on voit aussitôt que si f est le prolongement de μ par 0 sur $\mathfrak{l}$, alors f est de type unipotent, $\mathrm{B}(f)=\mathrm{G}_1$, et $\mathrm{E}_1\in\mathrm{Y}^{\mathrm{irr}}(f)$ si E est seulement topologiquement irréductible, $\mathrm{E}_1\in\mathrm{Y}^{\mathrm{min}}(f)$ si $\mathrm{E}\in\mathrm{G}^{\wedge}$. Donc dans ce cas la démonstration est terminée. Sinon, on peut appliquer l'hypothèse de récurrence à G_1 et à E_1, et la conclusion est à nouveau immédiate par transitivité des foncteurs $\mathscr{S}^{1/2}\,\mathrm{Ind}$ et $\mathscr{O}^{1/2}_{\mathrm{M}}\,\mathrm{Ind}$.

5.1.9. Exemple. — Soit $\mathrm{G}=\mathbf{R}^*_+\times\mathbf{R}$ la composante neutre du groupe affine de la droite. On peut écrire $\mathfrak{g}=\mathbf{R}\,e_1\oplus\mathbf{R}\,e_2$, avec $[e_1,e_2]=e_2$. Alors $\mathfrak{u}=\mathbf{R}\,e_2$, et on peut prendre

$\mathfrak{l}=\mathbf{R}\,e_1$. Si $f\in\mathfrak{g}^*$ est telle que $f|_{\mathfrak{u}}\neq 0$, alors dans les notations du n° 5.1.6 on a $\mathfrak{g}_1=\mathbf{u}$, donc $f_1=f|_{\mathfrak{u}}$ est de type unipotent, et il en va de même pour f. Ces formes linéaires se répartissent en deux G-orbites ouvertes $\mathcal{O}_\pm$, définies respectivement par $f(e_2)>0$ et $f(e_2)<0$. Pour ces orbites, on a $\mathfrak{b}(f)=\mathfrak{u}$, $\mathrm{B}(f)=\mathrm{U}$, $\mathrm{Y}(f)=\{e^{2i\pi\mu}\}$, avec $\mu=f|_{\mathfrak{u}}$. Si $f|_{\mathfrak{u}}=0$, alors f est de type unipotent si et seulement si $f=0$.

D'après le théorème 5.1.8, $\hat{\mathrm{G}}$ se compose donc de deux représentations de dimension infinie $\mathrm{E}_\pm$, avec $\mathrm{E}_\pm=\mathscr{S}^{1/2}\,\mathrm{Ind}_{\mathrm{U}}^{\mathrm{G}}(e^{\pm 2i\pi e_2^*})$, et d'une famille à un paramètre complexe de représentations de dimension un, $\{e^{2i\pi\lambda e_1^*},\ \lambda\in\mathbf{C}\}$. L'inclusion $\hat{\mathrm{G}}_u\subset\hat{\mathrm{G}}$ s'obtient en se limitant pour les représentations de dimension un à $\lambda\in\mathbf{R}$. Si l'on identifie $\mathfrak{u}^*$ à $\mathbf{R}$ *via* la base e_2^*, on voit que sur les orbites ouvertes $\mathbf{R}_\pm^*$ il y a une mesure invariante $dt/|t|$, ce qui permet d'identifier $\mathrm{E}_\pm$ à $\mathscr{S}(\mathbf{R}_\pm^*)$, avec l'action de $\mathbf{R}$ par multiplications par $e^{2i\pi\mu t}$ et l'action de $\mathbf{R}_+^*$ par homotéties. On remarquera que pour tout $\lambda\in\mathbf{C}$, la multiplication par $e^{2i\pi\lambda t}$ est un isomorphisme de $\mathscr{S}(\mathbf{R}_\pm^*)$ sur lui-même, et définit un isomorphisme de $\mathrm{E}_\pm$ sur $e_1^{2i\pi\lambda e^*}\otimes\mathrm{E}_\pm$. Cet exemple sera généralisé au théorème 5.3.3.

5.1.10. DÉFINITION. — *Dans les notations du théorème* 5.1.8, *l'espace* $\mathscr{S}^{1/2}\,\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(f)}^{\mathrm{G}}(\mathrm{F})$ *sera appelé l'espace des vecteurs de Schwartz de* E; *nous le noterons simplement* E_s. *Par une application répétée du théorème* 4.3.6, *on voit que si* E_1 *et* E_2 *correspondent à la même orbite* $\mathcal{O}$, *tout* $u\in\mathrm{Hom}_{\mathrm{G}}(\mathrm{E}_1,\mathrm{E}_2)$ *commute à l'action de* $\mathscr{S}(\mathrm{G}/\mathrm{B}(f))$, *et préserve donc les espaces de Schwartz. Nous dirons que* E *est admissible si* $\mathrm{F}\in\mathrm{Y}^{\mathrm{adm}}(f)$ (cf. *n°* 5.1.7).

5.1.11. DÉFINITION. — *Soit* $\mathrm{E}\in\mathscr{S}\mathbf{mod}_{\mathrm{G}}$, *topologiquement irréductible. Nous dirons que* E *est opératoirement irréductible, si tout opérateur d'entrelacement fermé de* E *dans lui-même est scalaire* (*nous disons opérateur fermé pour opérateur fermé densément défini non nécessairement borné*).

5.1.12. THÉORÈME. — *Soit* $\mathrm{E}\in\mathscr{S}\mathbf{mod}_{\mathrm{G}}$ *topologiquement irréductible. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) E *est opératoirement irréductible* (*déf.* 5.1.11).

(ii) E *est admissible* (*déf.* 5.1.10).

(iii) E_s (*déf.* 5.1.10) *est minimale.*

(iv) *Il existe* $\mathrm{E}_1\in\hat{\mathrm{G}}$ *contenue dans* E.

Si ces conditions sont vérifiées, E_s *est le socle de l'action de* $\mathscr{S}(\mathrm{G})$ *dans* $\mathcal{O}_{\mathrm{M}}^{1/2}\,\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(f)}^{\mathrm{G}}(\mathrm{F})$, *où* F *est comme à la définition* 5.1.10, *et* a fortiori *de son action dans* E [*d'où nécessairement* $\mathrm{E}_1=\mathrm{E}_s$ *dans* (iv)].

