L. GEOFFROY

Mémoire sur les résistances qu'éprouve une surface mobile de la part d'un milieu fluide dans lequel elle se meut

Annales scientifiques de l'É.N.S. 2e série, tome 7 (1878), p. 215-226
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1878_2_7__215_0>

MÉMOIRE

SUR LES

RÉSISTANCES QU'ÉPROUVE UNE SURFACE MOBILE

DE LA PART D'UN MILIEU FLUIDE DANS LEQUEL ELLE SE MEUT;

PAR M. LÉON GEOFFROY,

INGÉNIEUR, RÉPÉTITEUR A L'ÉCOLE CENTRALE.

Nous admettons comme base de nos calculs la loi de Newton : la résistance normale sur l'élément superficiel $d\omega_1$, proportionnelle au carré de la vitesse V de l'élément et au carré du cosinus de l'angle φ, que fait la normale à l'élément superficiel, avec la direction de la vitesse V (le milieu fluide étant supposé en repos).

L'effort normal à l'élément $d\omega_1$ sera donc de la forme

$$F = KV^2 \cos^2\varphi\, d\omega_1. \tag{1}$$

Le mouvement instantané le plus général de la surface mobile est, d'après le théorème de Poncelet, un mouvement de rotation élémentaire, autour d'un certain axe, accompagné d'une translation élémentaire, parallèlement au même axe.

Nous prendrons, pendant le temps infiniment petit dt, l'axe instantané de rotation et de glissement pour axe des z, les coordonnées étant rectangulaires.

Soit $z = f(x, y)$ l'équation de la surface à l'instant considéré, les angles de la normale avec les axes sont donnés par les relations

$$\cos(N, x) = \frac{-p}{\sqrt{p^2+q^2+1}},$$

$$\cos(N, y) = \frac{-q}{\sqrt{p^2+q^2+1}},$$

$$\cos(N, z) = \frac{1}{\sqrt{p^2+q^2+1}}.$$

p et q désignant, comme à l'ordinaire, les dérivées partielles $\frac{dz}{dx}$ et $\frac{dz}{dy}$.

Les angles de la vitesse V avec les axes sont déterminés par les formules suivantes, dans lesquelles v est la vitesse élémentaire de translation, ω la vitesse élémentaire de rotation

$$\cos(\mathrm{V}, x) = \frac{\omega y}{\sqrt{v^2 + \omega^2(y^2 + x^2)}},$$

$$\cos(\mathrm{V}, y) = \frac{-\omega x}{\sqrt{v^2 + \omega^2(y^2 + x^2)}},$$

$$\cos(\mathrm{V}, z) = \frac{v}{\sqrt{v^2 + \omega^2(y^2 + x^2)}}.$$

La vitesse v est dirigée de O à z, et la rotation a lieu de Oy vers Ox.

L'angle φ sera déterminé par la relation

$$\cos^2\varphi = \frac{(v + \omega qx - \omega py)^2}{[v^2 + \omega^2(y^2 + x^2)](p^2 + q^2 + 1)}.$$

La valeur (1) de la force F deviendra

$$\mathrm{F} = \mathrm{K}\frac{(v + \omega qx - \omega py)^2}{p^2 + q^2 + 1}\,d\omega_1. \tag{2}$$

Considérons d'abord le cas particulier où l'on aurait, en chacun des points de la surface mobile,

$$v + \omega qx - \omega py = 0. \tag{3}$$

La surface, définie par cette équation aux dérivées partielles, présente cette propriété remarquable, qu'en chacun de ses points la résistance normale est nulle; l'action élémentaire du milieu sur la surface se réduit donc aux simples frottements.

Si nous posons

$$\frac{v}{\omega} = n,$$

l'équation (3) pourra se mettre sous la forme

$$py - qx = n.$$

L'intégration s'obtient immédiatement par le procédé ordinaire:

écrivons

$$\frac{dx}{y} = -\frac{dy}{x} = \frac{dz}{n}.$$

On en déduit

$$y^2 + x^2 = \mathrm{K}^2,$$

$$dz = \frac{n\,dx}{\sqrt{\mathrm{K}^2 - x^2}}, \qquad z = n \operatorname{arc\,sin} \frac{x}{\mathrm{K}} + \mathrm{C},$$

$$z = n \operatorname{arc\,sin} \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \mathrm{C}.$$

