ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

H. LEMONNIER

Mémoire sur l'élimination

Annales scientifiques de l'É.N.S. 2e série, tome 7 (1878), p. 151-214

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1878_2_7__151_0>

MÉMOIRE
SUR L'ÉLIMINATION,

PAR M. H. LEMONNIER,

DOCTEUR ÈS SCIENCES, PROFESSEUR DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES AU LYCÉE HENRI IV.

SECONDE PARTIE.

I.

22. Reprenons les $m+n-2p+2$ équations du n° 7, et disposons-les les unes au-dessous des autres, en portant les termes semblables dans une même colonne verticale, de façon qu'elles se suivent de haut en bas, comme ci-dessous :

$$\begin{aligned}
f(x)&=0,\\
xf(x)&=0,\\
\ldots\ldots&\ldots,\\
x^{m-p}f(x)&=0,\\
x^{n-p}F(x)&=0,\\
x^{n-p-1}F(x)&=0,\\
\ldots\ldots&\ldots,\\
F(x)&=0.
\end{aligned}$$

Formons, suivant la règle du n° 14, les plus grands communs diviseurs de $F(x)$ et $f(x)$, qui répondent successivement aux hypothèses de $p=n-1$, $p=n-2$, $p=n-3$, ...

Les polynômes qui s'obtiennent ainsi sont :

$$\begin{vmatrix} 0 & \cdots & a & a_1 \\ 0 & \cdots a & a_1 & a_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a & a_1 & \cdots & a_{m-n+1} \\ A & A_1 & \cdots & A_{m-n+1} \end{vmatrix} x^{n-1} + \begin{vmatrix} 0 & \cdots & a & a_2 \\ 0 & \cdots & a_1 & a_3 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a & a_1 \cdots & a_{m-n} & a_{m-n+2} \\ A & A_1 \cdots & A_{m-n} & A_{m-n+2} \end{vmatrix} x^{n-2} + \ldots + \begin{vmatrix} 0 & \cdots & a & a_n \\ 0 & \cdots & a_1 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a & a_1 \cdots & a_{m-n} & 0 \\ A & A_1 \cdots & A_{m-n} & A_m \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} 0 & \cdots a & a_1 & a_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a & \cdots & \cdots & a_{m-n+3} \\ A & \cdots & \cdots & A_{m-n+3} \\ 0 & A & \cdots & A_{m-n+2} \end{vmatrix} x^{n-2} + \begin{vmatrix} 0 & \cdots a & a_1 & a_3 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a & \cdots & a_{m-n+2} & a_{m-n+4} \\ A & \cdots & A_{m-n+2} & A_{m-n+4} \\ 0 & A \cdots & A_{m-n+1} & A_{m-n+3} \end{vmatrix} x^{n-3} + \ldots + \begin{vmatrix} 0 & \cdots & a_1 & a_n \\ 0 & \cdots & \cdot & \cdot \\ a & \cdots & a_{m-n+2} & 0 \\ A & \cdots & A_{m-n+2} & 0 \\ 0 & A \cdots & A_{m-n+1} & A_m \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} 0 & \cdots & a_2 & a_3 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a & \cdots & \cdots & a_{m-n+5} \\ A & \cdots & \cdots & A_{m-n+5} \\ 0 & A & \cdots & A_{m-n+4} \\ 0 & 0 & A \cdots & A_{m-n+3} \end{vmatrix} x^{n-3} + \begin{vmatrix} 0 & \cdots & a_2 & a_4 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a & \cdots & a_{m-n+4} & a_{m-n+6} \\ A & \cdots & A_{m-n+4} & A_{m-n+6} \\ 0 & A \cdots & A_{m-n+3} & A_{m-n+5} \\ 0 & A\ A_1 \cdots a & A_{m-n+2} & A_{m-n+4} \end{vmatrix} x^{n-4} + \ldots + \begin{vmatrix} 0 & \cdots & a_2 & a_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a & \cdots & a_{m-n+4} & 0 \\ A & \cdots & A_{m-n+4} & 0 \\ 0 & A \cdots & A_{m-n+3} & 0 \\ 0 & A\ A_1 \cdots & A_{m-n+2} & A_m \end{vmatrix},$$

Le premier fait à remarquer, c'est que les conditions, pour avoir n racines communes, sont précisément que les coefficients de R_1 soient tous nuls et que le premier coefficient de $f(x)$ ne le soit pas ; pour avoir $n-1$ racines communes, que les coefficients de R_2 soient nuls, sans que le premier de R_1 le soit, et ainsi de suite.

Généralement les conditions, pour avoir $n-p$ racines communes, sont que les coefficients de R_{p+1} soient nuls, sans que le premier de R_p le soit.

23. Le polynôme R_{n-p} divise tous les polynômes précédents quand ses racines sont les p racines communes aux équations $f(x)=0$, $F(x)=0$.

Observons d'abord que chacune des racines communes satisfaisant aux équations

$$\begin{array}{llll} f(x)=0, & xf(x)=0, & \ldots, & x^{m-q}f(x)=0, \\ F(x)=0, & \ldots, & & x^{n-q}F(x)=0, \end{array}$$

quel que soit q, si l'on fait passer les exposants en indices, on a un système d'équations du premier degré en $x_1, x_2, \ldots, x_{m+n-q}$, auquel on satisfait en prenant pour $x_1, x_2, \ldots, x_{m+n-q}$ les puissances successives de chacune des p racines communes.

Or si, au lieu d'éliminer $x_{p+1}, \ldots, x_{m+n-p-1}$ du système

$$\begin{array}{lll} f(x)=0, & \ldots, & x^{m-p-1}f(x)=0, \\ F(x)=0, & \ldots, & x^{n-p-1}F(x)=0, \end{array}$$

ce qui donne

$$R_{n-p}=0,$$

on élimine $x_{p+2}, \ldots, x_{m-n-p-2}$ du système

$$\begin{array}{lll} f(x)=0, & \ldots, & x^{m-p-2}f(x)=0, \\ F(x)=0, & \ldots, & x^{n-p-2}F(x)=0; \end{array}$$

c'est l'équation $R_{n-p-1}=0$ qu'on obtiendra. Elle sera satisfaite par les p racines de l'équation $R_{n-p}=0$; donc le polynôme $R_{n-p-1}=0$ est divisible par R_{n-p}.

De même, si l'on élimine $x_{p+3}, \ldots, x_{m+n-p-3}$ du système

$$\begin{array}{lll} f(x)=0, & \ldots, & x^{m-p-3}f(x)=0, \\ F(x)=0, & \ldots, & x^{n-p-3}F(x)=0, \end{array}$$

l'équation résultante étant $R_{n-p-2}=0$ et admettant les p racines de $R_{n-p}=0$, le polynôme R_{n-p-2} est divisible par R_{n-p}, et ainsi de suite.

24. Quant aux polynômes R d'indices supérieurs à $n-p$, on peut déduire des mêmes considérations qu'ils sont nuls identiquement.

D'abord, si l'on prend le système

$$\begin{array}{llll} f(x)=0, & \ldots, & x^{m-p-1}f(x)=0, & x^{m-p}f(x)=0, \\ F(x)=0, & \ldots, & x^{n-p-1}F(x)=0, & x^{n-p}F(x)=0, \end{array}$$

les valeurs $x_p, x_{p+1}, \ldots, x_{m+n-p-1}$ en fonction de $x_1, x_2, \ldots, x_{p-1}$ données (n° 11) par le système

$$\begin{array}{lll} f(x)=0, & \ldots, & x^{m-p-1}f(x)=0, \\ F(x)=0, & \ldots, & x^{n-p-1}F(x)=0, \end{array}$$

jointes à celle qui s'ensuit pour x_{m+n-p} par $x^{m-p}f(x)=0$, satisfont à l'équation $x^{n-p}F(x)=0$ (n° 11). Le résultant est là R_{n-p+1}. Il est de degré $p-1$, il admet p racines. Il est donc nul identiquement.