Démonstration. — D'après le théorème 5.1.8 on a l'encadrement :

$$\mathrm{E}_s=\mathscr{S}^{1/2}\,\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(f)}^{\mathrm{G}}(\mathrm{F})\subset\mathrm{E}\subset\mathcal{O}_{\mathrm{M}}^{1/2}\,\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(f)}^{\mathrm{G}}(\mathrm{F}).$$

(*a*) Montrons que si E est opératoirement irréductible, il en va de même pour F. En effet, soit $\Gamma_1\subset\mathrm{F}\oplus\mathrm{F}$ le graphe d'un opérateur d'entrelacement fermé u_1, et posons $\Gamma=\mathscr{S}^{1/2}\,\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(f)}^{\mathrm{G}}(\Gamma_1)$. Soit $\mathrm{E}_s=\mathscr{S}^{1/2}\,\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(f)}^{\mathrm{G}}(\mathrm{F})$ l'espace des vecteurs de Schwartz de E. Alors Γ est le graphe d'un opérateur d'entrelacement fermé u de E_s vers lui-même. Soit $\bar{\Gamma}$ l'adhérence de Γ dans $\mathrm{E}\oplus\mathrm{E}$, et montrons que $\bar{\Gamma}$ est encore un graphe. Sinon, $\bar{\Gamma}$

contiendrait des éléments de la forme $(0, y)$, avec $y \neq 0$ dans E. Mais alors $0 \oplus \mathrm{E} \subset \bar{\Gamma}$, ce qui montre que $\mathrm{pr}_1(\bar{\Gamma}) \subset \mathrm{E}$ est fermé, et comme $\mathrm{pr}_1(\bar{\Gamma})$ contient $\mathrm{dom}(u) \neq 0$, on aurait $\bar{\Gamma} = \mathrm{E} \oplus \mathrm{E} = (\mathrm{E}_s \oplus \mathrm{E}_s)^-$, ce qui est absurde d'après le lemme 2.3.7. Ainsi, $\bar{\Gamma}$ est le graphe d'un opérateur d'entrelacement fermé $\bar{u}$. Par hypothèse, $\bar{u}$ est scalaire; alors il en va de même pour u et u_1, d'où notre assertion.

(*b*) Montrons que si F est minimale, ce qui équivaut au fait que E_s soit minimale, alors E_s est le socle de l'action de $\mathscr{S}(\mathrm{G})$ dans $\mathscr{O}_{\mathrm{M}}^{1/2} \mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(f)}^{\mathrm{G}}(\mathrm{F})$. En effet, une application répétée du corollaire 4.3.3 montre que tout $\mathrm{W} \in \mathscr{S}\mathbf{mod}_{\mathrm{G}}$ contenu dans $\mathscr{O}_{\mathrm{M}}^{1/2} \mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(f)}^{\mathrm{G}}(\mathrm{F})$ contient $\mathscr{S}^{1/2} \mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(f)}^{\mathrm{G}}(\mathrm{F})$. En prenant $\mathrm{W} = \mathscr{S}(\mathrm{G}) * v$, où $v \in \mathscr{O}_{\mathrm{M}}^{1/2} \mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(f)}^{\mathrm{G}}(\mathrm{F})$, on a bien l'assertion cherchée.

(*c*) Démontrons maintenant l'équivalence des assertions du théorème.

(i) $\Rightarrow$ (ii). D'après (*a*), F est opératoirement irréductible. Alors il est *a fortiori* à commutant scalaire, et il en va de même pour la représentation $\mathrm{Q} \in \mathscr{S}\mathbf{mod}_{(\mathrm{Ma}(\nu), \varepsilon)}$ qui lui correspond par la remarque 4.3.10. D'après le lemme 3.2.9, Q est donc admissible, d'où (ii).

(ii) $\Rightarrow$ (iii). D'après le théorème 3.1.2, la représentation Q ci-dessus est minimale, et d'après la remarque 4.3.11 il en va de même pour F, donc pour E_s.

(iii) $\Rightarrow$ (iv). Évident.

(iv) $\Rightarrow$ (i). Il est clair que si E contient $\mathrm{E}_1 \in \hat{\mathrm{G}}$, on a nécessairement $\mathrm{E}_1 = \mathscr{S}^{1/2} \mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(f)}^{\mathrm{G}}(\mathrm{F}_1)$, avec F_1 minimale contenue dans F. Si Q_1 et $\mathrm{Q} \in \mathscr{S}\mathbf{mod}_{(\mathrm{Ma}(\nu), \varepsilon)}$ correspondent à F_1 et F respectivement, on aura une inclusion $\mathrm{Q}_1 \subset \mathrm{Q}$, nécessairement d'image dense. Comme Q_1 est admissible, ceci implique que Q et Q_1 ont même espace de vecteurs K-finis, donc Q est admissible et on a $\mathrm{Q} = \mathrm{Q}_1$ d'après le théorème 3.1.2; mais alors on a aussi $\mathrm{F} = \mathrm{F}_1$. En d'autres termes, F est minimale et nécessairement $\mathrm{E}_1 = \mathscr{S}^{1/2} \mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(f)}^{\mathrm{G}}(\mathrm{F}) = \mathrm{E}_s$.

Si maintenant $u : \mathrm{E} \to \mathrm{E}$ est un opérateur d'entrelacement fermé, $\mathrm{dom}(u)$ est un sous-$\mathscr{S}(\mathrm{G})$-module de E, donc $\mathrm{E}_s \subset \mathrm{dom}(u)$ d'après ce qui précède. Mais comme E_s est nécessairement stable par u, on voit que $u|_{\mathrm{E}_s}$ est un opérateur d'entrelacement partout défini de E_s vers lui-même, donc scalaire (prop. 5.1.4). Alors u est scalaire, d'où (i).

5.1.13. Corollaire. — *Soit* $\hat{\mathrm{G}}_u$ *le dual unitaire de* G. *Alors si* $\mathscr{H} \in \hat{\mathrm{G}}_u$, *l'espace* $\mathscr{H}_s = (\mathscr{H}_\infty)_s$ *est une représentation minimale de* G. *On obtient ainsi une injection canonique* $\hat{\mathrm{G}}_u \to \hat{\mathrm{G}}$, *compatible aux fibrations au-dessus de l'espace des orbites de type unipotent.*

Démonstration. — Il est bien connu qu'une représentation unitaire irréductible d'un groupe de Lie est opératoirement irréductible, et cette propriété passe aux vecteurs C^∞ (*cf.* [26], cor. 3.2).

5.1.14. Exemple. — Dans le cas du « groupe des $ax+b$ » (ex. 5.1.9), les deux représentations de dimension infinie $\mathrm{E}_\pm$ dans $\hat{\mathrm{G}}$ sont les espaces de Schwartz des deux représentations unitaires irréductibles de dimension infinie de G. C'est l'exemple le plus simple où l'on ait $\mathscr{H}_s \neq \mathscr{H}_\infty$ (en fait, comme $\mathscr{H}_s$ est toujours nucléaire, d'après [5], th. 2.6, on ne peut avoir $\mathscr{H}_s = \mathscr{H}_\infty$ que si la représentation possède un caractère-distribution, donc en particulier est liminaire, ce qui n'est pas le cas ici).