L'équation générale des surfaces considérées sera

$$\mathrm{C} = \varphi(\mathrm{K}^2) \quad \text{ou} \quad z = \varphi(x^2 + y^2) + n \operatorname{arc\,sin} \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \text{const.},$$

ou plus simplement

(4) $$z = \varphi(x^2 + y^2) + n \operatorname{arc\,tang} \frac{x}{y} + \mathrm{C}.$$

Le mode de génération de ces surfaces est très-remarquable; nous n'examinerons que le cas où la fonction φ est algébrique. Posons

$$\varphi(x^2 + y^2) = \mathrm{A}(x^2 + y^2)^m + \mathrm{B}(x^2 + y^2)^n + \ldots + \mathrm{C}.$$

On peut, en posant $y = x \operatorname{tang} \mu$, écrire

$$z = \mathrm{A}\,\frac{x^{2m}}{\cos^{2m} \mu} + \mathrm{B}\,\frac{x^{2p}}{\cos^{2p} \mu} + \ldots + n\lambda + \mathrm{C},$$

λ étant le complément de l'angle μ.

Cette dernière équation représente la projection, sur le plan zOx, de la section de la surface, par le plan $y = x \operatorname{tang} \mu$.

Pour avoir l'équation de la courbe dans le plan zOx_1 lui-même, nous remplacerons x par $x_1 \cos \mu$; on aura ainsi

(5) $$z = \mathrm{A}x_1^{2m} + \mathrm{B}x_1^{2p} + \ldots + n\lambda + \mathrm{C};$$

la forme de cette courbe est indépendante de λ; mais le point où cette courbe rencontre Oz varie suivant la direction du plan zOx_1.

Ainsi donc :

Les surfaces de résistance nulle offrent cette analogie, avec les surfaces *de révolution d'axe Oz, d'être coupées par tous les plans passant par cet axe, suivant des courbes identiques.*

Ces surfaces sont engendrées par la combinaison des deux mouvements suivants : une rotation autour de Oz de la courbe (5) et un mouvement de translation de cette courbe parallèlement à Oz.

La vitesse de cette translation dépend du terme indépendant $n\lambda + C$, qui est le z du point où la courbe (5) coupe l'axe Oz; pour $\lambda = 0$, on a $z = C$, et cette valeur augmente proportionnellement à λ; en d'autres termes, la translation de la courbe génératrice est proportionnelle à la quantité angulaire dont elle tourne dans le même temps.

Le mode de génération consiste, en définitive, dans le mouvement hélicoïdal autour de Oz de la courbe (5); les vitesses de translation et de rotation ont pour rapport $\frac{n\lambda}{\lambda}$, c'est-à-dire précisément le rapport $\frac{v}{\omega} = n$, du mouvement hélicoïdal élémentaire de la surface mobile.

Le résultat précédent peut être obtenu à l'aide des considérations suivantes :

Un point quelconque de la surface mobile décrit autour de Oz une hélice dont le pas est $\frac{2\pi v}{\omega}$ ou $2\pi n$, et la vitesse initiale de ce point est dirigée, à chaque instant, suivant la tangente à cette hélice; si cette courbe est contenue sur la surface mobile elle-même, le point se mouvra sur la surface mobile, ce qui est évidemment la condition de résistance nulle pour ce point; il faut donc que la surface soit telle qu'il passe, en chacun de ses points, une hélice de pas $\frac{2\pi v}{\omega}$.

Considérons les équations

$$\varphi(x^2 + y^2) = 0,$$

qui représente les cylindres de révolution d'axe Oz et

$$z = n \operatorname{arc\,tang} \frac{x}{y} + C,$$

qui représente une surface de vis à filet carré ayant Oz pour directrice rectiligne et xOy pour plan directeur.

Si l'on prend ces deux équations simultanément, elles représenteront des hélices de pas $2\pi n$. D'après la propriété connue de l'hélicoïde gauche, à plan directeur, d'être coupée par des cylindres d'axe Oz, suivant des hélices de même pas, l'équation générale des surfaces de résistance nulle sera évidemment

$$\varphi(x^2 + y^2) = z - n \operatorname{arc\,tang} \frac{x}{y} - C$$

ou

$$z = \varphi(y^2 + y^2) + n \operatorname{arc\,tang} \frac{x}{y} + C,$$

qui est précisément l'équation trouvée directement.

Les cas les plus remarquables sont les suivants :

1° La fonction φ est

$$A\sqrt{x^2 + y^2};$$

l'équation

$$z = A\sqrt{x^2 + y^2} + n \operatorname{arc\,tang} \frac{x}{y} + C$$

représente une surface de vis à filet triangulaire qui, pour $A = 0$, se transforme en une surface de vis à filet carré.