Si l'on considère le système

$$f(x)=0,\quad \ldots,\quad x^{m-p-1}f(x)=0,\quad x^{m-p}f(x)=0,\quad x^{m-p+1}f(x)=0,$$
$$F(x)=0,\quad \ldots,\quad x^{n-p-1}F(x)=0,\quad x^{n-p}F(x)=0,\quad x^{n-p+1}F(x)=0,$$

les valeurs de x_p, x_{p+1}, ..., $x_{m+n-p-1}$ en fonction de x_1, x_2, ..., x_{p-1}, dont il vient d'être question, jointes à celle de x_{m+n-p}, donnée par $x^{m-p}f(x)=0$, et à celle de $x_{m+n-p+1}$, donnée par $x^{m-p+1}f(x)=0$, quand on les substituera dans $x^{n-p}F(x)=0$, mèneront à une identité, d'après ce qu'on vient de voir; mais leur substitution dans $x^{n-p+1}F(x)$ ne pourra donner que R_{n-p+2} à un facteur près. On aura ainsi un polynôme en x du degré $p-2$ admettant les p racines. R_{n-p+2} sera donc nul identiquement.

Cela peut se continuer. Le fait, d'ailleurs, résulte de celui qui est établi (n° **21**), car les coefficients des polynômes R_{n-p+1}, R_{n-p+2}, ... sont au nombre des déterminants dont la nullité est reconnue au n° **21**.

25. Si l'on procède par la méthode des divisions à la recherche du plus grand commun diviseur des polynômes $F(x)$, $f(x)$, on obtient en général des polynômes ρ_1, ρ_2, ρ_3, ... de degrés $n-1$, $n-2$, $n-3$, ... également divisibles par le plus grand commun diviseur R_{n-p}.

Il est, de plus, à remarquer que les coefficients de $F(x)$ et de $f(x)$ se produisent dans les coefficients de ces polynômes suivant la même progression que dans ceux des polynômes R_1, R_2, ...

Il suit de là que les deux séries de polynômes ne peuvent différer que par des multiplicateurs indépendants de x.

26. La relation qui suit ρ_1 et R_1 est

$$R_1=\rho_1 a^{m-n+1}(-1)^{\frac{m-n}{2}\text{ ou }\frac{m-n+1}{2}},$$

$\frac{m-n}{2}$ se prenant au cas où $m-n$ est pair, et $\frac{m-n+1}{2}$ au cas contraire.

En effet, si l'on désigne le quotient de $F(x)$ par $f(x)$ par

$$qx^{m-n}+q_1x^{m-n-1}+\ldots+q_{m-n}$$

et le reste ρ_1 par

$$rx^{n-1}+r_1x^{n-2}+\ldots+r_{n-1},$$

on a la suite d'égalités

$$\begin{aligned}
&A = aq,\\
&A_1 = a_1 q + a q_1,\\
&A_2 = a_2 q + a_1 q_1 + a q_2,\\
&A_3 = a_3 q + a_2 q_1 + a_1 q_2 + a q_3,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
&A_{m-n+1} = a_{m-n+1} q + a_{m-n} q_1 + \ldots + a_1 q_{m-n} + r,\\
&A_{m-n+2} = a_{m-n+2} q + a_{m-n+1} q_1 + \ldots + a_2 q_{m-n} + r_1,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;
\end{aligned}$$

d'où il résulte

$$\begin{vmatrix}
A & a & 0 & \ldots & 0\\
A_1 & a_1 & a & \ldots & 0\\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\
A_{m-n} & a_{m-n} & \ldots & \ldots & a\\
A_{m-n+1} - r, & a_{m-n+1} & \ldots & \ldots & a_1
\end{vmatrix} = 0,$$

ce qui donne

$$-r(-1)^{m-n+1} a^{m-n+1} + \begin{vmatrix}
A & a & \ldots & \ldots & 0\\
A_1 & a_1 & a & \ldots & 0\\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\
A_{m-n} & a_{m-n} & \ldots & \ldots & a\\
A_{m-n+1} & a_{m-n+1} & \ldots & \ldots & a_1
\end{vmatrix} = 0,$$

ou

$$r(-1)^{m-n+1} a^{m-n+1} = \begin{vmatrix}
0 & \ldots & \ldots & a & a_1\\
0 & \ldots & \ldots & \ldots & a_2\\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\
a & a_1 & \ldots & \ldots & a_{m-n+1}\\
A & A_1 & \ldots & \ldots & A_{m-n+1}
\end{vmatrix} (-1)^{k'},$$

étant posé

$$m - n + 2 = 2k'$$

ou

$$m - n + 2 = 2k' + 1,$$

suivant que $m - n$ est pair ou impair.

La valeur de r_1, qu'on obtiendrait d'une manière semblable, ne diffère de r que par le changement des éléments de la dernière colonne du déterminant en $a_2, a_3, \ldots, a_{m-n+2}, A_{m-n+2}$, celle de r_2 que par leur changement en $a_3, a_4, \ldots, a_{m-n+3}, A_{m-n+3}$, et ainsi de suite.

Il en résulte

$$\rho_1(-1)^{m-n+1} a^{m-n+1} = R_1(-1)^{k'},$$

ce qui revient à

$$R_1 = \rho_1 a^{m-n+1}(-1)^{\frac{m-n}{2} \text{ ou } \frac{m-n+1}{2}},$$

suivant que $m-n$ est pair ou impair.

27. Si l'on pose

$$F(x) = f(x)q + \rho_1,$$

on a en conséquence

$$a^{m-n+1}F(x) = f(x)Q + R_1(-1)^{\frac{m-n}{2} \text{ ou } \frac{m-n+1}{2}}.$$

En particulier, au cas de $m-n=1$, cette relation devient

$$a^2 F(x) = f(x)Q - R_1;$$

par conséquent, si l'on pose

$$R_1 = \alpha_1 x^{n-1} + \beta_1 x^{n-2} + \gamma_1 x^{n-3} + \ldots,$$

on aura

$$\alpha_1^2 f(x) = R_1 q_1 - R'_2,$$

R'_2 désignant le polynôme analogue à R_1, défini par l'expression

$$R'_2 = \begin{vmatrix} 0 & \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ a & a_1 & a_1 \end{vmatrix} x^{n-2} + \ldots.$$

Ce polynôme R'_2 revient au second des polynômes amenés par le procédé de la division; ses coefficients sont proportionnels à ceux de R_1. Le rapport peut s'obtenir en dégageant dans leurs premiers coefficients les termes où figure A_{m-n+3}.

Dans le premier coefficient de R'_2 relevons d'abord le terme

$$-\gamma_1 \begin{vmatrix} 0 & \alpha_1 \\ a & a_1 \end{vmatrix} = \gamma_1 \alpha_1 a,$$

et prenons dans ce terme

$$A_{m-n+3}\begin{vmatrix} o & \ldots & a \\ . & \ldots & . \\ a & \ldots & a_{m-n}\end{vmatrix}\begin{vmatrix} o & \ldots & a_1 \\ . & \ldots & .. \\ a & \ldots & \alpha_{m-n+1} \\ A & \ldots & A_{m-n+1}\end{vmatrix} a.$$