5.2. L'IDÉAL MINIMAL D'UNE REPRÉSENTATION IRRÉDUCTIBLE. — *Dans cette section, on note* E *un élément de* $\hat{G}$, *que l'on écrit d'après le théorème* 5.1.8 $E = \mathcal{S}^{1/2}\operatorname{Ind}_{B(f)}^{G}(F)$, *avec* $F = \mathcal{H}^{\nu}_{\infty} \hat{\otimes} Q$, $Q \in \operatorname{Ma}(\nu)^{\wedge}_{\varepsilon}$ (*notations* 5.1.7).

5.2.1. On définit la représentation contragrédiente de E par

$$E^{\vee} = \mathcal{S}^{1/2}\operatorname{Ind}_{B(f)}^{G}(\bar{\mathcal{H}}^{\nu}_{\infty} \hat{\otimes} Q^{\vee})$$

où $\bar{\mathcal{H}}^{\nu}$ est la représentation contragrédiente de $\mathcal{H}^{\nu}$, et $Q^{\vee}$ celle de Q [on peut définir $Q^{\vee}$ comme la globalisation minimale de l'espace des vecteurs K-finis du dual algébrique $(Q_{(K)})^*$, *cf.* chap. 3].

Il est clair que l'on a un accouplement G-invariant canonique $E^{\vee} \times E \to \mathbf{C}$. On a alors une structure d'algèbre de Fréchet évidente sur l'espace $E \hat{\otimes} E^{\vee}$, qui est une représentation minimale de $G \times G$ puisqu'elle s'écrit

$$E \hat{\otimes} E^{\vee} = \mathcal{S}^{1/2}\operatorname{Ind}_{B(f)\times B(f)}^{G\times G}((\mathcal{H}^{\nu}_{\infty} \hat{\otimes} \bar{\mathcal{H}}^{\nu}_{\infty}) \hat{\otimes} (Q \hat{\otimes} Q^{\vee}));$$

de plus il y a une action évidente de $E \hat{\otimes} E^{\vee}$ sur E, pour laquelle E est un $(E \hat{\otimes} E^{\vee})$-module algébriquement simple.

5.2.2. Comme nous l'avons vu au n° 3.2.6, en réalisant Q comme l'espace des vecteurs C^{∞} d'une représentation hilbertienne de $\operatorname{Ma}(\nu)$, on voit que l'action de $\mathcal{S}(\operatorname{Ma}(\nu))$ dans Q se fait par l'intermédiaire de l'algèbre $Q \hat{\otimes} Q^{\vee}$, et même que l'image de $\mathcal{S}(\operatorname{Ma}(\nu))$ dans $\operatorname{End}(Q)$ est exactement $Q \hat{\otimes} Q^{\vee}$. De même, l'image de $(N(f))$ (n° 5.1.6) dans $\operatorname{End}(\mathcal{H}^{\nu}_{\infty})$ est $\mathcal{H}^{\nu}_{\infty} \hat{\otimes} \bar{\mathcal{H}}^{\nu}_{\infty}$ (*cf.* n° 4.3.1). Il en résulte aussitôt que l'image de $\mathcal{S}(B(f))$ dans $\operatorname{End}(F)$ est $F \hat{\otimes} F^{\vee}$.

Alors l'action de $\mathcal{S}(G)$ dans E se fait par des noyaux dans $\mathcal{O}_M^{1/2}\operatorname{Ind}_{B(f)\times B(f)}^{G\times G}(F \hat{\otimes} F^{\vee})$; si M est l'annulateur de E dans $\mathcal{S}(G)$, on a donc une réalisation de $\mathcal{S}(G)/M$ comme algèbre de noyaux. Mais comme $\mathcal{S}(G)/M \in \mathcal{S}\mathbf{mod}_{G\times G}$, il contient $E \hat{\otimes} E^{\vee}$ d'après le théorème 5.1.12, et on a donc l'encadrement habituel

$$\mathcal{S}\operatorname{Ind}_{B(f)\times B(f)}^{G\times G}(F \hat{\otimes} F^{\vee}) \subset \mathcal{S}(G)/M \subset \mathcal{O}_M\operatorname{Ind}_{B(f)\times B(f)}^{G\times G}(F \hat{\otimes} F^{\vee}).$$

5.2.3. PROPOSITION. — *Dans les notations du n°* 5.2.2, $\mathcal{S}(G)/M$ *possède un plus petit idéal* $\mathcal{S}(G\times G)$-*stable, qui est* $E \hat{\otimes} E^{\vee}$.

Démonstration. — Il est clair que $E \hat{\otimes} E^{\vee}$ est un idéal $\mathcal{S}(G\times G)$-stable de $\mathcal{S}(G)/M$, et d'après le théorème 5.1.12 c'est le socle du $\mathcal{S}(G\times G)$-module $\mathcal{S}(G)/M$, d'où la proposition.

5.2.4. DÉFINITION. — *Nous dirons que* $E \hat{\otimes} E^{\vee}$ *est l'idéal minimal de* E; *nous le noterons aussi* $\mathcal{K}_{\infty}(E)$. *On définit de même* $\mathcal{K}_{\infty}(V) = \mathcal{K}_{\infty}(E)$ *lorsque* V *est une représentation topologiquement irréductible dans* $\mathcal{S}\mathbf{mod}_G$ *contenant* E (cf. *th.* 5.1.12); *on pourra noter que* V *et* E *ont alors même annulateur dans* $\mathcal{S}(G)$.

5.2.5. REMARQUE. — En général, $\mathcal{S}(G)/M$ ne sera pas un $\mathcal{S}(G\times G)$-module topologiquement irréductible; en fait, il semble très probable que $\mathcal{K}_{\infty}(E)$ soit toujours un idéal *fermé* de l'algèbre $\mathscr{S}(G)/M$. D'autre part, compte tenu du corollaire 5.2.8 ci-dessous et des propriétés de l'algèbre $\mathscr{W}$ énoncées au n° 0.7, on ne peut avoir $\mathscr{S}(G)/M = \mathscr{K}_\infty(E)$ que si toute représentation topologiquement irréductible dans $\mathscr{S}\mathbf{mod}_G$ contenant E est en fait égale à E (nous dirons alors que E possède la propriété de minimalité automatique). L'exemple 5.1.14 avec $E = E_\pm$ donne le cas le plus simple où ceci ne soit pas vérifié; bien sûr, on a toujours minimalité automatique dans les cas nilpotent et réductif.