2° La fonction φ est

$$A(x^2 + y^2);$$

l'équation

$$z = A(x^2 + y^2) + n \operatorname{arc\,tang} \frac{x}{y} + C$$

représente la surface engendrée par une parabole d'axe Oz et de paramètre $\frac{1}{2A}$, qui tourne autour de Oz du mouvement hélicoïdal uniforme dont v et ω sont les éléments.

Si nous supposons maintenant que le mouvement hélicoïdal de la surface mobile soit continu, au lieu d'être instantané, et que la valeur de n reste constante, les surfaces précédentes auront à chaque instant la propriété reconnue. Ainsi :

Les seules surfaces de résistance nulle sont les surfaces d'équation

$$z = \varphi(x^2 + y^2) + n \operatorname{arc\,tang} \frac{x}{y} + C$$

assujetties à se mouvoir d'un mouvement hélicoïdal uniforme autour *de zO, les éléments v et ω de ce mouvement restant dans le rapport constant n. Dans le cas particulier où la translation serait nulle, on aurait $v = 0$, $n = 0$; l'équation précédente se réduirait à $z = \varphi(x^2 + y^2)$, qui représente toutes les surfaces de révolution d'axe Oz.*

Il convient de remarquer que les résultats qui précèdent sont complétement indépendants de la relation actuellement inconnue entre l'action du fluide sur l'élément superficiel et les quantités V et φ; en d'autres termes, toute autre loi que celle de Newton donne le même résultat relativement aux surfaces de résistance nulle.

Recherche des lignes de résistance nulle sur une surface mobile quelconque.

Cherchons sur la surface mobile, dont l'équation rapportée aux axes instantanés définis précédemment est

$$z = f(x, y), \tag{6}$$

le lieu des points en lesquels la résistance normale est nulle à l'instant dt, que nous considérons. Cela revient à chercher le lieu des points en lesquels on a

$$py - qx = n, \tag{7}$$

p et q sont les valeurs de $\frac{dz}{dx}$ et de $\frac{dz}{dy}$, prise dans l'équation (6). Considérons, par exemple, le paraboloïde elliptique

$$z = \frac{x^2}{2a} + \frac{y^2}{2b},$$

on a ici

$$p = \frac{x}{a}, \quad q = \frac{y}{b},$$

l'équation de la projection sur xOy de la courbe de résistance nulle sera

$$xy = \frac{abn}{b - a}.$$

Nous ferons sur ce sujet la remarque suivante : la courbe de résistance nulle est le lieu des points de la surface dont la vitesse est dirigée dans le plan tangent à cette surface en ces points. Cette courbe reste donc sur la surface pendant le temps dt; d'autre part, elle fait partie de la position infiniment voisine qu'est venue prendre la surface mobile à la fin du temps dt; elle est donc la *caractéristique* de la surface enveloppe de la surface mobile considérée comme enveloppée; les équations simultanées (6) et (7) représenteront à chaque instant cette caractéristique. La recherche de l'enveloppe d'une surface mobile indéformable se trouve ainsi rattachée aux considérations qui précèdent.

Nous devons remarquer également que les surfaces de résistance nulle admettent dans leur mouvement hélicoïdal une infinité de caractéristiques, puisque tous leurs points satisfont à l'équation (7). Ce sont les seules surfaces qui puissent être à elles-mêmes leur enveloppe.

Détermination du lieu des points de la surface mobile où la résistance est la même par unité de surface.

Il faut qu'on ait

$$\frac{F}{K\,d\omega} = C^2$$

en tous les points de la courbe considérée, soit

$$V^2 \cos^2\varphi = C^2 \quad \text{ou} \quad \frac{(v + \omega g x - \omega p y)^2}{p^2 + q^2 + 1} = C^2,$$

ou enfin

$$(n + qx - py)^2 = \frac{c^2}{\omega^2}(p^2 + q^2 + 1). \tag{8}$$

Cette équation, considérée isolément, est l'équation aux dérivées partielles des surfaces en tous les points desquelles la résistance normale est constante. On peut employer pour cette intégration la méthode de Cauchy; les équations simultanées qui se présentent dans l'application de cette méthode se prêtent difficilement au calcul.

