ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

FRANÇOIS LATOUR

Transversales lagrangiennes, périodicité de Bott et formes génératrices pour une immersion lagrangienne dans un cotangent

Annales scientifiques de l'É.N.S. 4e série, tome 24, nº 1 (1991), p. 3-55

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1991_4_24_1_3_0>

Ann. scient. Éc. Norm. Sup.,
4e série, t. 24, 1991, p. 3 à 55.

TRANSVERSALES LAGRANGIENNES, PÉRIODICITÉ DE BOTT ET FORMES GÉNÉRATRICES POUR UNE IMMERSION LAGRANGIENNE DANS UN COTANGENT

PAR FRANÇOIS LATOUR

Introduction

Le thème géométrique de cet article est le problème de transversales après stabilisation dont la forme la plus simple est la suivante :

Étant donnés un fibré vectoriel W de dimension $2n$ sur un complexe fini X et deux sous-fibrés ξ et η de dimension n, existe-t-il un sous-fibré ζ de dimension $n+\mathrm{N}$ de $\mathrm{W}\oplus\varepsilon_1^\mathrm{N}\oplus\varepsilon_2^\mathrm{N}$ transverse à $\xi\oplus\varepsilon_1^\mathrm{N}$ et à $\eta\oplus\varepsilon_2^\mathrm{N}$?

La réponse (théorème III.3.3) est simple : une telle transversale après stabilisation existe si les fibrés ξ et η sont stablement isomorphes.

On étudiera aussi le cas où W est muni d'une forme sesquilinéaire ε-symétrique non dégénérée, où ξ et η sont des sous-fibrés lagrangiens et où on cherche une transversale après stabilisation ζ lagrangienne dans $\mathrm{W}\oplus\varepsilon\oplus\varepsilon^*$ (où on munit $\varepsilon\oplus\varepsilon^*$ de la forme hyperbolique).

La méthode est de montrer que la réponse au problème ne varie pas lorsqu'on déforme ξ et η.

Comme il est classique pour un problème après stabilisation, la nature du fibré W n'intervient pas et on se ramène à étudier la situation pour W trivial.

Dans le reste de cette introduction, on va considérer, pour fixer les idées, le cas antisymétrique réel. On munit $\mathbb{C}^n$ de la forme symplectique usuelle ω et on note Λ_n la grassmanienne des lagrangiens de $(\mathbb{C}^n, \omega)$.

Soit $\mathrm{Z}_{n,p}$ l'espace des transversales lagrangiennes de dimension $n+p$ aux deux sous-fibrés lagrangiens tautologiques sur $\Lambda_n\times\Lambda_n$:

$$\mathrm{Z}_{n,p}=\{(\mathrm{L}_0,\mathrm{L}_1,\mathrm{M})\in\Lambda_n\times\Lambda_n\times\Lambda_{n+p}/\mathrm{M}\cap(\mathrm{L}_0\oplus\mathbb{R}^p)=\mathrm{M}\cap(\mathrm{L}_1\oplus i\,\mathbb{R}^p)=\{0\}\}.$$

Notons Δ le lagrangien de $\mathbb{C}^2$ engendré par $(1-i,0)$ et $(0,1+i)$; soit $\mathrm{Z}_n=\varinjlim_p \mathrm{Z}_{n,p}$ où $\Lambda_{n+p}\to\Lambda_{n+p+2}$ est l'application $\mathrm{M}\mapsto\mathrm{M}\oplus\Delta$, notons π la projection $\mathrm{Z}_n\to\Lambda_n\times\Lambda_n$.

L'invariance par déformation revient à montrer que π est une fibration de Serre (ce qui est clairement faux pour $Z_{n,p} \to \Lambda_n \times \Lambda_n$).

Pour construire une « trivialisation homotopique locale » de π, on cherche, étant donnés quatre lagrangiens L_0, L_1, M_0, M_1 de $\mathbb{C}^n$ avec $L_i \cap M_j = \{0\}$, à stabiliser L_0, L_1, M_0 de façon standard en $L'_0 = L_0 \oplus \mathbb{R}^{2p}$, $L'_0 = L_1 \oplus i\mathbb{R}^{2p}$, $M'_0 = M_0 \oplus \Delta^p$ et M_1 de façon tordue (dépendant de L_0, L_1, M_0, M_1) en M'_0 de sorte que M'_0 se déforme en M'_1 dans les lagrangiens transverses à L'_0 et L'_1. En fait, on construit $I(L_0, L_1, M_0, M_1)$ lagrangien de $\mathbb{C}^{6n}$ transverse à $\mathbb{R}^{6n}$ et à $i\mathbb{R}^{6n}$ et une déformation (dépendant continûment de L_0, L_1, M_0, M_1) de $M_0 \oplus \Delta^{3n}$ à $M_1 \oplus I(L_0, L_1, M_0, M_1)$ dans les lagrangiens transverses à $L_0 \oplus \mathbb{R}^{6n}$ et $L_1 \oplus i\mathbb{R}^{6n}$. Il résulte de cette construction que π est localement une fibration de Serre.

Soit $\hat{\Lambda}_n$ l'espace des lagrangiens de $\mathbb{C}^n$ transverses à $\mathbb{R}^n$ et $i\mathbb{R}^n$, $\hat{\Lambda}_n$ s'identifie à l'espace des formes quadratiques non dégénérées sur $\mathbb{R}^n$ (la signature de $I(L_0, L_1, M_0, M_1)$ est deux fois l'invariant de Hörmander-Maslov [11], [10]).

On a des stabilisations $\hat{\Lambda}_n \to \hat{\Lambda}_{n+2}$ en faisant la somme directe avec Δ et une limite $\hat{\Lambda} = \varinjlim_n \Delta_n$ qui est visiblement la fibre de π et qui a le type d'homotopie de $\mathbb{Z} \times \mathrm{BO}$ (on stabilise par une forme quadratique de signature nulle).

Les propriétés de l'invariant I permettent aussi de classifier les transversales lagrangiennes après stabilisation à deux sous-fibrés lagrangiens (classification modulo stabilisation et déformation) : l'ensemble des classes de transversales lagrangiennes communes lorsqu'il est non vide est homogène sous $[X, \mathbb{Z} \times \mathrm{BO}]$.

Il existe une application naturelle de $\hat{\Lambda}_n$ dans l'espace noté $\Omega_0(\Lambda_n)$ des chemins de Λ_n allant de $\mathbb{R}^n$ à $i\mathbb{R}^n$:

$$\sigma_n : \quad \hat{\Lambda}_n \to \Omega_0(\Lambda_n),$$

où $\sigma_n(L)$ est le chemin rectiligne allant de $\mathbb{R}^n$ à $i\mathbb{R}^n$ dans l'espace affine des lagrangiens transverses à L.

La fibration de Serre précédente restreinte à $\Lambda_n \times \{i\mathbb{R}^n\}$ donne une fibration $Y_n \to \Lambda_n$ de fibre $\hat{\Lambda}$. Or il est facile de voir que Y_n est fortement connexe :

$$Y_{n,p} = \{(L, M) \in \Lambda_n \times \Lambda_{n+p} / M \cap (L \oplus \mathbb{R}^p) = M \cap (i\mathbb{R}^{n+p})) = \{0\}\}$$

a le type d'homotopie du complémentaire dans un espace affine de l'image d'une variété de dimension nettement plus petite. Il en résulte que $\pi_j \tilde{\Lambda} \simeq \pi_{j+1} \Lambda_n$ pour j petit devant n, et on vérifie que les σ_n définissent à la limite une équivalence d'homotopie faible $\sigma : \hat{\Lambda} \to \Omega\Lambda$, où $\Lambda = \lim \Lambda_n$.

Les constructions précédentes sont valables pour d'autres formes sesquilinéaires ε-symétriques non dégénérées et même dans le cas où la forme est identiquement nulle (cas amorphe où lagrangien signifie sous-espace de dimension moitié).

Remarquons, comme Karoubi dans [13], que lorsqu'on varie de forme sesquilinéaire, Λ décrit les différents espaces entrant dans la périodicité de Bott; d'autre part, $\hat{\Lambda}$ décrit à homotopie près les mêmes espaces, mais dans un ordre différent. Les équivalences d'homotopie faible $\sigma:\hat{\Lambda}\to\Omega\Lambda$ donnent alors les pas élémentaires de la périodicité de Bott réelle ou complexe.

Passons en revue les diverses familles de démonstrations de la périodicité de Bott connues de l'auteur :

(1) la démonstration originelle de Bott [5] utilisant la théorie de Morse, *voir* aussi [15] et [8];

(2) la démonstration homologique de J. Moore [7];

(3) la démonstration K-théorique d'Atiyah-Bott [4] dans le cas complexe par approximation d'une application de recollement et linéarisation, celle de Wood [17] généralisant la précédente au cas d'une algèbre de Banach avec involution et obtenant la périodicité orthogonale, *voir* aussi [2], celles de Karoubi faisant intervenir les algèbres de Clifford ([12], [13]);

(4) la démonstration d'Atiyah [3] utilisant les opérateurs différentiels elliptiques.

Dans notre approche, n'interviennent ni théorie de Morse, ni algèbre de Hopf, ni théorie spectrale, ni opérateurs elliptiques. Notre démonstration utilise la structure affine de l'espace des lagrangiens transverses à un lagrangien donné et la déformation fondamentale de I.2. Elle est élémentaire : le point le plus sophistiqué est que le complémentaire dans un espace affine d'un fermé image d'une variété de petite dimension est fortement connexe (cela nécessite la partie triviale du lemme de Sard qui assure que l'image d'une variété dans un espace affine de dimension strictement supérieure est de mesure nulle).

Si chaque pas de la périodicité de Bott a dans cette démonstration la même origine géométrique, remarquons que dans les cas triviaux ($\Omega\,\mathrm{BU}\sim\mathrm{U}$, etc.), ce n'est pas la démonstration usuelle par forte connexité des variétés de Stiefel.

Passons maintenant à une application de l'étude des transversales lagrangiennes à la géométrie symplectique.

Soit M une variété différentiable de dimension n, on munit $\mathrm{T}^*\,\mathrm{M}$ de sa structure symplectique canonique; soit V un espace vectoriel de dimension p. On dit qu'une 1-forme fermée α définie sur un ouvert N de $\mathrm{M}\times\mathrm{V}$ est une forme génératrice si chaque fois qu'on écrit localement $\alpha=df$ ($f=f(x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_p)$ où (x_i) sont des coordonnées locales sur M et (y_j) des coordonnées sur V), on a la propriété que la matrice $((\partial^2 f/\partial x\,\partial y)(x,y),\ (\partial^2 f/\partial y^2)\ (x,y))$ est de rang p dès que $(\partial f/\partial y)(x,y)=0$; $\Sigma_\alpha\subset$ N définie localement par $(\partial f/\partial y)(x,y)=0$ est alors une sous-variété de codimension p de N et $i_\alpha:\Sigma_\alpha\to\mathrm{T}^*\,\mathrm{M}$ définie localement par

$$\Sigma_\alpha\ni(x,y)\mapsto\left(x,\sum\frac{\partial f}{\partial x_i}(x,y)\,dx_i\right)$$

est une immersion lagrangienne (appelée définie par α).

L'existence locale et la classification locale de fonctions génératrices ont été établies par Hörmander et Weinstein ([11], [16], [10]). J. A. Lees [14] étudie l'existence globale de fonctions génératrices, mais les démonstrations sont fausses. Passons sur l'hypothèse de compacité non explicite, mais implicite dans les démonstrations de [14]. Un théorème central de [14] est le théorème 2.1 qui est la généralisation à l'identique du résultat d'unicité locale de Hörmander, or cette généralisation est fausse, le plus simple pour s'en convaincre est de prendre la situation où la caustique est vide.

Considérons les deux fonctions $f_0, f_1 : S^1 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f_0(\theta, y_1, y_2) = y_1^2 - y_2^2$$

$$f_1(\theta, y_1, y_2) = \left(y_1 \cos\frac{\theta}{2} + y_2 \sin\frac{\theta}{2}\right)^2 - \left(-y_1 \sin\frac{\theta}{2} + y_2 \cos\frac{\theta}{2}\right)^2$$

$$= \cos\theta\, y_1^2 + 2\sin\theta\, y_1 y_2 - \cos\theta\, y_2^2.$$

Toutes deux sont des fonctions génératrices définissant la section nulle de $T^* S^1$, elles ont même nombre de variables, des hessiennes de même signature, mais le fibré stable de la hessienne de f_0 est trivial et celui de f_1 est non trivial; f_0 et f_1 ne peuvent être équivalentes (même après stabilisation).

E. Giroux [9] a établi l'existence de 1-formes génératrices lorsque $M = \mathbb{R}^n$ en combinant des méthodes de flexibilité à la Gromov et des méthodes de composition de relations symplectiques à la Chekanov.

Écrivons $T^*(M \times V) = T^* M \times V \times V^*$; il contient la sous-variété co-isotrope $\mathscr{H} = T^* M \times V \times 0$. Soit α une 1-forme génératrice définie sur $N \subset M \times V$, $\alpha \Sigma_\alpha \subset T^* N$ est une sous-variété isotrope contenue dans $\mathscr{H}$; le long de $\alpha\Sigma_\alpha$, on a le fibré E tangent au graphe de α qui est lagrangien, le fibré $T\mathscr{H}$ qui est coisotrope et transverse par hypothèse à l'orthogonal symplectique $(T\alpha\Sigma_\alpha)^0$ et le fibré vertical de $T^*(M \times V)$ qui est lagrangien. Par réduction symplectique par $T\alpha\Sigma_\alpha$, on obtient des sous-fibrés lagrangiens de $W = (T\alpha\Sigma_\alpha)^0 / T\alpha\Sigma_\alpha$:

$$\zeta = E/T\alpha\Sigma_\alpha, \qquad \xi = T\mathscr{H} \cap (T\alpha\Sigma_\alpha)^0/T\alpha\Sigma_\alpha, \qquad \eta = \mathrm{Vert} \cap (T\alpha\Sigma_\alpha)^0/T\alpha\Sigma_\alpha$$

et ζ est transverse à ξ et η.

Si $\varphi : X \to T^* M$ est une immersion lagrangienne, en utilisant un plongement de X dans un euclidien V, on construit $\bar{\varphi} : X \hookrightarrow T^*(M \times V)$ plongement isotrope au-dessus de φ avec $\bar{\varphi}(X) \subset \mathscr{H}$ et dans $(T\bar{\varphi}(X))^0/T\bar{\varphi}(X)$, on a toujours les sous-fibrés lagrangiens ξ et η; manque la transversale commune ζ et d'ailleurs on montre facilement qu'une telle transversale permet de construire une 1-forme génératrice α avec $\alpha\Sigma_\alpha = \bar{\varphi}(X)$.

Si α et α' sont deux 1-formes génératrices avec $\Sigma_\alpha = \Sigma_{\alpha'} = \Sigma$ et $\alpha = \alpha'$ le long de Σ, on obtient deux tranversales lagrangiennes ζ et ζ' à ξ et η. Si on peut déformer (après stabilisation) ζ en ζ' dans les transversales à ξ et η, il résulte assez facilement de la construction précédente que α et α' sont équivalentes.

Reste un point pour tirer de la remarque précédente une classification des 1-formes génératrices définissant une immersion lagrangienne donnée : Si α est une 1-forme génératrice définie sur $N \subset M \times V$, si $H : N \to M \times V$ est un plongement conservant la projection sur M et dont la restriction à Σ_α est l'identité, alors $\alpha' = H^* \alpha$ est une 1-forme génératrice et les transversales ζ et ζ' correspondantes sont équivalentes.

Ce résultat est obtenu grâce à une nouvelle construction de la différence entre ζ et ζ' plus reliée aux formes quadratiques hessiennes de α et α' le long de Σ (chap. III, § 4-5).

Hors de la caustique (singularité de $\Sigma \to M$), on a le fibré stable de la hessienne de α (en chaque point, on considère la somme des sous-espaces propres associés aux valeurs propres <0); ce fibré ne s'étend pas à travers la caustique, mais les hessiennes de α et α' sont des formes quadratiques associées (notion quantitative reliée à la notion d'avoir en chaque point même radical et introduite en III, § 4), et dans ce cas, on montre comment la somme de Whitney du fibré stable de la hessienne de α et du fibré instable de la hessienne de α' hors de la caustique se prolonge en un fibré sur Σ tout entier dont la classe dans $[\Sigma, \mathbb{Z} \times BO]$ est la différence de ζ' et ζ.

DIFFÉRENTES LECTURES POSSIBLES. — (1) Pour un lecteur symplectique intéressé par les 1-formes génératrices, chapitre I en lisant partout $b(x,y)$ comme forme symplectique, chapitres III et IV.

(2) Pour un lecteur intéressé par le problème du début de l'introduction, chapitre I avec $b(x,y) \equiv 0$ (ce qui simplifie I.2 et I.3), puis chapitre III, paragraphes 1 et 3 où il trouvera aussi une classification des transversales communes après stabilisation.

(3) Pour la périodicité de Bott, chapitre I dans sa généralité et chapitre II. C'est pour rendre cette lecture possible qu'on a séparé entre le chapitre I et le début du chapitre III les constructions pour un fibré ambiant trivial et les sorites pour ramener le cas général à ce cas particulier.

L'auteur remercie le referee pour ses exigences qui, espérons-le, ont amélioré l'introduction.

CHAPITRE I

I.0. PLAN DU CHAPITRE. —

§ 1. Notations, structure affine sur Λ_L, espace des lagrangiens transverses à L; on explicite $\Lambda_{L_0} \cap \Lambda_{L_1}$ lorsque L_0 et L_1 sont transverses.

§ 2. Définition du birapport $B(L_0, L_1, M_0, M_1)$ lorsque $L_i \cap M_j = \{0\}$. Déformation entre $M_0 \oplus B(L_0, L_0, M_0, M_0)$ et $M_1 \oplus B(L_0, L_1, M_0, M_1)$. Invariant de L_0, L_1, M_0, M_1.

§ 3. Construction de modèles E_n munis de lagrangiens F_0^n, F_1^n, Δ^n et d'isométries $HE_n \simeq E_{2n}$ envoyant les lagrangiens standard de HE_n sur F_0^{2n} et F_1^{2n} et le lagrangien diagonal $\Delta_{F_0^n, F_1^n}$ sur Δ^{2n}. On est amené pour avoir une construction indépendante de la (ε)-symétrie, à prendre E_n de dimension $8n$.

§ 4. On établit que Z_n espace des transversales stables aux deux sous-fibrés lagrangiens tautologiques sur $\Lambda_n \times \Lambda_n$ est l'espace total d'un fibré de Serre de base $\Lambda_n \times \Lambda_n$.

I.1. NOTATIONS. —

I.1.1. K est un des corps $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{H}$ muni d'une anti-involution $\lambda \mapsto \bar{\lambda}$ *i.e.*

$$\overline{\lambda + \mu} = \bar{\lambda} + \bar{\mu}, \qquad (\overline{\lambda\mu}) = \bar{\mu}\bar{\lambda}, \qquad \bar{\bar{\lambda}} = \lambda \qquad \text{et} \qquad \bar{1} = 1.$$

E est un espace vectoriel à droite sur K de dimension finie; on considère une forme sesquilinéaire $b : E \times E \to K$ c'est-à-dire bi-additive et $b(x\lambda, y\mu) = \bar{\lambda} b(x,y)\mu$.

On dit que b est ε-symétrique si $b(y,x)=\varepsilon\overline{b(x,y)}$ ($\varepsilon=\pm 1$). On pose

$$E^*=\{\varphi : E\to K \text{ additive et } \varphi(x\lambda)=\bar{\lambda}\varphi(x)\}.$$

E^* est espace vectoriel à droite $((\varphi.\mu)(x)=\varphi(x)\mu)$.

A une forme sesquilinéaire b sur E est associée l'application linéaire $b^{\#} : E\to E^*$ définie par $b^{\#}(x)(y)=b(y,x)$.

On dit que la forme sesquilinéaire ε-symétrique b est non dégénérée si $b^{\#}$ est un isomorphisme.

I.1.2. *Forme hyperbolique*. — Soit V espace vectoriel à droite sur K; on pose $H(V)=V\oplus V^*$ avec la forme sesquilinéaire ε-symétrique non dégénérée

$$\langle x,\varphi;x',\varphi'\rangle=\varphi'(x)+\varepsilon\overline{\varphi(x')}.$$

Si b est une forme sesquilinéaire ε-symétrique non dégénérée sur E, on a un isomorphisme d'espace vectoriel $E\oplus E\xrightarrow{\sim} H(E)$ qui à (x,y) associe $(x,b^{\#}(y))$; par cet isomorphisme, la forme hyperbolique sur H(E) devient la forme

$$\bar{b}(x,y;x',y')=b^{\#}(y')(x)+\varepsilon\overline{b^{\#}(y)(x')}=b(x,y')+\varepsilon\overline{b(x',y)}=b(x,y')+b(y,x').$$

Dans la suite, nous considérons surtout des formes non dégénérées mais aussi des formes identiquement nulles (cas amorphe).

I.1.3. On dit que $L\subset(E,b)$ est *lagrangien* si c'est un sous-espace de dimension moitié et isotrope [*i.e.* $b(x,y)=0$, $\forall x,\ y\in L$]; dans le cas non dégénéré, L est lagrangien si et seulement si $L=L^0=\{y\in E/b(x,y)=0,\ \forall x\in L\}$.

I.1.4. *Exemples*. — (1) Dans $E\oplus E=H(E)$, on a deux lagrangiens appelés *standard*: $F_0=E\oplus 0$ et $F_1=0\oplus E$.

(2) Si $E=P\oplus Q$, somme directe de deux lagrangiens, dans $E\oplus E=H(E)$, on a un lagrangien $\Delta_{P,Q}$ qui est défini dans la décomposition $E\oplus E=(P_0\oplus Q_0)\oplus(P_1\oplus Q_1)$ par

$$\Delta_{P,Q}=\{(x,y,-x,y),\ x\in P, y\in Q\}.$$

On dit que $\Delta_{P,Q}$ est un lagrangien diagonal de H(E) car

$$\Delta_{P,Q}\cap F_0=\Delta_{P,Q}\cap F_1=\{0\}.$$

(3) Dans H(H(E)), on a le lagrangien diagonal: $\Delta_2=\Delta_{F_0,F_1}$.

On note $\Lambda(E)$ la grassmannienne lagrangienne formée de tous les lagrangiens de E. Soit $L\in\Lambda(E)$, on pose

$$\Lambda_L=\{M\in\Lambda(E)/L\cap M=\{0\}\}.$$

I.1.5. *Structure affine sur* Λ_L. — Soit $M\in\Lambda_L$ et soit $q_M : E\to L$ la projection parallèlement à M; on a

$$(1)\qquad q_{M\mid L}=\mathrm{Id}_L;$$

(2) $$\forall x, y \in \mathrm{E}, \quad b(q_{\mathrm{M}} x, y) + b(x, q_{\mathrm{M}} y) = b(x, y).$$

[l'égalité (2) résulte du fait qu'elle est triviale lorsque x et y sont dans M, lorsque x et y sont dans L et lorsque $x \in \mathrm{L}$ et $y \in \mathrm{M}$ et que $\mathrm{E} = \mathrm{L} \oplus \mathrm{M}$].

Réciproquement, si $q: \mathrm{E} \to \mathrm{L}$ vérifie (1) et (2) et si $i: \mathrm{L} \hookrightarrow \mathrm{E}$, (1) dit que $p = i.q$ est un projecteur et (2) assure que $\mathrm{M} = \ker p$ est un lagrangien bien sûr transverse à L. Λ_{L} est donc espace affine sous le sous-espace vectoriel de Hom(E, L) formé des δ nuls sur L et tels que

$$b(\delta x, y) + b(x, \delta y) = 0, \qquad \forall x, y \in \mathrm{E}.$$

Remarques. — (1) Si on choisit une origine $\mathrm{M}_0 \in \Lambda_{\mathrm{L}}$, tout autre $\mathrm{M} \in \Lambda_{\mathrm{L}}$ s'écrit $\mathrm{M} = \text{graphe}(u) \subset \mathrm{M}_0 \oplus \mathrm{L} = \mathrm{E}$ où $u: \mathrm{M}_0 \to \mathrm{L}$ vérifie

$$b(uz, z') + b(z, uz') = 0, \qquad \forall z, z' \in \mathrm{M}_0.$$

(2) Lorsque $\Lambda(\mathrm{E})$ est non vide, les Λ_{L} avec leur structure affine forment un atlas de variété pour $\Lambda(\mathrm{E})$.

I.1.6. Soient L et L′ deux lagrangiens transverses de E; tout sous-espace de dimension moitié de E, transverse à L et L′ est le graphe d'un isomorphisme de L sur L′; cela identifie $\Lambda_{\mathrm{L}} \cap \Lambda_{\mathrm{L}'}$ à

$$\{ u: \mathrm{L} \to \mathrm{L}' \text{ isomorphisme tel que } b(u(x), y) + b(x, u(y)) = 0, \forall x, y \in \mathrm{L} \}.$$

Dans le cas amorphe, c'est tout l'ensemble des isomorphismes de L sur L′. Dans le cas non dégénéré, définissons $b_{\mathrm{LL'M}}: \mathrm{L} \times \mathrm{L} \to \mathrm{K}$ par $b_{\mathrm{LL'M}}(x, y) = b(x, u(y)) = -b(u(x), y)$ où $\mathrm{M} \in \Lambda_{\mathrm{L}} \cap \Lambda_{\mathrm{L}'}$ est le graphe de u. $b_{\mathrm{LL'M}}$ est une forme sesquilinéaire $(-\varepsilon)$-symétrique car

$$b_{\mathrm{LL'M}}(y, x) = b(y, u(x)) = -b(u(y), x) = -\varepsilon \overline{b(x, u(y))} = -\varepsilon \overline{b_{\mathrm{LL'M}}(x, y)}$$

et $b_{\mathrm{LL'M}}$ est non dégénérée car si $b_{\mathrm{LL'M}}(x, y) = 0$, pour tout x de L, $u(y) \in \mathrm{L} \cap \mathrm{L}' = \{0\}$, donc $y = 0$; $\Lambda_{\mathrm{L}} \cap \Lambda_{\mathrm{L}'}$ *s'identifie à l'espace des formes sesquilinéaires* $(-\varepsilon)$-*symétriques non dégénérées sur* L.

Remarque. — Avec les notations de l'exemple (2) de I.1.4, il est clair que P et Q sont lagrangiens pour la forme $b_{\mathrm{F_0 F_1 \Delta_{P,Q}}}$, donc si $\varepsilon = -1$ et l'involution est l'identité pour $\mathrm{K} = \mathbb{R}$ ou la conjugaison pour $\mathrm{K} = \mathbb{C}$ ou $\mathbb{H}$, $b_{\mathrm{F_0 F_1 \Delta_{P,Q}}}$ est de signature nulle.

I.1.7. On note $\hat{\Lambda}(\mathrm{H}(\mathrm{E})) = \Lambda_{\mathrm{F}_0} \cap \Lambda_{\mathrm{F}_1}$; c'est l'ensemble des lagrangiens diagonaux de H(E). Via l'identification de F_0 et F_1 avec E, $\hat{\Lambda}(\mathrm{H}(\mathrm{E})) \subset \mathrm{Aut}(\mathrm{E})$. $\hat{\Lambda}(\mathrm{H}(\mathrm{E})) = \mathrm{Aut}(\mathrm{E})$ dans le cas amorphe, et dans le cas ε-symétrique non dégénéré $\hat{\Lambda}(\mathrm{HE})$ est l'espace des formes sesquilinéaires $(-\varepsilon)$-symétriques non dégénérées sur E.

I.2. Déformation fondamentale. —

I.2.1. Notons PT(E) l'ouvert de $(\Lambda(\mathrm{E}))^4$ formé des couples transverses de paires de lagrangiens

$$\mathrm{PT}(\mathrm{E}) = \{ (\mathrm{L}_0, \mathrm{L}_1, \mathrm{M}_0, \mathrm{M}_1) \in \Lambda(\mathrm{E})^4 / \mathrm{L}_i \cap \mathrm{M}_j = \{0\}, \text{ pour } i = 0, 1 \text{ et } j = 0, 1 \}.$$

Nous écrivons $E=L_0 \oplus M_0$ et notons x, y les composantes dans L_0 et M_0. Comme $L_1 \cap M_0=\{0\}$, L_1 est le graphe d'une application linéaire $\alpha: L_0 \to M_0$ et comme L_1 est lagrangien,

$$b(\alpha x, x')+b(x, \alpha x')=0, \qquad \forall x, x' \in L_0$$

De même, $M_1 \cap L_0=\{0\}$, donc M_1 est le graphe de $\beta: M_0 \to L_0$, et comme M_1 est lagrangien

$$b(\beta y, y')+b(y, \beta y')=0, \qquad \forall y, y' \in M_0.$$

L'endomorphisme de E, $\begin{pmatrix} I & \beta \\ \alpha & I \end{pmatrix}$ est inversible puisque les deux colonnes de la matrice sont transverses ($L_1 \cap M_1=\{0\}$).