5.2.6. Lemme. — *Soit* $\mathbf{X}'$ *une variété projective lisse,* $\mathbf{X}$ *un ouvert de Zariski non vide de* $\mathbf{X}'$. *Soient* $\mathbf{F}_j$, $1 \leqq j \leqq n$, *des sous-variétés fermées de* $\mathbf{X}$, *et soit* $\mathbf{F}'_j$ *l'adhérence de* $\mathbf{F}_j$ *dans* $\mathbf{X}'$. *On suppose que* $\bigcap_{j=1}^{n} \mathbf{F}_j = \varnothing$. *Alors il existe une modification* $\mathbf{X}'' \to \mathbf{X}'$ (i.e. *une succession finie d'éclatements de sous-variétés lisses contenues dans le complémentaire de* $\mathbf{X}$) *telle que si* $\mathbf{F}''_j$ *est l'adhérence de* $\mathbf{F}_j$ *dans* $\mathbf{X}''$, *l'on ait* $\bigcap_{j=1}^{n} \mathbf{F}''_j = \varnothing$.

Démonstration. — (*a*) *Cas où* $n=2$. Étant donné que les composantes irréductibles d'une variété lisse sont deux à deux disjointes, on voit que si $\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 \cup \mathbf{F}_2$ est lisse, la conclusion cherchée résulte aussitôt du théorème de résolution des singularités (th. 0.4), appliqué avec $\mathbf{V} = \mathbf{X}'$, $\mathbf{U} = \mathbf{X}$, $\mathbf{W} = \mathbf{F}'$ (adhérence de $\mathbf{F}$ dans $\mathbf{X}'$). Nous allons nous ramener à ce cas par récurrence sur $N = \dim(\mathbf{F}_1) + \dim(\mathbf{F}_2)$.

Si $N = 0$, il n'y a rien à démontrer. Supposons donc $N > 0$. Pour $j = 1, 2$, soit $\mathbf{S}_j$ le lieu singulier de $\mathbf{F}_j$, $\mathbf{S}'_j$ l'adhérence de $\mathbf{S}_j$ dans $\mathbf{X}'$. Alors par hypothèse de récurrence, on peut modifier $\mathbf{X}'$ pour que $\mathbf{S}'_1 \cap \mathbf{F}'_2 = \varnothing$; et il est clair que cette condition restera vérifiée après d'éventuelles modifications ultérieures. On peut donc supposer que l'on a également $\mathbf{F}'_1 \cap \mathbf{S}'_2 = \varnothing$. Mais alors on a *a fortiori* $\mathbf{S}'_j \cap (\mathbf{F}'_1 \cap \mathbf{F}'_2) = \varnothing$ pour tout j. En d'autres termes, il y a un voisinage $\mathbf{Y}'$ de $\mathbf{F}'_1 \cap \mathbf{F}'_2$ dans $\mathbf{X}'$ tel que si $\mathbf{Y} = \mathbf{Y}' \cap \mathbf{X}$, les $\mathbf{F}_j \cap \mathbf{Y}$ soient lisses.

D'après le théorème 0.4, on peut trouver une suite de modifications

$$\mathbf{Y}' = \mathbf{Y}^{(1)} \leftarrow \mathbf{Y}^{(2)} \leftarrow \ldots \leftarrow \mathbf{Y}^{(p)} = \mathbf{Y}''$$

telle que les transformées strictes des $\mathbf{Y} \cap \mathbf{F}_j$ dans $\mathbf{Y}''$ soient d'intersection vide, où $\mathbf{Y}^{(i+1)}$ s'obtient à partir de $\mathbf{Y}^{(i)}$ en faisant éclater une sous-variété lisse $\mathbf{W}_i$ de $\mathbf{Y}^{(i)}$, contenue dans le complémentaire de $\mathbf{Y}$ (noter que $\mathbf{Y}$ s'identifie à un ouvert de chaque $\mathbf{Y}^{(i)}$). Soit $\mathbf{V}_1$ l'adhérence de $\mathbf{W}_1$ dans $\mathbf{X}'$. Alors puisque le complémentaire de $\mathbf{X}$ est fermé, $\mathbf{V}_1$ est disjointe de $\mathbf{X}$, et toujours par application du théorème 0.4 on peut trouver une modification $\mathbf{X}^{(1)} \to \mathbf{X}'$, obtenue par une succession finie d'éclatements de sous-variétés lisses de $\mathbf{X}'$, disjointes de $\mathbf{X}$ et de $\mathbf{Y}'$, telle que l'adhérence de $\mathbf{W}_1$ dans $\mathbf{X}^{(1)}$ (que nous noterons encore $\mathbf{V}_1$) soit lisse. Mais alors il est clair que $\mathbf{Y}^{(2)}$ s'identifie à un ouvert de la variété $\mathbf{X}^{(2)}$ obtenue en faisant éclater $\mathbf{V}_1$ dans $\mathbf{X}^{(1)}$, et quitte à faire une nouvelle modification de $\mathbf{X}^{(2)}$ n'affectant que le complémentaire de $\mathbf{X} \cup \mathbf{Y}^{(2)}$, on peut supposer que l'adhérence $\mathbf{V}_2$ de $\mathbf{W}_2$ dans $\mathbf{X}^{(2)}$ est encore lisse. Poursuivant ainsi de proche en proche, on voit que l'on peut considérer chaque $\mathbf{Y}^{(i)}$ comme un ouvert de Zariski dans une modification $\mathbf{X}^{(i)}$ de $\mathbf{X}'$, contenant $\mathbf{X}$, et telle que l'adhérence $\mathbf{V}_i$ de $\mathbf{W}_i$ dans $\mathbf{X}^{(i)}$ soit une variété lisse. Comme à chaque étape de la construction l'intersection des transformées strictes des $\mathbf{F}_j$

dans $\mathbf{X}^{(i)}$ se trouve dans $\mathbf{Y}^{(i)}$, on obtient bien au bout du compte une modification $\mathbf{X}''=\mathbf{X}^{(p)}$ de $\mathbf{X}'$ pour laquelle on aura $\bigcap_{j=1}^{n} \mathbf{F}''_j=\varnothing$.