Il y a, d'autre part, dans le premier coefficient de R_2, le terme

$$-A_{m-n+3}\begin{vmatrix} o & . & \ldots & a_1 \\ . & . & \ldots & .. \\ a & . & \ldots & a_{m-n+2} \\ o & A & \ldots & A_{m-n+1}\end{vmatrix} = -A_{m-n+3}\,a(-1)^{m-n+1}\begin{vmatrix} o & \ldots & a_1 \\ . & \ldots & .. \\ a & \ldots & a_{m-n+1} \\ A & \ldots & A_{m-n+1}\end{vmatrix};$$

on en conclut

$$R'_2 = R_2(-1)^{m-n}\begin{vmatrix} o & \ldots & a \\ . & \ldots & . \\ a & \ldots & a_{m-n}\end{vmatrix} = R_2\begin{vmatrix} a & \ldots & o \\ . & \ldots & . \\ a_{m-n} & \ldots & a\end{vmatrix}(-1)^{m-n}(-1)^{\frac{m-n+1}{2}\text{ ou }\frac{m-n}{2}}$$

ou

$$R'_2 = R_2\,a^{m-n+1}(-1)^{\frac{m-n-1}{2}\text{ ou }\frac{m-n}{2}},$$

et, par suite, on a la relation

$$\alpha_1^2 f(x) = R_1 Q_1 - a^{m-n+1} R_2 (-1)^{\frac{m-n-1}{2}\text{ ou }\frac{m-n}{2}}.$$

De même, si l'on pose

$$\alpha_2^2 R_1 = R_2 q_2 - R'_3,$$

en désignant R_2 par $\alpha_2 x^{n-2} + \beta_2 x^{n-3} + \gamma_2 x^{n-4} + \ldots$, on a

$$R'_3 = \begin{vmatrix} o & \alpha_2 & \beta_2 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1\end{vmatrix} x^{n-3} + \ldots.$$

Dans le premier coefficient on voit le terme

$$-\gamma_1\begin{vmatrix} o & \alpha_2 \\ \alpha_1 & \beta_1\end{vmatrix} = \gamma_2\alpha_2\alpha_1,$$

et il s'y trouve

$$
\begin{aligned}
&-\mathrm{A}_{m-n+5}\begin{vmatrix} 0 & . & \dots & a_1 \\ . & . & \dots & .. \\ a & . & \dots & a_{m-n+2} \\ 0 & \mathrm{A} & \dots & \mathrm{A}_{m-n+1} \end{vmatrix}\alpha_2\alpha_1 \\
&= -a\mathrm{A}_{m-n+5}(-1)^{m-n+1}\begin{vmatrix} a & \dots & a_1 \\ . & \dots & .. \\ a & \dots & a_{m-n+1} \\ \mathrm{A} & \dots & \mathrm{A}_{m-n+1} \end{vmatrix}\alpha_2\alpha_1 \\
&= a\mathrm{A}_{m-n+5}(-1)^{m-n}\alpha_1^2\alpha_2;
\end{aligned}
$$

mais, dans le premier coefficient de R_3, il y a le terme

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{A}_{m-n+5}\begin{vmatrix} 0 & . & . & \dots & a_2 \\ . & . & . & \dots & .. \\ a & . & . & \dots & a_{m-n+4} \\ 0 & \mathrm{A} & 0 & \dots & \mathrm{A}_{m-n+3} \\ 0 & 0 & \mathrm{A} & \dots & \mathrm{A}_{m-n+2} \end{vmatrix} \\
&= a\mathrm{A}_{m-n+5}(-1)^{m-n+2}\begin{vmatrix} 0 & . & \dots & a_2 \\ . & .. & \dots & .. \\ a & .. & \dots & a_{m-n+3} \\ \mathrm{A} & . & \dots & \mathrm{A}_{m-n+3} \\ 0 & \mathrm{A} & \dots & \mathrm{A}_{m-m+2} \end{vmatrix} \\
&= a\mathrm{A}_{m-n+5}(-1)^{m-n}\alpha_2.
\end{aligned}
$$

On en conclut

$$\mathrm{R}'_3 = \alpha_1^2\,\mathrm{R}_3,$$

et par suite

$$\alpha_2^2\,\mathrm{R}_1 = \mathrm{R}_2\mathrm{Q}_2 - \alpha_1^2\,\mathrm{R}_3.$$

28. Généralement, si α_p désigne le premier coefficient de R_p, on a la relation générale

$$\alpha_{p+1}^2\,\mathrm{R}_p = \mathrm{R}_{p+1}\mathrm{Q}_{p+1} - \alpha_p^2\,\mathrm{R}_{p+2},$$

p étant au moins égal à 1.

Nous avons en effet

$$R_p = \begin{vmatrix} 0 & \ldots & a_p \\ . & \ldots & .. \\ a & \ldots & a_{m-n+2p-1} \\ A & \ldots & A_{m-n+2p-1} \\ . & \ldots & \ldots\ldots \\ 0 & \ldots & A_{m-n+p} \end{vmatrix} x^{n-p} + \ldots,$$

$$R_{p+1} = \begin{vmatrix} 0 & \ldots & a_{p+1} \\ . & \ldots & \ldots \\ a & \ldots & a_{m-n+2p+1} \\ A & \ldots & A_{m-n+2p+1} \\ . & \ldots & \ldots\ldots \\ 0 & \ldots & A_{m-n+p+1} \end{vmatrix} x^{n-p-1} + \ldots,$$

$$R_{p+2} = \begin{vmatrix} 0 & \ldots & a_{p+2} \\ . & \ldots & \ldots \\ a & \ldots & a_{m-n+2p+3} \\ A & \ldots & A_{m-n+2p+3} \\ . & \ldots & \ldots\ldots \\ 0 & \ldots & A_{m-n+p+2} \end{vmatrix} x^{n-p-2} + \ldots.$$

Or, si l'on forme R'_{p+2} en partant de R_p et R_{p+1}, comme R_1 est formé de $F(n)$ et $f(x)$, on a

$$R'_{p+2} = \begin{vmatrix} 0 & \alpha_{p+1} & \beta_{p+1} \\ \alpha_{p+1} & \beta_{p+1} & \gamma_{p+1} \\ \alpha_p & \beta_p & \gamma_p \end{vmatrix} x^{n-p-2} + \ldots,$$

en posant

$$R_p = \alpha_p x^{n-p} + \beta_p x^{n-p-1} + \gamma_p x^{n-p-2} + \ldots.$$

Dans le premier coefficient, relevons le terme

$$\gamma_{p+1}\alpha_{p+2}\alpha_p,$$

et extrayons-en le terme

$$A_{m-n+2p+3}(-1)^p \begin{vmatrix} 0 & . & \ldots & a_p \\ . & . & \ldots & .. \\ a & . & \ldots & a_{m-n+2p} \\ 0 & A & .. & A_{m-n+2p-1} \\ . & . & \ldots & \ldots\ldots \\ 0 & . & \ldots & A_{m-n+p} \end{vmatrix} \alpha_p\alpha_{p+1}$$

$$= a A_{m-n+2p+3}(-1)^{m-n}\alpha_p^2\alpha_{p+1}.$$

Or, dans le premier coefficient de R_{p+2}, le terme homologue est

$$A_{m-n+2p+3}(-1)^{p+1}\begin{vmatrix} 0 & . & \dots & a_{p+1} \\ . & . & \dots & \dots \\ a & . & \dots & a_{m-n+2p+2} \\ 0 & A & \dots & A_{m-n+2p+1} \\ . & . & \dots & \dots\dots \\ 0 & . & \dots & A_{m-n+p+1} \end{vmatrix}$$

$$= a A_{m-n+2p+3}(-1)^{p+1}(-1)^{m-n+p+1}\alpha_{p+1} = a A_{m-n+2p+3}(-1)^{m-n}\alpha_{p+1}.$$

On a, d'après cela,

$$R'_{p+2} = \alpha_p^2 R_{p+2};$$

et comme on a

$$\alpha_{p+1}^2 R_p = R_{p+1}Q_{p+1} - R'_{p+2},$$

il s'ensuit

$$\alpha_{p+1}^2 R_p = R_{p+1}Q_{p+1} - \alpha_p^2 R_{p+2}.$$

Au résumé, les relations qui lient les fonctions $F(x)$, $f(x)$ et les fonctions R sont

$$a^{m-n+1}F(x) = f(x).Q + R_1(-1)^{\frac{m-n+1}{2} \text{ ou } \frac{m-n}{2}},$$

$$\alpha_1^2 f(x) = R_1 Q_1 - a^{m-n+1}(-1)^{\frac{m-n-1}{2} \text{ ou } \frac{m-n}{2}} R_2,$$

$$\alpha_2^2 R_1 = R_2 Q_2 - \alpha_1^2 R_3,$$

$$\dots\dots\dots\dots,$$

$$\alpha_{p+1}^2 R_p = R_{p+1}Q_{p+1} - \alpha_p^2 R_{p+2},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Lorsque les coefficients sont réels dans $F(x)$ et $f(x)$, ils le sont aussi dans toutes les fonctions R. Si alors α_p et α_{p+1} sont différents de zéro, les fonctions R_p et R_{p+2} sont de signes contraires pour toute valeur de x qui annule R_{p+1} sans les annuler.