Donc $I-\beta\alpha$ est un automorphisme de L_0 et $I-\alpha\beta$ de M_0 puisque

$$\begin{pmatrix} I & \beta \\ \alpha & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & -\beta \\ 0 & I \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} I & 0 \\ \alpha & I-\alpha\beta \end{pmatrix}$$

et

$$\begin{pmatrix} I & -\beta \\ 0 & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & \beta \\ \alpha & I \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} I-\beta\alpha & 0 \\ \alpha & I \end{pmatrix}.$$

I.2.2. Considérons le sous-espace de H(E) qui, dans la décomposition $F_0=E=L_0^0 \oplus M_0^0$, $F_1=L_0^1 \oplus M_0^1$ est représenté par la matrice

$$\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \\ -I & \beta \\ -\alpha & I \end{pmatrix}.$$

Il est transverse à F_0 et aussi à F_1 puisque $\begin{pmatrix} -I & \beta \\ -\alpha & I \end{pmatrix}$ est inversible; c'est un lagrangien de H(E) d'après les propriétés de α et β et il dépend continûment de L_0, L_1, M_0, M_1. Notons-le B_{L_0, L_1, M_0, M_1} (birapport de deux paires transverses). B_{L_0, L_0, M_0, M_0} est Δ_{L_0, M_0} de I.1.4.

I.2.3. Dans le cas non dégénéré, au lagrangien B_{L_0, L_1, M_0, M_1} correspond, via I.1.6, une forme sesquilinéaire $(-\varepsilon)$-symétrique non dégénérée sur $E=L_0 \oplus M_0$ donnée par

$$B(x, y; x', y')=b(x-\beta y, y')+b(\alpha x-y, x').$$

I.2.4. Proposition. — *Il existe* $H: PT(E) \times [0, 1] \to \Lambda(E \oplus H(E))$ *continue telle que*

$$(1) \qquad \begin{cases} \forall t \in [0, 1], & H(L_0, L_1, M_0, M_1, t) \cap (L_0 \oplus F_0)=0 \\ & H(L_0, L_1, M_0, M_1, t) \cap (L_1 \oplus F_1)=0; \end{cases}$$

$$(2)\qquad \begin{cases} \mathrm{H}(\mathrm{L}_0, \mathrm{L}_1, \mathrm{M}_0, \mathrm{M}_1, 0) = \mathrm{M}_0 \oplus \Delta_{\mathrm{L}_0, \mathrm{M}_0} \\ \mathrm{H}(\mathrm{L}_0, \mathrm{L}_1, \mathrm{M}_0, \mathrm{M}_1, 1) = \mathrm{M}_1 \oplus \mathrm{B}_{\mathrm{L}_0, \mathrm{L}_1\, \mathrm{M}_0, \mathrm{M}_1}. \end{cases}$$

Preuve. — Écrivons

$$\mathrm{H}(\mathrm{E}) = \mathrm{F}_0 \oplus \mathrm{F}_1 = (\mathrm{L}_0^0 \oplus \mathrm{M}_0^0) \oplus (\mathrm{L}_0^1 \oplus \mathrm{M}_0^1)$$

et

$$\mathrm{E} \oplus \mathrm{H}(\mathrm{E}) = \mathrm{L}_0 \oplus \mathrm{F}_0 \oplus \mathrm{M}_0 \oplus \mathrm{F}_1 = \mathrm{L}_0 \oplus \mathrm{L}_0^0 \oplus \mathrm{M}_0^0 \oplus \mathrm{M}_0 \oplus \mathrm{L}_0^1 \oplus \mathrm{M}_0^1$$

et les composantes de $z : x,\ x_0,\ y_0,\ y,\ x_1,\ y_1$, de sorte que la forme $\tilde{b}$ sur $\mathrm{E} \oplus \mathrm{H}(\mathrm{E})$ s'écrit

$$\tilde{b}(z, z') = b(x, y') + b(y, x') + b(x_0, y_1') + b(y_1, x_0') + b(y_0, x_1') + b(x_1, y_0').$$

Les lagrangiens $\tilde{\mathrm{L}}_0 = \mathrm{L}_0 \oplus \mathrm{F}_0$, $\tilde{\mathrm{L}}_1 = \mathrm{L}_1 \oplus \mathrm{F}_1$, $\mathrm{M}_0 \oplus \Delta_{\mathrm{L}_0, \mathrm{M}_0}$, abrégé en $\mathrm{M}_0 \oplus \Delta$ et $\mathrm{M}_1 \oplus \mathrm{B}_{\mathrm{L}_0, \mathrm{L}_1, \mathrm{M}_0, \mathrm{M}_1}$ sont représentés respectivement par les matrices

$$\begin{pmatrix} \mathrm{I} & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{I} & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{I} \\ & & \\ & \mathbf{0} & \\ & & \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \mathrm{I} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{I} & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{I} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{I} & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{I} \\ \mathrm{I} & 0 & 0 \\ 0 & -\mathrm{I} & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{I} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \beta & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{I} & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{I} \\ \mathrm{I} & 0 & 0 \\ 0 & -\mathrm{I} & \beta \\ 0 & -\alpha & \mathrm{I} \end{pmatrix}.$$

L'isomorphisme

$$\begin{pmatrix} \mathrm{I}-\beta\alpha & & & & & \\ & \mathrm{I} & & & \mathbf{0} & \\ & & \mathrm{I} & & & \\ & & & \mathrm{I}-\alpha\beta & & \\ & \mathbf{0} & & & \mathrm{I} & \\ & & & & & \mathrm{I} \end{pmatrix}$$

fixe clairement $\tilde{\mathrm{L}}_0$ et $\mathrm{M}_0 \oplus \Delta$; il fixe aussi $\tilde{\mathrm{L}}_1$ car

$$(\mathrm{I} - \alpha\beta)\,\alpha = \alpha\,(\mathrm{I} - \beta\alpha).$$

L'isomorphisme

$$\begin{pmatrix} \mathrm{I}-\beta\alpha & 0 & 0 & \beta & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{I} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{I} & 0 & 0 & 0 \\ & & & \mathrm{I} & 0 & 0 \\ & \mathbf{0} & & 0 & \mathrm{I} & \beta \\ & & & 0 & \alpha & \mathrm{I} \end{pmatrix}$$

fixe $\tilde{\mathrm{L}}_0$ et $\tilde{\mathrm{L}}_1$ et envoie $\mathrm{M}_0 \oplus \Delta$ sur $\mathrm{M}_1 \oplus \mathrm{B}_{\mathrm{L}_0, \mathrm{L}_1, \mathrm{M}_0, \mathrm{M}_1}$.

Nous allons construire une déformation entre ces deux isomorphismes à travers les isomorphismes stabilisant $\tilde{L}_0$ et $\tilde{L}_1$ et qui transforment $M_0 \oplus \Delta$ en un lagrangien.

L'essentiel de la déformation se situe dans la matrice 3×3 en bas à droite; on veut relier les matrices

$$\begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & \beta \\ 0 & \alpha & I \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} I-\alpha\beta & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix}$$

par les pas suivants qui sont des multiplications par des matrices élémentaires:

$$\begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & \beta \\ 0 & \alpha & I \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I-\beta\alpha & 0 \\ 0 & \alpha & I \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ \beta & I-\beta\alpha & 0 \\ 0 & \alpha & I \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} I & \alpha & 0 \\ \beta & I & 0 \\ 0 & \alpha & I \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} I-\alpha\beta & \alpha & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & \alpha & I \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} I-\alpha\beta & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix}.$$

Il faut modifier un peu pour que toutes les conditions soient vérifiées. La déformation est obtenue par les quatre segments joignant les cinq isomorphismes de la colonne de gauche du tableau A.

Vérifications. — 1. Tous les points du segment joignant A_i à A_{i+1} sont des isomorphismes de $E \oplus H(E)$.

Cela nécessite au pire de voir que des blocs 2×2 sont inversibles, par exemple dans la première déformation

$$\begin{pmatrix} I-\lambda\beta\alpha & (1-\lambda)\beta \\ \alpha & I \end{pmatrix} \qquad (\lambda \in [0, 1]).$$

Or,

$$\begin{pmatrix} I-\lambda\beta\alpha & (1-\lambda)\beta \\ \alpha & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & -\lambda\beta \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & \beta \\ \alpha & I \end{pmatrix}$$

et des décompositions analogues pour les autres blocs 2×2 qu'on rencontre.

2. $L_0 \oplus F_0$ est stable: évident.

3. $L_1 \oplus F_1$ est stable. Vu la linéarité de la condition image $(L_1 \oplus F_1) \subset L_1 \oplus F_1$, il suffit de la tester aux sommets de la ligne brisée; cela résulte de la colonne 2 puisque le sous-espace engendré par les colonnes d'une matrice 3×6 est dans $L_1 \oplus F_1$, si les lignes 2 et 3 sont nulles et si la ligne 4 est α (ligne 1).

4. L'image de $M_0 \oplus \Delta$ reste lagrangien lors des déformations (c'est évident dans le cas amorphe). Nous allons faire la vérification pour chacune des déformations en écrivant l'image de $M_0 \oplus \Delta (\lambda \in [0, 1])$ et sous le symbole i/j, nous allons calculer les produits entre la i-ième et la j-ième colonne.

TABLEAU A

$I-\beta\alpha$	0	0	β	0	0	I	0	0	β	0	0
0	I	0	0	0	0	0	0	0	0	I	0
0	0	I	0	0	0	0	0	0	0	0	I
			I	0	0	α	0	0	I	0	0
	0		0	I	β	0	I	β	0	$-I$	β
			0	α	I	0	α	I	0	$-\alpha$	I
$I-\beta\alpha$	0	β	β	0	0	I	0	0	β	0	β
0	I	$-\beta$	0	0	0	0	0	0	0	I	$-\beta$
0	0	I	0	0	0	0	0	0	0	0	I
			I	0	0	α	0	0	I	0	0
	0		β	$I-\beta\alpha$	0	$\beta\alpha$	$I-\beta\alpha$	0	β	$-(I-\beta\alpha)$	0
			0	α	I	0	α	I	0	$-\alpha$	I
$I-\beta\alpha$	0	β	β	I	0	I	I	0	β	$-I$	β
$\beta\alpha$	I	$-\beta$	$-\beta$	0	0	0	0	0	$-\beta$	I	$-\beta$
0	0	I	0	0	0	0	0	0	0	0	I
			I	α	0	α	α	0	I	$-\alpha$	0
	0		β	I	0	$\beta\alpha$	I	0	β	$-I$	0
			I	α	I	α	α	I	I	$-\alpha$	I
$I-\beta\alpha$	0	0	0	I	0	$I-\beta\alpha$	I	0	0	$-I$	0
0	I	0	0	0	0	0	0	0	0	I	0
0	0	I	0	0	0	0	0	0	0	0	I
			$I-\alpha\beta$	α	0	$\alpha-\alpha\beta\alpha$	α	0	$I-\alpha\beta$	$-\alpha$	0
	0		0	I	0	0	I	0	0	$-I$	0
			$I-\alpha\beta$	α	I	$\alpha-\alpha\beta\alpha$	α	I	$I-\alpha\beta$	$-\alpha$	I
$I-\beta\alpha$	0	0				$I-\beta\alpha$	0	0	0	0	0
0	I	0		0		0	0	0	0	I	0
0	0	I				0	0	0	0	0	I
			$I-\alpha\beta$	0	0	$\alpha-\alpha\beta\alpha$	0	0	$I-\alpha\beta$	0	0
	0		0	I	0	0	I	0	0	$-I$	0
			0	0	I	0	0	I	0	0	I
						image de $L_1 \oplus F_1$			image de $M_0 \oplus \Delta$		

Première déformation

$$\begin{array}{ccc}
\beta & 0 & \lambda\beta \\
0 & I & -\lambda\beta \\
0 & 0 & I \\
I & 0 & 0 \\
\lambda\beta & -(I-\lambda\beta\alpha) & (1-\lambda)\beta \\
0 & -\alpha & I
\end{array}$$

$1/1: b(\beta y, y') + b(y, \beta y') = 0.$

$1/2: 0 = 0.$

$1/3: b(y, \lambda\beta y') + b(\lambda\beta y, y') = 0.$

$2/2: -b(x, \alpha x') - b(\alpha x, x') = 0.$

$2/3: b(x, y') + b(\alpha x, \lambda\beta y') - b(x - \lambda\beta\alpha x, y') = \lambda[b(\alpha x, \beta y') + b(\beta\alpha x, y')] = 0.$

$3/3: -\lambda b(\beta y, y') - \lambda b(y, \beta y') + (1-\lambda)[b(y, \beta y') + b(\beta y, y')] = 0.$

Deuxième déformation

$$\begin{array}{ccc} \beta & -\lambda I & \beta \\ -\lambda\beta & I & -\beta \\ 0 & 0 & I \\ I & -\lambda\alpha & 0 \\ \beta & -I + (1-\lambda)\beta\alpha & 0 \\ \lambda I & -\alpha & I \end{array}$$

$1/1: b(\beta y, y') + b(y, \beta y') - \lambda^2[b(\beta y, y') + b(y, \beta y')] = 0.$

$1/2: -\lambda b(\beta y, \alpha x) - \lambda b(y, x) + \lambda b(\beta y, \alpha x) + \lambda b(y, x) = 0.$

$1/3: b(y, \beta y') - \lambda \mathrm{b}(\beta y, y') - \lambda b(y, \beta y') + b(\beta y, y') = 0.$

$2/2: \lambda^2(b(x, \alpha x') + b(\alpha x, x')) - (b(x, \alpha x') + b(\alpha x, x')) = 0.$

$2/3: -\lambda b(\alpha x, \beta y) + b(x, y) + b(\alpha x, \beta y) - b(x, y) + (1-\lambda) b(\beta\alpha x, y) = 0.$

$3/3: -b(\beta y, y') - b(y, \beta y') = 0.$

Troisième déformation

$$\begin{array}{ccc} (1-\lambda)\beta & -I & (1-\lambda)\beta \\ -(1-\lambda)\beta & I & -(1-\lambda)\beta \\ 0 & 0 & I \\ I - \lambda\alpha\beta & -\alpha & 0 \\ (1-\lambda)\beta & -I & 0 \\ I - \lambda\alpha\beta & -\alpha & I \end{array}$$

$1/1: (1-\lambda)[b(\beta y, y' - \lambda\alpha\beta y') + b(y - \lambda\alpha\beta y, \beta y')]$
$\qquad - (1-\lambda)[b(\beta y, y' - \lambda\alpha\beta y') + b(y - \lambda\alpha\beta y, \beta y')] = 0.$

$1/2: -(1-\lambda) b(\beta y, \alpha x) - b(y, x) + \lambda b(\alpha\beta y, x)$
$\qquad + (1-\lambda) b(\beta y, \alpha x) + b(y, x) - \lambda b(\alpha\beta y, x) = 0.$

$1/3: (1-\lambda) b(y - \lambda\alpha\beta y, \beta y') - (1-\lambda) b(\beta y, y')$
$\qquad - (1-\lambda) b(y - \lambda\alpha\beta y, \beta y') + (1-\lambda) b(\beta y, y') = 0.$

2/2: Comme à la fin de la deuxième déformation.

$2/3: -(1-\lambda) b(\alpha x, \beta y) + b(x, y) + (1-\lambda) b(\alpha x, \beta y) - b(x, y) = 0.$

$3/3: -(1-\lambda)[b(\beta y, y') + b(y, \beta y')] = 0.$

Quatrième déformation

$$\begin{matrix} 0 & -(1-\lambda)\mathrm{I} & 0 \\ 0 & \mathrm{I} & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{I} \\ \mathrm{I}-\alpha\beta & -(1-\lambda)\alpha & 0 \\ 0 & -\mathrm{I} & 0 \\ (1-\lambda)(\mathrm{I}-\alpha\beta) & -(1-\lambda)\alpha & \mathrm{I} \end{matrix}$$

1/1, 1/3, 2/3 : évidents.

1/2 : $-(1-\lambda)\,b\,(y-\alpha\beta\, y, x)+(1-\lambda)\,b\,(y-\alpha\beta\, y, x)=0$.

2/2 : $(1-\lambda)^2\,[b\,(x, \alpha\, x')+b\,(\alpha\, x, x')]-(1-\lambda)\;[b\,(x, \alpha\, x')+b\,(\alpha\, x, x')]=0$.

I.2.5. *Invariant de deux paires transverses de lagrangiens.* — Choisissons une décomposition $\mathrm{E}=\mathrm{P}\oplus\mathrm{Q}$ en somme directe de deux lagrangiens et soit $\Delta=\Delta_{\mathrm{P},\,\mathrm{Q}}$ le lagrangien diagonal correspondant de $\mathrm{H}(\mathrm{E})$.

Soit $(\mathrm{L}_0, \mathrm{L}_1, \mathrm{M}_0, \mathrm{M}_1)\in \mathrm{PT}(\mathrm{E})$; dans $\mathrm{H}(\mathrm{E})$, on a deux paires transverses de lagrangiens F_0, F_1, Δ, $\Delta_{\mathrm{L}_0\,\mathrm{M}_0}$. Notons F'_0 et F'_1 les lagrangiens standard de $\mathrm{H}(\mathrm{H}(\mathrm{E}))$; le birapport $\mathrm{B}_{\mathrm{F}_0,\,\mathrm{F}_1,\,\Delta,\,\Delta_{\mathrm{L}_0,\,\mathrm{M}_0}}$ est un lagrangien de $\mathrm{H}(\mathrm{H}(\mathrm{E}))$ transverse à F'_0 et F'_1 dépendant continûment de $(\mathrm{L}_0, \mathrm{M}_0)$, et la proposition 2.4 donne une déformation dépendant continûment de $(\mathrm{L}_0, \mathrm{M}_0)$ entre

$$\Delta\oplus\Delta_{\mathrm{F}_0,\,\Delta} \qquad \text{et} \qquad \Delta_{\mathrm{L}_0,\,\mathrm{M}_0}\oplus \mathrm{B}_{\mathrm{F}_0,\,\mathrm{F}_1,\,\Delta,\,\Delta_{\mathrm{L}_0,\,\mathrm{M}_0}}$$

dans les lagrangiens de $\mathrm{HE}\oplus\mathrm{H}(\mathrm{HE})$ transverses à $\mathrm{F}_0\oplus\mathrm{F}'_0$ et $\mathrm{F}_1\oplus\mathrm{F}'_1$.

I.2.6. DÉFINITION:

$$\mathrm{I}_{\mathrm{L}_0,\,\mathrm{L}_1,\,\mathrm{M}_0,\,\mathrm{M}_1}=\mathrm{B}_{\mathrm{L}_0,\,\mathrm{L}_1,\,\mathrm{M}_0,\,\mathrm{M}_1}\oplus \mathrm{B}_{\mathrm{F}_0,\,\mathrm{F}_1,\,\Delta,\,\Delta_{\mathrm{L}_0,\,\mathrm{M}_0}}\in\hat{\Lambda}(\mathrm{HE}\oplus\mathrm{H}(\mathrm{HE})).$$

I.2.7. PROPOSITION. — *Il existe une application continue*

$$\mathrm{K}:\quad \mathrm{PT}(\mathrm{E})\times[0, 1]\to\Lambda(\mathrm{E}\oplus\mathrm{HE}\oplus\mathrm{HHE})$$

telle que

(1) $\forall\, t\in[0, 1]$, $\mathrm{K}(\mathrm{L}_0, \mathrm{L}_1, \mathrm{M}_0, \mathrm{M}_1, t)$ *est transverse à* $\mathrm{L}_0\oplus\mathrm{F}_0\oplus\mathrm{F}'_0$ *et à* $\mathrm{L}_1\oplus\mathrm{F}_1\oplus\mathrm{F}'_1$;

(2) $\mathrm{K}(\mathrm{L}_0, \mathrm{L}_1, \mathrm{M}_0, \mathrm{M}_1, 0)=\mathrm{M}_0\oplus\Delta\oplus\Delta_{\mathrm{F}_0,\,\mathrm{F}_1}$;

(3) $\mathrm{K}(\mathrm{L}_0, \mathrm{L}_1, \mathrm{M}_0, \mathrm{M}_1, 1)=\mathrm{M}_1\oplus \mathrm{I}_{\mathrm{L}_0,\,\mathrm{L}_1,\,\mathrm{M}_0,\,\mathrm{M}_1}$.

Preuve. — Remarquons que $\Delta_{\mathrm{F}_0,\,\mathrm{F}_1}$ se déforme dans $\hat{\Lambda}(\mathrm{HHE})$ en $\Delta_{\mathrm{F}_0,\,\Delta}$ car F_1 se déforme en Δ dans les lagrangiens de HE transverses à F_0. Définissons K par

pour $t\in[0, 1/3]$,

$$\mathrm{K}(t)=\mathrm{M}_0\oplus\Delta\oplus(\text{déformation entre }\Delta_{\mathrm{F}_0,\,\mathrm{F}_1}\text{ et }\Delta_{\mathrm{F}_0,\,\Delta});$$

pour $t \in [1/3, 2/3]$,

$$K(t) = M_0 \oplus (\text{déformation entre } \Delta \oplus \Delta_{F_0 \Delta} \text{ et } \Delta_{L_0, M_0} \oplus B_{F_0, F_1, \Delta, \Delta_{L_0, M_0}});$$

pour $t \in [2/3, 1]$,

$$K(t) = (\text{déformation entre } M_0 \oplus \Delta_{L_0, M_0} \text{ et } M_1 \oplus B_{L_0, L_1, M_0, M_1}) \oplus B_{F_0, F_1, \Delta, \Delta_{L_0 M_0}}.$$

I.2.8. Si E est somme orthogonale de E′ et E″ et si $(L'_0, L'_1, M'_0, M'_1) \in PT(E')$, $(L''_0, L''_1, M''_0, M''_1) \in PT(E'')$, posons $L_i = L'_i \oplus L''_i$, $M_j = M'_j \oplus M''_j$; il est clair que $(L_0, L_1, M_0, M_1) \in PT(E)$ et qu'il existe une isométrie de

$$H(E') \oplus H(H(E')) \oplus H(E'') \oplus H(H(E'')) \quad \text{sur} \quad H(E) \oplus H(H(E))$$

envoyant $I(L'_0, L'_1, M'_0, M'_1) \oplus I(L''_0, L''_1, M''_0, M''_1)$ sur $I(L_0, L_1, M_0, M_1)$.

I.3. Modèles. —

I.3.1. E_n c'est K^{8n} dont la base canonique est numérotée

$$e_1, e_2, \ldots, e_{4n}, f_1, f_2, \ldots, f_{4n}.$$

La forme b sur E_n est définie (sauf dans le cas amorphe) par

$$b(e_i, e_j) = b(f_i, f_j) = 0$$
$$b(e_{2j+1}, f_k) = 0 \quad \text{sauf si } k = 2j+2 \text{ et } b(e_{2j+1}, f_{2j+2}) = 1$$
$$b(f_k, e_{2j}) = 0 \quad \text{sauf si } k = 2j-1 \text{ et } b(f_{2j-1}, e_{2j}) = 1$$

le reste par ε-symétrie

Remarque. — $b(e_i, f_j) = b(f_i, e_j)$ et $b(e_{i+2}, f_{j+2}) = b(e_i, f_j)$.

Notons F_0^n le sous-espace engendré par les e_j et F_1^n celui engendré par les f_j, et soit Δ^n le sous-espace engendré par

$$e_{4k+1} - f_{4k+3}, \qquad e_{4k+2} - f_{4k+4}, \qquad e_{4k+3} + f_{4k+1}, \qquad e_{4k+4} + f_{4k+2}$$
$$(k = 0, 1, \ldots, n-1).$$

C'est pour avoir des constructions indépendantes de ε que nous avons pris E_n de dimension $8n$.

Il est clair que $E_{n+n'}$ est la somme directe orthogonale $E_n \oplus E_{n'}$ et que $F_i^{n+n'} = F_i^n \oplus F_i^{n'}$ et $\Delta^{n+n'} = \Delta^n \oplus \Delta^{n'}$.

Il est clair que F_0^n et F_1^n sont lagrangiens; Δ^n est un lagrangien transverse à F_0^n et F_1^n [il suffit de le vérifier pour $n = 1$ et les seuls produits non évidemment nuls sont

$$b(e_1 - f_3, e_4 + f_2) = b(e_1, f_2) - b(f_3, e_4) = 0$$

et

$$b(e_2 - f_4, e_3 + f_1) = b(e_2, f_1) - b(f_4, e_3) = \varepsilon - \varepsilon = 0].$$

I.3.2. Proposition. — *Il existe une isométrie* Φ: $HE_n \to E_{2n}$ *envoyant les lagrangiens standard* F_0 *et* F_1 *de* HE_n *sur* F_0^{2n} *et* F_1^{2n}, *et envoyant le lagrangien diagonal* $\Delta_{F_0^n, F_1^n}$ *de* HE_n *sur* Δ^{2n}.

Preuve. — Si E est une somme orthogonale $E=E'\oplus E''$, alors $H(E)$ est la somme orthogonale $HE'\oplus HE''$; il suffit donc de montrer le résultat lorsque $n=1$. HE_1 admet pour base

$$e_1^0\ldots e_4^0,\quad f_1^0,\ldots,f_4^0,\quad e_1^1,\ldots,e_4^1,\quad f_1^1,\ldots,f_4^1.$$

La forme $\tilde{b}$ sur $HE_1=E_1\oplus E_1$ vérifie

$$\tilde{b}(e_i^\alpha, e_j^\beta)=\tilde{b}(f_i^\alpha, f_j^\beta)=0,\qquad \tilde{b}(e_i^\alpha, f_j^\alpha)=0,$$

et si $\alpha\neq\beta$

$$\tilde{b}(e_i^\alpha, f_j^\beta)=b(e_i, f_j).$$

Le lagrangien standard F_0 est engendré par les e_i^0 et les f_j^0, F_1 par les e_i^1 et f_j^1, tandis que $\Delta_{F_0^1, F_1^1}$ est engendré par les $e_i^0-e_i^1$ et les $f_i^0+f_i^1$. Définissons $\Phi: HE_1\to E_2$ par le tableau

e_1^0	e_2^0	e_3^0	e_4^0	f_1^0	f_2^0	f_3^0	f_4^0	e_1^1	e_2^1	e_3^1	e_4^1	f_1^1	f_2^1	f_3^1	f_4^1
e_1	e_2	e_5	e_6	e_3	e_4	e_7	e_8	f_3	f_4	f_7	f_8	f_1	f_2	f_5	f_6

Il est clair que $\Phi(F_0)=F_0^2$, $\Phi(F_1)=F_1^2$, $\Phi(\Delta_{F_0^1, F_1^1})=\Delta^2$.

Pour vérifier que Φ est une isométrie, remarquons que

$$b(\Phi e_i^\alpha, \Phi e_j^\beta)=0=b(\Phi f_i^\alpha, \Phi f_j^\beta)=b(\Phi e_i^\alpha, \Phi f_j^\alpha)$$

et que

$$\begin{aligned} b(\Phi e_i^0, \Phi f_j^1) &= b(e_i, f_j) && \text{si}\quad i\leqq 2 \text{ et } j\leqq 2\\ &= b(e_{i+2}, f_{j+2})=b(e_i, f_j) && \text{si}\quad i\geqq 2 \text{ et } j\geqq 2\\ &= 0 \quad \text{sinon.} \\ b(\Phi e_i^1, \Phi f_j^0) &= b(f_{i+2}, e_{j+2})=b(e_i, f_j) && \text{si}\quad i\leqq 2 \text{ et } j\leqq 2\\ &= b(f_{i+4}, e_{j+4})=(b(e_i, f_j) && \text{si}\quad i\geqq 2 \text{ et } j\geqq 2\\ &= 0 \quad \text{sinon.}\end{aligned}$$

I.3.3. Notons $\Lambda_n=\Lambda(E_n)$, $\hat{\Lambda}_n=\{$lagrangiens de E_n transverses à F_0^n et $F_1^n\}$ et $\hat{\Lambda}(H(E_n))$ (notations de I.1.7) s'identifie à $\hat{\Lambda}_{2n}$.