(*b*) *Cas général.* Supposons maintenant $n>2$, et raisonnons par récurrence sur n. Soit $\mathbf{F}=\mathbf{F}_2 \cap \ldots \cap \mathbf{F}_n$, et $\mathbf{F}'$ l'adhérence de $\mathbf{F}$ dans $\mathbf{X}'$. D'après (*a*), on peut modifier $\mathbf{X}'$ pour que $\mathbf{F}'_1 \cap \mathbf{F}'=\varnothing$.

Soit alors $\mathbf{Y}'=\mathbf{X}'\setminus\mathbf{F}'$, $\mathbf{Y}=\mathbf{Y}' \cap \mathbf{X}$. Alors $\mathbf{Y}'$ est un voisinage de $\mathbf{F}'_1$ dans $\mathbf{X}'$, tel que $\bigcap_{j=2}^{n} (\mathbf{Y} \cap \mathbf{F}_j)=\varnothing$. Par hypothèse de récurrence, on peut trouver une modification $\mathbf{Y}''$ de $\mathbf{Y}$ telle que l'intersection des transformées strictes des $\mathbf{Y} \cap \mathbf{F}_j$ dans $\mathbf{Y}''$ soit vide. Raisonnant comme en (*a*), on peut plonger $\mathbf{Y}''$ dans une modification $\mathbf{X}''$ de $\mathbf{X}$ telle que si $\mathbf{F}''_j$ est la transformée stricte de $\mathbf{F}_j$ dans $\mathbf{X}''$, $\bigcap_{j=2}^{n} \mathbf{F}''_j$ se projette sur $\mathbf{F}'$. Mais alors $\bigcap_{j=1}^{n} \mathbf{F}''_j$ se projette sur $\mathbf{F}'_1 \cap \mathbf{F}'=\varnothing$, donc $\bigcap_{j=1}^{n} \mathbf{F}''=\varnothing$.

5.2.7 THÉORÈME. — *L'espace de Fréchet sous-jacent à* E *est toujours isomorphe à l'espace* $s(\mathbf{N})$ *des suites à décroissance rapide, sauf dans le cas trivial où* E *est de dimension finie.*

Démonstration. — (*a*) Soit $X=G/B(f)=G'/B'(f)$, où $B'(f)$ est l'image de $B(f)$ dans G'. Si l'on note $\mathbf{B}(f)$ l'adhérence de Zariski de $B'(f)$, et $\mathbf{X}=\mathbf{G}/\mathbf{B}(f)$, on sait que $\mathbf{X}$ est une variété quasiprojective, donc d'après le théorème 0.4, on peut réaliser $\mathbf{X}$ comme un ouvert de Zariski dans une variété projective lisse $\mathbf{X}'$, de telle sorte que $\mathbf{H}=\mathbf{X}'\setminus\mathbf{X}$ soit un diviseur à croisements normaux. Posons $X'=\mathbf{X}'(\mathbf{R})$, $H=\mathbf{H}(\mathbf{R})$; alors X est réunion de composantes connexes de $X'\setminus H$.

D'après le n° 2.2.1, il existe un recouvrement fini de $\mathbf{X}$ par des ouverts de Zariski $\mathbf{X}_j$, $1 \leqq j \leqq n$, tel que pour tout j le fibré principal $\mathbf{G}_j=\mathbf{G}|_{\mathbf{X}_j}$ soit trivial au-dessus d'un revêtement fini non ramifié $\mathbf{Y}_j$ de $\mathbf{X}_j$. Posons $\mathbf{Z}_j=\mathbf{X}\setminus\mathbf{X}_j$, et soit $\mathbf{Z}'_j$ l'adhérence de $\mathbf{Z}_j$ dans $\mathbf{X}'$, $\mathbf{X}'_j=\mathbf{X}'\setminus\mathbf{Z}'_j$. Alors il résulte du lemme 5.2.6 que l'on peut choisir $\mathbf{X}'$ pour que les $\mathbf{X}'_j$ forment un recouvrement de $\mathbf{X}'$.

Notons $\bar{\Delta}$ le simplexe fermé standard de dimension d, où $d=\dim(X)$, Δ l'intérieur de $\bar{\Delta}$. D'après [24], théorème 10.6 et problème 10.8, il existe une triangulation C^∞ de X' compatible avec l'inclusion de H dans X'. Cela veut dire que l'on peut écrire X' comme réunion finie $X'=\bigcup_{\mu} \bar{X}_\mu$, où chaque $\bar{X}_\mu$ est l'image d'une application C^∞ jusqu'au bord de $\bar{\Delta}$ vers X', où pour tous μ, μ' l'intersection $\bar{X}_\mu \cap \bar{X}_{\mu'}$ est une facette (éventuellement vide) de chacun d'eux, et où pour tout indice μ et pour toute intersection J de composantes de H, $J \cap \bar{X}_\mu$ est une facette de $\bar{X}_\mu$ (une telle J est toujours une sous-variété lisse de X', à cause de l'hypothèse de croisements normaux). Quitte à subdiviser la triangulation, il est clair que l'on peut supposer que chaque $\bar{X}_\mu$ est contenu dans l'un des ouverts de trivialité $X'_j=X' \cap \mathbf{X}'_j$. Notons X_μ l'intérieur de $\bar{X}_\mu$.

(*b*) Pour chaque indice μ, notons $C^\infty(\bar{X}_\mu)$ l'espace des fonctions C^∞ jusqu'au bord sur $\bar{X}_\mu$, pour la structure évidente de « variété à coins ». Par une extension facile du lemme de Seeley (*cf.* [10], prop. 9.2 par exemple), on voit que l'application de restriction $C^\infty(X') \to C^\infty(\bar{X}_\mu)$ est surjective, et possède un inverse linéaire continu. Il est clair que lorsque $X_\mu \subset X$, le résultat reste vrai en remplaçant $C^\infty(X')$ par $\mathscr{S}(X)$, à condition de remplacer $C^\infty(\bar{X}_\mu)$ par le sous-espace fermé formé des fonctions plates le long de certaines facettes de $\partial\bar{X}_\mu$ contenues dans H (rappelons que d'après le théorème 1.2.4, $\mathscr{S}(X)$ s'identifie aux restrictions à X des fonctions C^∞ sur X' plates le long de H). De plus, le noyau de l'application de restriction est formé des éléments de $\mathscr{S}(X)$ qui sont plats sur $\bar{X}_\mu$.