Si nous combinons l'équation (8) avec l'équation

$$z = f(x, y),$$

nous aurons les équations générales des courbes de résistance égale, sur la surface particulière

$$z = f(x, y).$$

Appliquons ces formules au cas intéressant de la surface motrice de l'hélice des navires. Cette surface n'est autre chose que la portion de la surface d'une vis à filet carré comprise entre deux cylindres ayant pour axe commun la directrice rectiligne de la surface de la vis et pour rayons r et R.

Soit

$$z = k \operatorname{arc\,tang} \frac{x}{y} + C$$

l'équation de la surface considérée; on y suppose k différent de n, sans cela on aurait affaire à une surface de résistance nulle.

On a ici

$$py - qx = k \quad \text{et} \quad p^2 + q^2 + 1 = \frac{k^2}{y^2 + x^2} + 1;$$

l'équation (8) devient

$$\frac{C^2}{\omega^2}\left(\frac{k^2}{y^2 + x^2} + 1\right) = (k - n)^2;$$

on en déduit

$$C^2 = \frac{\omega^2 (k - n)^2 (y^2 + x^2)}{k^2 + y^2 + x^2}.$$

Cette équation représente un cylindre de révolution d'axe OZ; les courbes, d'égale résistance, sont par conséquent des hélices.

Recherche du point de la surface mobile, en lequel la résistance du fluide et par conséquent la valeur de C^2 est maximum.

C^2 étant une fonction des deux variables indépendantes x et y, il faudra qu'on ait

$$\frac{dC^2}{dx} = 0, \quad \frac{dC^2}{dy} = 0.$$

Si nous posons

$$\frac{dp}{dx} = r, \quad \frac{dq}{dy} = t, \quad \frac{dp}{dy} = \frac{dq}{dx} = s,$$

on aura pour déterminer le point cherché les trois équations

$$(p^2+q^2+1)(sx+q-ry)-(n+qx-py)(pr+qs)=0,$$
$$(p^2+q^2+1)(tx-p-sy)-(n+qx-py)(ps+qt)=0,$$
$$z=f(x,y).$$

Frottement du milieu sur la surface mobile.

On peut se proposer des problèmes analogues aux précédents, relativement aux résistances provenant du frottement du fluide sur les différents points de la surface.

Nous admettrons que le frottement soit proportionnel, en chaque point, au carré de la vitesse projetée sur le plan tangent à la surface, soit $aV^2\sin^2\varphi$.

Points où le frottement est nul. — Il faut

$$V^2\sin^2\varphi=0, \quad \text{ou} \quad \cos^2\varphi=1.$$

En égalant à l'unité la valeur de $\cos^2\varphi$, calculée précédemment, et en effectuant, il vient

$$(px+qy)^2+(pn+y)^2+(qn-x)^2=0.$$

Il faut donc qu'on ait en même temps

$$(a) \qquad px+qy=0,$$
$$(b) \qquad pn+y=0,$$
$$(c) \qquad qn-x=0,$$
$$(d) \qquad z=f(x,y).$$

Ces quatre équations se réduisent à trois, ce qui rend le problème déterminé.

Si, en effet, on divise (b) par (c), on en tire

$$\frac{p}{q}=-\frac{y}{x}, \quad \text{d'où} \quad px+qy=0,$$

c'est-à-dire l'équation (a).

Le système des équations (b), (c), (a) détermine donc les points de frottement nul, ou, ce qui est la même chose, les points dont la vitesse est normale à la surface à l'instant considéré.

Lieu des points d'égal frottement (sur la surface mobile). — On a, en ces points,

$$V^2 \sin^2 \varphi = C^2,$$

ou

$$(9) \qquad C^2 = \frac{(px+qy)^2 + (pn+y)^2 + (qn-x)^2}{p^2+q^2+1}\omega^2.$$

Cette équation, jointe à $z = f(x, y)$, définit les courbes considérées.

Points où le frottement est maximum. — On considérera dans la formule (9) C^2 comme une fonction de deux variables indépendantes x et y. Les équations simultanées

$$\frac{dC^2}{dx} = 0, \quad \frac{dC^2}{dy} = 0, \quad z = f(x, y)$$

nous fourniront les points cherchés.

Nous pouvons donc, en résumé, couvrir une surface mobile d'un réseau de courbes indiquant en chaque point la résistance normale et le frottement, ce qui pourrait être de quelque utilité dans l'étude de la répartition des résistances aux différents points de la surface mobile.

Étude spéciale de l'hélice motrice des navires.