La proposition I.2.7 devient (en utilisant la décomposition $E_n=F_0^n\oplus F_1^n$).

I.3.4. Proposition. — *Il existe une application continue*

$$I:\quad PT(E_n)\to\hat{\Lambda}_{6n}$$

et une application continue $H: PT(E_n)\times[0, 1]\to\Lambda_{7n}$ *telle que*

(1) $\forall\, t \in [0,1]$, $\mathrm{H}(\mathrm{L}_0, \mathrm{L}_1, \mathrm{M}_0, \mathrm{M}_1, t)$ *est transverse à* $\mathrm{L}_0 \oplus \mathrm{F}_0^{6n}$ *et* $\mathrm{L}_1 \oplus \mathrm{F}_1^{6n}$;

$$(2) \qquad \begin{cases} \mathrm{H}(\mathrm{L}_0, \mathrm{L}_1, \mathrm{M}_0, \mathrm{M}_1, 0) = \mathrm{M}_0 \oplus \Delta^{6n} \\ \mathrm{H}(\mathrm{L}_0, \mathrm{L}_1, \mathrm{M}_0, \mathrm{M}_1, 1) = \mathrm{M}_1 \oplus \mathrm{I}(\mathrm{L}_0, \mathrm{L}_1, \mathrm{M}_0, \mathrm{M}_1). \end{cases}$$

I.4. FIBRATION FONDAMENTALE. —

I.4.1. Soit

$$\mathrm{Z}_{n,p} = \{ (\mathrm{L}, \mathrm{L}', \mathrm{M}) / \mathrm{L} \in \Lambda_n, \mathrm{L}' \in \Lambda_n,$$
$$\mathrm{M} \in \Lambda_{n+p} \text{ et } \mathrm{M} \cap (\mathrm{L} \oplus \mathrm{F}_0^p) = \mathrm{M} \cap (\mathrm{L}' \oplus \mathrm{F}_1^p) = \{0\}\}.$$

Soit $\pi_p : \mathrm{Z}_{n,p} \to \Lambda_n \times \Lambda_n$, $\pi_p(\mathrm{L}, \mathrm{L}', \mathrm{M}) = (\mathrm{L}, \mathrm{L}')$. Soient $\mathrm{Z}_{n,p} \to \mathrm{Z}_{n,p+q}$ l'application $(\mathrm{L}, \mathrm{L}', \mathrm{M}) \mapsto (\mathrm{L}, \mathrm{L}', \mathrm{M} \oplus \Delta^q)$ et $\mathrm{Z}_n = \varinjlim_p \mathrm{Z}_{n,p}$; les applications π_p définissent $\pi : \mathrm{Z}_n \to \Lambda_n \times \Lambda_n$. Soit $\hat{\Lambda} = \varinjlim_p \Lambda_n$ où les applications de transition $\hat{\Lambda}_n \to \hat{\Lambda}_{n+1}$ sont $\zeta \mapsto \zeta \oplus \Delta^1$.

I.4.2. PROPOSITION. — $\pi : \mathrm{Z}_n \to \Lambda_n \times \Lambda_n$ *est une fibration de Serre de fibre* $\hat{\Lambda}$.

Preuve. — Nous allons vérifier que π est localement une fibration de Serre [6], exposé 1. Soit $(\mathrm{L}_0, \mathrm{L}'_0) \in \Lambda_n \times \Lambda_n$; choisissons $\mathrm{M} \in \Lambda_n$ transverse à L_0 et L'_0 et soit U l'ouvert de $\Lambda_n \times \Lambda_n$ formé des couples $(\mathrm{L}, \mathrm{L}')$ avec $\mathrm{L} \cap \mathrm{M} = \mathrm{L}' \cap \mathrm{M} = \{0\}$. Montrons que $\pi_{\mathrm{U}} : \pi^{-1}(\mathrm{U}) \to \mathrm{U}$ est une fibration de Serre.

Soient K un polyèdre fini, $a : \mathrm{K} \times \mathrm{I} \to \mathrm{U}$ et $\mathrm{A}_0 : \mathrm{K} \times 0 \to \pi^{-1}\mathrm{U}$ avec $\pi \circ \mathrm{A}_0 = a_{|\mathrm{K} \times 0}$. Soit p tel que $\mathrm{A}_0(\mathrm{K} \times 0) \subset \pi_p^{-1}(\mathrm{U}) \subset \mathrm{Z}_{n,p}$ et considérons A_0 comme une application de $\mathrm{K} \times 0$ dans $\mathrm{Z}_{n,p}$.

Écrivons $a(z,t) = (\mathrm{L}_{z,t}, \mathrm{L}'_{z,t})$ et $\mathrm{A}_0(z) = (\mathrm{L}_{z,0}, \mathrm{L}'_{z,0}, \mathrm{M}_z)$. Posons $p' = 6(n+p)$ et soit $\mathrm{I} : \mathrm{K} \times 0 \to \hat{\Lambda}_{p'}$ définie par

$$\mathrm{I}(z) = \mathrm{I}_{\mathrm{L}_{z,0} \oplus \mathrm{F}_0^p,\, \mathrm{L}'_{z,0} \oplus \mathrm{F}_1^p,\, \mathrm{M}_z,\, \mathrm{M} \oplus \Delta^p}.$$

Remarquons que $\mathrm{M} \oplus \Delta^p \oplus \mathrm{I}(z)$ est transverse à $\mathrm{L}_{z,t} \oplus \mathrm{F}_0^{p+p'}$ et à $\mathrm{L}'_{z,t} \oplus \mathrm{F}_1^{p+p'}$ pour tous $(z, t) \in \mathrm{K} \times [0,1]$.

Pour $s \in [0,1]$, soit $\mathrm{H}_s(z)$ l'homotopie donnée par I.3 entre $\mathrm{M}_z \oplus \Delta^{p'}$ et $\mathrm{M} \oplus \Delta^p \oplus \mathrm{I}(z)$.

Notons K' le sous-complexe de $\mathrm{K} \times [0,1] \times [0,1]$

$$\mathrm{K}' = \{ (z,t,s) \text{ avec } t = 0 \text{ ou } s = 1 \}.$$

Soit $\mathrm{G} : \mathrm{K}' \to \Lambda_{n+p+p'}$

$$\mathrm{G}(z,0,s) = \mathrm{H}_s(z) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{G}(z,t,1) = \mathrm{M} \oplus \Delta^p \oplus \mathrm{I}(z).$$

D'après la remarque précédente, pour $(z,t,s) \in \mathrm{K}'$

$$\mathrm{A}'(z,t,s) = (\mathrm{L}_{z,t}, \mathrm{L}'_{z,t}, \mathrm{G}(z,t,s)) \quad \text{est dans } \mathrm{Z}_{n,p+p'}.$$

Soit V un voisinage de K′ dans $K \times I \times I$ muni d'une rétraction $\rho : V \to K'$. Posons, pour $(z, t, s) \in V$,

$$\bar{A}(z, t, s) = (L_{z,t}, L'_{z,t}, G(\rho(z, t, s)).$$

Si V est assez petit, l'ouverture de la transversalité assure que $\bar{A}$ est à valeurs dans $Z_{n, p+p'}$ et $\pi_{p+p'} \bar{A} = a . \mathrm{pr}_{|V}$ où pr est la projection de $K \times I \times I$ sur $K \times I$ et $\bar{A}_{|K'} = A'$.

Soit $f : K \times I \to [0, 1]$, nulle sur $K \times 0$ et égale à 1 sur $K \times 1$, et dont le graphe est contenu dans V. Posons, pour $(z, t) \in K \times I$

$$A(z, t) = \bar{A}(z, t, f(z, t)) \in Z_{n, p+p'}.$$

On a $\pi \circ A = a$ et $A(z, 0) = (L_{z,0}, L'_{z,0}, M_z \oplus \Delta^{p'})$. Donc $A : K \times I \to Z_n$ relève a et prolonge A_0.

Il est clair que la fibre $\pi^{-1}(F^n_0, F^n_1)$ est $\hat{\Lambda}$.

CHAPITRE II

Espace de lacets des grassmanniennes lagrangiennes. Périodicité de Bott

II.0. Plan du chapitre.

§1. On montre que la fibration de I.4 induit sur $\Lambda_n \times \{F^n_1\}$ une fibration dont l'espace total est fortement connexe et on en déduit que $\sigma_n : \hat{\Lambda}_n \to \Omega_0 \Lambda_n$ induit une équivalence d'homotopie faible $\sigma : \hat{\Lambda} \to \Omega\Lambda$.

§2. On détermine le type d'homotopie des grassmanniennes lagrangiennes et des espaces des lagrangiens diagonaux pour vérifier que les équivalences d'homotopie faible $\sigma : \hat{\Lambda} \to \Omega\Lambda$ donnent les pas élémentaires de la périodicité de Bott.

II.1. Espace de lacets des grassmanniennes lagrangiennes.

II.1.1. Nous gardons les notations de I.3.3. Soit $\Omega_0 \Lambda_n$ l'espace des chemins de Λ_n allant de F^n_0 à F^n_1. On définit

$$\sigma_n : \quad \hat{\Lambda}_n \to \Omega_0 \Lambda_n$$

en posant, pour $L \in \hat{\Lambda}_n$ et $t \in [0, 1]$, $\sigma_n(L)(t) = (1-t) F^n_0 + t F^n_1$ où le barycentre est pris dans l'espace affine des lagrangiens de E_n transverses à L (I.1.5).

Soit $j : \hat{\Lambda}_n \to \hat{\Lambda}_{n+1}$ défini par $j(L) = L \oplus \Delta^1$ et soit $j' : \Omega_0 \Lambda_n \to \Omega_0 \Lambda_{n+1}$ défini par $j'(\gamma)(t) = \gamma(t) \oplus \sigma_1(\Delta^1)(t)$; il est clair que

$$j' . \sigma_n = \sigma_{n+1} . j.$$

Soit $\Omega\Lambda_n$ l'espace des lacets de Λ_n basés en F^n_0. Soit $i : \Lambda_n \to \Lambda_{n+1}$ définie par $i(L) = L \oplus F^1_0$ et soit $\Lambda = \varinjlim (\Lambda_n, i)$.

Définissons $\alpha_n : \Omega_0 \Lambda_n \to \Omega\Lambda_n$ et $\beta_n : \Omega\Lambda_n \to \Omega_0 \Lambda_n$ par les formules :
pour $t \in [0, 1/2]$,

$$\alpha_n(\gamma)(t) = \gamma(2t) \qquad \text{et} \qquad \beta_n(\delta)(t) = \delta(2t),$$

pour $t \in [1/2, 1]$,

$$\alpha_n(\gamma)(t) = \sigma_n(\Delta^n)(2-2t) \qquad \text{et} \qquad \beta_n(\delta)(t) = \sigma_n(\Delta^n)(2t-1).$$

Ce sont des équivalences d'homotopie et le diagramme

$$\begin{array}{ccccc} \Omega_0 \Lambda_n & \xrightarrow{\alpha_n} & \Omega\Lambda_n & \xrightarrow{\beta_n} & \Omega_0 \Lambda_n \\ \downarrow{\scriptstyle j'} & & \downarrow{\scriptstyle \Omega i} & & \downarrow{\scriptstyle j'} \\ \Omega_0 \Lambda_{n+1} & \xrightarrow{\alpha_{n+1}} & \Omega\Lambda_{n+1} & \xrightarrow{\beta_{n+1}} & \Omega_0 \Lambda_{n+1} \end{array}$$

est homotopiquement commutatif et $\underrightarrow{\lim}\,(\Omega_0 \Lambda_n, j')$ et $\Omega\Lambda \simeq \underrightarrow{\lim}\,(\Omega\Lambda_n, \Omega i)$ ont même type d'homotopie faible.

II.1.2. THÉORÈME. — *Les applications* $\sigma_n : \hat{\Lambda}_n \to \Omega_0 \Lambda_n$ *induisent une équivalence d'homotopie faible* $\sigma : \hat{\Lambda} \to \Omega\Lambda$.

Premier pas de la démonstration. — Soit $f : \Lambda_n \to \Lambda_n \times \Lambda_n$ l'inclusion $f(L) = (L, F_1)$ et soient

$$\begin{aligned} Y_{n,p} &= f^* Z_{n,p} \\ &= \{ (L, M), L \in \Lambda_n, M \in \Lambda_{n+p} / M \cap (L \oplus F_0^p) = M \cap F_1^{n+p} = \{0\} \} \end{aligned}$$

et $Y_n = \underrightarrow{\lim}\, Y_{n,p} = f^* Z_n$.

Nous savons (I.4) que $Y_n \to \Lambda_n$ est une fibration de Serre de fibre $\hat{\Lambda}$.

II.1.3. *Deuxième pas.* — $Y_{n,p}$ est fortement connexe. Considérons l'application $q : Y_{n,p} \to \Lambda_{F_1^{n+p}} \subset \Lambda_{n+p}$ définie par $q(L, M) = M$. Si $(L, M) \in Y_{n,p}$, alors $M \cap (0 \oplus F_0^p) \subset M \cap (L \oplus F_0^p) = \{0\}$, donc

(i) $M \cap (0 \oplus F_0^p) = \{0\}$;

De plus,

$$[M \cap (E_n \oplus F_0^p)] \cap (L \oplus F_0^p) = M \cap (L \oplus F_0^p) = \{0\},$$

donc

$$\dim [M \cap (E_n \oplus F_0^p)] \leq \operatorname{codim} [(L \oplus F_0^p) \subset (E_n \oplus F_0^p)] = 4n;$$

or $\dim M = 4n + 4p$, $\dim (E_n \oplus F_0^p) = 8n + 4p$, donc

(ii) M est transverse à $E_n \oplus F_0^p$.

Soit $U \subset \Lambda_{F_1}$ l'ouvert formé des lagrangiens vérifiant (i) et (ii). Si $M \in U$, $M \cap (E_n \oplus F_0^p)$ est de dimension $4n$ isotrope; soit $P(M)$ l'image de $M \cap (E_n \oplus F_0^p)$ par la projection sur E_n parallèlement à $0 \oplus F_0^p$, $P(M)$ est de dimension $4n$ isotrope, donc lagrangien de E_n et $P: U \to \Lambda_n$ est continue.

Remarque. — Dans le cas non dégénéré, les conditions (i) et (ii) sont équivalentes (en prenant l'orthogonal).

Affirmation:

$$(L, M) \in Y_{n,p} \Leftrightarrow M \in U \quad et \quad L \cap P(M) = \{0\}.$$

En effet, si $(L, M) \in Y_{n,p}$ et si $x \in L \cap P(M)$, il existe $z \in 0 \oplus F_0^p$ avec

$$x + z \in (L \oplus F_0^p) \cap [M \cap (E_n \oplus F_0^p)] = M \cap (L \oplus F_0^p) = \{0\},$$

donc $x = 0$.

Si $M \in U$, $L \cap P(M) = \{0\}$, et si $x + z \in (L \oplus F_0^p) \cap M$, alors $x \in L \cap P(M) = \{0\}$ et donc $z \in (0 \oplus F_0^p) \cap M = \{0\}$; donc $(L, M) \in Y_{n,p}$.

Donc $Y_{n,p} \xrightarrow{q} U$ est l'image réciproque par $P: U \to \Lambda_n$ de la fibration à fibre contractile

$$\{(L, L') \in \Lambda_n \times \Lambda_n / L \cap L' = \{0\}\} \to \Lambda_n$$
$$L, L' \mapsto L';$$

donc $Y_{n,p}$ a le type d'homotopie de U. Or, Λ_{F_1} $(F_1 = F_1^{n+p})$ est un espace affine et le fermé $\Sigma = \Lambda_{F_1} - U$ est l'image d'une variété différentiable de dimension nettement plus petite que celle de Λ_{F_1}.

Posons:

$$X_{n,p} = \{(l, M)/M \in \Lambda_{F_1}, l \text{ droite contenue dans } M \cap (0 \oplus F_0^p)\}$$
$$r: \quad X_{n,p} \to \Lambda_{F_1}, \qquad r(l, M) = M;$$
$$X'_{n,p} = \{(Q, M)/M \in \Lambda_{F_1}, \dim Q = 4n+1 \text{ et } Q \subset M \cap (E_n \oplus F_0^p)\};$$
$$r': \quad X'_{n,p} \to \Lambda_{F_1}, \qquad r'(Q, M) = M.$$

Dans le cas non dégénéré, $\Sigma = r(X_{n,p})$; dans le cas amorphe, $\Sigma = r(X_{n,p}) \cup r'(X'_{n,p})$, et dans ce cas $\dim X_{n,p} = \dim X'_{n,p}$. La codimension (réelle) de $X_{n,p}$ est minimale lorsque $K = \mathbb{R}$, $\varepsilon = +1$, où on trouve $\dim \Lambda_{F_1} - \dim X_{n,p} = 4n$; donc $Y_{n,p}$ est au moins $(4n-2)$-connexe et Y_n aussi.

II.1.4. *Troisième pas.* — $i: \Lambda_n \to \Lambda_{n+1}$ est fortement connexe. Au lieu de le vérifier directement, déduisons-le du deuxième pas. Soit $\bar{i}: \Lambda_n \to \Lambda_{n+1}$ définie par $\bar{i}(L) = F_0^1 \oplus L$, il est clair que $\bar{i}$ est homotope à $i: \Lambda_n \to \Lambda_{n+1}$. Soit $\bar{j}_q: \hat{\Lambda}_q \to \hat{\Lambda}_{q+1}$ définie par $\bar{j}_q(L) = \Delta^1 \oplus L$; il est clair que $\bar{j}_q$ est homotope à $j_q: \hat{\Lambda}_q \to \hat{\Lambda}_{q+1}$ et que les $\bar{j}_q$ passent à la limite en $\bar{j}: \hat{\Lambda} \to \hat{\Lambda}$ qui induit l'identité sur $\pi_* \hat{\Lambda}$. Soit $\bar{k}: Y_{n,p} \to Y_{n+1,p}$ définie par $\bar{k}(L, M) = (F_0^1 \oplus L, \Delta^1 \oplus M)$.

Le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
\hat{\Lambda} \arrow[r] \arrow[d, "\bar{j}"] & \mathrm{Y}_n \arrow[r] \arrow[d, "\bar{k}"] & \Lambda_n \arrow[d, "\bar{i}"] \\
\hat{\Lambda} \arrow[r] & \mathrm{Y}_{n+1} \arrow[r] & \Lambda_{n+1}
\end{tikzcd}$$

et le lemme des cinq assurent que $\bar{i}_* : \pi_j \Lambda_n \to \pi_j \Lambda_{n+1}$ est un isomorphisme pour $j \leqq 4n-2$, donc i_* aussi.

II.1.5. *Dernier pas.* — Soit $\mathrm{C}_{n,\,p}$ l'espace des chemins de Λ_{n+p} dont l'origine est dans $i(\Lambda_n)$ et l'extrémité est F_1^{n+p}; soit $\bar{\pi} : \mathrm{C}_{n,\,p} \to \Lambda_n$ telle que, si $\gamma \in \mathrm{C}_{n,\,p}$, $\gamma(0) = \bar{\pi}(\gamma) \oplus \mathrm{F}_0^p$; $\bar{\pi}$ est une fibration de Serre de fibre $\Omega_0 \Lambda_{n+p}$. Soit $l : \mathrm{C}_{n,\,p} \to \mathrm{C}_{n,\,p+1}$, $l(\gamma) = \gamma \oplus \sigma_1(\Delta^1)$; $\mathrm{C}_n = \underset{\overrightarrow{p}}{\lim} (\mathrm{C}_{n,\,p}, l)$ est l'espace total d'une fibration de Serre de base Λ_n et de fibre

$\Omega_0 \Lambda = \underset{\overrightarrow{q}}{\lim} (\Omega_0 \Lambda_q, j')$.

Notons ∂_p le bord de la suite exacte d'homotopie de la fibration $\bar{\pi} : \mathrm{C}_{n,\,p} \to \Lambda_n$, il est clair que

$$\begin{tikzcd}
 & \pi_{k-1}(\Omega_0 \Lambda_n) \arrow[dd, "j'_*"] \\
\pi_k \Lambda_n \arrow[ur, "\partial_0"] \arrow[dr, "\partial_p"'] & \\
 & \pi_{k-1}(\Omega_0 \Lambda_{n+p})
\end{tikzcd}$$

est commutatif et ∂_0 est un isomorphisme car $\mathrm{C}_{n,\,0}$ est contractile. Si $\mathrm{J}_q : \pi_{k-1}(\Omega \Lambda_q) \to \pi_k(\Lambda_q)$ est l'isomorphisme canonique, on a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
 & \pi_{k-1} \Omega_0 \Lambda_n \arrow[r, "\mathrm{J}_n (a_n)_*"] \arrow[dd, "j'_*"] & \pi_k \Lambda_n \arrow[dd, "i_*"] \\
\pi_k \Lambda_n \arrow[ur, "\partial_0"] \arrow[dr, "\partial_p"'] & & \\
 & \pi_{k-1} \Omega_0 \Lambda_{n+p} \arrow[r, "\mathrm{J}_{n+p} (\alpha_{n+p})_*"] & \pi_k \Lambda_{n+p}
\end{tikzcd}$$

Donc $\partial_p : \pi_k \Lambda_n \to \pi_{k-1} \Omega_0 \Lambda_{n+p}$ est un isomorphisme si $i_* : \pi_k \Lambda_n \to \pi_k \Lambda_{n+p}$ en est un. Le troisième pas et la suite exacte d'homotopie montrent que C_n est fortement connexe comme la paire Λ, Λ_n.

Considérons $\sigma'_{n,\,p} : \mathrm{Y}_{n,\,p} \to \mathrm{C}_{n,\,p}$ où $\sigma'_{n,\,p}(\mathrm{L}, \mathrm{M})$ est le chemin rectiligne de $\mathrm{L} \oplus \mathrm{F}_0^p$ à F_1^{n+p} dans l'espace affine des lagrangiens transverses à M. Les $\sigma'_{n,\,p}$ passent à la limite en $\sigma'_n : \mathrm{Y}_n \to \mathrm{C}_n$ et σ'_n induit sur les fibres $\sigma : \hat{\Lambda} \to \Omega_0 \Lambda$ qui est la limite des $\sigma_{n+p} : \hat{\Lambda}_{n+p} \to \Omega_0 \Lambda_{n+p}$.

Le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} \hat{\Lambda} & \to & \mathrm{Y}_n & \xrightarrow{\pi} & \Lambda_n \\ \downarrow{\scriptstyle \sigma} & & \downarrow{\scriptstyle \sigma'_n} & & \| \\ \Omega_0 \Lambda & \to & \mathrm{C}_n & \xrightarrow{\pi} & \Lambda_n \end{array}$$

et le lemme des cinq assurent que $\sigma_* : \pi_j \hat{\Lambda} \to \pi_j \Omega_0 \Lambda$ est un isomorphisme pour j petit devant n, et comme n est arbitraire, $\sigma : \hat{\Lambda} \to \Omega_0 \Lambda$ est une équivalence d'homotopie faible. Donc $\sigma'_n : \mathrm{Y}_n \to \mathrm{C}_n$ est aussi une équivalence d'homotopie faible.

II.2. Périodicité de Bott.

II.2.1. *Rappelons la notation des groupes classiques*

O_n : groupe d'isométries du produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^n$.

$\mathrm{O}(n, n)$: groupe d'isométries de la forme quadratique de signature nulle

$$x_1^2 + \ldots + x_n^2 - x_{n+1}^2 - \ldots - x_{2n}^2 \quad \text{sur } \mathbb{R}^{2n}$$

$\mathrm{Sp}(2n, \mathbb{R})$: groupe d'isométrie de la forme symplectique

$$\omega(x, y) = \sum_k (x_k y_{n+k} - x_{n+k} y_k) \quad \text{sur } \mathbb{R}^{2n}$$

U_n : groupe d'isométries du produit scalaire hermitien usuel sur $\mathbb{C}^n$.

$\mathrm{U}(n, n)$: groupe d'isométries de la forme hermitienne de signature nulle

$$|x_1|^2 + \ldots + |x_n|^2 - |x_{n+1}|^2 - \ldots - |x_{2n}|^2 \quad \text{sur } \mathbb{C}^{2n}$$

$\mathrm{O}(n, \mathbb{C})$: groupe d'isométries de la forme quadratique $x_1^2 + \ldots + x_n^2$ sur $\mathbb{C}^n$.

$\mathrm{Sp}(2n, \mathbb{C})$: groupe d'isométries de la forme symplectique ω sur $\mathbb{C}^{2n}$.

$\mathrm{U}(n, \mathbb{H})$: groupe d'isométries du produit scalaire usuel sur $\mathbb{H}^n$.

$\mathrm{Sp}(n, \mathbb{H})$: groupe d'isométries de la forme antihermitienne

$$\omega(x, y) = \sum_k \bar{x}_k i y_k \quad \text{sur } \mathbb{H}^n.$$

On a

$\mathrm{O}(n, n) \cap \mathrm{O}_{2n} = \mathrm{O}_n \times \mathrm{O}_n$ diagonal dans O_{2n}

$$\mathrm{U}_n \cap \mathrm{O}(n, \mathbb{C}) = \mathrm{O}_n$$

$$\mathrm{O}_{2n} \cap \mathrm{Sp}(2n, \mathbb{R}) \simeq \mathrm{U}_n \subsetneq \mathrm{O}_{2n}$$

$\mathrm{U}(n, \mathbb{H}) = \mathrm{U}_{2n} \cap \mathrm{Sp}(2n, \mathbb{C})$ noté traditionnellement Sp_n.

$\mathrm{Sp}(n, \mathbb{H}) = \mathrm{U}(n, n) \cap \mathrm{O}'(2n, \mathbb{C})$ où $\mathrm{O}'(2n, \mathbb{C})$ est le groupe d'isométries de la forme quadratique $x_1 x_{n+1} + \ldots + x_n x_{2n}$ sur $\mathbb{C}^{2n}$

$$\mathrm{Sp}(n, \mathbb{H}) \cap \mathrm{U}(n, \mathbb{H}) \simeq \mathrm{U}_n \subsetneq \mathrm{Sp}_n.$$

II.2.2. *Détermination des grassmanniennes lagrangiennes.* — La méthode uniforme est de déterminer le fibré des repères orthonormés du fibré tautologique sur la grassmannienne. Nous donnons ci-dessous les résultats

Grassmanniennes amorphes	
$\mathbb{R}^{2n}$	$O_{2n}/O_n \times O_n$
$\mathbb{C}^{2n}$	$U_{2n}/U_n \times U_n$
H^{2n}	$Sp_{2n}/Sp_n \times Sp_n$
$\mathbb{R}^{2n}$ quadratique de signature nulle	$O_n \times O_n/O_n \simeq O_n$
$\mathbb{C}^{2n}$ hermitien de signature nulle	$U_n \times U_n/U_n \simeq U_n$
H^{2n} hermitien de signature nulle	$Sp_n \times Sp_n/Sp_n \simeq Sp_n$
$\mathbb{R}^{2n}$ ω symplectique	U_n/O_n
$\mathbb{C}^{2n}$ q quadratique	O_{2n}/U_n
$\mathbb{C}^{2n}$ ω bilinéaire antisymétrique	Sp_n/U_n
H^{2n} ω antihermitienne	U_{2n}/Sp_n

II.2.3. *Détermination de l'espace des formes non dégénérées et de son type d'homotopie.* — La colonne de droite indique le type d'homotopie

$\mathbb{R}^{2n}$ quadratique de signature nulle	$Gl(2n, \mathbb{R})/O(n, n)$	$O_{2n}/O_n \times O_n$
$\mathbb{C}^{2n}$ hermitienne de signature nulle	$Gl(2n, \mathbb{C})/U(n, n)$	$U_{2n}/U_n \times U_n$
H^{2n} hermitienne de signature nulle	$Gl(2n, H)/U(n, n, H)$	$Sp_{2n}/Sp_n \times Sp_n$
$\mathbb{R}^{2n}$ symplectique	$Gl(2n, \mathbb{R})/Sp(2n, \mathbb{R})$	O_{2n}/U_n
$\mathbb{C}^n$ quadratique	$Gl(n, \mathbb{C})/O(n, \mathbb{C})$	U_n/O_n
$\mathbb{C}^{2n}$ bilinéaire antisymétrique	$Gl(2n, \mathbb{C})/Sp(2n, \mathbb{C})$	U_{2n}/Sp_n
H^n antihermitienne	$Gl(n, H)/Sp(n, H)$	Sp_n/U_n

Dans le cas amorphe, c'est tout le groupe d'isomorphismes (I.1.6) ayant le type d'homotopie de O_n, U_n ou Sp_n suivant le cas.