Appelons faces d'un simplexe de la triangulation les facettes de dimension $d-1$. Alors on peut itérer l'opération de restriction, en prenant les simplexes dans un ordre tel que lorsque l'on arrive au simplexe $\bar{X}_\mu$, l'intersection de $\bar{X}_\mu$ avec la réunion de H et des simplexes déjà choisis soit vide, ou formée de faces de $\bar{X}_\mu$ (il est clair qu'un tel ordre existe, en commençant par exemple par les simplexes qui touchent H suivant une face, puis par ceux qui touchent la réunion des simplexes précédents suivant au moins une face, *etc.*). On obtient une décomposition $\mathscr{S}(X) = \bigoplus_\mu \mathscr{S}_\mu$, où pour chaque indice μ tel que $X_\mu \subset X$, $\mathscr{S}_\mu$ est un sous-espace de $C^\infty(\bar{X}_\mu)$ défini par des conditions de platitude le long de certaines faces de $\bar{X}_\mu$.

(*c*) Considérons maintenant le cas de $E = \mathscr{S}^{1/2}\,\mathrm{Ind}_{B(f)}^{G}(F)$. Si l'on note $X_j = \mathbf{X}_j \cap X$, on a vu au n° 2.2.4 que le sous-espace fermé $\mathscr{S}^{1/2}\,\mathrm{Ind}_{B(f)}^{G_j}(F)$ de E s'identifie après choix d'une trivialisation pour G_j à $\mathscr{S}(X_j, F) = \mathscr{S}(X_j) \hat{\otimes} F$. On en déduit que la restriction à $\bar{X}_\mu$ établit une surjection $E \to \mathscr{S}_\mu \hat{\otimes} F$, avec $\mathscr{S}_\mu$ comme en (*b*), d'où une décomposition $E = \bigoplus_\mu \mathscr{S}_\mu \hat{\otimes} F$.

Il résulte du dévissage fait aux n^os 4.3.8 et 4.3.9 que l'espace F, s'il n'est pas de dimension finie, est toujours isomorphe à un espace $s(\mathbf{N})$. Dans le cas réductif, nous l'avons vu au n° 3.2.6, et dans le cas général il est facile de voir, en choisissant des relèvements des espaces homogènes de groupes unipotents qui interviennent, que les constructions du n° 4.3.8 se traduisent toujours par un produit tensoriel projectif avec un espace $\mathscr{S}(\mathbf{R}^m)$, qui est isomorphe à $s(\mathbf{N})$ [considérer l'expression des fonctions de $\mathscr{S}(\mathbf{R}^m)$ dans la base des fonctions d'Hermite]. Comme le produit tensoriel de deux espaces $s(\mathbf{N})$ est isomorphe à $s(\mathbf{N})$, et qu'il en va évidemment de même pour une somme directe finie, il suffit donc de démontrer que chaque espace $\mathscr{S}_\mu$ ci-dessus est isomorphe à $s(\mathbf{N})$.

(*d*) Il est clair que par une subdivision appropriée de $\bar{\Delta}$ on peut remplacer les simplexes par des cubes, *i.e.* des images difféomorphes de $C_d = [0, 1]^d$. Soit $\mathscr{F}$ l'ensemble des faces de C_d, $\mathscr{F}_0$ le sous-ensemble de $\mathscr{F}$ formé des faces le long desquelles on a une condition de platitude; on doit donc étudier l'espace $\mathscr{S}(C_d; \mathscr{F}_0)$, dans des notations évidentes. Soit $C' \in \mathscr{F}_0$, C'' la face opposée à C'. Alors si $C'' \notin \mathscr{F}_0$, on peut couper C_d en deux suivant la bissectrice de C' et C'' et décomposer l'espace $\mathscr{S}(C_d; \mathscr{F}_0)$ en somme directe en imposant la nullité du côté de C'. En itérant, on se ramène au cas où deux faces opposées de C_d sont soit toutes les deux dans $\mathscr{F}_0$, soit toutes les deux dans le complémentaire de $\mathscr{F}_0$. Comme tous les espaces qui interviennent sont nucléaires, on en déduit une décomposition $\mathscr{S}(C_d; \mathscr{F}_0) = T_1 \hat{\otimes} \ldots \hat{\otimes} T_d$, où chaque T_j est soit isomorphe à $\mathscr{S}(]0, 1[)$, soit à $C^\infty[0, 1]$; en d'autres termes, nous sommes ramenés au cas où $d=1$.

Puisque]0, 1[est semi-algébriquement isomorphe à $\mathbf{R}$, le cas de $\mathscr{S}(]0, 1[)$ a déjà été vu. Quant au cas de $C^\infty([0, 1])$, il se traite en considérant le développement suivant la base des polynômes de Legendre (*cf.* [1], prop. 1, par exemple), d'où le théorème.

5.2.8. Corollaire. — *L'idéal minimal* $\mathscr{K}_\infty(E)$ (*déf.* 5.2.4) *est isomorphe à l'algèbre* $\mathscr{W}$ *du n°* 0.7 *si* E *est de dimension infinie, à une algèbre* $\mathbf{M}_n(\mathbf{C})$ *si* E *est de dimension finie.*

Démonstration. — Cela résulte de la décomposition $\mathscr{K}_\infty(E) = E \hat{\otimes} E\check{}$.

5.2.9. Corollaire. — *L'application* $E \to \mathrm{Ann}(E)$ *de* $\hat{G}$ *vers* $\mathrm{Prim}(\mathscr{S}(G))$ *est injective* (*ce qui permet de munir* $\hat{G}$ *de la topologie de Jacobson*).

Démonstration. — Soit $E \in \hat{G}$; alors E est déjà algébriquement simple sous l'action de l'idéal minimal $\mathscr{K}_\infty(E)$, que l'on peut supposer isomorphe à $\mathscr{W}$, car le cas où E est de dimension finie est trivial. Si v est un élément non nul de E, la surjection canonique $a \to a * v$ de $\mathscr{W}$ dans E est évidemment un $\mathscr{S}(G)$-morphisme. On en déduit aussitôt que si $E_j \in \hat{G}$, $j = 1, 2$, ont le même annulateur dans $\mathscr{S}(G)$, tout $\mathscr{K}_\infty(E)$-morphisme de E_1 vers E_2 est aussi un $\mathscr{S}(G)$-morphisme. Mais d'après le n° 0.7, l'algèbre $\mathscr{K}_\infty(E)$ n'a qu'une seule représentation différentiable topologiquement simple, donc nécessairement $E_1 \simeq E_2$.

C.Q.F.D.