29. En général, les degrés des polynômes $f(x)$, R_1, R_2, . . diminuent d'une unité, d'un polynôme au suivant. Mais le contraire peut arriver pour deux polynômes particuliers. Par exemple, alors que R_p est du degré $n-p$, il se peut que R_{p+1} soit du degré $n-p-k$ $(k>1)$;

il en est ainsi lorsque, dans la division de R_{p-1} par R_p, le reste ρ'_{p+1} est du degré $n-p-k$.

Si les polynômes $F(x), f(x)$ avaient $n-p-k$ racines communes, le polynôme R_{p+k+1} serait nul identiquement, et le polynôme précédent R_{p+k}, égalé à zéro, donnerait ces racines communes. Le polynôme R_{p+1}, s'il est du même degré, est alors égal au polynôme R_{p+k} à un facteur près, indépendant de x. Mais, à en juger par les différents exemples que nous présentons plus loin, le fait a toute généralité : c'est-à-dire que si le polynôme R_{p+1}, au lieu d'être du degré $n-p-1$, est d'un degré inférieur $n-p-k (k>1)$, le polynôme R_{p+k} n'en diffère que par un facteur constant. Quant aux polynômes intermédiaires, lorsqu'on a $k>2$, ils se trouvent nuls dans tous ces exemples.

30. Voyons du reste ce qui est à déduire des relations générales

$$
\begin{aligned}
&\alpha_p^2 R_{p-1} = R_p Q_p - \alpha_{p-1}^2 R_{p+1},\\
&\alpha_{p+1}^2 R_p = R_{p+1} Q_{p+1} - \alpha_p^2 R_{p+2},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
&\alpha_{p+k-1}^2 R_{p+k-2} = R_{p+k-1} Q_{p+k-1} - \alpha_{p+k-2}^2 R_{p+k},\\
&\alpha_{p+k}^2 R_{p+k-1} \;\;= R_{p+k} Q_{p+k} - \alpha_{p+k-1}^2 R_{p+k+1},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,
\end{aligned}
$$

en cherchant ce qu'elles tendent à devenir, lorsque R_{p+1} perd son premier ou plusieurs premiers termes.

Observons d'abord qu'en posant, d'une façon générale,

$$
\begin{aligned}
&Q_p = q_p x + q'_p,\\
&R_p = \alpha_p x^{n-p} + \beta_p x^{n-p-1} + \gamma_p x^{n-p-2} + \ldots,
\end{aligned}
$$

on peut développer ces relations, à partir de la seconde, en

$$
\begin{aligned}
&\alpha_{p+1}\alpha_p = q_{p+1},\\
&\alpha_{p+1}^2 \beta_p = \alpha_{p+1} q'_{p+1} + \beta_{p+1} q_{p+1},\\
&\alpha_{p+1}^2 \gamma_p = \beta_{p+1} q'_{p+1} + \gamma_{p+1} q_{p+1} - \alpha_p^2 \alpha_{p+2},\\
&\alpha_{p+1}^2 \delta_p = \gamma_{p+1} q'_{p+1} + \delta_{p+1} q_{p+1} - \alpha_p^2 \beta_{p+2},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
\alpha_{p+2}\alpha_{p+1} &= q_{p+2},\\
\alpha_{p+2}^2\beta_{p+1} &= \alpha_{p+2}q'_{p+2} + \beta_{p+2}q_{p+2},\\
\alpha_{p+2}^2\gamma_{p+1} &= \beta_{p+2}q'_{p+2} + \gamma_{p+2}q_{p+2} - \alpha_{p+1}^2\alpha_{p+3},\\
\alpha_{p+2}^2\delta_{p+1} &= \gamma_{p+2}q'_{p+2} + \delta_{p+2}q_{p+2} - \alpha_{p+1}^2\beta_{p+3},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
\alpha_{p+3}\alpha_{p+2} &= q_{p+3},\\
\alpha_{p+3}^2\beta_{p+2} &= \alpha_{p+3}q'_{p+3} + \beta_{p+3}q_{p+3},\\
\alpha_{p+3}^2\gamma_{p+2} &= \beta_{p+3}q'_{p+3} + \gamma_{p+3}q_{p+3} - \alpha_{p+2}^2\alpha_{p+4},\\
\alpha_{p+3}^2\delta_{p+2} &= \gamma_{p+3}q'_{p+3} + \delta_{p+3}q_{p+3} - \alpha_{p+2}^2\beta_{p+4},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
\alpha_{p+4}\alpha_{p+3} &= q_{p+4},\\
\alpha_{p+4}^2\beta_{p+3} &= \alpha_{p+4}q'_{p+4} + \beta_{p+4}q_{p+4},\\
\alpha_{p+4}^2\gamma_{p+3} &= \beta_{p+4}q'_{p+4} + \gamma_{p+4}q_{p+4} - \alpha_{p+3}^2\alpha_{p+5},\\
\alpha_{p+4}^2\delta_{p+3} &= \gamma_{p+4}q'_{p+4} + \delta_{p+4}q_{p+4} - \alpha_{p+3}^2\beta_{p+5},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,
\end{aligned}$$

soit en premier lieu $\alpha_{p+1} = 0$ avec $\beta_{p+1} \gtrless 0$.

Les relations donnent $q_{p+1} = 0$, $q_{p+2} = 0$; puis

$$\begin{aligned}
0 &= \beta_{p+1}q'_{p+1} - \alpha_p^2\alpha_{p+2}, & \alpha_{p+2}^2\beta_{p+1} &= \alpha_{p+2}q'_{p+2},\\
0 &= \gamma_{p+1}q'_{p+1} - \alpha_p^2\beta_{p+2}, & \alpha_{p+2}^2\gamma_{p+1} &= \beta_{p+2}q'_{p+2},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots, & \alpha_{p+2}^2\delta_{p+1} &= \gamma_{p+2}q'_{p+2},\\
& & &\ldots\ldots\ldots\ldots,
\end{aligned}$$

d'où

$$R_{p+2} = R_{p+1}\frac{q'_{p+1}}{\alpha_p^2} \quad \text{et} \quad R_{p+2} = R_{p+1}\frac{\alpha_{p+2}^2}{q'_{p+2}}.$$

Supposons en second lieu

$$\alpha_{p+1} = 0, \quad \beta_{p+1} = 0, \quad \gamma_{p+1} \lessgtr 0,$$

on aura encore

$$q_{p+1} = 0, \quad q_{p+2} = 0_2, \quad \text{puis} \quad \alpha_{p+2} = 0,$$

et

$$\begin{array}{ll} o = \gamma_{p+1} q'_{p+1} - \alpha_p^2 \beta_{p+2}, & o = \beta_{p+1} q'_{p+2}, \\ o = \delta_{p+1} q'_{p+1} - \alpha_p^2 \gamma_{p+2}, & o = \gamma_{p+2} q'_{p+2}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots, \end{array}$$

$$\begin{gathered} q_{p+3} = o, \\ \alpha_{p+3}^2 \beta_{p+2} = \alpha_{p+3} q'_{p+3}, \\ \alpha_{p+3}^2 \gamma_{p+2} = \beta_{p+3} q'_{p+3}, \\ \alpha_{p+3}^2 \delta_{p+2} = \gamma_{p+3} q'_{p+3}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{gathered}$$

Ces relations sont satisfaites par $R_{p+2} = o$, $q'_{p+1} = o$, $q'_{p+3} = o$, sans rien fixer sur q'_{p+2} et R_{p+3}.