II.2.4. Nous regroupons les résultats stables dans le tableau suivant : dans la colonne du milieu, on indique le type d'homotopie de la grassmannienne lagrangienne du type indiqué dans la colonne de gauche, et dans la colonne de droite, on indique le type d'homotopie de l'espace des formes non dégénérées du type indiqué dans la colonne de gauche (dans le cas $\mathbb{R}$ quadratique, $\mathbb{C}$ ou H hermitien, on n'a indiqué que la composante neutre de l'espace des formes non dégénérées).

$\mathbb{R}$ amorphe	$BO = O/O \times O$	$O = O \times O/O$
$\mathbb{C}$ amorphe	$BU = U/U \times U$	$U = U \times U/U$
H amorphe	$BSp = Sp/Sp \times Sp$	$Sp = Sp \times Sp/Sp$
$\mathbb{R}\, q$	$O \times O/O = O$	$BO = O/O \times O$
$\mathbb{R}\, \omega$	U/O	O/U
$\mathbb{C}\, q$	O/U	U/O
$\mathbb{C}\, \omega$	Sp/U	U/Sp
$\mathbb{C}\, h$	$U \times U/U = U$	$BU = U/U \times U$
$H\, h$	$Sp + Sp/Sp = Sp$	$BSp = Sp/Sp \times Sp$
$H\, \omega$	U/Sp	Sp/U

Les dix types d'homotopie entrant dans ce tableau portent chacun deux étiquettes, l'une indiquant quels lagrangiens sont classifiés et l'autre quelles formes sont classifiées. Mettons une arête entre deux types d'homotopie chaque fois qu'une étiquette de l'un est reliée à une étiquette de l'autre par la relation (I.1.6); on obtient les diagrammes II.1 et II.2 ci-après.

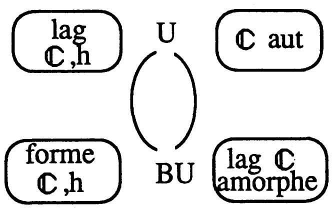

Diagramme II.1

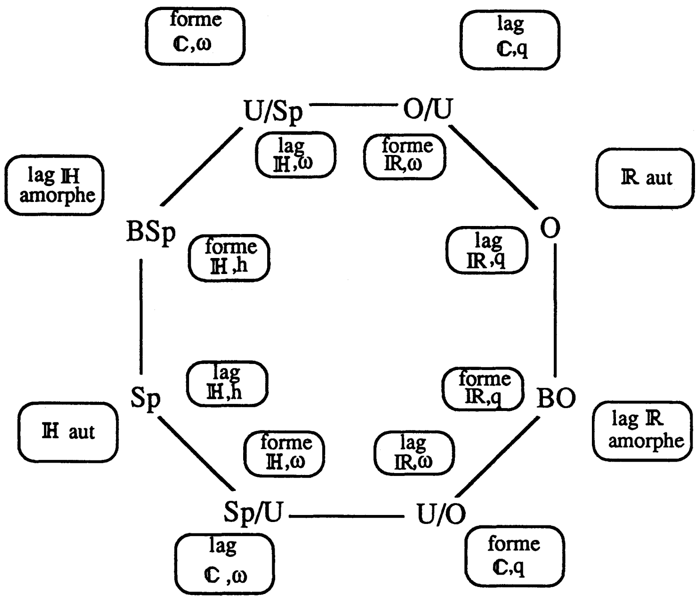

Diagramme II.2

Nous laissons au lecteur le soin de contempler les symétries du diagramme. La périodicité de Bott résulte alors du théorème II.1.2 (on a en fait $\Omega U \sim \mathbb{Z} \times BU$, $\Omega(U/O) \sim \mathbb{Z} \times BO$, $\Omega(U/Sp) \sim \mathbb{Z} \times BSp$, car sur le diagramme on n'a indiqué que les composantes neutres de ces espaces de formes non dégénérées).

CHAPITRE III

Transversales lagrangiennes communes à deux sous-fibrés lagrangiens

III.0. PLAN DU CHAPITRE.

§1. Sorites sur les sous-fibrés lagrangiens après stabilisation; différence de deux sous-fibrés lagrangiens.

§2. A sauter dans une première lecture. On étudie le comportement de la différence de deux sous-fibrés lagrangiens par réduction par un sous-fibré isotrope.

Ce paragraphe sera utilisé au chapitre IV dans le cas symplectique; le lemme II.2.2 a été rédigé par manque de références.

§3. Sorites sur les transversales lagrangiennes après stabilisation. On utilise les résultats du chapitre I pour étudier l'existence et la classification de telles transversales.

§4. On introduit la notion de paire de formes quadratiques associées sur un fibré vectoriel. On construit un fibré vectoriel différence pour une telle paire de formes quadratiques et on en établit la trivialité lorsqu'on a une isométrie entre les deux formes qui en chaque point est l'identité sur le radical commun des deux formes.

§5. On fait le lien entre les paragraphes 3 et 4 pour une paire de transversales lagrangiennes.

III.1. DIFFÉRENCE DE DEUX SOUS-FIBRÉS LAGRANGIENS

III.1.1. X est un complexe fini et W est un K-fibré vectoriel sur X muni d'une forme sesquilinéaire ε-symétrique b non dégénérée (ou identiquement nulle dans le cas amorphe). Le fibré trivial sur X de fibre E_n est noté encore E_n.

Notons $\mathscr{L}(W)$ l'ensemble des classes d'isotopie de sous-fibrés lagrangiens de W; soit $\mathscr{L}(W) \to \mathscr{L}(W \oplus E_p)$ la stabilisation qui, au sous-fibré ξ, associe le sous-fibré lagrangien $\xi \oplus F_0^p$. Soit $\mathscr{L}\mathscr{S}(W) = \varinjlim_p \mathscr{L}(W \oplus E_p)$.

III.1.2. *Remarque.* — Pour tout $\theta \in [0, \pi/2]$, l'application $r^\theta : W \oplus W \to W \oplus W$, définie par $r_x^\theta(y, z) = (y\cos\theta + z\sin\theta, -y\sin\theta + z\cos\theta)\,(y, z \in W_x)$, est une isométrie de $W \oplus W$; il en résulte que, si ξ et η sont des fibrés lagrangiens de W, alors, dans $W \oplus W$, les lagrangiens $\xi \oplus \eta$ et $\eta \oplus \xi$ se déforment l'un en l'autre.

III.1.3. *Remarque.* — Soient W et ξ un sous-fibré lagrangien. On note $\Lambda(W)$ le fibré sur X de fibre en x, $\Lambda(W_x)$, *i.e.* $\Lambda(W) = \{(x, L)\ L \text{ lagrangien de } W_x\}$.

Soit $\Lambda_\xi(W) = \{(x, L)\ L \text{ lagrangien de } W_x \text{ et } L \cap \xi_x = 0\}$; c'est un ouvert de $\Lambda(W)$ et la projection $\Lambda_\xi(W) \to X$ est une fibration localement triviale à fibre contractile. On peut donc construire un sous-fibré lagrangien ξ_1 de W transverse à ξ.

Dans le cas non dégénéré, b donne un isomorphisme de ξ_1 sur ξ^*, et, comme en I.1.2, la décomposition $W = \xi \oplus \xi_1$ donne une isométrie $W \simeq H(\xi)$.

III.1.4. *Action de* $[X, \Lambda]$ *sur* $\mathscr{L}\mathscr{S}(W)$. — Soient $x \in \mathscr{L}\mathscr{S}(W)$ et $u \in [X, \Lambda]$. On représente x par ξ sous-fibré lagrangien de $W \oplus E_p$, et, comme X est fini, on représente u par $a : X \to \Lambda_n$ qu'on identifie au sous-fibré lagrangien de E_n sur X correspondant.

La classe de $\xi \oplus a \subset W \oplus E_{p+n}$ dans $\mathscr{L}\mathscr{S}(W)$ est visiblement indépendante du choix de a; elle est aussi indépendante du choix de ξ car, si $\xi' \subset W \oplus E_{p'}$ est un autre choix, il existe une déformation de $\xi \oplus F_0^q$ en $\xi' \oplus F_0^{q'}$ dans les lagrangiens de $W \oplus E_N$ $(N = p + q = p' + q')$ et, si on choisit un représentant de u, $a : X \to \Lambda_n$ avec n multiple de q et q', la remarque 1.2 donne une déformation de $a \oplus F_0^{q'}$ (resp. $a \oplus F_0^q$) en $F_0^q \oplus a$ (resp. $F_0^{q'} \oplus a$) dans les lagrangiens de E_{n+q} (resp. $E_{n+q'}$). En mettant ces déformations bout à bout, on obtient une déformation dans les lagrangiens de $W \oplus E_{N+n}$ entre $\xi \oplus a \oplus F_0^q$ et $\xi' \oplus a \oplus F_0^{q'}$. Notons $x + u$ la classe de $(\xi \oplus a)$ dans $\mathscr{L}\mathscr{S}(W)$.

Structure de groupe sur $[X, \Lambda]$. — En raisonnant comme ci-dessus, on voit que la somme de Whitney des représentants donne une loi de semi-groupe commutatif sur $[X, \Lambda]$. C'est en fait un groupe. Soit $\sigma : E = F_0 + F_1 \to E$ la symétrie par rapport à Δ échangeant F_0 et F_1 $\left(\text{si } \Delta = \text{graphe}\,\alpha,\ \alpha : F_0 \to F_1, \text{ alors } \sigma = \begin{pmatrix} 0 & \alpha^{-1} \\ \alpha & 0 \end{pmatrix}\right)$, σ est une isométrie de (E, b) sur $(E, -b)$. Si ξ est un sous-fibré lagrangien du fibré trivial (E, b) sur X et si ξ_1 est un sous-fibré lagrangien de E transverse à ξ, alors le fibré lagrangien $\sigma(\xi_1)$ de (E, b) représente l'inverse de $[\xi]$. En effet, pour $\theta \in [0, \pi/2]$, considérons les deux isomorphismes de $E \oplus E$, τ_θ et ρ_θ définis dans la décomposition

$$E \oplus E = (F_0 + F_1) \oplus (F_0 + F_1)$$

par

$$\tau_\theta(x_0, x_1, y_0, y_1) = (x_0, x_1 \cos\theta - y_1 \sin\theta, y_0, x_1 \sin\theta + y_1 \cos\theta)$$
$$\rho_\theta(x_0, x_1, y_0, y_1) = (x_0 \cos\theta + y_0 \sin\theta, x_1, -x_0 \sin\theta + y_0 \cos\theta, y_1)$$

Alors, $\tau_\theta(\xi \oplus 0) \cap \rho_\theta(0 \oplus \xi_1) = \{0\}$ sont transverses et $\tau_\theta(\xi \oplus 0) + \rho_\theta(0 \oplus \xi_1)$ est lagrangien dans $(E \oplus E, b \oplus (-b))$. Pour $\theta = 0$, c'est $\xi \oplus \xi_1$, et pour $\theta = \pi/2$, c'est $F_0 \oplus F_1$.

$(I \oplus \sigma)\ (\tau_\theta(\xi \oplus 0) + \rho_\theta(0 \oplus \xi_1))$ est donc une déformation dans les sous-fibrés lagrangiens de $(E \oplus E, b \oplus b)$ entre $\xi \oplus \sigma(\xi_1)$ et le fibré constant $F_0 \oplus \sigma(F_1) = F_0 \oplus F_0$.

Il est clair que $[X, \Lambda] \times \mathscr{L}\mathscr{S}(W) \to \mathscr{L}\mathscr{S}(W)$ est une action de groupe.

III.1.5 Proposition. — *Si* $\mathscr{L}\mathscr{S}(W)$ *est non vide, c'est un espace affine sous* $[X, \Lambda]$.

Preuve. — Soient $x, y \in \mathscr{L}\mathscr{S}(W)$. Quitte à changer de notations, on peut supposer que x et y sont représentés par des sous-fibrés lagrangiens ξ, η de W.

Cas non dégénéré. — Soit ξ' un K-fibré tel que $\xi' \oplus \xi$ est trivial, et choisissons une trivialisation $\xi' \oplus \xi \to K^{4n}$, d'où une isométrie $H(\xi') \oplus H(\xi) \to E_n$. On a une isométrie $W \to H(\xi)$. Par ces isométries, $\xi' \oplus \xi \subset H(\xi') \oplus W$ devient F_0^n et $\xi' \oplus \eta$ devient un sous-fibré lagrangien de E_n, d'où $d : X \to \Lambda_n$. Je dis que $x + [d] = y$; en effet, le fibré lagrangien $\xi \oplus d$ de $W \oplus E_n$ est l'image du lagrangien $\xi \oplus \xi' \oplus \eta$ de $W \oplus H(\xi') \oplus W$ qui se déforme, d'après 1.2, en le lagrangien $\eta \oplus \xi' \oplus \xi \subset W \oplus H(\xi') \oplus W$ dont l'image dans $W \oplus E_n$ est $\eta \oplus F_0^n$.

Si $a: X \to \Lambda_N$ est tel que $[\xi \oplus a]=[\xi]$ dans $\mathscr{L}\mathscr{S}(W)$; alors, quitte à stabiliser a, $\xi \oplus a$ se déforme en $\xi \oplus F_0^N$ dans les lagrangiens de $W \oplus E_N$; donc, en ajoutant ξ' à gauche, $F_0^n \oplus a$ se déforme en F_0^{n+N}. Stabilisant encore a pour que N soit multiple de n, $a \oplus F_0^n$ se déforme en $F_0^n \oplus a$, donc la classe de a est nulle dans $[X, \Lambda]$.

Cas amorphe. — Choisissons ξ_1 sous-fibré lagrangien transverse à ξ et un isomorphisme $W \simeq \xi \oplus \xi_1$. Choisissons ξ' et ξ'_1 deux fibrés de même dimension et des trivialisations $\xi' \oplus \xi \simeq K^{4n}$, $\xi'_1 \oplus \xi_1 \simeq K^{4n}$ d'où une trivialisation

$$(\xi' \oplus \xi'_1) \oplus W \simeq E_n.$$

Par cette trivialisation, $\xi' \oplus 0 \oplus \xi$ devient F_0^n et $0 \oplus \xi'_1 \oplus \eta$ devient sous-fibré lagrangien de E_n, d'où $d: X \to \Lambda_n$ et le reste de la démonstration est comme précédemment.

III.1.6. *Notation.* — On note $d(\xi, \eta) \in [X, \Lambda]$ l'élément tel que $[\xi]+d(\xi, \eta)=[\eta]$. $d(\xi, \eta)=0$ si et seulement si, après stabilisation, on peut déformer ξ en η parmi les lagrangiens. La démonstration de III.1.5 donne un moyen de calculer $d(\xi, \eta)$ et montre que c'est indépendant des choix faits.

Exemples. — (1) Cas amorphes: $d(\xi, \eta)=(\eta)-(\xi) \in [X, BO]$ ou $[X, BU]$ ou $[X, BSp]$.

(2) Si $X=S^1$ dans le cas symplectique, $d(\xi, \eta)$ est l'indice de Maslov du fibré lagrangien η dans (W, ξ).

III.2. RÉDUCTION PAR UN SOUS-FIBRÉ ISOTROPE (CAS NON DÉGÉNÉRÉ)

III.2.1. Soit $\gamma \subset W$ un sous-fibré isotrope ($\gamma \subset \gamma^0$). Si λ est un sous-fibré lagrangien de W avec $\gamma \cap \lambda=0$, alors $\gamma^0+\lambda^0=\gamma^0+\lambda=W$; donc λ est transverse au sous-fibré γ^0, donc $\lambda \cap \gamma^0$ est un sous-fibré de $\gamma^0 \subset W$ et isotrope; comme $(\lambda \cap \gamma^0) \cap \gamma=0$, $\lambda \cap \gamma^0/\gamma$ est un sous-fibré de γ^0/γ isotrope et de dimension moitié, donc sous-fibré lagrangien du fibré non dégénéré γ^0/γ.

Notons R l'application de l'ensemble des sous-fibrés lagrangiens de W ne coupant pas γ dans l'ensemble des sous-fibrés lagrangiens de γ^0/γ définie par $R(\lambda)=\lambda \cap \gamma^0/\gamma$.

III.2.2. LEMME. — R *est une fibration localement triviale à fibres contractiles.*

Démonstration. — Soit W_1 un sous-fibré de γ^0 supplémentaire de γ, alors W_1 est non dégénéré et isométrique à γ^0/γ (on identifiera W_1 et γ^0/γ). Soit $W_2=W_1^0$, alors W est la somme orthogonale de W_1 et W_2 et γ est un sous-fibré lagrangien de W_2.

On choisit γ_1 sous-fibré lagrangien de W_2 transverse à γ.

Soit ζ_0 sous-fibré lagrangien de $\gamma^0/\gamma=W_1$; on choisit ζ_1 sous-fibré lagrangien de γ^0/γ transverse à ζ_0 et on pose

$$\Omega=\Omega(\zeta_0)=\{\text{sous-fibré lagrangien de } \gamma^0/\gamma \text{ transverse à } \zeta_1\}.$$

Nous allons construire une trivialisation de R *au-dessus de* $\Omega(\zeta_0)$.

Notons pr la projection $W_1 \to \zeta_0$ dans la décomposition $W_1 = \zeta_0 \oplus \zeta_1$. Soit $\zeta \in \Omega(\zeta_0)$ et écrivons $W_1 = \zeta \oplus \zeta_1$; alors $S_\zeta^1 : W_1 \to W_1$, qui est $\mathrm{pr}_{|\zeta}$ sur ζ et Id sur ζ_1, est une isométrie puisque ζ est lagrangien et

$$S_\zeta^1(\zeta) = \zeta_0.$$

Notons S_ζ l'isométrie de W qui est S_ζ^1 sur W_1 et l'identité sur W_2. Soit $u : \zeta_0 \to \zeta$ un morphisme; notons $u^* : \gamma_1 \to \zeta_1$ le morphisme défini par

$$\forall x \in X, \quad \forall y \in \zeta_{0x}, \quad \forall z_1 \in \gamma_{1\,x}, \qquad b_x(u_x^* z_1, y) = b_x(z_1, u_x y)$$

et définissons $T_u : W = \zeta_0 \oplus \zeta_1 \oplus \gamma \oplus \gamma_1 \to W$ par la formule

$$(T_u)_x(y, y_1, z, z_1) = (y, y_1 - u_x^* z_1, z + u_x y, z_1).$$

D'après le choix de u^*, T_u est une isométrie de W et

$$T_u(\zeta_0) = \text{graphe}(u) \subset \zeta_0 \oplus 0 \oplus \gamma \oplus 0$$
$$T_{u\,|\,\gamma} = \mathrm{Id}_\gamma.$$

Si $\zeta \in \Omega(\zeta_0)$, notons $u_\zeta = u \circ (\mathrm{pr}_{|\zeta}) : \zeta \to \gamma$; alors $S_\zeta^{-1} T_u(\zeta_0)$ est le graphe de u_ζ (noté Γ_{u_ζ}). En effet

$$\{ S_\zeta^{-1}(y, 0; uy, 0 \} = \{ ((\mathrm{pr}_{|\zeta})^{-1} y), uy, 0 \} = \{ (y', u_\zeta y', 0) y' \in \zeta_x \subset W_{1\,x} \};$$

donc $S_\zeta^{-1} T_u$ est une isométrie de W qui induit une isométrie de $(\zeta_0)^0/\zeta_0 = W_2$ sur $(\Gamma_{u_\zeta})^0/\Gamma_{u_\zeta}$, et cette isométrie est l'identité sur l'image de γ.

Soit $\mathscr{F} = \{$morphisme de ζ_0 dans $\gamma\} \times \{$ sous-fibré lagrangien de W_2 transverse à $\gamma\}$. $\mathscr{F}$ est un espace affine.

Construisons $\Phi : \Omega \times \mathscr{F} \to R^{-1}(\Omega)$. — Si $(\zeta, u, \eta) \in \Omega \times \mathscr{F}$, notons q la projection de $(\Gamma_{u_\zeta})^0$ sur $(\Gamma_{u_\zeta})^0/\Gamma_{u_\zeta}$. $(S_\zeta^{-1} T_u)(\eta)$ est un lagrangien de $(\Gamma_{u_\zeta})^0/\Gamma_{u_\zeta}$ transverse à l'image de γ, donc $\Phi(\zeta, u, \eta) = q^{-1}(S_\zeta^{-1} T_u(\eta))$ est un lagrangien de W ne coupant pas γ et $R\,\Phi(\zeta, u, \eta) = \zeta$.

Construisons $\Psi : R^{-1}(\Omega) \to \Omega \times \mathscr{F}$. — Si $\lambda \in R^{-1}(\Omega)$, soit $\zeta = R(\lambda) =$ projection de $\lambda \cap \gamma^0$ dans W_1. Comme $\lambda \cap \gamma = 0$, $\lambda \cap \gamma^0$ est le graphe d'un certain morphisme $v : \zeta \to \gamma$ (où on considère ζ comme inclus dans γ^0 par $W_1 \subset \gamma^0$).

Posons $u = v \circ (\mathrm{pr}_{|\zeta})^{-1} : \zeta_0 \to \gamma$; alors $u_\zeta = v$.

Comme $\lambda \cap \gamma^0 = \Gamma_v$, $\lambda + \gamma = (\Gamma_v)^0$; donc λ définit $\lambda/\lambda \cap \gamma^0$ lagrangien de $\Gamma_v^0/\Gamma_v = (\Gamma_{u_\zeta})^0/\Gamma_{u_\zeta}$ transverse à l'image de γ. On pose alors $\eta = (S_\zeta^{-1} T_u)^{-1}(\lambda/\lambda \cap \gamma^0)$ lagrangien de W_2 transverse à γ. On définit $\Psi(\lambda) = (\zeta, u, \eta)$, alors Ψ est un homéomorphisme inverse de Φ.

III.2.3. Corollaire 1. — *Supposons* $\lambda \cap \gamma = \mu \cap \gamma = 0$ *et notons* $\lambda' = \lambda \cap \gamma^0/\gamma$ *et* $\mu' = \mu \cap \gamma^0/\gamma$ *sous-fibrés lagrangiens de* γ^0/γ; *alors*

$$d(\lambda, \mu) = d(\lambda', \mu').$$

Preuve. — Il existe N, un sous-fibré lagrangien ε de $X \times E_N$ dont la classe dans $[X, \Lambda]$ est $d(\lambda', \mu')$), et une déformation μ'_t de sous-fibrés lagrangiens de $\gamma^0/\gamma \oplus E_N$ telle que $\mu'_0 = \mu' \oplus F_0^N$ et $\mu'_1 = \lambda' \oplus \varepsilon$.

Comme la réduction R (pour $W \oplus E_N$ et $\gamma \oplus 0$) est une fibration, il existe une déformation μ_t de lagrangiens de $W \oplus E_N$ avec $\mu_0 = \mu \oplus F_0^N$ et $R(\mu_1) = \lambda' \oplus \varepsilon$, or $R(\lambda \oplus \varepsilon) = \lambda' \oplus \varepsilon$ et, comme la fibre de R est contractile, on peut déformer μ_1 en $\lambda \oplus \varepsilon$, donc $d(\lambda, \mu) = [\varepsilon] = d(\lambda', \mu') \in [X, \Lambda]$.

III.2.4. COROLLAIRE 2. — *Avec les mêmes notations, on suppose* $\gamma \subset \lambda$ *et* $\mu \cap \gamma = 0$; *on pose* $\lambda' = \lambda/\gamma$ *et* $\mu' = \mu \cap \gamma^0/\gamma$ *sous-fibrés lagrangiens de* γ^0/γ, *alors*

$$d(\lambda, \mu) = d(\lambda', \mu').$$

Preuve. — Choisissons un sous-fibré δ avec $\lambda = \gamma \oplus \delta$; δ est isotrope. Soit π la projection $\delta^0 \to \delta^0/\delta$; comme $\lambda \subset \delta^0$ et $\lambda \cap \delta^0 = \gamma \oplus \delta$, $\pi\lambda = \pi\gamma$ est un sous-fibré lagrangien de δ^0/δ. Choisissons une famille ν_t ($t \in [0, 1]$) de lagrangiens de δ^0/δ avec $\nu_0 = \pi\gamma$ et, pour $t > 0$, $\nu_t \cap \pi\gamma = 0$. (Par exemple, on choisit ν_1 lagrangien transverse à $\pi\gamma$, et ζ une transversale lagrangienne à $\pi\gamma$ et ν_1, et ν_t est la déformation barycentrique de $\pi\gamma$ à ν_1 dans Λ_ζ.) Posons $\lambda_t = \pi^{-1}\nu_t$, c'est un lagrangien de W ($\lambda_0 = \lambda$) et, pour tout t, $\lambda_t \cap \gamma^0 \supset \delta$, donc lui est égal par raison de dimension, donc $\lambda_t \cap \gamma^0/\gamma = \lambda \cap \gamma^0/\gamma = \lambda'$ est indépendant de t.

Pour $t > 0$, on applique le corollaire 1, $d(\lambda', \mu') = d(\lambda_t, \mu)$. Or,

$$d(\lambda_t, \mu) = d(\lambda_0, \mu) = d(\lambda, \mu).$$

III.2.5. Soient ξ' et η' deux sous-fibrés lagrangiens d'un fibré non dégénéré W. Soit V un K-vectoriel considéré comme fibré trivial sur X. Soit $a : \xi' \to V$ un morphisme injectif sur chaque fibre. Notons ξ_a le graphe de $a : \xi_a \subset \xi' \oplus V \oplus 0 \subset W \oplus H(V)$, c'est un sous-fibré isotrope. Soit $\mathscr{H} = W \oplus V \oplus 0$ sous-fibré coisotrope $\mathscr{H}^0 = 0 \oplus V \oplus 0$ et $\mathscr{H} \cap (\xi_a)^0 = (\mathscr{H}^0 + \xi_a)^0 = (\mathscr{H}^0 \oplus \xi_a)^0 = (\xi' \oplus V \oplus 0)^0$ qui est lagrangien de $W \oplus HV$.

Le sous-fibré lagrangien $\eta' \oplus 0 \oplus V^*$ est transverse à $(\xi_a)^0$ car $(\eta' \oplus 0 \oplus V^*) \cap \xi_a = 0$ puisque a est injective.

Dans le fibré non dégénéré $(\xi_a)^0/\xi_a$, on a les deux lagrangiens

$$\xi = \xi' \oplus V \oplus 0/\xi_a = \mathscr{H} \cap (\xi_a)^0/\xi_a \qquad \text{et} \qquad \eta = (\eta' \oplus 0 \oplus V^*) \cap (\xi_a)^0/\xi_a.$$

COROLLAIRE 3. — $d(\xi, \eta) = d(\xi', \eta')$.

Il suffit d'appliquer le corollaire 2 à $\lambda = \xi' \oplus V \oplus 0$, $\mu = \eta' \oplus 0 \oplus V^*$ et $\gamma = \xi_a$, car $d(\lambda, \mu) = d(\xi', \eta')$.

III.3. TRANSVERSALES LAGRANGIENNES

III.3.1. Soient ξ et η deux sous-fibrés lagrangiens de W. On appelle transversale lagrangienne commune à ξ et η un sous-fibré lagrangien ζ de $W \oplus E_p$ transverse à $\xi \oplus F_0^p$ et $\eta \oplus F_1^p$.

On note $T(\xi, \eta, W \oplus E_p)$ l'ensemble des classes d'isotopie dans $W \oplus E_p$ de transversales lagrangiennes communes à ξ et η; on a une stabilisation $T(\xi, \eta, W \oplus E_p) \to T(\xi, \eta, W \oplus E_p \oplus E_q)$ qui à ζ associe $\zeta \oplus \Delta^q$.

On note $T(\xi, \eta) = \varinjlim_{p} T(\xi, \eta, W \oplus E_p)$.

III.3.2. *Action de* $[X, \hat{\Lambda}]$ *sur* $T(\xi, \eta)$. — Soit ζ une transversale à ξ et η et soit $v \in [X, \hat{\Lambda}]$ représentée par $d: X \to \hat{\Lambda}_n$ identifié au fibré lagrangien correspondant de E_n transverse à F_0^n et F_1^n.