5.3. Cas particuliers.

5.3.1. Théorème (cas des groupes à radical unipotent cocompact). — *Soit* $G = K \times U$ *le produit semi-direct d'un groupe compact* K *et d'un groupe nilpotent simplement connexe* U (*on peut toujours considérer* G *comme le groupe des points réels de* $\mathbf{G} = \mathbf{K}.\mathbf{U}$, *où* $\mathbf{K}$ *et* $\mathbf{U}$ *sont les complexifiés de* K *et* U *respectivement*). *Alors l'inclusion canonique* $\hat{G}_u \to \hat{G}$ *du corollaire* 5.1.13 *est un isomorphisme. De plus, toute* $E \in \mathscr{S}\mathbf{mod}_G$ *topologiquement irréductible est minimale, et l'inclusion canonique* $\mathscr{K}_\infty(E) \to \mathscr{S}(G)/M$ (*déf.* 5.2.4) *est un isomorphisme, de sorte que* $\mathscr{S}(G)/M$ *est toujours isomorphe, soit à l'algèbre* $\mathscr{W}$ *du n°* 0.7, *soit à une algèbre* $\mathbf{M}_n(\mathbf{C})$.

Démonstration. — Dans le cas présent, il est clair que la définition constructive des formes de type unipotent faite au n° 5.1.6 s'arrête au premier pas. En d'autres termes, les formes de type unipotent sont les orbites coadjointes des prolongements par 0 sur $\mathfrak{k} = \mathrm{Lie}(K)$ des éléments de $\mathfrak{u}^*$, et la projection canonique $\mathfrak{g}^* \to \mathfrak{u}^*$ établit une bijection entre $\mathfrak{g}_u^*/G$ et $\mathfrak{u}^*/G$. Si $\nu \in \mathfrak{u}^*$, et si f est le prolongement de ν ci-dessus, alors $B(f) = K(\nu).U$ [en supposant, comme on peut le faire, que ν a été choisi dans son orbite pour que $K(\nu)$ soit un compact maximal de $G(\nu)$].

Soit maintenant $E \in \mathscr{S}\mathbf{mod}_G$ une représentation topologiquement irréductible, et écrivons $\mathscr{S}^{1/2}\,\mathrm{Ind}_{B(f)}^G(F) \subset E \subset \mathscr{O}_M^{1/2}\,\mathrm{Ind}_{B(f)}^G(F)$ comme au théorème 5.1.8. Comme $G/B(f)$ est compact, les deux induites sont égales (et égales à l'induite C^∞, *cf.* rem. 2.1.4); donc $E = C^\infty\,\mathrm{Ind}_{B(f)}^G(\Delta_{G/H}^{-1/2} \otimes F)$. Comme en outre le groupe $\mathrm{Ma}(\nu)$ est compact, toutes ses représentations topologiquement irréductibles sont de dimension finie, et alors la minimalité automatique de F résulte aussitôt du dévissage fait aux n^{os} 4.3.8 et 4.3.9. Par conséquent, E est elle aussi minimale d'après le théorème 5.1.8. Il est bien connu que toute représentation de dimension finie d'un groupe compact est unitarisable, et donc l'inclusion $G_u^{\wedge} \to G^{\wedge}$ est bien un isomorphisme.

Enfin, le fait que $\mathscr{S}(G)/M = \mathscr{K}_{\infty}(E)$ provient de l'encadrement

$$\mathscr{S}\,\mathrm{Ind}_{B(f)\times B(f)}^{G\times G}(F \hat{\otimes} F^{\vee}) \subset \mathscr{S}(G)/M \subset \mathscr{O}_M\,\mathrm{Ind}_{B(f)\times B(f)}^{G\times G}(F \hat{\otimes} F^{\vee})$$

vu au n° 5.2.2, puisque les deux extrêmes sont égaux.

5.3.2. Supposons maintenant que **G** soit de la forme **L**.**U**, où **L** est un tore (complexe); cela entraîne que **G** est résoluble. Nous allons faire le lien entre les représentations introduites ici, et l'espace de Schwartz d'une représentation unitaire irréductible de G que nous avions défini dans [9]. Comme nous avions supposé nos groupes simplement connexes, nous nous limiterons au cas où G = L.U est connexe; de plus, comme un revêtement fini d'un tore est toujours linéaire, on peut sans perte de généralité supposer que $G = G'$.

Ici encore, les remarques du début de la démonstration du théorème 5.3.1 s'appliquent, et on peut identifier $\mathfrak{g}_u^*/G$ à $\mathfrak{u}^*/G$, et $B(f)$ à $L(\nu).U$, pour ν convenablement choisi dans $\mathscr{O}_\nu$. On a une décomposition canonique L = A.T, où T est l'unique sous-groupe compact maximal de L, et A la composante neutre de la partie déployée de L; dans cette décomposition, on a $L(\nu) = A(\nu).T(\nu)$. Soit $E \in G_u^{\wedge}$, et soit $\nu \in \mathfrak{u}^*$ un élément de l'orbite de Mackey associée à E. Alors on peut écrire $E = \mathrm{Ind}_{B(f)}^{G}(F)$ avec $F \in B(f)_u^{\wedge}$, $F|_U \approx \mathscr{H}^\nu$ (induction L^2). Or l'obstruction de Mackey $Ma(\nu)$ est un revêtement à deux feuillets de $L(\nu)$, et est donc forcément commutative; donc en fait $F|_U \simeq \mathscr{H}^\nu$ (sans multiplicité). La construction de [9] peut alors se résumer dans ce cas particulier comme suit : on part de $F_\infty \simeq \mathscr{H}^\nu_\infty$, on l'induit au sens C^∞ de $B(f)$ à $A(\nu).T.U$ (induction cocompacte), puis « au sens $\mathscr{S}$ » de $A(\nu).T.U$ à G, où le « sens $\mathscr{S}$ » est donné par des conditions de décroissance exponentielle lorsque l'on identifie A à son algèbre de Lie *via* l'application exponentielle. Il est immédiat de vérifier que l'espace obtenu est précisément celui que nous avons noté $\mathscr{S}^{1/2}\,\mathrm{Ind}_{B(f)}^{G}(F_\infty)$, donc les deux définitions coïncident.

5.3.3. Théorème. — *Soit* G *comme en* 5.3.2. *Alors tout élément de* $G^{\wedge}$ *s'écrit comme le produit tensoriel d'un caractère réel positif de* L (i.e. *d'un homomorphisme continu* $L \to \mathbf{R}_+^*$) *et de l'espace de Schwartz d'une représentation unitaire irréductible de* G.

Démonstration. — Puisque nous avons vu que pour tout $\nu \in \mathfrak{u}^*$ le groupe $Ma(\nu)$ est commutatif, l'ensemble $Ma(\nu)_\varepsilon^{\wedge}$ introduit au n° 5.1.7 est formé de représentations de dimension 1, et tous les éléments de $Ma(\nu)_\varepsilon^{\wedge}$ se déduisent de l'un d'entre eux par produit tensoriel avec un élément de $L(\nu)^{\wedge}$. Comme on peut toujours choisir ce « point-base » unitaire, notre assertion se déduit du théorème 5.1.8 et de la surjectivité de l'application $L^{\wedge} \to L(\nu)^{\wedge}$ (il est clair que l'on peut se limiter aux caractères réels positifs, les caractères unitaires ne faisant pas sortir du dual unitaire).