Si l'on suppose $R_{p+2} \gtrless o$, elles donnent

$$q'_{p+2} = o, \quad R_{p+2} = R_{p+1} \frac{q'_{p+1}}{\alpha_p^2}, \quad R_{p+3} = R_{p+2} \frac{\alpha_{p+3}^2}{q'_{p+3}} = R_{p+1} \frac{q'_{p+1}}{\alpha_p^2} \frac{\alpha_{p+3}^2}{q'_{p+3}}.$$

Considérons en troisième lieu le cas de $\alpha_{p+1} = o$, $\beta_{p+1} = o$, $\gamma_{p+1} = o$, $\delta_{p+1} \gtrless o$.

Il s'ensuivra

$$\begin{array}{ll} q_{p+1} = o, & q_{p+2} = o, \\ \alpha_{p+2} = o, & \beta_{p+2} = o, \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} o = \delta_{p+1} q'_{p+1} - \alpha_p^2 \gamma_{p+2}, & o = \beta_{p+2} q'_{p+2}, \\ o = \varepsilon_{p+1} q'_{p+1} - \alpha_p^2 \delta_{p+2}, & o = \gamma_{p+2} q'_{p+2}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots, \end{array}$$

$$\begin{gathered} q_{p+3} + o, \\ \alpha_{p+3}^2 \beta_{p+2} = \alpha_{p+3} q'_{p+3}, \\ \alpha_{p+3}^2 \gamma_{p+2} = \beta_{p+3} q'_{p+3}, \\ \alpha_{p+3}^2 \delta_{p+2} = \gamma_{p+3} q'_{p+3}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{gathered}$$

Si R_{p+2} est égal à zéro, on voit qu'on aura $R_{p+3} = o$ pour $q'_{p+3} \gtrless o$. Si l'on suppose $q'_{p+3} = o$ avec $R_{p+2} = o$, rien ne s'ensuit sur α_{p+3}, β_{p+3} . . . .

Ajoutons que pour $\alpha_{p+3} = 0$ on a $q_{p+4} = 0$, et ensuite

$$\alpha_{p+4}^2 \beta_{p+3} = \alpha_{p+1} q'_{p+4},$$
$$\alpha_{p+4}^2 \gamma_{p+3} = \beta_{p+1} q'_{p+4},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Les résultats qu'on trouve ainsi ne sont pas en désaccord avec ceux qu'offrent les exemples annoncés; mais ils n'en établissent pas la nécessité à tous égards.

Cela du reste intéresse peu pour ce qui regarde la recherche des racines communes et celle d'un plus grand commun diviseur, car les conditions à remplir dans ces questions sont d'une précision absolue.

31. Nous avons trouvé

$$R'_{p+2} = \alpha_p^2 R_{p+2},$$

R'_{p+2} étant le polynôme qui se déduit de R_p et R_{p+1} comme R_1 de $F(x)$ et $f(x)$.

Soit R'_{p+3} le polynôme suivant, répondant à R_{p+3}, cherchons quelle relation il y a entre les polynômes R'_{p+3}, R_{p+3}.

Nous avons

$$R'_{p+3} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \alpha_{p+1} & \beta_{p+1} & \gamma_{p+1} \\ 0 & \alpha_{p+1} & \beta_{p+1} & \gamma_{p+1} & \delta_{p+1} \\ \alpha_{p+1} & \beta_{p+1} & \gamma_{p+1} & \delta_{p+1} & \varepsilon_{p+1} \\ \alpha_p & \beta_p & \gamma_p & \delta_p & \varepsilon_p \\ 0 & \alpha_p & \beta_p & \gamma_p & \delta_p \end{vmatrix} x^{n-p-3} + \ldots.$$

Nous pouvons, dans le premier coefficient, distinguer le terme

$$\varepsilon_{p+1} \begin{vmatrix} 0 & 0 & \alpha_{p+1} & \beta_{p+1} \\ 0 & \alpha_{p+1} & \beta_{p+1} & \gamma_{p+1} \\ \alpha_p & \beta_p & \gamma_p & \delta_p \\ 0 & \alpha_p & \beta_p & \gamma_p \end{vmatrix} = \varepsilon_{p+1}\alpha_p \begin{vmatrix} 0 & \alpha_{p+1} & \beta_{p+1} \\ \alpha_{p+1} & \beta_{p+1} & \gamma_{p+1} \\ \alpha_p & \beta_p & \gamma_p \end{vmatrix}.$$

et y prendre

$$-\varepsilon_{p+1}\gamma_{p+1}\alpha_p \begin{vmatrix} 0 & \alpha_{p+1} \\ \alpha_p & \beta_p \end{vmatrix} = \varepsilon_{p+1}\gamma_{p+1}\alpha_{p+1}\alpha_p^2.$$

Or, dans

$$\varepsilon_{p+1} = \begin{vmatrix} 0 & \ldots & a_p & a_{p+5} \\ . & \ldots & .. & \ldots\ldots \\ a & \ldots & a_{m-n+2p} & a_{m-n+2p+5} \\ A & \ldots & A_{m-n+2p} & A_{m-n+2p+5} \\ . & \ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ 0 & \ldots & A_{m-n+p} & A_{m-n-p+5} \end{vmatrix}$$

il y a le terme

$$A_{m-n+2p+5}(-1)^p \begin{vmatrix} 0 & . & \ldots & a_p \\ . & . & \ldots & .. \\ a & . & \ldots & a_{m-n+2p} \\ 0 & A & \ldots & A_{m-n+2p-1} \\ . & . & \ldots & \ldots\ldots \\ 0 & . & \ldots & A_{m-n+p} \end{vmatrix} = a A_{m-n+2p+5}(-1)^{m-n} \alpha_p.$$

Dans γ_{p+1} il y a

$$A_{m-n+2p+3}(-1)^p \begin{vmatrix} 0 & . & \ldots & a_p \\ . & . & \ldots & .. \\ a & . & \ldots & a_{m-n+2p} \\ 0 & A & \ldots & A_{m-n+2p-1} \\ . & . & \ldots & \ldots\ldots \\ 0 & . & \ldots & A_{m-n+p} \end{vmatrix} = a A_{m-n+2p+3}(-1)^{m-n} \alpha_p.$$