Comme en III.1.4, la classe de la transversale $\zeta \oplus d \subset W \oplus E_p \oplus E_n$ ne dépend pas du choix de d, ni du choix de ζ dans sa classe $[\zeta] \in T(\xi, \eta)$; on pose $[\zeta] + v = [\zeta \oplus d]$.

La somme directe munit $[X, \hat{\Lambda}]$ d'une structure de semi-groupe abélien; c'est en fait un groupe car si $a: X \to \hat{\Lambda}_n$ est représenté par graphe (α_x) $(\alpha_x: F_0 \to F_1)$, l'inverse de a est essentiellement donné par graphe $(-\alpha_0 \alpha_x^{-1} \alpha_0)$.

En effet, la déformation d'isomorphismes de $F_0 \oplus F_0$ sur $F_1 \oplus F_1$

$$\begin{pmatrix} \cos\theta\alpha_x & \sin\theta\alpha_0 \\ \sin\theta\alpha_0 & -\cos\theta\alpha_0\alpha_x^{-1}\alpha_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_x & 0 \\ 0 & \alpha_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta\alpha_0^{-1} & -\sin\theta\alpha_0^{-1} \\ \sin\theta\alpha_0^{-1} & \cos\theta\alpha_0^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 & 0 \\ 0 & -\alpha_0\alpha_x^{-1}\alpha_0 \end{pmatrix}$$

relie $\begin{pmatrix} \alpha_x & 0 \\ 0 & -\alpha_0\alpha_x^{-1}\alpha_0 \end{pmatrix}$ à la matrice constante $\begin{pmatrix} 0 & \alpha_0 \\ \alpha_0 & 0 \end{pmatrix}$, et le graphe est toujours lagrangien $\Bigg[$si $\begin{pmatrix} 0 & \alpha_0 \\ \alpha_0 & 0 \end{pmatrix}$ est dans une mauvaise composante de $\hat{\Lambda}_{2n}$, on rajoute quelque chose de constant pour arriver dans la bonne composante de $\hat{\Lambda}_{4n}\Bigg]$.

Il est clair que $T(\xi, \eta) \times [X, \hat{\Lambda}] \to T(\xi, \eta)$ est une action de groupe.

III.3.3. THÉORÈME. — *Soient* ξ *et* η *deux sous-fibrés lagrangiens de* W
$T(\xi, \eta) \neq \varnothing \Leftrightarrow d(\xi; \eta) = 0 \in [X, \Lambda]$.

Si $T(\xi, \eta) \neq \varnothing$, *c'est un espace affine sous* $[X, \hat{\Lambda}]$.

Démonstration. — (1) Si $\zeta \subset W \oplus E_p$ est transverse à $\xi \oplus F_0^p$ et $\eta \oplus F_1^p$, alors $\xi \oplus F_0^p$ se déforme en $\eta \oplus F_1^p$ parmi les lagrangiens transverses à ζ et bien sûr $\eta \oplus F_1^p$ se déforme en $\eta \oplus F_0^p$ dans les lagrangiens de $W \oplus E_p$; donc $d(\xi, \eta) = 0$.

(2) *On se ramène au cas où* W *est le fibré trivial* E_n.

Cas non dégénéré. — On choisit un sous-fibré lagrangien $\lambda_0 \subset W$ et une isométrie $W \simeq H(\lambda_0)$; on choisit un fibré λ_1, avec une trivialisation $\lambda_1 \oplus \lambda_0 \simeq K^{4n}$ de sorte qu'on a une isométrie $H(\lambda_1) \oplus H(\lambda_0) \simeq E_n$ et une isométrie $\Phi: H(\lambda_1) \oplus W \xrightarrow{\sim} E_n$.

Les classes d'isotopie de fibrés lagrangiens de $H(\lambda_i)$ transverses à λ_i et λ_i^* sont, d'après I.1.6, les classes d'homotopie de formes $(-\varepsilon)$-symétriques non dégénérées sur λ_i.

On choisit $\delta_0 \subset H(\lambda_0)$ transverse à λ_0 et λ_0^*; quitte à grossir λ_1, on choisit $\delta_1 \subset H(\lambda_1)$ transverse à λ_1 et λ_i^* de sorte que $\delta_1 \oplus \delta_0$, considéré comme application de X dans l'espace des formes $(-\varepsilon)$-symétriques non dégénérées sur K^{4n}, soit homotope à zéro. Alors $\Phi(\delta_1 \oplus \delta_0)$ est un lagrangien de E_n transverse à $F_0^n = \Phi(\lambda_1 \oplus \lambda_0)$ et $F_1^n = \Phi(\lambda_1^* \oplus \lambda_0^*)$, et $\Phi(\delta_1 \oplus \delta_0)$ se déforme en Δ^n à travers les transversales à F_0^n et F_1^n.

Posons $\xi' = \Phi(\lambda_1 \oplus \xi)$ et $\eta' = \Phi(\lambda_1^* \oplus \eta)$. Il est clair que $d(\xi', \eta') = d(\xi, \eta)$.

Associer à la transversale ζ à ξ et η, $\Phi(\delta_1 \oplus \zeta)$ transversale commune à ξ' et η' définit clairement une application $g: \mathrm{T}(\xi, \eta) \to \mathrm{T}(\xi', \eta')$ qui est équivariante pour l'action de $[\mathrm{X}, \hat{\Lambda}]$.

Soit ζ' fibré lagrangien de $\mathrm{E}_n \oplus \mathrm{E}_p$ transverse à $\xi' \oplus \mathrm{F}_0^p$ et $\eta' \oplus \mathrm{F}_1^p$. Soit, comme en 1.2, $r_\theta (\theta \in [0, \pi/2])$ l'isotopie d'échange des deux facteurs $\mathrm{H}(\lambda_1)$ dans $\mathrm{H}(\lambda_1) \oplus \mathrm{H}(\lambda_0) \oplus \mathrm{E}_p \oplus \mathrm{H}(\lambda_1) \oplus \mathrm{H}(\lambda_0)$ et posons

$$\bar{r}_\theta = (\Phi \oplus \mathrm{I} \oplus \Phi) r_\theta (\Phi \oplus \mathrm{I} \oplus \Phi)^{-1} : \mathrm{E}_n \oplus \mathrm{E}_p \oplus \mathrm{E}_n \to \mathrm{E}_n \oplus \mathrm{E}_p \oplus \mathrm{E}_n.$$

Il est clair que, pour tout $\theta \in [0, \pi/2]$

$$\bar{r}_\theta(\xi' \oplus \mathrm{F}_0^p \oplus \mathrm{F}_0^n) = \xi' \oplus \mathrm{F}_0^p \oplus \mathrm{F}_0^n \qquad \text{et} \qquad \bar{r}_\theta(\eta' \oplus \mathrm{F}_1^p \oplus \mathrm{F}_1^n) = \eta' \oplus \mathrm{F}_1^p \oplus \mathrm{F}_1^n.$$

$\zeta' \oplus \Phi(\delta_1 \oplus \delta_0)$ se déforme en $\zeta' \oplus \Delta^n$. $\bar{r}_{\pi/2}(\zeta' \oplus \Phi(\delta_1 \oplus \delta_0) = \Phi(\delta_1 \oplus \bar{\zeta})$ pour un certain fibré lagrangien $\bar{\zeta}$ de $\mathrm{W} \oplus \mathrm{E}_p \oplus \mathrm{E}_n$ transverse à $\xi \oplus \mathrm{F}_0^{p+n}$ et $\eta \oplus \mathrm{F}_1^{p+n}$.

Associer $\bar{\zeta}$ à ζ' définit une application $h: \mathrm{T}(\xi', \eta') \to \mathrm{T}(\xi, \eta)$ qui est $[\mathrm{X}, \hat{\Lambda}]$ équivariante et g et h sont des bijections réciproques.

Nous laissons au lecteur le soin de faire les modifications (analogues à celles de III.1.5) nécessaire pour le cas amorphe.

(3) *Existence*. Si $d(\xi, \eta) = 0$, quitte à changer de notations, on peut supposer qu'il existe une déformation η_t entre $\eta_0 = \eta$ et $\eta_1 = \xi$. On définit $f: \mathrm{X} \times \mathrm{I} \to \Lambda_n \times \Lambda_n$ par $f(x, t) = (\xi_x, \eta_{1-t, x})$. Choisissons un lagrangien ξ' transverse à ξ, alors $\mathrm{F}(x, 0) = (f(x, 0), \xi'_x) \in \mathrm{Z}_{n, 0}$ et est un relèvement de $f_{|\mathrm{X} \times 0}$. D'après I.4, il existe un relèvement $\mathrm{F}: \mathrm{X} \times \mathrm{I} \to \mathrm{Z}_n$ de $f: \mathrm{X} \times \mathrm{I} \to \Lambda_n \times \Lambda_n$. Par compacité, il existe p tel que $\mathrm{F}(\mathrm{X} \times 1) \subset \mathrm{Z}_{n, p}$ et

$$\mathrm{F}_{|\mathrm{X} \times 1} = (\xi \oplus \mathrm{F}_0^p, \eta \oplus \mathrm{F}_1^p, \zeta) : \mathrm{X} \to \mathrm{Z}_{n, p};$$

donc ζ est une transversale lagrangienne commune à ξ et η.

(4) *Classification*. Soient ζ et ζ' des transversales communes à ξ et η; pour simplifier les notations, on suppose que ζ et ζ' sont dans E_n. Soit $d: \mathrm{X} \to \hat{\Lambda}_{6n}$

$$d(x) = \mathrm{I}(\xi_x, \eta_x, \zeta_x, \zeta'_x).$$

D'après I.3, $\zeta \oplus \Delta^{6n}$ se déforme, comme transversale commune à ξ et η, en $\zeta' \oplus d$, donc $[\zeta] = [\zeta'] + [d]$ dans $\mathrm{T}(\xi, \eta)$.

Réciproquement, si $v \in [\mathrm{X}, \hat{\Lambda}]$ est tel que $[\zeta] + v = [\zeta]$ et si v est représenté par $d: \mathrm{X} \to \hat{\Lambda}_p$, alors $\zeta \oplus \Delta^{p+q}$ se déforme comme transversale dans E_{n+p+q} en $\zeta \oplus d \oplus \Delta^q$, donc $\mathrm{I}(\xi \oplus \mathrm{F}_0^{p+q}, \eta \oplus \mathrm{F}_1^{p+q}, \zeta \oplus \Delta^{p+q}, \zeta \oplus d \oplus \Delta^q)$ est une application de X dans $\Lambda_{6(n+p+q)}$ homotope à zéro. Or

$$\begin{aligned} &\mathrm{I}(\xi \oplus \mathrm{F}_0^{p+q}, \eta \oplus \mathrm{F}_1^{p+q}, \zeta \oplus \Delta^{p+q}, \zeta \oplus d \oplus \Delta^q) \\ &\qquad = \mathrm{I}(\xi, \eta, \zeta, \zeta) \oplus \mathrm{I}(\mathrm{F}_0^p, \mathrm{F}_1^p, \Delta^p, d) \oplus \mathrm{I}(\mathrm{F}_0^q, \mathrm{F}_1^q, \Delta^q, \Delta^q); \end{aligned}$$

donc $\mathrm{I}(\mathrm{F}_0^p, \mathrm{F}_1^p, \Delta^p, d): \mathrm{X} \to \hat{\Lambda}_{6p}$ est homotope à zéro dans $\hat{\Lambda}$. Comme $d \oplus \mathrm{I}(\mathrm{F}_0^p, \mathrm{F}_1^p, \Delta^p, d)$ se déforme en Δ^{7p} dans $\hat{\Lambda}_{7p}$, la classe de d est nulle dans $[\mathrm{X}, \hat{\Lambda}]$.

III.3.4. *Remarque.* — Si ζ et ζ' sont fibrés lagrangiens de E_n transverses à ξ et η, naturellement la différence entre ζ et ζ' est la classe d'homotopie de $X \to \Omega\Lambda$ qui, au point x, associe le lacet en ξ_x formé en se déplaçant linéairement dans Λ_{ζ_x} de ξ_x à η_x, puis en revenant linéairement dans $\Lambda_{\zeta'_x}$.

L'équivalence d'homotopie faible $\hat{\Lambda} \to \Omega\Lambda$ unifie les deux points de vue.

III.4. PAIRE DE FORMES QUADRATIQUES ASSOCIÉES

III.4.1. Les constructions de la fin du chapitre peuvent se faire pour toute forme sesquilinéaire ε-symétrique non dégénérée ou dans le cas amorphe et considèrent les espaces entrant dans la périodicité de Bott avec leur structure naturelle de classifiant. Mais ces constructions s'effectuent au cas par cas, aussi nous nous limitons au cas symplectique ($\mathbb{R}$ bilinéaire antisymétrique) qui sera le cas utilisé au chapitre IV.

Si ξ et η sont deux lagrangiens transverses de W, les transversales communes $\zeta \subset W$ sont en bijection avec les formes quadratiques non dégénérées sur ξ. Si $q:\xi \to \mathbb{R}$ est une telle forme et si s est une métrique sur ξ et $u:\xi \to \xi$ l'isomorphisme symétrique tel que $q_x(y) = s_x(u_x y, y)$, la classe d'homotopie stable de q dans $[X, \hat{\Lambda}] = [X, \mathbb{Z} \times BO]$ est déterminée par la classe stable du fibré $V^-(u)$ formé par les sous-espaces propres de u associés aux valeurs propres négatives. Si q et q' sont deux formes quadratiques non dégénérées, leur différence est alors

$$[V^-(u)] - [V^-(u')] \simeq [V^-(u)] + [V^+(u')] - [\xi] \in [X, \mathbb{Z} \times BO]$$

dont la dimension virtuelle est indice (q) − indice (q').

Nous allons généraliser cette dernière expression dans le cas où ξ est η ne sont plus transverses.

III.4.2. DÉFINITION. — Soit ξ un fibré réel sur X; on dit que deux formes quadratiques q et q' sur ξ sont une paire de formes associées si, au voisinage de tout $x_0 \in X$, il existe une trivialisation locale de $\xi_{|U}$ dans laquelle q_x (resp. q'_x) se lit en la matrice symétrique A_x (resp. A'_x), et il existe une matrice symétrique B_x dépendant continûment de $x \in U$ avec

(1) $I - A_x B_x$ inversible;

(2) $A'_x = (I - A_x B_x) A_x = A_x (I - B_x A_x), \forall x \in U$.

III.4.3. *Remarque.* — C'est indépendant de la trivialisation, être associé est une relation d'équivalence (par exemple si $A'_x = (I - A_x B_x) A_x$, il suffit de prendre $B'_x = -(I - B_x A_x)^{-2} B_x$ pour écrire $A_x = (I - A'_x B'_x) A'_x$. Si q et q' sont associées, alors $\forall x \in X$, $\operatorname{rad} q_x = \operatorname{rad} q'_x$.

III.4.4. Soit s une métrique euclidienne sur ξ et soient u et $u':\xi \to \xi$ les morphismes auto-adjoints représentant deux formes quadratiques q et q'

$$\forall x \in X, \quad \forall y \in \xi_x, \qquad q_x(y) = s_x(u_x y, y), \qquad q'_x(y) = s_x(u'_x y, y).$$

S'il existe un morphisme auto-adjoint $v:\xi \to \xi$ avec $1 - uv$ isomorphisme et $u' = (1 - uv) u$, alors q et q' sont associées; la définition demande justement l'existence locale d'un tel v.

Notation. — Soient P et Q deux sous-espaces d'un espace euclidien E; on dit que P et Q sont ε-orthogonaux si

$$\forall y \in \mathrm{P}, \quad \forall z \in \mathrm{Q}, \qquad |\langle y, z \rangle| \leqq \varepsilon \|y\| . \|z\|.$$

Si $\varepsilon < 1$ et si P et Q sont ε-orthogonaux, alors $\mathrm{P} \cap \mathrm{Q} = \{0\}$.

III.4.5. Lemme. — *Soit* P_0 *un p-plan de* $\mathbb{R}^n$ *euclidien; soit* U *un voisinage de* P_0 *dans* G *la grassmannienne des p-plans de* $\mathbb{R}^n$. *Il existe* $\eta > 0$ *et un voisinage* V *de* P_0 *dans* G *tels que*: *Pour tous* P *et* Q *dans* V *et pour toutes décompositions* $\mathrm{P} = \mathrm{P}' \oplus \mathrm{P}''$, $\mathrm{Q} = \mathrm{Q}' \oplus \mathrm{Q}''$ *avec* P' *et* Q'' *η-orthogonaux, de même* P'' *et* Q'*; alors* $\mathrm{P}' + \mathrm{Q}''$ *et* $\mathrm{P}'' + \mathrm{Q}'$ *sont de dimension p et sont dans* U.

Preuve. — Soient $\mathrm{P}_1 = \mathrm{P}_0^{\perp}$ et π la projection orthogonale sur P_0. Choisissons $\eta \in]0, 1/2[$ avec $4\eta/1 - \eta^2 < 1$ et $\{p\text{-plans de } \mathbb{R}^n \ (2\eta)\text{-orthogonaux à } \mathrm{P}_1\} \subset \mathrm{U}$ et soit $\mathrm{V} = \{p \text{ plans } \eta\text{-orthogonaux à } \mathrm{P}_1\}$.

Si $\mathrm{P} \in \mathrm{V}$ et si $y \in \mathrm{P}$, alors $y = \pi y + y'$ avec $y' \in \mathrm{P}_1$ et

$$\|y'\|^2 = \langle y, y' \rangle \leqq \eta \|y\| . \|y'\|;$$

donc

$$\|y'\| \leqq \eta \|y\| \qquad \text{et} \qquad \|y\| \leqq 1/\sqrt{1-\eta^2}\, \|\pi y\|.$$

Si P et Q sont dans V, $\mathrm{P} = \mathrm{P}' \oplus \mathrm{Q}''$, $\mathrm{Q} = \mathrm{Q}' \oplus \mathrm{Q}''$ avec P' η-orthogonal à Q'' et P'' η-orthogonal à Q'. Vérifions que $\pi \mathrm{P}'$ et $\pi \mathrm{Q}''$ sont $4\eta/1 - \eta^2$-orthogonaux. Soient $y \in \mathrm{P}'$, $z \in \mathrm{Q}''$, $y' = y - \pi y$ et $z' = z - \pi z$, alors

$$\langle \pi y, \pi z \rangle = \langle y, z \rangle - \langle y', z \rangle - \langle y, z' \rangle + \langle y', z' \rangle$$

et

$$|\langle \pi y, \pi z \rangle| \leqq \|y\| . \||z\| (\eta + \eta + \eta + \eta^2) \leqq 4\eta \|y\| . \|z\| \leqq \frac{4\eta}{1-\eta^2} \|\pi y\| . \|\pi z\|.$$

On a donc

$$\dim \mathrm{P}' + \dim \mathrm{Q}'' = \dim \pi \mathrm{P}' + \dim \pi \mathrm{Q}'' \leqq \dim \mathrm{P}_0 = p$$

et de même

$$\dim \mathrm{P}'' + \dim \mathrm{Q}' = \dim \pi \mathrm{P}'' + \dim \pi \mathrm{Q}' \leqq \dim \mathrm{P}_0 = p.$$

Or $\dim \mathrm{P}' + \dim \mathrm{P}'' = \dim \mathrm{Q}' + \dim \mathrm{Q}'' = p$, donc les deux inégalités précédentes sont des égalités, donc $\mathrm{P}' + \mathrm{Q}''$ et $\mathrm{P}'' + \mathrm{Q}'$ sont de dimension p.

De plus, si $y \in \mathrm{P}'$, $z \in \mathrm{Q}''$ et $v \in \mathrm{P}_1$

$$|\langle y + z, v \rangle| = |\langle y, v \rangle + \langle z, v \rangle| \leqq \eta \|v\| (\|y\| + \|z\|) \leqq 2\eta \|v\| . \|y + z\|$$

puisque

$$\|y+z\|^2 \geqq \|y\|^2+\|z\|^2-2\eta\|y\|.\|z\| \geqq \|y\|^2+\|z\|^2-\|y\|.\|z\| \geqq \frac{1}{4}(\|y\|+\|z\|)^2;$$

donc $P'+Q''\in U$, et de même $P''+Q'\in U$.

III.4.6. Soient s une métrique euclidienne sur ξ, $q:\xi\to\mathbb{R}$ une forme quadratique et $u:\xi\to\xi$ le morphisme auto-adjoint associé. Pour chaque $x\in X$, on note $V^{\leqq 0}(u_x)$ le sous-espace de ξ_x engendré par les vecteurs propres de u_x associés aux valeurs propres négatives ou nulles et $V^{>0}(u_x)$ le sous-espace associé aux valeurs propres positives. Si q n'est pas non dégénéré, ces sous-espaces ne forment pas un sous-fibré de ξ, mais nous allons voir que si q et q' sont associées, alors les $V^{\leqq 0}(u_x)\oplus V^{>0}(u'_x)$ définissent un fibré vectoriel sur X.

Ici la somme directe est une somme abstraite; nous réserverons la notation $\oplus$ à des sommes abstraites ou à des sommes de Whitney de fibrés; les sommes dans ξ_x (même si elles sont directes) seront notées $+$.

PROPOSITION. — *Soient q et q' des formes associées sur ξ muni d'une métrique s; la collection des* $V^{\leqq 0}(u_x)\oplus V^{>0}(u'_x)$ *définit un fibré sur* X *noté* $\{V^{\leqq 0}(u_x)\oplus V^{>0}(u'_x)\}$.

Preuve. — Soit $x_0\in X$ et soit $\varepsilon>0$ petit tel que ni u_{x_0} ni u'_{x_0} n'ait de valeurs propres dans $[-\varepsilon, 0[\bigcup]0,\varepsilon]$. Soit U un petit voisinage de x_0 tel que $\pm\varepsilon$ n'est pas valeur propre de u_x ou de u'_x pour $x\in U$. Le fibré $\xi_{|U}$ se décompose en somme orthogonale de deux sous-fibrés stables par $u:\xi_{|U}=\mathscr{L}\oplus\mathscr{K}$ où $L_{x_0}=\operatorname{rad} q_{x_0}$ de dimension p et les valeurs propres de $u_{x|L_x}$ sont dans $]-\varepsilon,\varepsilon[$ et celles de $u_{x|K_x}$ sont dans $\mathbb{R}-[-\varepsilon,\varepsilon]$; le fibré $\mathscr{K}$ se décompose lui-même en $\mathscr{K}^-\oplus\mathscr{K}^+$ ($\mathscr{K}^{\pm}$ correspondant aux valeurs propres positives ou négatives). On a une décomposition analogue $\xi_{|U}=\mathscr{L}'\oplus\mathscr{K}'$ associée à u' et $L'_{x_0}=\operatorname{rad} q'_{x_0}=\operatorname{rad} q_{x_0}=L_{x_0}$. Il existe une fonction $\varepsilon:U\to\mathbb{R}$ avec $\varepsilon(x)\xrightarrow[x\to x_0]{}0$ tel que les valeurs propres de $u_{x|L_x}$ et de $u'_{x|L'_x}$ sont dans $[-\varepsilon(x),\varepsilon(x)]$, donc $\|u_{x|L_x}\|\leqq\varepsilon(x)$ et $\|u'_{x|L'_x}\|\leqq\varepsilon(x)$.

Comme L'_{x_0} est orthogonal à K_{x_0}, il existe une fonction $\varepsilon':U\to\mathbb{R}$ tendant vers 0 lorsque $x\to x_0$ et telle que la projection orthogonale de L'_x dans K_x soit de norme $\leqq\varepsilon'(x)$.

Pour chaque $x\in U$, décomposons $L_x=L_x^-+L_x^0+L_x^+$ (décomposition orthogonale suivant le signe des valeurs propres de u_x); de même $L'_x=L'^-_x+L'^0_x+L'^+_x$ et $L^0_x=\operatorname{rad} q_x=\operatorname{rad} q'_x=L'^0_x$ est orthogonal à $L^{\pm}_x$ et à $L'^{\pm}_x$.

Je dis que, quitte à restreindre U, il existe une fonction $\eta:U\to[0,1/2]$ avec $\eta(x)\xrightarrow[x\to x_0]{}0$ telle que $L_x^-+L_x^0$ est $\eta(x)$-orthogonal à L'^+_x et $L'^-_x+L'^0_x$ $\eta(x)$-orthogonal à L_x^+.

Soit $(e_1,\ldots,e_q)$ une base orthonormée de L_x^- formée de vecteurs propres de u_x ($u_x e_i=-\lambda_i e_i, \lambda_i>0$) et soit $(f_1,\ldots,f_r)$ une base orthonormée de L'^+_x formée de vecteurs propres de u'_x ($u'_x f_j = \lambda'_j f_j$ avec $\lambda'_j > 0$). On a

$$-\lambda_i s_x(e_i, f_j) = s_x(u_x e_i, f_j) \qquad \text{et} \qquad \lambda'_j s_x(e_i, f_j) = s_x(e_i, u'_x f_j) = s_x(u'_x e_i, f_j);$$

donc

$$(\lambda_i + \lambda'_j) s_x(e_i, f_j) = s_x((u'_x - u_x) e_i, f_j) = -s_x(u_x v_x u_x e_i, f_j)$$
$$= -s_x(v_x u_x e_i, u_x f_j) = \lambda_i s_x(v_x e_i, u_x f_j);$$

donc

$$|s_x(e_i, f_j)| = \frac{\lambda_i}{\lambda_i + \lambda'_j} |s_x(v_x e_i, u_x f_j)| \leqq \| v_x e_i \| . \| u_x f_j \|.$$

Or si $f_j = f'_j + f''_j$ avec $f'_j \in L_x$ et $f''_j \in K_x$, alors

$$\| f''_j \| \leqq \varepsilon'(x) \| f_j \| = \varepsilon'(x) \qquad \text{et} \qquad \| u_x f'_j \| \leqq \| u_{x \mid L_x} \| . \| f'_j \| \leqq \varepsilon(x) . 1;$$

donc

$$|s_x(e_i, f_j)| \leqq \| v \| (\varepsilon(x) + \| u \| \varepsilon'(x)).$$

Si $y = \sum y_i e_i \in L_x^-$ et $y' = \sum y'_j f_j \in L'^+_x$, alors

$$s_x(y, y') = \sum y_i y'_j s_x(e_i, f_j)$$

et

$$|s_x(y, y')| \leqq \| v \| (\varepsilon(x) + \| u \| \varepsilon'(x)) \sum |y_i| . |y'_j| \leqq p^2 \| v \| (\varepsilon(x) + \| u \| \varepsilon'(x)) \| y \| . \| y' \|$$

puisque $\dim L_x^- \leqq p$ et $\dim L'^+_x \leqq p$; d'où le résultat en posant

$$\eta(x) = p^2 \| v \| (\varepsilon(x) + \| u \| \varepsilon'(x))$$

et en restreignant U pour que $\eta(x) \leqq 1/2$. Le même résultat est valable pour L_x^+ et L'^-_x.

Pour $x \in U$, posons $F_x = L_x^- + L_x^0 + L'^+_x$; d'après la 1/2 orthogonalité, la somme est directe et F_x est un p-plan de ξ_x.

Pour voir que $\{F_x\}$ est un sous-fibré de $\xi_{\mid U}$, il reste à voir que F considérée comme section de $G(p, \xi_{\mid U})$ est continue ou, en utilisant une trivialisation locale de ξ que F considérée comme application de U dans $G(p, \mathbb{R}^n)$ est continue. La continuité en x_0 résulte immédiatement du lemme III.4.5 en posant

$$P_0 = L_{x_0}, \qquad P = L_x, \qquad P' = L_x^- + L_x^0, \qquad P'' = L_x^+.$$
$$Q = L'_x, \qquad Q' = L'^-_x + L'^0_x, \qquad Q'' = L'^+_x.$$

Pour montrer la continuité de F en $x_1 \in U$, on réapplique la même idée. On choisit $\varepsilon_1 > 0$ inférieur à ε de sorte que u_{x_1} et u'_{x_1} n'ont pas de valeur propre dans $[-\varepsilon_1, 0[\cup]0, \varepsilon_1]$ et on fixe $U_1 \subset U$ voisinage de x_1 tel que $\pm\varepsilon_1$ n'est pas valeur propre de u_x ou de u'_x

pour $x \in \mathrm{U}_1$. On décompose

$$\mathscr{L}_{|\mathrm{U}_1} = \mathscr{M} \oplus \mathscr{N}, \qquad \mathscr{L}'_{|\mathrm{U}_1} = \mathscr{M}' \oplus \mathscr{N}' \qquad \text{où} \quad \mathrm{M}_{x_1} = \operatorname{rad} q_{x_1} = \operatorname{rad} q'_{x_1} = \mathrm{M}'_{x_1}$$

de dimension p_1 et $\mathscr{N} = \mathscr{N}^- \oplus \mathscr{N}^+$ et $\mathscr{N}' = \mathscr{N}'^- \oplus \mathscr{N}'^+$; on a alors, pour $x \in \mathrm{U}_1$

$$\mathrm{F}_x = \mathrm{M}_x^- + \mathrm{M}_x^0 + \mathrm{M}_x'^+ + \mathrm{N}_x^- + \mathrm{N}_x'^+$$

(somme directe dans ξ_x identifié à $\mathbb{R}^n$); on vérifie comme précédemment que, dans $\mathrm{G}(p_1, \mathbb{R}^n)$, $\mathrm{M}_x^- + \mathrm{M}_x^0 + \mathrm{M}_x'^+ \underset{x \to x_1}{\longrightarrow} \mathrm{M}_{x_1}$. Comme $\mathscr{N}^-$ et $\mathscr{N}'^+$ sont des fibrés, la continuité de F en x_1 en résulte.