Nous prendrons pour équation de cette surface motrice

$$z = k \operatorname{arc\,tang} \frac{x}{y} + C.$$

Nous savons que les courbes d'égale résistance sont des hélices, et nous aurons, en conservant les notations précédentes, aux différents points d'une hélice de rayon ρ,

$$C^2 = \frac{\omega^2(k-n)^2\rho^2}{\rho^2+k^2} = V^2\cos^2\varphi.$$

La pression sur l'élément superficiel $d\omega$, pris en un point de cette hélice, sera

$$F = KV^2\cos^2\varphi\, d\varphi_1,$$

et la projection de cette force sur l'axe OZ sera, en appelant λ l'angle de la normale à l'élément, avec l'axe OZ,

$$KV^2\cos^2\varphi\, d\omega_1 \cos\lambda;$$

la somme de ces projections sera, pour les différents points de l'hélice,

$$KV^2\cos^2\varphi\, \Sigma d\omega_1 \cos\lambda = KC^2 \Sigma d\omega_1 \cos\lambda.$$

La quantité $\Sigma d\omega_1 \cos\lambda$ représente la projection sur XOY de l'aire comprise entre les deux hélices de rayons ρ et $\rho + d\rho$.

Si nous désignons par H le pas de l'hélice, et par $\frac{L}{H}$ la fraction utilisée de ce pas, on aura

$$\Sigma d\omega_1 \cos\lambda = 2\pi\rho\, d\rho \frac{L}{H}.$$

La somme des projections des pressions sur OZ sera, pour toute l'étendue de la surface motrice,

$$P = K\frac{\omega^2(k-n)^2 2\pi L}{H}\int_r^R \frac{\rho^3 d\rho}{k^2+\rho^2}.$$

On a

$$H = 2\pi k \quad \text{et} \quad \int_r^R \frac{\rho^3 d\rho}{k^2+\rho^2} = \frac{R^2 - r^2 - k^2 \operatorname{log\,nép.} \frac{R^2+k^2}{r^2+k^2}}{2},$$

par suite

$$H = K\frac{\omega^2\left(\frac{H}{2\pi} - \frac{v}{\omega}\right)^2 \pi L}{H}\left(R^2 - r^2 - \frac{H^2}{4\pi^2}\operatorname{log\,nép.}\frac{1+\frac{4\pi^2 R^2}{H^2}}{1+\frac{4\pi^2 r^2}{H^2}}\right),$$

ou enfin

$$P = K\pi L H\left[\frac{\omega H}{2\pi} - v\right]^2\left(\frac{R^2-r^2}{H^2} - \frac{1}{4\pi^2}\operatorname{log\,nép.}\frac{1+\frac{4\pi^2 R^2}{H^2}}{1+\frac{4\pi^2 r^2}{H^2}}\right).$$

Nous retrouvons ainsi la formule établie par MM. Guède et Jaÿ dans leur étude sur la surface motrice qui nous occupe actuellement.

Méthode générale pour calculer la somme des projections sur un axe des actions du milieu sur la surface mobile $z = f(x, y)$.

Considérons, par exemple, la somme des projections des résistances sur l'axe OZ. Nous avons pour chaque élément $d\omega$

$$F_3 = KV^2 \cos^2\varphi \, d\omega_1 \cos\lambda.$$

Si nous considérons les différents points d'une courbe d'égale résistance de la surface, nous aurons en chaque point

$$F_3 = KC^2 d\omega_1 \cos\lambda,$$

et pour tous les points

$$\Sigma F_3 = KC^2 \Sigma \, d\omega_1 \cos\lambda.$$

Soit $f(x, y) = C^2$ l'équation de la projection sur XOY de la courbe d'égale résistance considérée; soit $f(x, y) = C^2 + dC^2$ la courbe infiniment voisine. La quantité $\Sigma d\omega \cos\lambda$ représente l'aire élémentaire située entre ces deux courbes.

Si je désigne par $A = F(C^2)$ l'aire de la courbe $f(x, y) = C^2$, on aura

$$\Sigma \, d\omega \cos\lambda = dA = F'(C^2) \, dC^2,$$

et par suite

$$\Sigma F_3 = KC^2 \, F'(C^2) \, dC^2.$$

Si nous appelons C_1^2 et C_2^2 les valeurs de C^2 qui correspondent aux courbes extrêmes de résistance égale, entre lesquelles on veut évaluer la projection P des actions normales sur OZ, on aura

$$P = \int_{C_1^2}^{C_2^2} KC^2 \, F'(C^2) \, dC^2.$$