Il résulte de là, dans le premier coefficient de R'_{p+2}, un terme égal à

$$a^2 A_{m-n+2p+5} A_{m-n+2p+3} \alpha_p^4 \alpha_{p+1}.$$

Mais le premier coefficient dans R_{p+3} étant

$$\begin{vmatrix} 0 & \ldots & a_{p+3} \\ . & \ldots & \ldots \\ a & \ldots & a_{m-n+2p+5} \\ A & \ldots & A_{m-n+2p+5} \\ . & \ldots & \ldots\ldots \\ 0 & \ldots & A_{m-n+p+3} \end{vmatrix},$$

on en tire d'abord le terme

$$A_{m-n+2p+5}(-1)^{p+2} \begin{vmatrix} 0 & . & \ldots & a_{p+2} \\ . & . & \ldots & \ldots \\ a & . & \ldots & a_{m-n+2p+4} \\ 0 & A & \ldots & A_{m-n+2p+3} \\ . & . & \ldots & \ldots\ldots \\ 0 & . & \ldots & A_{m-n+p+2} \end{vmatrix},$$

qui est

$$a\mathrm{A}_{m-n+2p+5}(-1)^{m-n}\begin{vmatrix} 0 & \dots & a_{p+2} \\ . & \dots & \dots\dots \\ a & \dots & a_{m-n+2p+3} \\ \mathrm{A} & \dots & \mathrm{A}_{m-n+2p+3} \\ . & \dots & \dots\dots \\ 0 & \dots & \mathrm{A}_{m-n+p+2} \end{vmatrix};$$

d'où l'on peut extraire

$$a\mathrm{A}_{m-n+2p+5}\mathrm{A}_{m-n+2p+3}(-1)^{m-n+p+1}\begin{vmatrix} 0 & . & \dots & a_{p+1} \\ . & . & \dots & \dots\dots \\ a & . & \dots & a_{m-n+2p+2} \\ 0 & \mathrm{A} & \dots & \mathrm{A}_{m-n+2p+1} \\ . & . & \dots & \dots\dots \\ 0 & . & \dots & \mathrm{A}_{m-n+p+1} \end{vmatrix}$$

$$= a^2\mathrm{A}_{m-n+2p+5}\mathrm{A}_{m-n+2p+3}\alpha_{p+1}.$$

Nous avons ainsi, dans les deux premiers coefficients de R'_{p+3} et R_{p+3}, deux termes homologues dont le rapport est α_p^4; par conséquent, la relation à obtenir est

$$\mathrm{R}'_{p+3} = \mathrm{R}_{p+3}\alpha_p^4.$$

Cela peut se continuer, par où l'on voit que, si l'on procède à partir de R_p et R_{p+1} comme à partir de $\mathrm{F}(x)$ et $f(x)$, les R' consécutifs se compliquent à chaque pas d'un facteur α_p^2 relativement aux R correspondants.

Les résultats ne sont les mêmes que si α_p est l'unité. Quand on jugera à propos, pour un intérêt de calcul, par exemple celui d'éviter des déterminants d'ordre trop élevé, de procéder ainsi à partir de R_p et R_{p+1}, les résultats devront se simplifier, si α_p est différent de ± 1, en les divisant par α_p^2, α_p^4, α_p^6,..., de proche en proche.

32. Au cas de $m - n = 1$, on a

$$\mathrm{R}_1 = \begin{vmatrix} 0 & a & a_1 \\ a & a_1 & a_2 \\ \mathrm{A} & \mathrm{A}_1 & \mathrm{A}_2 \end{vmatrix} x^{n-1} + \begin{vmatrix} 0 & a & a_2 \\ a & a_1 & a_3 \\ \mathrm{A} & \mathrm{A}_1 & \mathrm{A}_3 \end{vmatrix} x^{n-2} + \dots.$$

Si tous les coefficients de $f(x)$ ont un facteur commun K, on voit, par la composition de R_1, que ce facteur y entre au carré dans tous les termes, de sorte que R_1 est alors divisible par K^2.

De même R_2 se trouve alors divisible par K^3, R_3 l'est par K^4, et ainsi de suite.

Supposons en général, quel que soit $m - n$, que R_{p+1} soit divisible par un facteur K. Si l'on procède à partir de R_p, R_{p+1} comme à partir de $F(x), f(x)$, les polynômes R'_{p+2}, R'_{p+3}, ... seront divisibles par K^2, K^3, ..., supposé que R_p et R_{p+1} soient de degrés consécutifs $n-p$, $n-p-1$. Or on a trouvé

$$R'_{p+2} = R_{p+2}\alpha_p^2,$$
$$R'_{p+3} = R_{p+3}\alpha_p^4,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Donc si α_p est premier avec K, le polynôme R_{p+2} sera divisible par K^2, R_{p+3} le sera par K^3, et ainsi de suite.

Mais, si K n'est pas premier avec α_p, il pourra ne pas diviser R_{p+2}.

Lorsque $m - n$ est > 1, un facteur K commun à tous les coefficients de $f(x)$ se trouve porté dans R_1 à la puissance $m - n + 1$, dans R_2 à la puissance $m - n + 2$, ...

Quant à un facteur K commun aux coefficients de $F(x)$, il est au moins à la première puissance dans R_1, à la seconde dans R_2, et ainsi de suite.

33. Observons encore que, si le premier coefficient de $F(x)$ et le premier de $f(x)$ ont un facteur commun, ce facteur se retrouve dans tous les termes de R_1, dans tous ceux de R_2, de R_3, etc.

Si un diviseur est commun aux deux premiers coefficients de $F(x)$ et aux deux premiers de $f(x)$, il se trouve, lorsque $m - n$ est $\geqq 1$, au carré dans tous les termes de R_1, de R_2, ... S'il est commun aux trois premiers coefficients de $F(x)$ et aux trois premiers de $f(x)$, il est au cube dans R_2 et les R suivants; il est de même à cette puissance dans R_1, si $m - n$ est $\geqq 2$.

En général, si les h premiers coefficients de $F(x)$ et les h premiers de $f(x)$ ont un diviseur commun, sa puissance de degré h divise R_h et les R suivants, pourvu qu'on ait $2K > h - (m - n)$.

34. Lorsque m est égal à n, l'expression de R_1 est

$$R_1 = \begin{vmatrix} a & a_1 \\ A & A_1 \end{vmatrix} x^{m-1} + \begin{vmatrix} a & a_2 \\ A & A_2 \end{vmatrix} x^{m-2} + \ldots,$$

celle de R_2 est

$$R_2 = \begin{vmatrix} o & a & a_1 & a_2 \\ a & a_1 & a_2 & a_3 \\ A & A_1 & A_2 & A_3 \\ o & A & A_1 & A_2 \end{vmatrix} x^{m-2} + \begin{vmatrix} o & a & a_1 & a_3 \\ a & a_1 & a_2 & a_4 \\ A & A_1 & A_2 & A_4 \\ o & A & A_1 & A_3 \end{vmatrix} x^{m-3} + \ldots.$$

Rien n'est à changer dans l'exposé qui précède, sauf qu'un diviseur commun aux deux premiers coefficients de $F(x)$ et aux deux premiers de $f(x)$ n'apparaît au carré, en général, qu'à partir de R_2.

35. Il nous reste à faire une remarque sur la possibilité de déduire des valeurs mêmes de $R_1, R_2, \ldots$, qu'on vient d'étudier, ce que deviennent ces polynômes, lorsque $F(x)$ et $f(x)$ perdent leur premier terme par l'annulation de A et de a, puis quand ces fonctions perdent chacune leurs deux premiers termes, et ainsi de suite,

Observons d'abord que si l'on fait $a = o$, A restant $\gtrless o$, et a_1 étant $\gtrless o$, il vient

$$R_1 = A a_1^{m-n} (-1)^{\frac{(m-n+1)(m-n+2)}{2}} f(x),$$

$$R_2 = A(-1)^{m-n+2} \begin{vmatrix} o & \ldots & o & a_1 & a_2 \\ . & \ldots & . & . & . \\ a_1 & \ldots & . & . & a_{m-n+3} \\ A & \ldots & . & . & A_{m-n+2} \end{vmatrix} x^{n-2} + \ldots = A(-1)^{m-n+2} r_1,$$

$$R_3 = A(-1)^{m-n+3} r_2,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

en appelant $r_1, r_2, \ldots$ les polynômes que donneront $F(x)$ et $f(x) = a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots$.

De même, si l'on fait $A = o$, a restant différent de zéro et A_1 étant $\gtrless o$, on a

$$R_1 = a(-1)^{m-n} r_1,$$
$$R_2 = a(-1)^{m-n+1} r_2,$$
$$R_3 = a(-1)^{m-n+2} r_3,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$r_1, r_2, \ldots$ étant là les polynômes déduits de

$$F(x) = A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + \ldots, \quad \text{et} \quad f(x) = a x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots.$$

Supposons qu'il s'agisse de faire $A = 0$, $a = 0$ sans que A_1 et a_1 deviennent nuls à la fois.