Introduisons maintenant des notations qui auraient compliqué les calculs précédents. Si Ω ouvert de X, on dit que $\mathscr{L}_{[a,b]}(\Omega)$ est défini si, pour tout $x \in \Omega$, ni a ni b ne sont valeurs propres de u_x; $\mathscr{L}_{[a,b]}(\Omega)$ est alors le sous-fibré de $\xi_{|\Omega}$ associé aux valeurs propres dans $]a, b[$.

Il est clair que, si $\Omega' \subset \Omega$, $\mathscr{L}_{[a,b]}(\Omega)_{|\Omega'} = \mathscr{L}_{[a,b]}(\Omega')$, et que si $\mathscr{L}_{[a,b]}(\Omega)$ et $\mathscr{L}_{[b,c]}(\Omega)$ sont définis, $\mathscr{L}_{[a,b]}(\Omega) \oplus \mathscr{L}_{[b,c]}(\Omega) = \mathscr{L}_{[a,c]}(\Omega)$ $(a < b < c)$. On pose $\mathscr{L}_{-a}(\Omega) = \mathscr{L}_{]-\infty, -a]}(\Omega)$, $\mathscr{L}_{+a}(\Omega) = \mathscr{L}_{[a, +\infty[}(\Omega)$ et des notations $\mathscr{L}'$ pour u'.

On dit que U_0 est un ε_0-voisinage de x_0 si c'est un voisinage de x_0 et

(1) u_{x_0} et u'_{x_0} n'ont pas de valeurs propres dans $[-\varepsilon_0, 0[\,\bigcup\,]0, \varepsilon_0]$;

(2) $\forall x \in \mathrm{U}_0$, $\pm\varepsilon_0$ non valeur propre de u_x ou de u'_x;

(3) $\forall x \in \mathrm{U}_0$, $\mathrm{L}_x'^+$ est 1/2 orthogonal à L_x^- et $\mathrm{L}_x'^-$ est 1/2 orthogonal à L_x^+ (avec des notations évidentes).

Dans ce cas, on a construit une section continue $\mathrm{F}_{\mathrm{U}_0}$ de $\mathrm{G}(p_0, \xi_{|\mathrm{U}_0})$ où $p_0 = \dim \operatorname{rad} q_{x_0}$ et une bijection naturelle préservant la structure vectorielle entre

$$\bigcup_{x \in \mathrm{U}_0} \{x\} \times (\mathrm{V}^{\leqq 0}(u_x) \oplus \mathrm{V}^{>0}(u'_x)) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{F}^*_{\mathrm{U}_0}(\gamma_{p_0}) \oplus \mathscr{L}_{-\varepsilon_0}(\mathrm{U}_0) \oplus \mathscr{L}'_{+\varepsilon_0}(\mathrm{U}_0).$$

Soit U_1 un ε_1-voisinage de x_1 et soit $x_2 \in \mathrm{U}_0 \cap \mathrm{U}_1$, alors

$$p_2 = \dim \operatorname{rad} q_{x_2} \leqq \min(p_0, p_1),$$

et il existe $\varepsilon_2 < \min(\varepsilon_0, \varepsilon_1)$ et un ε_2-voisinage U_2 de x_2 contenu dans $\mathrm{U}_0 \cap \mathrm{U}_1$. Alors pour $i = 0$ ou 1

$$\mathrm{F}^*_{\mathrm{U}_i}(\gamma_{p_i})_{|\mathrm{U}_2} = \mathrm{F}^*_{\mathrm{U}_2}(\gamma_{p_2}) \oplus \mathscr{L}_{[-\varepsilon_i, -\varepsilon_2]}(\mathrm{U}_2) \oplus \mathscr{L}'_{[\varepsilon_2, \varepsilon_i]}(\mathrm{U}_2)$$

$$\mathscr{L}_{-\varepsilon_i}(\mathrm{U}_i)_{|\mathrm{U}_2} = \mathscr{L}_{-\varepsilon_i}(\mathrm{U}_2)$$

$$\mathscr{L}'_{+\varepsilon_i}(\mathrm{U}_i)_{|\mathrm{U}_2} = \mathscr{L}'_{+\varepsilon_i}(\mathrm{U}_2);$$

d'où

$$(\mathrm{F}^*_{\mathrm{U}_i}(\gamma_{p_i}) \oplus \mathscr{L}_{-\varepsilon_i}(\mathrm{U}_i) \oplus \mathscr{L}_{+\varepsilon_i}(\mathrm{U}_i))_{|\mathrm{U}_2} = \mathrm{F}^*_{\mathrm{U}_2}(\xi_{p_2}) \oplus \mathscr{L}_{-\varepsilon_2}(\mathrm{U}_2) \oplus \mathscr{L}'_{+\varepsilon_2}(\mathrm{U}_2).$$

Ce qui montre que les cartes définies par les ε-voisinages forment un atlas de fibré sur X pour $\bigcup_{x \in X} \{x\} \times (V^{\leqq 0}(u_x) \oplus V^{>0}(u'_x))$.

III.4.7. Notons $\{V^{\leqq 0}(u) \oplus V^{>0}(u')\}$ ce fibré, il est clair que sa classe d'isomorphisme est indépendante de la métrique utilisée. Notons

$$\Delta(q, q') = [\{V^{\leqq 0}(u) \oplus V^{>0}(u')\}] - [\xi] \in [X, \mathbb{Z} \times BO].$$

Il est clair que si q, q' et q'' sont associées

$$\Delta(q, q'') = \Delta(q, q') + \Delta(q', q'').$$

Si q, q' sont associées sur ξ et si q_1, q'_1 sont associées sur ξ_1, alors $q + q_1$ et $q' + q'_1$ sont des formes associées sur $\xi \oplus \xi_1$ et

$$\Delta(q + q_1, q' + q'_1) = \Delta(q_1, q'_1) + \Delta(q, q').$$

En particulier, si q_1 et q'_1 sont des formes non dégénérées

$$\Delta(q + q_1, q' + q'_1) = \Delta(q, q') + [q_1] - [q'_1] \quad \text{dans } [X, \mathbb{Z} \times BO].$$

Si, en plus, ξ_1 est trivial et q_1 et q'_1 constantes (ne dépendant pas de $x \in X$), alors $[q_1] = \operatorname{Ind} q_1 \in [X, \mathbb{Z}]$; donc, en notant $\tilde{\Delta}$ les images dans $[X, BO]$

$$\tilde{\Delta}(q, q') = \tilde{\Delta}(q + q_1, q' + q'_1) \in [X, BO].$$

III.4.8. Proposition. — *Soient q et q' deux formes associées sur ξ. Supposons qu'il existe un isomorphisme $a : \xi \to \xi$ tel que*

(1) $$\forall x \in X, a_{x \mid \operatorname{rad} q_x} = I_{\operatorname{rad} q_x};$$

(2) $$q = a^* q'.$$

Alors $\Delta(q, q') = 0$ dans $[X, \mathbb{Z} \times BO]$.

Preuve. — (0) Le résultat est évident si q_x est toujours non dégénéré car la classe d'isomorphisme du fibré stable de q est indépendant de la métrique utilisée et pour la métrique $a^* s$, le fibré stable de q est isomorphe par a au fibré stable de q' pour s. La démonstration va adapter cette évidence au cas général.

(1) Soit $q : \xi \to \mathbb{R}$ et soient s et $\tilde{s}$ deux métriques sur ξ vérifiant

(1) $$\forall x \in X, \quad s_x \text{ et } \tilde{s}_x \text{ coïncident sur } \operatorname{rad} q_x$$

et soit u et $\tilde{u}$ les morphismes auto-adjoints associés.

Nous allons montrer que la collection des $V^{\leqq 0}(u_x) \oplus V^{>0}(\tilde{u}_x)$ définit un fibré noté $\{V^{\leqq 0}(u_x) \oplus V^{>0}(\tilde{u}_x)\}$ sur X.

Soit $x_0 \in \mathrm{X}$; choisissons ε et U comme en III.4.6, mais pour les morphismes u et $\tilde{u}$, nous avons des décompositions $\xi_{|\mathrm{U}} = \mathscr{L} \oplus \mathscr{K} = \tilde{\mathscr{L}} \oplus \tilde{\mathscr{K}}$ avec $\mathrm{L}_{x_0} = \operatorname{rad} q_{x_0} = \tilde{\mathrm{L}}_{x_0}$; mais en général $\mathrm{K}_{x_0} \neq \tilde{\mathrm{K}}_{x_0}$.

Vu la condition (1) et le fait que $\mathrm{L}_{x_0} = \tilde{\mathrm{L}}_{x_0} = \operatorname{rad} q_{x_0}$, il existe une fonction $\varepsilon : \mathrm{U} \to \mathbb{R}$ avec $\varepsilon(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} 0$ telle que, pour tout $x \in \mathrm{U}$

$$\forall y \in \mathrm{L}_x, \quad \forall \tilde{y} \in \tilde{\mathrm{L}}_x, \qquad |s_x(y, \tilde{y}) - \tilde{s}_x(y, \tilde{y})| \leqq \varepsilon(x) \|y\| . \|\tilde{y}\|$$
$$\forall \tilde{y}, \tilde{y}' \in \tilde{\mathrm{L}}_x, \quad |s_x(\tilde{y}, \tilde{y}') - \tilde{s}_x(\tilde{y}, \tilde{y}')| \leqq \varepsilon(x) \|\tilde{y}\| . \|\tilde{y}'\|$$

où les $\| \quad \|$ sont calculées avec s; en particulier

$$\forall \tilde{y} \in \tilde{\mathrm{L}}_x, \quad (1 - \varepsilon(x)) \|\tilde{y}\|^2 \leqq \tilde{s}_x(\tilde{y}, \tilde{y}) \leqq (1 + \varepsilon(x)) \|\tilde{y}\|^2.$$

Montrons que, quitte à restreindre U, il existe une fonction $\eta : \mathrm{U} \to [0, 1/2]$ avec $\eta(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} 0$ telle que $\mathrm{L}_x^- + \mathrm{L}_x^0$ est $\eta(x)$-orthogonal à $\tilde{\mathrm{L}}_x^+$ et $\tilde{\mathrm{L}}_x^- + \tilde{\mathrm{L}}_x^0$ est $\eta(x)$-orthogonal à L_x^+ (orthogonal pour s).

Soit $e_1, \ldots, e_q$ une base orthonormée de L_x^- formée de vecteurs propres de u_x ($u_x(e_i) = -\lambda_i e_i$, $\lambda_i > 0$) et soit $f_1, \ldots, f_r$ une base $\tilde{s}$-orthonormée de $\tilde{\mathrm{L}}_x^+$ formée de vecteurs propres de $\tilde{u}_x$ ($\tilde{u}_x f_j = \tilde{\lambda}_j f_j$, $\tilde{\lambda}_j > 0$). Notons b_x la forme bilinéaire associée à q_x. On a

$$-\lambda_i s_x(e_i, f_j) = s_x(u_x e_i, f_j) = b_x(e_i, f_j) = \tilde{s}_x(e_i, \tilde{u}_x f_j) = \tilde{\lambda}_j \tilde{s}_x(e_i, f_j);$$

donc

$$\left(1 + \frac{\lambda_i}{\tilde{\lambda}_j}\right) |s_x(e_i, f_j)| = |s_x(e_i, f_j) - \tilde{s}_x(e_i, f_j)| \leqq \varepsilon(x) \|f_j\| \leqq \frac{\varepsilon(x)}{\sqrt{1 - \varepsilon(x)}};$$

donc

$$|s_x(e_i, f_j)| \leqq \frac{\varepsilon(x)}{\sqrt{1 - \varepsilon(x)}}.$$

Si $y \in \mathrm{L}_x^-$, $y = \sum y_i e_i$ et si $\tilde{y} = \sum \tilde{y}_j f_j \in \tilde{\mathrm{L}}_x^+$, on a

$$|s_x(y, \tilde{y})| \leqq \frac{\varepsilon(x)}{\sqrt{1 - \varepsilon(x)}} \sum |y_i| . |\tilde{y}_j|$$
$$\leqq p^2 \frac{\varepsilon(x)}{\sqrt{1 - \varepsilon(x)}} \|y\| \sqrt{\tilde{s}_x(\tilde{y}, \tilde{y})} \leqq p^2 \varepsilon(x) \sqrt{\frac{1 + \varepsilon(x)}{1 - \varepsilon(x)}} \|y\| . \|\tilde{y}\|;$$

d'où le résultat car si $y_0 \in \mathrm{L}_x^0 = \tilde{\mathrm{L}}_x^0$, $\tilde{s}_x(y_0, \tilde{y}) = 0$; donc

$$|s_x(y_0, \tilde{y})| \leqq \varepsilon(x) \|y_0\| . \|\tilde{y}\|.$$

La démonstration s'achève alors comme en III.4.6.

Il est clair que la classe d'isomorphisme du fibré $\{V^{\leqq 0}(u) \oplus V^{>0}(\tilde{u})\}$ est indépendante des métriques s et $\tilde{s}$ vérifiant (1), donc $\{V^{\leqq 0}(u) \oplus V^{>0}(\tilde{u})\}$ est isomorphe à ξ $(s=\tilde{s})$.

(2) Soient q, q' et a comme dans l'énoncé de la proposition. Posons $\tilde{s}=a^* s$ de sorte que s_x et $\tilde{s}_x$ et $\tilde{s}_x$ coïncident sur $\operatorname{rad} q_x = \operatorname{rad} q'_x$. Montrons que la collection des $V^{\leqq 0}(\tilde{u}_x) \oplus V^{>0}(u'_x)$ définit un fibré noté $\{V^{\leqq 0}(\tilde{u}) \oplus V^{>0}(u')\}$ sur X. Soit $x_0 \in X$ et soit ε et U comme avant pour $\tilde{u}$ et u' comme $\tilde{L}_{x_0} = \operatorname{rad} q_{x_0}$, il existe $\varepsilon_1 : U \to \mathbb{R}$ avec $\varepsilon_1(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} 0$ et $\| a_{x \mid \tilde{L}_x} - I \| \leqq \varepsilon_1(x)$. Construisons $\eta_1 : U \to [0, 1/2]$ avec $\eta_1(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} 0$ tel que $\tilde{L}_x^- + \tilde{L}_x^0$ est $\eta_1(x)$-orthogonal à $L_x'^+$ et $\tilde{L}_x^+$ est $\eta_1(x)$-orthogonal à $L_x'^- + L_x'^0$. Comme $a_x \tilde{u}_x = u'_x a_x$, si $\tilde{y} \in \tilde{L}_x^- + \tilde{L}_x^0$, $a_x \tilde{y} \in L_x'^- + L_x'^0$; donc, si $y' \in L_x'^+$, $s_x(a_x \tilde{y}, y') = 0$, donc

$$|s_x(\tilde{y}, y')| = |s_x(a_x \tilde{y} - \tilde{y}, y')| \leqq \| a_x \tilde{y} - \tilde{y} \| . \| y' \| \leqq \varepsilon_1(x) \| \tilde{y} \| . \| y' \|.$$

De même si $\tilde{y} \in \tilde{L}_x^+$ et $y' \in L_x'^- + L_x'^0$. La démonstration s'achève comme en III.4.6.

Vérifions que $\{V^{\leqq 0}(\tilde{u}) \oplus V^{>0}(u')\}$ est isomorphe à ξ. Il suffit de vérifier que les morphismes $a_x \oplus \mathrm{Id} : V^{\leqq 0}(\tilde{u}_x) \oplus V^{>0}(u'_x) \to V^{\leqq 0}(u'_x) \oplus V^{>0}(u'_x) = \xi_x$ définissent un morphisme de fibré $\{V^{\leqq 0}(\tilde{u}) \oplus V^{>0}(u')\} \to \xi$.

La continuité en x_0 se montre en vérifiant que

$$\begin{aligned} \varphi_x : \quad & \tilde{L}_x^- + \tilde{L}_x^0 + L_x'^+ \to L_x'^- + L_x'^0 + L_x'^+ \\ & y = (\tilde{y}^-, \tilde{y}^0, y'^+) \mapsto (a_x \tilde{y}^-, a_x \tilde{y}^0, y'^+) \end{aligned}$$

tend vers Id lorsque $x \to x_0$. Or

$$\| \varphi_x(y) - y \| = \| a_x \tilde{y}^- - \tilde{y}^- \| \leqq \varepsilon_1(x) \| \tilde{y}^- \| \leqq \frac{\varepsilon_1(x)}{\sqrt{1 - \varepsilon_1^2(x)}} \| y \|.$$

A partir de là, la continuité en x_1 se montre comme en III.4.6.

Finalement, construisons un isomorphisme

$$\begin{aligned} \Phi : \quad & \{V^{\leqq 0}(u) \oplus V^{>0}(\tilde{u})\} \oplus \{V^{\leqq 0}(\tilde{u}) \oplus V^{>0}(u')\} \\ & \to \{V^{\leqq 0}(u) \oplus V^{>0}(u')\} \oplus \{V^{\leqq 0}(\tilde{u}) \oplus V^{>0}(\tilde{u})\}, \end{aligned}$$

où Φ est l'identité sur les premier et troisième facteurs a sur le deuxième et a^{-1} sur le quatrième. La vérification que Φ est un morphisme de fibré se fait comme précédemment. La proposition est démontrée car le membre de gauche est isomorphe à $\xi \oplus \xi$ et la classe du membre de droite dans $[X, \mathbb{Z} \times BO]$ est $[\xi] + \Delta(q, q') + [\xi]$.

III.5. Paire de formes quadratiques associées attachées à une paire de transversales lagrangiennes

III.5.1. — Soient ξ et η deux sous-fibrés lagrangiens d'un fibré symplectique W sur X. Soit ζ un sous-fibré lagrangien transverse à ξ et η et soient P_ξ et P_η les projections de noyau ζ de W sur ξ et sur η respectivement. Comme en I.1.6, il vient

$$\begin{aligned} \forall z \in X, \quad \forall x, y \in W_z, \qquad & b_z(P_\xi x, y) + b_z(x, P_\xi y) = b_z(x, y) \\ & b_z(P_\eta x, y) + b_z(x, P_\eta y) = b_z(x, y). \end{aligned}$$

On définit $q_{\xi,\eta,\zeta}:\xi \to \mathbb{R}$ par la formule

$$\forall z \in X, \quad \forall x \in \xi_z, \qquad q_{\xi,\eta,\zeta}(x)=b_z(P_\eta x, x);$$

c'est une forme quadratique car, si $x,\ x' \in \xi_z$

$$b_z(P_\eta x, x')=0-b_z(x, P_\eta x')=b_z(P_\eta x', x).$$

Si $b_z(P_\eta x, x')=0$, $\forall x' \in \xi_z$, alors $P_\eta x \in \xi_z \cap \eta_z$; donc $x-P_\eta x$ est dans ξ_z et aussi dans ζ_z, donc $x=P_\eta x \in \xi_z \cap \eta_z$, donc le radical de $(q_{\xi,\eta,\zeta})_z$ est $\xi_z \cap \eta_z$.

Les restrictions $P_{\xi\mid\eta}$ et $P_{\eta\mid\xi}$ sont des bijections réciproques et

$$(P_{\xi\mid\eta})^* q_{\xi,\eta,\zeta}=-q_{\eta,\xi,\zeta};$$

en effet, si $x' \in \eta$, $q_{\xi,\eta,\zeta}(P_\xi x')=b(x', P_\xi x')=-b(P_\xi x', x')=-q_{\eta,\xi,\zeta}(x')$.

Nous écrivons $W=\xi \oplus \zeta$ avec $x \in \xi_z$ et y dans ζ_z. Comme η est transverse à ζ, η est le graphe d'un morphisme $\alpha:\xi \to \zeta$ vérifiant

$$\forall z \in X, \quad \forall x, x' \in \xi_z, \qquad b_z(\alpha_z x, x')+b_z(x, \alpha_z x')=0.$$

Comme $(x+y)=(x+\alpha x)+(y-\alpha x)$, on a

$$P_\eta(x+y)=x+\alpha x \qquad \text{et} \qquad q_{\xi,\eta,\zeta}(x)=b_z(x+\alpha_z x, x)=b_z(\alpha_z x, x).$$

Soit s une métrique euclidienne sur ξ. Définissons $J_0:\zeta \to \xi$ par $s_z(J_{0z} y, x)=b_z(y, x)$, $\forall x \in \xi_z$ et $\forall y \in \zeta_z$. Comme ζ est transverse à ξ, J_0 est un isomorphisme soit $J_1:\xi \to \zeta$, $J_1=-J_0^{-1}$ et $J:W \to W$ défini par $J=(J_1 \oplus J_0)$ vérifie $J^2=-I$. Définissons une métrique S sur W en décrétant ξ et ζ orthogonaux, $S_{\mid\xi}=s$ et, pour $y, y' \in \zeta_z$, $S_z(y, y')=s_z(J_0 y, J_0 y')$. Alors, J est une isométrie pour S et $b_z(x, x')=S_z(J_z x, x')$, $\forall x, x' \in W_z$. On dira qu'une telle métrique est adaptée à ξ et ζ.

Pour la métrique s sur ξ, la forme $q_{\xi\eta\zeta}$ est représentée par le morphisme auto-adjoint $u=J_0\alpha=J\alpha:\xi \to \xi$ car $b_z(\alpha x, x)=s_z(J_0 \alpha x, x)$ et on calcule $s_z(ux, x')$ en posant $x'=Jy'$, $y, y' \in \zeta$

$$\begin{aligned} s(ux, x')&=s(J\alpha x, Jy')=S(\alpha x, y')=S(y', \alpha x)=b(J^{-1}y', \alpha x)\\ &=-b(x', \alpha x)=b(\alpha x', x)=S(J\alpha x', x)=s(ux', x)=s(x, ux'). \end{aligned}$$

Déterminons le morphisme auto-adjoint $\hat{u}$ de η pour $S_{\mid\eta}$ représentant $q_{\eta,\xi,\zeta}$. Soient $x+\alpha x$ et $x'+\alpha x' \in \eta_z$

$$S_z(x+\alpha x, x'+\alpha x')=s(x, x')+S(\alpha x, \alpha x')=s(x, x')+s(ux, ux')=s((1+u^2)x, x').$$

Soit $w:\xi \to \xi$ le morphisme tel que $\hat{u}(x+\alpha x)=wx+\alpha wx$. La condition

$$S(\hat{u}(x+\alpha x), x+\alpha x)=q_{\eta\xi\zeta}(x+\alpha x)=b(x, \alpha x)=-b(\alpha x, x)=-s(ux, x)$$

devient $s((1+u^2)wx, x)=-s(ux, x)$, donc $w=-(I+u^2)^{-1}u$; donc w et u ont mêmes vecteurs propres [si $u(x)=\lambda x$, $wx=-(\lambda/(1+\lambda^2))x$ et $\hat{u}(x+\alpha x)=-(\lambda/(1+\lambda^2))(x+\alpha x)$] et la projection $P_{\xi\mid\eta}$ identifie $V^{<0}(\hat{u}_z)$ avec $V^{>0}(u_z)$.

III.5.2. LEMME. — *Soient ζ et ζ' deux sous-fibrés lagrangiens de* W *transverses à* ξ *et* η. *Les formes quadratiques sur* ξ, $q=q_{\xi,\eta,\zeta}$ *et* $q'=q_{\xi,\eta,\zeta'}$ *sont associées.*

Preuve. — Écrivons ζ' comme le graphe de $\beta:\zeta\to\xi$; alors

$$\forall z\in X,\quad \forall y, y'\in\zeta_z,\qquad b_z(\beta_z y, y')+b_z(y, \beta_z y')=0;$$

et comme en I.2.1, $I-\beta\alpha$ est un isomorphisme de ξ et $I-\alpha\beta$ est un isomorphisme de ζ.

Soit $P'_\eta : W\to\eta$ la projection de noyau ζ'. Soit $x\in\xi_z$ et écrivons $x=(x_1+\alpha x_1)+(\beta y_1, y_1)$; il vient $y_1=-\alpha x_1$ et $x=(I-\beta\alpha)x_1$, donc

$$P'_\eta(x)=(I-\beta\alpha)^{-1}x+\alpha(I-\beta\alpha)^{-1}x$$

et

$$q'(x)=b((I-\beta\alpha)^{-1}x+\alpha(I-\beta\alpha)^{-1}x, x)=b(\alpha(I-\beta\alpha)^{-1}x, x).$$

Soit (S, J) une métrique adaptée à (ξ,ζ). Soit $\bar{v}=-\beta J:\xi\to\xi$; on a $\bar{v}u=-\beta J^2\alpha=\beta\alpha$, donc $I-\bar{v}u$ est un isomorphisme de ξ et $I-u\bar{v}=J^{-1}(I-\alpha\beta)J$ isomorphisme de ζ. Calculons $s(\bar{v}x, x')$ en posant $x=Jy$, $x'=Jy'$

$$s(\bar{v}x, x')=-s(\beta J^2 y, Jy')=s(Jy', \beta y)=b(y', \beta y)=b(y, \beta y')=s(x, \bar{v}x')$$

et

$$q'(x)=s(u'x, x)=b(\alpha(1-\beta\alpha)^{-1}x, x)=s(u(I-\bar{v}u)^{-1}x, x);$$

donc $u'=u(1-\bar{v}u)^{-1}$ et pour écrire $u'=u(I-vu)$, il suffit de prendre

$$v=-\bar{v}(1-u\bar{v})^{-1}=-(1-\bar{v}u)^{-1}\bar{v}\qquad\text{et}\qquad I-vu=(I-\bar{v}u)^{-1}.$$

III.5.3. PROPOSITION. — *Avec les notations précédentes, soient* $[\zeta]$ *et* $[\zeta']$ *les classes des transversales* ζ *et* ζ' *dans* $T(\xi,\eta)$; *on a*

$$\Delta(q, q')=[\zeta]-[\zeta']\quad \textit{dans}\ [X, \mathbb{Z}\times BO].$$

Preuve. — Sur le fibré W, nous avons deux formes quadratiques non dégénérées données par I.2.2, $B_{\xi,\eta,\zeta',\zeta}$ et $B_{\xi,\xi,\zeta,\zeta}$. La proposition découlera de l'égalité entre $\Delta(q, q')$ et de la différence des classes de $B_{\xi,\eta,\zeta,\zeta'}$ et $B_{\xi,\xi,\zeta,\zeta}$c que nous allons établir.

Nous allons réaliser $\{V^{\leqq 0}(q)\oplus V^{>0}(q')\}$ comme sous-fibré de W. Pour cela, nous utilisons une métrique (S, J) *adaptée à* η, ζ'. Soient $u:\xi\to\xi$ représentant q, $u':\xi\to\xi$ représentant q' et $\hat{u}':\eta\to\eta$ représentant $q_{\eta,\xi,\zeta'}$ $(q_{\eta,\xi,\zeta'}(x_1+\alpha x_1)=b(I-\beta\alpha)x_1, \alpha x_1))$. Soit $P:\eta\to\xi$ la projection de noyau ζ', c'est un isomorphisme. Pour tout $z\in X$, P_z est l'identité sur $\xi_z\cap\eta_z$ et nous avons vu en III.5.1 que P_z est un isomorphisme de $V^{<0}(\hat{u}'_z)$ sur $V^{>0}(u'_z)$.