BIBLIOGRAPHIE

[1] M. S. Baouendi et C. Goulaouic, *Approximation polynomiale de fonctions* C^∞ *et analytiques* [*Ann. Inst. Fourier* (*Grenoble*), vol. 21, n° 4, 1971, p. 149-173].

[2] J. BOCHNAK, M. COSTE et M.-F. ROY, *Géométrie algébrique réelle*, Springer Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1987 [*Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete*, (3), vol. 12].
[3] N. BOURBAKI, *Espaces vectoriels topologiques*, chap. 1-5, Masson, Paris, 1981.
[4] F. BRUHAT, *Sur les représentations induites des groupes de Lie* (*Bull. Soc. Math. France*, t. 84, 1956, p. 97-205).
[5] P. CARTIER, *Vecteurs différentiables dans les représentations unitaires des groupes de Lie*, in *Séminaire Bourbaki*, exposé n° 454 (*Lect. Notes Math.*, n° 514, 1976, p. 20-34).
[6] W. CASSELMAN, *Canonical Extensions of Harish-Chandra Modules* [*Canad. J. Math.* (à paraître)].
[7] F. DU CLOUX, *Jets de fonctions différentiables sur le dual d'un groupe de Lie nilpotent* (*Invent. Math.*, vol. 88, 1987, p. 375-394).
[8] F. DU CLOUX, *Représentations tempérées des groupes de Lie nilpotents* [*J. Funct. An.*, vol. 85, 1989, p. 420-457].
[9] F. DU CLOUX, *Représentations de longueur finie des groupes de Lie résolubles* [*Mem. Am. Math. Soc.*, vol. 407, American Mathematical Society, Providence, R.I., 1989].
[10] J. CHAZARIN et A. PIRIOU, *Introduction à la théorie des équations aux dérivées partielles linéaires*, Gauthier-Villars, Paris, 1981.
[11] J. DIEUDONNÉ, *Cours de géométrie algébrique*, vol. 2, Presses Universitaires de France, Paris, 1974.
[12] J. DIXMIER, *Algèbres enveloppantes*, Gauthier-Villars, Paris, 1974.
[13] J. DIXMIER et P. MALLIAVIN, *Factorisations de fonctions et de vecteurs indéfiniment différentiables* (*Bull. Sci. Math.*, vol. 102, 1978, p. 305-330).
[14] J. DIXMIER et M. RAYNAUD, *Sur le quotient d'une variété algébrique par un groupe algébrique*, in *Mathematical Analysis and Its Applications*, part A (*Adv. Math. Suppl. Studies*, vol. 7 A, 1981, p. 327-344).
[15] M. DUFLO, *Théorie de Mackey pour les groupes de Lie algébriques* (*Acta Math.*, vol. 149, 1983, p. 153-213).
[16] M. DUFLO, *Sur les extensions des représentations irréductibles des groupes de Lie nilpotents* (*Ann. Scient. Ec. Norm. Sup.*, (4), t. 5, 1972, p. 71-120).
[17] H. HIRONAKA, *Resolution of Singularities of an Algebraic Variety over a Field of Characteristic Zero, I* (*Ann. Math.*, vol. 79, n° 1, 1964, p. 109-203).
[18] L. HÖRMANDER, *The Analysis of Linear Partial Differential Operators*, vol. 2, Springer Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1983 (*Grundlehren der mathematischen Wissenschaften*, vol. 257).
[19] N. JACOBSON, *Basic algebra*, vol. II, W. H. Freeman and company, San Francisco, 1980.
[20] A. A. KIRILLOV, *Représentations unitaires des groupes de Lie nilpotents* (*en russe*) (*Usp. Math. Nauk.*, vol. 17, 1962, p. 57-110).
[21] A. W. KNAPP, *Representation Theory of Semisimple Lie Groups*, Princeton University Press, Princeton, N. J., 1986.
[22] J. LUDWIG, *Topologically Irreducible Representations of the Schwartz Algebra of a Nilpotent Lie Group*, preprint, 1988.
[23] G. D. MOSTOW, *Fully Reducible Subgroups of Algebraic Groups* (*Am. J. Math.*, vol. 78, 1956, p. 200-221).
[24] M. R. MUNKRES, *Elementary Differential Topology*, Princeton University press, Princeton, N.J., 1963 (*Annals of Mathematics Studies*, vol. 54).
[25] R. C. PENNEY, *Canonical Objects in Kirillov Theory on Nilpotent Lie Groups* (*Proc. Am. Math. Soc.*, vol. 66, 1977, p. 175-178).
[26] N. POULSEN, *On* C^∞ *Vectors and Intertwining Bilinear Forms* (*J. Funct. An.*, vol. 9, 1970, p. 87-120).
[27] L. PUKANSZKY, *On the Characters and the Plancherel Formula of Nilpotent Lie Groups* (*J. Funct. An.*, vol. 1, 1967, p. 255-280).
[28] C. E. RICKART, *The General Theory of Banach Algebras*, D. Van Nostrand Company Inc., Princeton, N.J., 1960.
[29] J.-P. SERRE, *Espaces fibrés algébriques*, in *Séminaire C. Chevalley*, année 1958, exposé 1, École Normale Supérieure (Secr. Math., 11, rue Pierre-Curie), 1958.
[30] W. SOERGEL, *An Irreducible Non-Admissible Banach Representation of* $\mathbf{SL}(2, \mathbf{R})$, preprint, M.S.R.I., 1988.
[31] F. TRÈVES, *Topological Vector Spaces, Distributions, and Kernels*, Academic Press, New York, 1967.
[32] N. WALLACH, *Asymptotic Expansions of Generalized Matrix Entries of Representations of Real Reductive Lie Groups*, in *Lie Group Representations I* (Maryland, 1982-1983) (*Lect. Notes Math.*, n° 1024, 1983, p. 287-369).
[33] N. WALLACH, *Real Reductive Lie Groups*, vol. 1, Academic Press, New York, 1988, vol. 2, *ibid.* (à paraître).

(Manuscrit reçu le 12 octobre 1989,
révisé le 10 avril 1990).

F. DU CLOUX,
Centre de mathématiques de l'École Polytechnique,
91128 Palaiseau Cedex.