Considérons le premier terme de R_2, à savoir

$$\begin{vmatrix} 0 & . & \cdots & a & a_1 & a_2 \\ . & . & \cdots & . & . & \cdots\cdots \\ a & . & \cdots & . & . & a_{m-n+3} \\ A & . & \cdots & . & . & A_{m-n+3} \\ 0 & A & \cdots & . & . & A_{m-n+2} \end{vmatrix} x^{n-2};$$

remplaçons-y a par h, A par H dans la première colonne, et partout ailleurs faisons-y $a = 0$, $A = 0$. Ce terme, devenant par là

$$\begin{vmatrix} 0 & . & . & \cdots & 0 & a_1 & a_2 \\ . & . & . & \cdots & . & . & . \\ h & . & . & \cdots & . & . & a_{m-n+3} \\ H & . & . & \cdots & . & . & A_{m-n+3} \\ 0 & 0 & A_1 & \cdots & . & . & A_{m-n+2} \end{vmatrix} x^{n-2},$$

sera

$$(-1)^{m-n+1} h \begin{vmatrix} 0 & . & \cdots & 0 & a_1 & a_2 \\ . & . & \cdots & . & . & . \\ 0 & a_1 & \cdots & . & . & a_{m-n+2} \\ A_1 & . & \cdots & . & . & A_{m-n+3} \\ 0 & A_1 & \cdots & . & . & A_{m-n+2} \end{vmatrix} x^{n-2} - (-1)^{m-n+1} H \begin{vmatrix} 0 & . & \cdots & 0 & a_1 & a_2 \\ . & . & \cdots & . & . & . \\ a_1 & . & \cdots & . & . & a_{m-n+3} \\ 0 & A_1 & \cdots & . & . & A_{m-n+2} \end{vmatrix} x^{n-2}$$

$$= (A_1 h - a_1 H) \begin{vmatrix} 0 & \cdots & a_1 & a_2 \\ . & \cdots & . & . \\ a_1 & \cdots & . & a_{m-n+2} \\ A_1 & \cdots & . & A_{m-n+3} \end{vmatrix} x^{n-2}.$$

Or, du moment que A_1 et a_1 ne seront pas nuls à la fois, on pourra disposer de h et de H de façon à avoir $A_1 h - a_1 H \gtrless 0$; par la suppression de ce facteur, le premier terme de R_2 deviendra le premier terme de R_1 pour $F(x) = A_1 x^{m-1} + \ldots$ et $f(x) = a_1 x^{n-1} + \ldots$.

Cela s'appliquant aux autres termes comme au premier, on remplacera dans chaque terme de R_2, à la première colonne, les facteurs a et A par l'unité, puis on remplacera par zéro tous les facteurs a et A restants, si $A_1 - a_1$ est $\gtrless 0$; et, dans le cas contraire, on remplacera a et A de la première colonne par des nombres h et H tels, que

$A_1 h - a_1 H$ soit $\gtrless 0$. Après quoi, on divisera par le facteur commun $A_1 - a_1$ ou $hA_1 - Ha_1$. Le résultat sera le premier polynôme R susceptible de provenir de $F(x) = A_1 x^{m-1} + \ldots$ et $f(x) = a_1 x^{n-1} + \ldots$.

Le même mode de réduction donnera à la place de R_3 le polynôme R_2, répondant à la même hypothèse, et ainsi de suite.

Si A_1 et a_1 se font nuls ensuite, sans qu'il en soit de même pour A_2 et a_2 à la fois, le même procédé pourra s'appliquer de nouveau, etc. Du reste, si A_1 ou a_1 à part, ou après leur annulation commune, A_2 ou a_2 à part, et ainsi de suite, devenait nul, il y aurait lieu d'appliquer ce qui a été présenté plus haut.

II.

Autre mode de formation des polynômes R_p.

36. Nous avons établi dans la première Partie de ce Mémoire, n° 20, un second mode de formation des conditions requises pour que les équations $F(x) = 0$, $f(x) = 0$ aient p racines communes, et par suite une seconde manière d'obtenir l'équation qui donne ces racines communes, quand les conditions sont remplies, ou d'obtenir le plus grand commun diviseur de $F(x)$ et $f(x)$.

Considérons au cas de $m > n$ les équations du n° 19; supposons que les équations qui suivent

$$f(x) = 0, \quad xf(x) = 0, \quad \ldots, \quad x^{m-n-1}f(x) = 0$$

soient mises sous la forme

$$\begin{aligned} bx^{m-1} + b_1 x^{m-2} + \ldots + b_{m-1} &= 0, \\ cx^{m-1} + c_1 x^{m-2} + \ldots + c_{m-1} &= 0, \\ dx^{m-1} + d_1 x^{m-2} + \ldots + d_{m-1} &= 0, \end{aligned}$$

au cas de $n = m - 1$, ces dernières ne sont précédées que de $f(x) = 0$.

Formons des polynômes en suivant la règle qui donne, selon le n° 20, le plus grand commun diviseur de degré p, tour à tour pour

$p = n - 1, p = n - 2, \ldots$ Les polynômes seront

$$R_1 = \begin{vmatrix} 0 & \ldots & a & a_1 \\ . & \ldots & . & . \\ a & \ldots & . & a_{m-n} \\ b & \ldots & . & b_{m-n} \end{vmatrix} x^{n-1} + \begin{vmatrix} 0 & \ldots & a & a_2 \\ . & \ldots & . & . \\ a & \ldots & a_{m-n-1} & a_{m-n+1} \\ b & \ldots & b_{m-n-1} & b_{m-n+1} \end{vmatrix} x^{n-2} + \ldots,$$

$$R_2 = \begin{vmatrix} 0 & \ldots & a & a_1 & a_2 \\ . & \ldots & . & . & . \\ a & \ldots & . & . & a_{m-n+1} \\ b & \ldots & . & . & b_{m-n+1} \\ c & \ldots & . & . & c_{m-n+1} \end{vmatrix} x^{n-2} + \begin{vmatrix} 0 & \ldots & a_1 & a_3 \\ . & \ldots & . & . \\ a & \ldots & a_{m-n} & a_{m-n+2} \\ b & \ldots & b_{m-n} & b_{m-n+2} \\ c & \ldots & c_{m-n} & c_{m-n+2} \end{vmatrix} x^{n-3} + \ldots,$$

....

Les conditions établies pour que $F(x)$ et $f(x)$ aient p racines communes sans en avoir davantage sont que les coefficients de R_{p+1} soient nuls et que le premier de R_p ne le soit pas.

37. Les polynômes R_p et les polynômes R_p que nous venons d'étudier répondent ainsi au même objet. Leurs coefficients d'ailleurs dépendent, de proche en proche, des mêmes coefficients de $F(x)$ et $f(x)$; ils sont, par conséquent, identiques, ou ont au moins leurs coefficients proportionnels. Leur dépendance consiste en effet dans les deux relations

$$\begin{aligned} R_{2k+1} &= (-1)^{m-n+1}\mathrm{R}_{2k+1}, \\ R_{2k} &= \mathrm{R}_{2k}. \end{aligned}$$

Pour les établir, considérons d'abord dans le premier coefficient de R_1 le terme en A_{m-n+1}. Comme l'expression générale de b_{m-n} est

$$b_{m-n} = \mathrm{A}_1 a_{m-n} + \mathrm{A}\, a_{m-n+1} - a\mathrm{A}_{m-n+1},$$

ce terme est

$$-a\mathrm{A}_{m-n+1}\begin{vmatrix} 0 & \ldots & a \\ . & \ldots & . \\ a & \ldots & a_{m-n+1} \end{vmatrix}.$$