Posons $V_z=V^{\leqq 0}(u_z)+V^{<0}(\hat{u}'_z)\subset W_z$; la somme est directe puisque $\ker u_z=\ker u'_z=\xi_z\cap\eta_z$. En raisonnant comme en III.4, vu les propriétés de P, $V=\{V_z\}$ est un sous-fibré de W isomorphe à $\{V^{\leqq 0}(u)\oplus V^{>0}(u')\}$.

Notons $B = B_{\xi, \eta, \zeta, \zeta'}$; si $z \in X$, $x \in \xi_z$ et $y \in \zeta_z$, nous avons

$$B_z(x+y, x+y) = b_z(x - \beta y, y) + b_z(\alpha x - y, x).$$

Calculons B_z sur $\xi_z + \eta_z$

$$\begin{aligned} B(x+x_1+\alpha x_1, x+x_1+\alpha x_1) &= b(x+x_1 - \beta\alpha x_1, \alpha x_1) + b(\alpha x, x+x_1) \\ &= b(\alpha x, x) + b(\mathrm{I} - \beta\alpha) x_1, \alpha x_1) + b(x, \alpha x_1) + b(\alpha x, x_1) \\ &= q_{\xi, \eta, \zeta}(x) + q_{\eta, \xi, \zeta'}(x_1 + \alpha x_1); \end{aligned}$$

donc $B_{|V}$ est négative.

Vérifions que dim $V =$ Indice (B); il suffit de le faire en un point $z_0 \in X$. Soit $\lambda = \xi_{z0} \cap \eta_{z_0}$ et notons $p = \dim \lambda$. Soient ξ' et η' des supplémentaires de λ dans ξ_{z_0} et η_{z0}; $\xi' \cap \eta' = \{0\}$ donc $\xi' + \eta'$ est de codimension $2p$ dans W_{z_0} et la somme est directe; q_{z0} est non dégénérée sur ξ', $\hat{q}'_{z0}$ est non dégénérée sur η' ($\hat{q}' = q_{\eta, \xi, \zeta'}$), donc $B_{|\xi'+\eta'} = q_{z0\,|\,\xi'} + \hat{q}'_{z0\,|\,\eta'}$ est non dégénérée. Soit λ' le B-orthogonal de $\xi' + \eta'$, λ' est de dimension $2p$, $B_{|\lambda'}$ est non dégénérée, λ est un sous-espace isotrope de λ' de dimension moitié, donc $\mathrm{Ind}(B_{|\lambda'}) = p$. La décomposition B-orthogonale $W_{z_0} = \lambda' \oplus \xi' \oplus \eta'$ donne

$$\mathrm{Ind}\, B_{z_0} = \mathrm{Ind}(B_{|\lambda'}) + \mathrm{Ind}(B_{|\xi'}) + \mathrm{Ind}(B_{|\eta'}) = p + \dim(V^{<0}(u_{z0})) + \dim(V^{<0}(\hat{u}'_{z0})) = \dim V_{z_0}.$$

Soient V^- et V^+ les fibrés stable et instable de B pour la métrique S, et soit φ_t l'isomorphisme de $W = V^- \oplus V^+$ avec $\varphi_{t\,|\,V^-} = (1+t) I_{V^-}$, $\varphi_{t\,|\,V^+} = I_{V^+}$. Posons $V_1 = \varphi_1 V$; il est isomorphe à V et $B_{|V_1}$ est définie négative car, si $x \in V$, $x = x_- + x_+$ dans la décomposition $V^- \oplus V^+$

$$B(x_-, x_-) + B(x_+, x_+) \leqq 0;$$

donc $(1+t)^2 B(x_-, x_-) + B(x_+, x_+) \leqq 0$ et si on a égalité pour $t > 0$, alors $B(x_-, x_-) = B(x_+, x_+) = 0$, donc $x = 0$. Comme $\dim V_1 = \dim V^-$, si V_2 est le B orthogonal de V_1, $B_{|V_2}$ est définie positive et on peut construire une métrique sur W telle que V_1 est le fibré stable de B; donc V_1 et V sont isomorphes à V^-.

D'autre part, $B_0 = B_{\xi, \xi, \zeta, \zeta}$, vérifie $B_0(x+y, x+y) = 2b(x, y)$. Donc si (S, J) est une métrique adaptée à (ξ, ζ), $\xi^- = (1 - J/\sqrt{2})(\xi)$ et $\xi^+ = (1 + J/\sqrt{2})(\xi)$ sont les fibrés stable et instable de B_0, donc le fibré stable de B_0 est isomorphe à ξ et $\Delta(q, q')$ est isomorphe à la différence des fibrés stables de $B_{\xi, \eta, \zeta, \zeta'}$ et $B_{\xi, \xi, \zeta, \zeta}$.

III.5.4. Pour finir ce chapitre, énonçons un résultat qui éclaire la signification de la proposition III.4.8.

Proposition. — *Soient ξ, η, ζ et ζ' sous-fibrés lagrangiens de* W *avec ζ et ζ' transverses à ξ et η. S'il existe un isomorphisme symplectique $\varphi : W \to W$ tel que $\varphi(\xi) = \xi$, $\varphi(\eta) = \eta$, $\varphi(\zeta') = \zeta$ et tel que: $\forall z \in X$, $\forall x \in \xi_z \cap \eta_z$, $\varphi_z(x) = x$, alors, quitte à stabiliser ξ, η, ζ et ζ' (on ne change pas de notation), il existe une famille φ_t d'isomorphismes symplectiques de*

W *avec* $\varphi_0=\mathrm{Id}$, *pour tout* t, $\varphi_t(\xi)=\xi$, $\varphi_t(\eta)=\eta$

$$\forall z\in \mathrm{X},\quad \forall x\in \xi_z\cap\eta_z,\qquad \varphi_{tz}(x)=x$$

et $\varphi_1(\zeta')=\zeta$.

Pour cela, nous allons d'abord montrer

LEMME. — *Soit* ζ_t *une famille de lagrangiens transverses à* ξ *et* η. *Il existe une famille d'isomorphismes symplectiques* $\varphi_t:\mathrm{W}\to\mathrm{W}$ *avec* $\varphi_t(\xi)=\xi$, $\varphi_t(\eta)=\eta$, $\forall z\in\mathrm{X}$, $\forall x\in\xi_z\cap\eta_z$, $\varphi_{tz}(x)=x$ *et* $\varphi_t(\zeta_t)=\zeta_0$.

Comme il est classique par compacité et composition d'isomorphismes symplectiques, le lemme découle de l'énoncé :

Soit ζ transverse à ξ et η, il existe un voisinage $\mathscr{V}$ de ζ dans les fibrés lagrangiens transverses à ξ et η et une application continue φ de $\mathscr{V}$ dans les isomorphismes symplectiques de W telles que

Pour tout $\zeta'\in\mathscr{V}$, $\varphi_{\zeta'}(\xi)=\xi$, $\varphi_{\zeta'}(\eta)=\eta$, $\varphi_{\zeta'}(\zeta')=\zeta$ et pour tous $z\in\mathrm{X}$, $x\in\xi_z\cap\eta_z$, $\varphi_{\zeta',z}(x)=x$; de plus $\varphi_\zeta=\mathrm{Id}$.

En effet, supposons que η soit le graphe de $\alpha:\xi\to\zeta$ et nous nous limitons aux ζ' graphes de $\beta:\zeta\to\xi$ petits, *i.e.* $\|\alpha\beta\|<1$ et $\|\beta\alpha\|<1$, de sorte que nous calculons $(\mathrm{I}-\beta\alpha)^{+1/2}:\xi\tilde{\to}\xi$ par la série du binôme de même que $(\mathrm{I}-\alpha\beta)^{\pm 1/2}:\zeta\tilde{\to}\zeta$. Sur la série, il est clair que

$$\alpha(\mathrm{I}-\beta\alpha)^{+1/2}=(\mathrm{I}-\alpha\beta)^{+1/2}\alpha.$$

Considérons $\varphi_{\zeta'}$ donné par la matrice $\begin{pmatrix}(\mathrm{I}-\beta\alpha)^{-1/2} & -(\mathrm{I}-\beta\alpha)^{-1/2}\beta\\ 0 & (\mathrm{I}-\alpha\beta)^{1/2}\end{pmatrix}$

$$\varphi_{\zeta'}(\beta y,y)=((\mathrm{I}-\beta\alpha)^{-1/2}\beta y-(\mathrm{I}-\beta\alpha)^{-1/2}\beta y,(\mathrm{I}-\alpha\beta)^{1/2}y)=(0,(\mathrm{I}-\alpha\beta)^{1/2}y)\in\zeta$$

$$\begin{aligned}\varphi_{\zeta'}(x,\alpha x)&=((\mathrm{I}-\beta\alpha)^{-1/2}x-(\mathrm{I}-\beta\alpha)^{-1/2}\beta\alpha x,(\mathrm{I}-\alpha\beta)^{1/2}\alpha x)\\&=((\mathrm{I}-\beta\alpha)^{1/2}x,\alpha(\mathrm{I}-\beta\alpha)^{1/2}x)\in\eta.\end{aligned}$$

Si $x\in\xi_z\cap\eta_z$, alors $\alpha x=0$ et $(\mathrm{I}-\beta\alpha)^{-1/2}x=x$; donc $\varphi_{\zeta'}(x,0)=(x,0)$. Comme $b(\beta\alpha x,y)=b(x,\alpha\beta y)$, il est clair sur les séries définissant $(\mathrm{I}-\beta\alpha)^{1/2}$ et $(\mathrm{I}-\alpha\beta)^{1/2}$ que $b((\mathrm{I}-\beta\alpha)^{1/2}x,y)=b(x,(\mathrm{I}-\alpha\beta)^{1/2}y)$. Calculons

$$\begin{aligned}b(\varphi(x,y),\varphi(x',y'))&=b((\mathrm{I}-\beta\alpha)^{-1/2}x-(\mathrm{I}-\beta\alpha)^{-1/2}\beta y,(\mathrm{I}-\alpha\beta)^{1/2}y')\\&\quad+b(\mathrm{I}-\alpha\beta)^{1/2}y,(\mathrm{I}-\beta\alpha)^{-1/2}x'-(\mathrm{I}-\beta\alpha)^{-1/2}\beta y')\\&=b(x,y')-b(\beta y,y')+b(y,x')-b(y,\beta y')=b(x,y')+b(y,x').\end{aligned}$$

Preuve de la proposition. — La proposition III.4.8 s'applique à q et q' et $a=\varphi_{|\xi}$, donc $\Delta(q,q')=0$; donc, par III.5.3, après stabilisation, les transversales ζ et ζ' se déforment l'une en l'autre et on applique le lemme.

CHAPITRE IV

Formes génératrices pour des immersions lagrangiennes dans un cotangent

IV 1.0. PLAN DU CHAPITRE.

§ 1. Définitions, énoncé du théorème.

§ 2. Définition de la transversale lagrangienne associée à une 1-forme génératrice α; identité entre la forme quadratique attachée à cette transversale en III.5 et la forme hessienne de α.

§ 3. Existence de formes génératrices: il ne reste qu'à voir que l'existence d'une transversale lagrangienne implique l'existence d'une 1-forme génératrice.

§ 4. Classification des 1-formes génératrices. On montre d'abord comment se ramener à des formes ayant même lieu stationnaire. Grâce à III.4, on définit la différence de deux 1-formes génératrices. On établit la trivialité d'une famille à un paramètre de 1-formes génératrices définissant toutes la même immersion lagrangienne et ayant toutes le même lieu stationnaire et on achève la démonstration.

IV.1.1. DÉFINITIONS. — Soient M une variété différentiable, T^*M le fibré cotangent muni de sa structure symplectique usuelle, V un espace vectoriel de dimension finie. Nous identifions $T^*(M \times V)$ à $T^*M \times V \times V^*$; il contient $\mathscr{H} = T^*M \times V \times 0$.

Soit $p : T^*(M \times V) \to M$ la projection, nous avons pour $z \in T^*(M \times V)$ la décomposition naturelle

$$T_z(T^*(M \times V)) = T_{pz}M \oplus T^*_{pz}M \oplus V \oplus V^*.$$

Les sous-fibrés (triviaux) de $T(T^*(M \times V))$ correspondant aux troisième et quatrième facteurs sont notés π^*V et π^*V^*. Il est clair que l'orthogonal (symplectique) de $T_z\mathscr{H}$ est $(T_z\mathscr{H})^0 = 0 \oplus 0 \oplus V \oplus 0$, donc $(T\mathscr{H})^0 = \pi^*V_{|\mathscr{H}}$ et $\mathscr{H}$ est donc une sous-variété co-isotrope.

IV.1.2. DÉFINITIONS. — On dit qu'une 1-forme fermée α définie sur un ouvert N de $M \times V$ est une forme génératrice si α, considérée comme section de T^*N, est transverse à $\mathscr{H}$.

Notons alors $\Sigma_\alpha = \alpha^{-1}(\mathscr{H})$; c'est une sous-variété de N appelée lieu stationnaire (vertical) de α. Notons Γ_α le graphe de α [*i.e.* $\alpha(N) \subset T^*N$]; c'est une sous-variété lagrangienne transverse à $\mathscr{H}$. Si $z \in \alpha(\Sigma_\alpha) = \Gamma_\alpha \cap \mathscr{H}$, par transversalité $\{0\} = (T_z\Gamma_\alpha + T_z\mathscr{H})^0 = T_z\Gamma_\alpha \cap (T_z\mathscr{H})^0$, donc $T_z\alpha\Sigma_\alpha \cap \pi^*V = \{0\}$ et, comme $\alpha(\Sigma_\alpha) \subset \mathscr{H}$, on a alors $T_z\alpha\Sigma_\alpha \cap (\pi^*V \oplus \pi^*V^*) = \{0\}$. Donc, si $pr : T^*(M \times V) \to T^*M$ est la projection, la restriction $pr_{|\alpha\Sigma_\alpha}$ est une immersion, donc $i_\alpha = pr \circ \alpha_{|\Sigma_\alpha} : \Sigma_\alpha \to T^*M$ est une immersion visiblement isotrope, donc lagrangienne par raison de dimension.

IV.1.3. DÉFINITIONS. — Soient X une variété différentiable et $\varphi : X \to T^*M$ une immersion lagrangienne. On appelle forme génératrice définissant φ tout couple (α, h) où α est une forme génératrice, $h : X \to \Sigma_\alpha$ un difféomorphisme avec $i_\alpha \circ h = \varphi$.

IV.1.4. DÉFINITIONS. — On dit que deux formes génératrices définissant φ, (α, h) et (α', h') sont strictement équivalentes s'il existe des voisinages N de Σ_α et N' de $\Sigma_{\alpha'}$, et un difféomorphisme $H: N \simeq N'$ avec $H(\Sigma_\alpha) = \Sigma_{\alpha'}$ tel que

(1) $p_M \circ H = p_{M \mid N}$ où $p_M: M \times V \to M$ est la projection;

(2) $h' = (H_{\mid \Sigma_\alpha}) \circ h$;

(3) $\alpha = H^* \alpha'$.

IV.1.5. *Stabilisation* (supposons X connexe). — Soient (α, h) définissant φ où α est définie sur $N \subset M \times V$, V_1 un espace vectoriel et $Q: V_1 \to \mathbb{R}$ une forme quadratique non dégénérée. Posons $\bar{N} = N \times V_1$, $\bar{\alpha} = \alpha + dQ$. Comme Q est non dégénérée, $\bar{\alpha}$ est une 1-forme génératrice, $\Sigma_{\bar{\alpha}} = \Sigma_\alpha \times 0 \subset N \times V_1$ et $i_{\bar{\alpha}}$ correspond à i_α par l'identification $\Sigma_\alpha \simeq \Sigma_{\bar{\alpha}}$; posons $\bar{h}: X \xrightarrow{h} \Sigma_\alpha \simeq \Sigma_{\bar{\alpha}}$. Alors $(\bar{\alpha}, \bar{h})$ est une forme génératrice définissant φ appelée stabilisation de (α, h) par $Q: V_1 \to \mathbb{R}$. (Si X a plusieurs composantes, il faut se permettre de stabiliser par différentes formes sur V_1 suivant les composantes de X.)

IV.1.6. On dit que (α, h) et (α', h') sont équivalentes s'il existe des stabilisations $(\bar{\alpha}, \bar{h})$ et $(\bar{\alpha}', \bar{h}')$ strictement équivalentes.

DÉFINITION. — On désigne par $F(\varphi)$ le quotient de l'ensemble des formes génératrices définissant φ par cette équivalence.

IV.1.7. On dit que (α, h) et (α', h') définissant φ ont même lieu stationnaire si $\Sigma_\alpha = \Sigma_{\alpha'} = \Sigma$ et si $h = h': X \simeq \Sigma$; on a alors $i_\alpha = i_{\alpha'}: \Sigma \to T^* M$ et donc, comme $\alpha(\Sigma_\alpha) \subset \mathscr{H}$ et $\alpha'(\Sigma_{\alpha'}) \subset \mathscr{H}$

$$\forall z \in \Sigma, \quad \alpha_z = \alpha'_z \in T^*_z(M \times V).$$

IV.1.8. Le fibré $T(T^* M)$ a un sous-fibré lagrangien vertical Vert tangent aux fibres de $\bar{p}: T^* M \to M$ ($\mathrm{Vert} = \bar{p}^* T^* M$).

Dans le fibré symplectique sur X, $\varphi^* T(T^* M)$, on a deux sous-fibrés lagrangiens TX et $\varphi^*(\mathrm{Vert})$. Nous notons γ_φ (pour application de Gauss) la différence entre ces deux sous-fibrés lagrangiens

$$\gamma_\varphi = d(TX, \varphi^*(\mathrm{Vert})) \in [X, U/0].$$

IV.1.9. *Remarque.* — Soit ν_X le fibré normal de X. En raisonnant comme en III.1, avec une trivialisation de $\nu_X \oplus TX$, le fibré $\nu_X \oplus \varphi^*(\mathrm{Vert})$ est réalisé comme sous-fibré lagrangien de $X \times \mathbb{C}^N$, donc, si $\gamma_\varphi = 0$ dans $[X, U/0]$, le fibré $\nu_X \oplus \varphi^*(\mathrm{Vert})$ est au moins stablement trivial; or, $\nu_X \oplus \varphi^*(\mathrm{Vert})$ est isomorphe au fibré normal stable ν_ψ où $\psi = \bar{p}\varphi: X \to M$.

IV.1.10. THÉORÈME. — *Soit* $\varphi: X \to T^* M$ *une immersion lagrangienne d'une variété compacte.*

(1) $F(\varphi) \neq \varnothing \Leftrightarrow \gamma_\varphi = 0$ *dans* $[X, U/0]$;

(2) *Si* $F(\varphi) \neq \varnothing$, $F(\varphi)$ *est un espace affine sous* $[X, BO]$.

IV.1.11. *Remarque sur la compacité.* — Si (α, h) définit φ et si c est un chemin dans X, la variation de l'indice de la hessienne de α le long de $h \circ c$ est égal (ou opposé) à la variation de l'indice de Maslov de φ le long de c; donc, si X est non compacte, le théorème d'existence est faux tel qu'il est énoncé comme l'indique le dessin où $X = M = \mathbb{R}$.

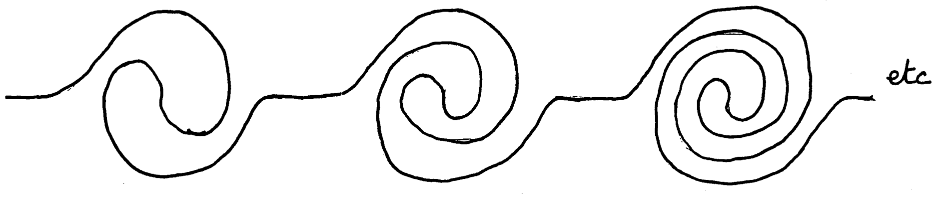

Figure 1.

IV.2. Étude d'une forme génératrice définissant une immersion lagrangienne. — IV.2.1. Soit (α, h) une forme génératrice définissant φ. Nous allons écrire, pour simplifier les notations, $\Sigma = \Sigma_\alpha$ au lieu de $\alpha(\Sigma_\alpha) \subset T^* N$; d'après IV.1.7, cet abus de notation n'est pas gênant lorsqu'on considère deux formes de même lieu stationnaire. Notons $\Gamma = \Gamma_\alpha = \alpha(N)$.

Le long de Σ, le fibré symplectique $T(T^*(M \times V))$ contient les sous-fibrés $T\mathscr{H}$ co-isotrope, $\mathscr{F}$ le fibré vertical de $T^*(M \times V)$ $(F_z = 0 \oplus T^*_{pz} M \oplus 0 \oplus V^*)$ sous-fibré lagrangien, $T\Gamma$ sous-fibré lagrangien et $T\Sigma = T\Gamma \cap T\mathscr{H}$ sous-fibré isotrope. Comme $0 = (T\Gamma + T\mathscr{H})^0 = T\Gamma \cap (T\mathscr{H})^0$ et $(T\Sigma)^0 = T\Gamma \oplus (T\mathscr{H})^0$, $T\mathscr{H} \cap (T\Sigma)^0$ contient $T\Sigma$ et $(T\mathscr{H})^0$; comme $T\Sigma \cap (T\mathscr{H})^0 = 0$, il vient que

$$T\mathscr{H} \cap (T\Sigma)^0 = T\Sigma \oplus (T\mathscr{H})^0$$

et que $(T\Sigma)^0$ et $T\mathscr{H}$ sont transverses. Donc $\xi = T\mathscr{H} \cap (T\Sigma)^0 / T\Sigma$ est un sous-fibré lagrangien de $W = (T\Sigma)^0 / T\Sigma$ et le fibré ξ est identifié à $\pi^* V = (T\mathscr{H})^0$.

$\mathscr{F}$ et $T\Gamma$ sont transverses; comme $T\Gamma \subset (T\Sigma)^0$, $\mathscr{F}$ et $(T\Sigma)^0$ sont transverses, et $\eta = \mathscr{F} \cap (T\Sigma)^0 / T\Sigma$ est un sous-fibré lagrangien de W, $T\Sigma \subset T\Gamma \subset (T\Sigma)^0$, donc l'image de $T\Gamma$ dans W est un sous-fibré lagrangien noté ζ.

ζ et ξ sont transverses car $T\Gamma \cap (T\mathscr{H})^0 = 0$; ζ et η sont transverses car $\mathscr{F} \cap T\Gamma = 0$.

IV.2.2. Si on stabilise (α, h) par $Q : V_1 \to \mathbb{R}$, alors

$$\bar{\Sigma} = \Sigma \times 0 \times 0 \subset T^* N \times V_1 \times V_1^*, \qquad \bar{\xi} = \xi \oplus \pi^* V_1$$
$$\bar{\eta} = \eta \oplus \pi^* V_1^* \qquad \text{et} \qquad \bar{\zeta} = \zeta \oplus \text{graphe}(dQ).$$

Donc, si Q est de signature nulle, on est exactement dans la situation de III.3.1, sinon on est dans celle de III.4.7.

IV.2.3. Lemme. — *Par l'identification de ξ avec $\pi^* V$, la forme quadratique $q_{\xi, \eta, \zeta}$ correspond à la forme hessienne de α, $q_\alpha : \pi^* V \to \mathbb{R}$.*

Preuve. — Soient $x_1, \ldots, x_n$ des coordonnées locales sur M, $y_1, \ldots, y_q$ des coordonnées sur V et $f(x, y)$ une primitive locale de α. Considérons $\partial^2 f / \partial x^2$ comme application linéaire de TM dans T* M, $\partial^2 f/\partial x\,\partial y$ de TM dans V*, $\partial^2 f/\partial y\,\partial x$ de V dans T* M et $\partial^2 f/\partial y^2$ de V dans V*.

Dans la décomposition $T_z T^*(M \times V) = T_{pz} M \oplus T^*_{pz} M \oplus V \oplus V^*$, nous avons

$$T_z \Gamma = \left\{ \delta x, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\delta x + \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}\delta y, \delta y, \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\delta x + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\delta y \right\}$$

et

$$(T_z \Sigma)^0 = T_z \Gamma \oplus V = \left\{ \delta x, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\delta x + \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}\delta y, u, \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\delta x + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\delta y / \delta x \in T_z M, \delta y \in V, u \in V \right\};$$

de sorte que

$$F_z \cap (T_z \Sigma)^0 = \left\{ 0, \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}\delta y_1, 0, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\delta y_1 / \delta y_1 \in V \right\}.$$

Écrivons la projection de ξ sur η parallèlement à ζ, c'est-à-dire, pour $u \in V$, cherchons $A \in T_z \Gamma$, $B \in F_z \cap (T_z \Sigma)^0$ avec $(0, 0, u, 0) = A + B \bmod T\Sigma$. Il vient

$$(0, 0, u, 0) = \left(\delta x, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\delta x + \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}\delta y, \delta y, \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\delta x + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\delta y \right)$$
$$+ \left(0, \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}\delta y_1, 0, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\delta y_1 \right) + \left(\delta x_2, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\delta x_2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}\delta y_2, \delta y_2, 0 \right).$$

avec

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\delta x_2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\delta y_2 = 0.$$

On a $\delta x + \delta x_2 = 0$; donc

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}(\delta y + \delta y_1 + \delta y_2) = 0, \qquad u = \delta y + \delta y_2, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\delta y + \delta y_1 + \delta y_2) = 0.$$

Or $(\partial^2 f/\partial y\,\partial x,\ \partial^2 f/\partial y^2) : TM \oplus V \to V^*$ est surjective par hypothèse, donc ${}^{tr}(\partial^2 f/\partial y\,\partial x, \partial^2 f/\partial y^2) : V \to T^* M \oplus V^*$ est injective, donc $\delta y + \delta y_1 + \delta y_2 = 0$.

Donc $\delta y_1 = -u$ et la dernière composante de B est $-\partial^2 f/\partial y^2\, u$. Or

$$q_{\xi, \eta, \zeta}(u) = \omega(B, (0, 0, u, 0)) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(u) = q_\alpha(u).$$

IV.2.4. Si (α, h) et (α', h') définissent φ et ont même lieu stationnaire, on a alors deux transverses ζ et ζ' à ξ et η dans W. Alors, IV.2.3 et III.5 montrent que q_α et $q_{\alpha'}$ sont associées, ce qui résulte aussi du calcul direct suivant en coordonnées locales. Si f et f' sont des primitives locales de α et α', $j^1_z(f - f') = 0$ pour $z \in \Sigma \subset M \times V$, et comme $\partial f/\partial y_i$

sont des équations locales de Σ, il existe des fonctions b_{ij} avec $b_{ij}=b_{ji}$ et

$$f-f'=\frac{1}{2}\sum b_{ij}\frac{\partial f}{\partial y_i}\frac{\partial f}{\partial y_j}.$$

En dérivant deux fois en y et en se plaçant en $z\in\Sigma$, il reste

$$\frac{\partial^2 f'}{\partial y_i\,\partial y_j}=\frac{\partial^2 f}{\partial y_i\,\partial y_j}-\sum\frac{\partial^2 f}{\partial y_i\,\partial y_k}b_{kl}\frac{\partial^2 f}{\partial y_l\,\partial y_j}.$$

En dérivant une fois en x et une fois en y, et en se plaçant en $z\in\Sigma$, il reste

$$\frac{\partial^2 f'}{\partial y_i\,\partial x_j}=\frac{\partial^2 f}{\partial y_i\,\partial x_j}-\sum\frac{\partial^2 f}{\partial y_i\,\partial y_k}b_{kl}\frac{\partial^2 f}{\partial y_l\,\partial x_j};$$

donc, si A est la matrice des $\partial^2 f/\partial y_i\,\partial y_j$, C celle des $\partial^2 f/\partial x_i\,\partial x_j$ et A′, C′ pour f', et B celle des b_{ij}, on a sur Σ

$$\mathrm{A}'=\mathrm{A}-\mathrm{ABA},\qquad \mathrm{C}'=\mathrm{C}-\mathrm{ABC}.$$

Or, la matrice $\mathrm{M}=(\mathrm{C},\mathrm{A})$ représente $d(\partial f/\partial y_j)$, donc est de rang q par hypothèse, et M′ aussi. Comme $\mathrm{M}'=(\mathrm{I}-\mathrm{AB})\,\mathrm{M}$, $\mathrm{I}-\mathrm{AB}$ est inversible sur Σ.

IV.2.5. Soit (α,h) définissant φ; soit H un difféomorphisme d'un voisinage N′ de $\Sigma\subset\mathrm{M}\times\mathrm{V}$ sur un voisinage N de Σ, conservant la projection sur M et telle que $\mathrm{H}_{|\Sigma}=\mathrm{Id}_\Sigma$. Posons $\alpha'=\mathrm{H}^*\alpha$, alors (α',h) définit φ et (α',h) et (α,h) ont même lieu stationnaire.

LEMME. — $\Delta\,(q_\alpha,q_{\alpha'})=0$ *dans* $[\mathrm{X},\mathbb{Z}\times\mathrm{BO}]$,

Preuve. — Considérons a la restriction de l'application tangente à H au fibré vertical $\pi^*\mathrm{V}\subset\mathrm{T}(\mathrm{M}\times\mathrm{V})$ $(a_z=(\mathrm{T}_z\mathrm{H})_{|\mathrm{V}})$. Visiblement $q_{\alpha'}=a^*q_\alpha$ et de plus $\mathrm{rad}\,q_{\alpha,z}=\mathrm{T}_z\Sigma\cap\mathrm{V}$; comme $\mathrm{H}_{|\Sigma}=\mathrm{Id}_\Sigma$, il vient que

$$a_{z\,|\,\mathrm{rad}\,q_{\alpha z}}=\mathrm{Id}_{\mathrm{rad}\,q_{\alpha z}}.$$

Le lemme résulte donc de III.4.8.

IV.3. EXISTENCE DE FORMES GÉNÉRATRICES DÉFINISSANT φ

IV.3.1. Soient $\varphi:\mathrm{X}\to\mathrm{T}^*\mathrm{M}$ une immersion lagrangienne, $\psi=\bar{p}\,\varphi:\mathrm{X}\to\mathrm{M}$. Soit $g:\mathrm{X}\hookrightarrow\mathrm{V}$ un plongement de X dans un vectoriel de grande dimension et $g^0=g\times 0:\mathrm{X}\hookrightarrow\mathrm{V}\times\mathrm{V}^*$. On pose $\bar{\varphi}=\varphi\times g^0:\mathrm{X}\hookrightarrow\mathrm{T}^*(\mathrm{M}\times\mathrm{V})$, $\bar{\psi}=\psi\times g:\mathrm{X}\hookrightarrow\mathrm{M}\times\mathrm{V}$; alors $\bar{\varphi}$ est un plongement isotrope et $\bar{\varphi}\mathrm{X}\subset\mathscr{H}$.

Pour simplifier la notation, nous allons écrire TX au lieu de $\mathrm{T}\bar{\varphi}\mathrm{X}$ sous-fibré isotrope de $\mathrm{TT}^*(\mathrm{M}\times\mathrm{V})$. Le long de $\mathrm{X}(=\bar{\varphi}\mathrm{X})$, nous avons $\mathrm{TX}\cap(\mathrm{T}\mathscr{H})^0=0$ car φ est une immersion; donc

$$\xi=\mathrm{T}\mathscr{H}\cap(\mathrm{TX})^0/\mathrm{TX}\quad\text{est un sous-fibré lagrangien de } \mathrm{W}=(\mathrm{TX})^0/\mathrm{TX},$$

$\mathscr{F} \cap \mathrm{TX} = 0$ car g est un plongement, donc $\mathscr{F}$ est transverse à $(\mathrm{TX})^0$ et $\eta = \mathscr{F} \cap (\mathrm{TX})^0/\mathrm{TX}$ est un sous-fibré lagrangien de W.

Le corollaire 3 du III.2 nous dit que $d(\xi, \eta) = \gamma_\varphi$ dans $[\mathrm{X}, \mathrm{U}/0]$. Si on remplace V par $\mathrm{V} \times \mathrm{V}_1$ et g par $g \times 0 : \mathrm{X} \subsetneq \mathrm{V} \times \mathrm{V}_1$, $(\mathrm{TX})^0$ est remplacé par $(\mathrm{TX})^0 \oplus \pi^* \mathrm{V}_1 \oplus \pi^* \mathrm{V}_1^*$, $\mathrm{T}\mathscr{H}$ par $\mathrm{T}\mathscr{H} \oplus \pi^* \mathrm{V}_1$ et $\mathscr{F}$ par $\mathscr{F} \oplus \pi^* \mathrm{V}_1^*$. Donc ξ est remplacé par $\xi \oplus \pi^* \mathrm{V}_1$ et η par $\eta \oplus \pi^* \mathrm{V}_1^*$. On est donc dans la situation de III.1. On dira qu'on a stabilisé.

D'après le théorème du III.3, si $\gamma_\varphi = 0$ dans $[\mathrm{X}, \mathrm{U}/0]$, quitte à stabiliser, on peut supposer qu'il existe ζ transversale lagrangienne commune à ξ et η, et $\nu_{\bar\psi}$ trivial (IV.1.9).

Soit E l'image réciproque de ζ, $\mathrm{TX} \subset \mathrm{E} \subset (\mathrm{TX})^0$ et E sous-fibré lagrangien. Comme $\zeta \cap \xi = 0$, pour tout $z \in \bar\varphi \mathrm{X}$, $\mathrm{E}_z \cap \mathrm{T}_z \mathscr{H} = 0 \mod \mathrm{T}_z \mathrm{X}$; mais $\mathrm{T}_z \mathrm{X} \subset \mathrm{E}_z \cap \mathrm{T}_z \mathscr{H}$, donc $\mathrm{TX} = \mathrm{E} \cap \mathrm{T}\mathscr{H}$ et E est transverse à $\mathrm{T}\mathscr{H}$. Comme $\zeta \cap \eta = 0$, $\mathrm{E}_z \cap \mathrm{F}_z \subset \mathrm{T}_z \mathrm{X}$, mais $\mathrm{F}_z \cap \mathrm{T}_z \mathrm{X} = 0$; donc $\mathrm{E} \cap \mathscr{F} = 0$ et E se projette bien sur $\mathrm{M} \times \mathrm{V}$.

IV.3.2. Lemme. — *Soit*

$$\begin{tikzcd} & \mathrm{T}^*\mathrm{N} \arrow[d] \\ \mathrm{X} \arrow[ur, "\bar\varphi"] \arrow[dr, "\bar\psi"'] & \\ & \mathrm{N} \end{tikzcd}$$

où $\bar\varphi$ est un plongement isotrope et $\bar\psi$ un plongement à fibré normal trivial.

Soit E *sous-fibré lagrangien de* $\mathrm{T}(\mathrm{T}^*\mathrm{N})$ *le long de* $\bar\varphi\mathrm{X}$ *se projetant bien sur* N,

Il existe un germe le long de $\bar\psi\mathrm{X}$ de 1-forme fermée α dont le graphe contient $\bar\varphi\mathrm{X}$ et est tangent à E *le long de $\bar\varphi\mathrm{X}$.*

Le lemme achève la démonstration de l'existence car E est transverse à $\mathrm{T}\mathscr{H}$, donc α est transverse à $\mathscr{H}$; c'est une 1-forme génératrice dont le lieu stationnaire est $\bar\psi\mathrm{X}$ et $(\alpha, \bar\psi)$ définit φ.

Preuve du lemme. — Comme $\nu_{\bar\psi}$ est trivial, quitte à restreindre N, on peut supposer $\mathrm{N} = \mathrm{X} \times \mathbb{R}^q$ et que $\bar\psi$ est l'identification de X avec $\mathrm{X} \times 0$, $\bar\varphi$ est alors une section isotrope de $\mathrm{T}^*\mathrm{X} \times \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^{q*} \to \mathrm{X} \times \mathbb{R}^q$ au-dessus de $\mathrm{X} \times 0$, donc $\bar\varphi = (a, 0, b)$ où a est une 1-forme fermée sur X et $b : \mathrm{X} \to \mathbb{R}^{q*}$. Soient $y_1, \ldots, y_q$ des coordonnées sur $\mathbb{R}^q$; par hypothèse $\partial/\partial y_k$ se relève en une section s_k de E (considéré sur X)

$$s_k = \left(\beta_k, \frac{\partial}{\partial y_k}, u_k\right)$$

où β_k est une 1-forme sur X. Écrivons $u_k(x) = \sum u_{kl}(x)\, dy_l$, $b(x) = \sum b_k(x)\, dy_k$. Le fait que E est lagrangien se traduit par

$$\begin{cases} u_{kl} = u_{lk} & \text{pour l'orthogonalité de } s_k \text{ et } s_l \\ \beta_k = db_k & \text{pour l'orthogonalité de } s_k \text{ et } \mathrm{T}(\bar\varphi\,\mathrm{X}), \end{cases}$$

Posons $\alpha = a + d\left(\sum b_k y_k + (1/2) \sum u_{kl} y_k y_l\right)$, c'est une 1-forme sur $\mathrm{X} \times \mathbb{R}^q$, et $d\alpha = da = 0$, Soient $x_1, \ldots, x_n$ des coordonnées locales sur X

$$a=\sum a_i(x)\,dx_i, \qquad \beta_k=\sum_i \beta_{ki}(x)\,dx_i \qquad \text{et} \qquad \alpha=\sum \mathrm{A}_i\,dx_i+\sum \mathrm{B}_l\,dy_l,$$

On a : $\mathrm{A}_i(x,0)=a_i(x)$, $\mathrm{B}_l(x,0)=b_l(x)$, donc $\bar{\varphi}(\mathrm{X}) \subset \Gamma_\alpha$ et

$$\frac{\partial \mathrm{A}_i}{\partial y_k}(x,0)=\frac{\partial b_k}{\partial x_i}(x)=\beta_{ki}(x), \qquad \frac{\partial \mathrm{B}_l}{\partial y_k}(x,0)=u_{kl}(x);$$

donc $\mathrm{T}\,\Gamma_\alpha=\mathrm{E}$ le long de $\bar{\varphi}\mathrm{X}$.

IV.4. Classification des formes génératrices définissant une immersion lagrangienne.

IV.4.1 Lemme. — *Soit* (α_1, h_1) *et* (α_2, h_2) *définissant* φ. *Il existe des stabilisations* $(\bar{\alpha}_1, \bar{h}_1)$ *et* $(\bar{\alpha}_2, \bar{h}_2)$ *et un difféomorphisme* $\mathrm{H}:\bar{\mathrm{N}}_1 \to \bar{\mathrm{N}}_2$ *conservant la projection sur* M *tel que* $\mathrm{H}\,|\,\Sigma_{\bar{\alpha}_1}=\bar{h}_2\,\bar{h}_1^{-1}$ *et tel que* $(\bar{\alpha}_1, \bar{h}_1)$ *et* $(\mathrm{H}^*\,\bar{\alpha}_2, \bar{h}_1)$ *ont même lieu stationnaire.*

Démonstration. — (1) Soit (α, h) définissant φ de lieu stationnaire $\Sigma_\alpha \subset \mathrm{N} \subset \mathrm{M}\times\mathrm{V}$. Soit $i:\Sigma_\alpha \hookrightarrow \mathrm{V}_1$ un plongement dans un vectoriel. Soit $(\bar{\alpha}, \bar{h})$ le stabilisé de (α, h) par $\mathrm{Q}:\mathrm{V}_1 \to \mathbb{R}$. Soient T voisinage tubulaire de Σ_α dans $\mathrm{M}\times\mathrm{V}$ de projection $\pi:\mathrm{T}\to\Sigma_\alpha$ et B une boule centrée en 0 dans V_1. L'application $\Phi:\mathrm{T}\times\mathrm{B}\to\mathrm{M}\times\mathrm{V}\times\mathrm{V}_1$, $\Phi(z, v_1)=(z, v_1+i(\pi z))$ conserve la projection sur $\mathrm{M}\times\mathrm{V}$, est un difféomorphisme sur son image et envoie $\Sigma_{\bar{\alpha}}$ sur $\Sigma'=\{(z, iz)\, z\in\Sigma\}$; $\Phi(\mathrm{T}\times\mathrm{B})=\mathrm{N}'$ est un voisinage de Σ' dans $\mathrm{M}\times\mathrm{V}\times\mathrm{V}_1$. Posons $\alpha'=(\Phi^{-1})^*\,\bar{\alpha}$, $h'=\Phi\,.\,\bar{h}:\mathrm{X}\simeq\Sigma'$; alors (α', h') définit φ, est strictement équivalente à $(\bar{\alpha}, \bar{h})$ et la restriction de la projection

$$\mathrm{pr}_{|\,\Sigma_{\alpha'}}: \quad \Sigma_{\alpha'} \to \mathrm{V}'=\mathrm{V}\times\mathrm{V}_1 \text{ est un plongement.}$$

(2) Pour montrer le lemme, on peut donc se restreindre à (α_i, h_i) définissant φ où $\mathrm{pr}_{|\,\Sigma_i}:\Sigma_i \to \mathrm{V}$ sont des plongements et où dim V est grande $(\Sigma_i=\Sigma_{\alpha_i})$. Soient $\mathrm{S}_i=\mathrm{pr}(\Sigma_i)\subset\mathrm{V}$ et $h_2\,h_1^{-1}:\Sigma_1\simeq\Sigma_2$ donne $h:\mathrm{S}_1 \xrightarrow{\sim} \mathrm{S}_2$

$$h=\mathrm{pr}_{|\,\Sigma_2}\circ h_2\circ h_1^{-1}\circ(\mathrm{pr}_{|\,\Sigma_1})^{-1},$$

Soient $r_i:\mathrm{S}_i\to\mathrm{M}$ tels que $\Sigma_i=\mathrm{graphe}(r_i)$, alors $r_1=r_2\circ h$. Vu que dim V est grande, $h:\mathrm{S}_1\to\mathrm{S}_2$ s'étend en un difféomorphisme h_U entre voisinages tubulaires U_i dans V, $h_\mathrm{U}:\mathrm{U}_1 \xrightarrow{\sim} \mathrm{U}_2$.

Soit $\rho:\mathrm{U}_2\to\mathrm{S}_2$ la projection et $\mathrm{R}_2=\mathrm{R}_2\circ\rho:\mathrm{U}_2\to\mathrm{M}$ et $\mathrm{R}_1=\mathrm{R}_2\circ h_\mathrm{U}$ et soit $\tilde{\mathrm{U}}_i=$ graphe (R_i) et soit $\tilde{h}_\mathrm{U}:\tilde{\mathrm{U}}_1\to\tilde{\mathrm{U}}_2$ le difféomorphisme $\tilde{h}_\mathrm{U}(v, \mathrm{R}_1\,v)=(h_\mathrm{U}\,v, \mathrm{R}_2\,h_\mathrm{U}\,v)$; alors $\tilde{h}_\mathrm{U}$ conserve la projection π_M sur M et $\tilde{h}_{\mathrm{U}\,|\,\Sigma_1}=h_2\,h_1^{-1}$.

Soit $\lambda_i=\pi_\mathrm{M}^*\,\mathrm{TM}$ sur $\tilde{\mathrm{U}}_i:\tilde{h}_\mathrm{U}$ s'étend en le morphisme fibré $\tilde{\mathrm{H}}:\lambda_1\to\lambda_2$ où

$$\tilde{\mathrm{H}}(v, y, u)=(h_\mathrm{U}\,v, y, u), \qquad y=\mathrm{R}_1\,v=\mathrm{R}_2\,h_\mathrm{U}\,v \qquad \text{et} \qquad u\in\mathrm{T}_y\mathrm{M}$$

et $\tilde{\mathrm{H}}$ conserve la projection sur TM. Comme l'application exponentielle de M (pour une certaine métrique riemannienne) pour U_1 assez petit est un difféomorphisme de $\mathrm{D}_\varepsilon(\lambda_i)$ sur un voisinage N_i de Σ_i dans $\mathrm{M}\times\mathrm{V}$, $\tilde{\mathrm{H}}$ donne $\mathrm{H}:\mathrm{N}_1\to\mathrm{N}_2$ ayant les propriétés voulues.

IV.4.2. On dit que (α, h) et (α', h') définissant φ ont la propriété (P) si α et α' sont définies sur le même espace ambiant et s'il existe $H: N \xrightarrow{\sim} N'$ conservant π_M; $H_{|\Sigma_\alpha} = h' h^{-1}$ et $H^* \alpha'$ et α ont même lieu stationnaire.

Dans ce cas, les formes hessiennes q_α et $q_{H^*\alpha'}$ sont associées et $\Delta(q_\alpha, q_{H^*\alpha'})$ ne dépend pas du choix de H, car si H_1 est un autre choix, alors $K = H_1^{-1} H$ préserve la projection sur M; $K^*(H_1^* \alpha') = H^* \alpha'$ et $K_{|\Sigma_\alpha} = \mathrm{Id}_{\Sigma_\alpha}$, donc d'après IV.2.5

$$\Delta(q_{H^*\alpha'}, q_{H_1^*\alpha'}) = 0 \quad \text{dans } [X, \mathbb{Z} \times BO],$$

et

$$\Delta(q_\alpha, q_{H^*}\alpha') = \Delta(q_\alpha, q_{H^*}\alpha') + \Delta(q_{H^*}\alpha', q_{H^*}\alpha') = \Delta(q_\alpha, q_{H^*}\alpha').$$

Cette valeur commune est notée $\Delta(\alpha, \alpha') \in [X, \mathbb{Z} \times BO]$ pour (α, h) et (α', h') définissant φ et vérifiant P.

Si (α, h) et (α', h') vérifient P, si on stabilise α par $Q: V_1 \to \mathbb{R}$ et α' par $Q': V_1 \to \mathbb{R}$, alors $(\bar{\alpha}, \bar{h})$ et $(\bar{\alpha}', \bar{h}')$ vérifient P; il n'y a qu'à prendre $\bar{H} = H \times I_{V_1}$ et avec ce choix il est clair que

$$\Delta(\bar{\alpha}, \bar{\alpha}') = \Delta(\alpha, \alpha') + \operatorname{Ind} Q - \operatorname{Ind} Q' \in [X, \mathbb{Z} \times BO],$$

où $\operatorname{Ind} Q \in [X, \mathbb{Z}] \subset [X, \mathbb{Z} \times BO]$. Donc, si $\tilde{\Delta}(\alpha, \alpha') =$ projection de $\Delta(\alpha, \alpha')$ dans $[X, BO]$

$$\tilde{\Delta}(\bar{\alpha}, \bar{\alpha}') = \tilde{\Delta}(\alpha, \alpha') \in [X, BO].$$

Si maintenant (α, h) et (α', h') définissent φ mais sont quelconques, le lemme 4.1 nous assure qu'il existe des stabilisations $(\bar{\alpha}, \bar{h})$ et $(\bar{\alpha}', \bar{h}')$ vérifiant P et $\tilde{\Delta}(\bar{\alpha}, \bar{\alpha}')$ est indépendant de tels choix car deux stabilisations d'un (α, h) ont des stabilisations communes. On note la valeur commune

$$\tilde{\Delta}(\alpha, \alpha') \in [X, BO].$$

IV.4.3. On fait agir [X, BO] sur $F(\varphi)$ de la façon suivante: Si $\beta \in [X, BO]$ est représentée par un fibré λ sur X plongé dans le fibré trivial $X \times V_1$ (V_1 euclidien), on note λ' l'orthogonal et on considère $Q_\lambda: X \times V_1 \to \mathbb{R}$ la forme quadratique pour laquelle λ et λ' sont orthogonaux, $Q_{\lambda|\lambda}$ est l'opposé du produit scalaire, $Q_{\lambda|\lambda'}$ est le produit scalaire.

Si (α, h) définit φ, on considère $\bar{\alpha} = \alpha + dQ_\lambda$ (c'est une forme sur $N \times V_1$ génératrice), $\Sigma_{\bar{\alpha}} = \Sigma_\alpha \times 0$ et $\bar{h}: X \xrightarrow{\sim} \Sigma_\alpha \simeq \Sigma_{\bar{\alpha}}$; alors la classe de $(\bar{\alpha}, \bar{h})$ ne dépend pas des choix faits, on la note $[(\alpha, h)] + \beta \in F(\varphi)$.

Il est clair que $\tilde{\Delta}(\alpha + \beta, \alpha) = \beta$ dans $[X, BO]$.

Pour achever la démonstration du théorème, il reste à voir que si (α, h) et (α', h') définissent φ avec $\tilde{\Delta}(\alpha, \alpha') = 0$, alors $(\alpha, h) \sim (\alpha', h')$.

IV.4.4. Démontrons d'abord par la classique méthode du chemin le

LEMME. — *Soit* (α_t, h) *une famille à un paramètre* $t\in[0,1]$ *de formes génératrices définissant* φ *et toutes de même lieu stationnaire. Alors la famille est triviale c'est-à-dire qu'il existe une famille de difféomorphismes* H_t *conservant la projection sur* M, $H_{t\,|\,\Sigma}=\mathrm{Id}_\Sigma$ *et* $H_t^*\alpha_t=\alpha_0$.

Démonstration. — Comme il est classique, le lemme résulte de l'énoncé: $\forall s\in[0,1]$, il existe, pour t proche de s, une famille de difféomorphismes H_{ts} conservant π_M avec $H_{ts\,|\,\Sigma}=\mathrm{Id}_\Sigma$ et $H_{ss}=\mathrm{Id}$ et $H_{ts}^*\alpha_t=\alpha_s$.

Comme $h^*\alpha_{t\,|\,\Sigma}=\varphi^*\lambda_M$ (λ_M forme de Liouville de T^*M), les formes α_t sur un voisinage tubulaire N de Σ sont toutes cohomologues; choisissons $f_t: N\to\mathbb{R}$ avec $f_s\equiv 0$ et $\alpha_t-\alpha_s=df_t$; alors, $j^1(f_t)=0$ sur Σ.

Nous allons construire H_{ts} en intégrant un champ de vecteurs vertical u_t avec la condition initiale $H_{ss}(z)=z$. La condition $H_{ts\,|\,\Sigma}=\mathrm{Id}_\Sigma$ s'exprime par $u_t=0$ sur Σ et la condition $H_{ts}^*\alpha_t=\alpha_s$ s'exprime par

$$0=\frac{d}{dt}(H_{ts}^*\alpha_t)=H_{ts}^*\left(\frac{d\alpha_t}{dt}\right)+H_{ts}^*(d\langle\alpha_t,u_t\rangle+i_{u_t}d\alpha_t)$$
$$=H_{ts}^*\left(\frac{d\alpha_t}{dt}+d\langle\alpha_t,u_t\rangle\right).$$

Elle est vérifiée si $(d\alpha_t/dt)+d\langle\alpha_t,u_t\rangle=0$, donc *a fortiori* si

$$\langle\alpha_t,u_t\rangle=-\frac{df_t}{dt}, \tag{1}$$

Écrivons $\alpha_s=\hat{\alpha}_s+\sum_1^q g_i\,dy_i$ où $\hat{\alpha}_s$ s'annule sur les vecteurs verticaux. Les fonctions g_i sont des équations de Σ par hypothèse, donc il existe $b_t^{kl}: N\to\mathbb{R}$,

$$b_t^{kl}=b_t^{lk}\qquad\text{et}\qquad b_s^{kl}\equiv 0\quad\text{avec } f_t=\frac{1}{2}\sum b_t^{kl}g_k g_l.$$

Écrivons $u_t=\sum u_{it}(\partial/\partial y_i)$, alors

$$\langle\alpha_t,u_t\rangle=\langle\alpha_s+df_t,u_t\rangle=\sum g_i u_{it}+\frac{1}{2}\sum g_i g_l\langle db_t^{il},u_t\rangle+\sum b_t^{il}g_i\langle dg_l,u_t\rangle$$
$$=\sum_i g_i\left[u_{it}+\frac{1}{2}\mathrm{S}_l\, g_l\langle db_t^{il},u_t\rangle+\sum_l b_t^{il}\langle dg_l,u_t\rangle\right].$$

Or, $df_t/dt=(1/2)\sum_i g_i(\sum g_l(\partial b^{il}/\partial t)$ de sorte que (1) est impliqué par les équations

$$u_{it}+\frac{1}{2}\sum_l g_l\langle db_t^{il},u_t\rangle+\sum_l b_t^{il}\langle dg_l,u_t\rangle=-\frac{1}{2}\sum_l g_l\frac{\partial b^{il}}{\partial t},\qquad i=1,\ldots,q. \tag{2}$$

Or $g_{l\,|\,\Sigma}=0$ et $b_s^{il}\equiv 0$; donc, l'application linéaire

$$u_t \mapsto \left(u_{it}+\frac{1}{2}\sum g_l \langle db_t^{il}, u_t\rangle + \sum b_t^{il}\langle dg_l, u_t\rangle\right) i=1, \ldots, q$$

est inversible près de Σ pour t proche de s et la solution de (2) s'annule bien sur Σ.

IV.4.5. *Fin de la démonstration du théorème.* — Soient (α, h) et (α', h') définissant φ avec $\tilde{\Delta}(\alpha, \alpha')=0$ dans [X, BO]. A équivalence près (IV.4.1), on peut supposer que (α, h) et (α', h') ont même lieu singulier (donc $h'=h$).

On a alors (notations de IV.2), deux transversales lagrangiennes communes ζ et ζ' à ξ et η. Vu que $\tilde{\Delta}(q_\alpha, q_{\alpha'})=0$, on sait (chapitre III) que, quitte à stabiliser (on garde les mêmes notations), il existe une déformation ζ_t de ζ en ζ' parmi les transversales lagrangiennes communes à ξ et η, d'où un fibré lagrangien E sur $\Sigma\times I$ comme en IV.3.

En utilisant IV.3.2 sur $\Sigma\times I$, on construit une famille (α_t, h) de formes génératrices définissant φ, toutes de lieu stationnaire Σ, telles que Γ_α et Γ_{α_0} ont même espace tangent le long de Σ et $\Gamma_{\alpha'}$ et Γ_{α_1} ont même espace tangent le long de Σ. On applique alors trois fois le lemme 4.4 car la famille $\beta_t=(1-t)\,\alpha+t\,\alpha_0$ est génératrice puisque l'espace tangent à Γ_{β_t} le long de Σ ne bouge pas.

BIBLIOGRAPHIE

[1] ARNOLD, *Characteristic Class Entering in Quantization Conditions* (*Funct. Anal.*, 1, 1967, p. 1-14).

[2] ATIYAH, K *Theory and Reality* (*Quart. J. Math. Oxford*, vol. 17, 1966, p. 367-386).

[3] ATIYAH, *Bott Periodicity and the Index of Elliptic Operators* (*Quart. J. Math. Oxford*, vol. 19, 1968, p. 113-140).

[4] ATIYAH-BOTT, *On the Periodicity Theorem for Complex Vector-Bundles* (*Acta Math.*, vol. 112, 1964, p. 229-247).

[5] BOTT, *The Stable Homotopy of Classical Groups* (*Ann. Math.*, vol. 66, 1959, p. 313-337).

[6] *Invariant de Hopf et opérations cohomologiques secondaires* (*Séminaire Cartan* 1958-1959).

[7] *Périodicité des groupes d'homotopie stables des groupes classiques, d'après Bott.* (*Séminaire Cartan* 1959-1960).

[8] DOUBROVINE, NOVIKOV et FOMENKO, *Geometrie contemporaine*, 3e partie, Mir, 1987.

[9] GIROUX, *Formes génératrices d'immersions lagrangiennes* (*C.R. Acad. Sci. Paris*, t. 306, série I, 1988, p. 761-764).

[10] GUILLEMIN-STERNBERG, *Geometric Asymptotics*, A.M.S., 1977.

[11] HÖRMANDER, *Fourier Integral Operators* (*Acta. Math.*, vol. 127, 1971, p. 79-183).

[12] KAROUBI, *Algèbres de Clifford et* K*-théorie* (*Ann. scient. Ec. Norm. Sup.*, t. 1, 1968, p. 161-270).

[13] KAROUBI, *Périodicité de la* K*-théorie hermitienne*, *Algebraic* K*-theory III* (*Springer Lect. Notes Math.*, n° 343, p. 301-411).

[14] LEES, *Defining Lagrangian Immersions by Phase Functions* (*Trans. A.M.S.*, vol. 250, 1979, p. 213-222).

[15] MILNOR, *Morse Theory* (*Princeton Lect. Math.*, n° 51, 1962).
[16] WEINSTEIN, *Lectures on Symplectic Manifolds* (*C.B.M.S. regional Conf. Ser. in Math.*, n° 29, 1977).
[17] WOOD, *Banach Algebras and Bott Periodicity* (*Topology*, vol. 4, 1966, p. 371-389).

(Manuscrit reçu le 22 décembre 1988,
révisé le 16 janvier 1990).

François LATOUR,
Université Paris XI
Mathématiques-Bât. 425
91405 Orsay Cedex, France.