Dans R_1 le terme homologue est

$$\mathrm{A}_{m-n+1}\begin{vmatrix} 0 & \ldots & a \\ . & \ldots & . \\ a_1 & \ldots & a_{m-n} \end{vmatrix} = \mathrm{A}_{m-n+1}\, a(-1)^{m-n}\begin{vmatrix} 0 & \ldots & a \\ . & \ldots & . \\ a & \ldots & a_{m-n-1} \end{vmatrix};$$

par conséquent on a

$$R_1 = \mathrm{R}_1(-1)^{m-n+1};$$

d'où résulte, au cas de $m-n=1$ ou $m-n=2\mathrm{K}+1$,

$$R_1 = \mathrm{R}_1.$$

De même, dans le premier coefficient de R_2, l'élément c_{m-n+1} présente le terme $-a\mathrm{A}_{m-n+3}$ et l'élément b_{m-n} le terme $-a\mathrm{A}_{m-n+1}$. Comme on peut y dégager une partie égale à

$$c_{m-n+1}b_{m-n}\begin{vmatrix} 0 & \dots & a \\ . & \dots & . \\ a & \dots & a_{m-n-1} \end{vmatrix},$$

il s'y trouve un terme égal à

$$a^2\mathrm{A}_{m-n+3}\mathrm{A}_{m-n+1}\begin{vmatrix} 0 & \dots & a \\ . & \dots & . \\ a & \dots & a_{m-n-1} \end{vmatrix}.$$

Mais, dans le premier coefficient de R_2, il y a le terme

$$-\mathrm{A}_{m-n+3}\begin{vmatrix} 0 & . & \dots & a_1 \\ . & . & \dots & . \\ a & . & \dots & a_{m-n+2} \\ 0 & \mathrm{A} & \dots & \mathrm{A}_{m-n+1} \end{vmatrix};$$

d'où se tire

$$-\mathrm{A}_{m-n+3}\mathrm{A}_{m-n+1}\begin{vmatrix} 0 & \dots & a \\ . & \dots & . \\ a & \dots & a_{m-n+1} \end{vmatrix}$$

$$= -\mathrm{A}_{m-n+3}\mathrm{A}_{m-n+1}\begin{vmatrix} 0 & \dots & a \\ . & \dots & . \\ a & \dots & a_{m-n} \end{vmatrix} a(-1)^{m-n+1}$$

$$= a^2\mathrm{A}_{m-n+3}\mathrm{A}_{m-n+1}\begin{vmatrix} 0 & \dots & a \\ . & \dots & . \\ a & \dots & a_{m-n-1} \end{vmatrix};$$

de là

$$R_2 = \mathrm{R}_2.$$

On trouve d'une manière analogue

$$R_3 = \mathrm{R}_3(-1)^{m-n+1},$$
$$R_4 = \mathrm{R}_4,$$
$$\ldots\ldots\ldots$$

Lorsque $m-n$ est impair, la formule est ainsi

$$R_p = \mathrm{R}_p,$$

et, lorsque $m-n$ est pair, on a d'une part

$$R_{2p} = \mathrm{R}_{2p},$$

et, d'autre part,

$$R_{2p+1} = -\mathrm{R}_{2p+1}.$$

D'après cela, la formule du n° 26

$$\mathrm{R}_1 = \rho_1 a^{m-n+1}(-1)^{\frac{m-n}{2} \text{ ou } \frac{m-n+1}{2}}$$

se change, au cas où $m-n$ est pair, en

$$R_1 = -\rho_1 a^{m-n+1}(-1)^{\frac{m-n}{2}},$$

et, au cas où $m-n$ est impair, en

$$R_1 = \rho_1 a^{m-n+1}(-1)^{\frac{m-n+1}{2}}.$$

Au cas de $m-n=1$, c'est avoir

$$R_1 = -\rho_1 a^2.$$

La relation

$$a^{m-n+1}\mathrm{F}(x) = f(x)\mathrm{Q} + \mathrm{R}_1(-1)^{\frac{m-n+1}{2} \text{ ou } \frac{m-n}{2}}$$

devient, lorsque $m-n$ est impair,

$$a^{m-n+1}\mathrm{F}(x) = f(x)\mathrm{Q} + R_1(-1)^{\frac{m-n+1}{2}},$$

et, lorsque $m-n$ est pair, elle devient

$$a^{m-n+1}\mathrm{F}(x) = f(x)\mathrm{Q} - R_1(-1)^{\frac{m-n}{2}}.$$

La relation

$$\alpha_1^2 f(x) = \mathrm{R}_1\mathrm{Q}_1 - a^{m-n+1}(-1)^{\frac{m-n-1}{2} \text{ ou } \frac{m-n}{2}}\mathrm{R}_2$$

se change, lorsque $m - n$ est impair, en

$$\alpha_1^2 f(x) = R_1 Q_1 - a^{m-n+1}(-1)^{\frac{m-n-1}{2}} R_2,$$

et, au cas où $m - n$ est pair, en

$$\alpha_1^2 f(x) = R_1(-Q_1) - a^{m-n+1}(-1)^{\frac{m-n}{2}} R_2.$$

Enfin la relation générale

$$\alpha_{p+1}^2 \mathrm{R}_p = \mathrm{R}_{p+1} \mathrm{Q}_{p+1} - \alpha_p^2 \mathrm{R}_{p+2},$$

p étant $=$ ou > 1, devient, si $m - n$ est impair,

$$\alpha_{p+1}^2 R_p = R_{p+1} Q_{p+1} - \alpha_p^2 R_{p+2},$$

et, lorsque $m - n$ est pair, elle est, si p est impair,

$$\alpha_{p+1}^2 R_p = R_{p+1}(-Q_{p+1}) - \alpha_p^2 R_{p+2},$$

et, si p est pair,

$$\alpha_{p+1}^2 R_p = R_{p+1}(-Q_{p+1}) - \alpha_p^2 R_{p+2}.$$

C'est toujours la même formule, au signe près de Q_{p+1}.

38. Nous avons supposé jusqu'ici $m > n$. Alors que l'on a $m = n$, les polynômes étant $\mathrm{F}(x) = \mathrm{A}x^m + \ldots + \mathrm{A}_m$, $f(x) = ax^n + \ldots + a_n$, représentons les équations de Bézout ou de Cauchy qui s'ensuivent, ramenées comme d'ordinaire à la forme entière, par

$$\begin{aligned} &bx^{m-1} + b_1 x^{m-2} + \ldots + b_{m-1} = 0, \\ &cx^{m-1} + c_1 x^{m-2} + \ldots + c_{m-1} = 0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Posons alors

$$R_1 = bx^{m-1} + b_1 x^{m-2} + \ldots + b_{m-1},$$

$$R_2 = \begin{vmatrix} b & b_1 \\ c & c_1 \end{vmatrix} x^{m-2} + \begin{vmatrix} b & b_2 \\ c & c_2 \end{vmatrix} x^{m-3} + \ldots,$$

$$R_3 = \begin{vmatrix} b & b_1 & b_2 \\ c & c_1 & c_2 \\ d & d_1 & d_2 \end{vmatrix} x^{m-3} + \begin{vmatrix} b & b_1 & b_3 \\ c & c_1 & c_3 \\ d & d_1 & d_3 \end{vmatrix} x^{m-4} + \ldots.$$

On a là

$$b = \mathrm{A}a_1 - a\mathrm{A}_1 = \begin{vmatrix} \mathrm{A} & \mathrm{A}_1 \\ a & a_1 \end{vmatrix}, \quad b_1 = \mathrm{A}a_2 - a\mathrm{A}_2 = \begin{vmatrix} \mathrm{A} & \mathrm{A}_2 \\ a & a_2 \end{vmatrix}, \quad \ldots;$$

$$\begin{aligned}
c &= \mathrm{A}a_2 - a\mathrm{A}_2,\\
c_1 &= \mathrm{A}a_3 + \mathrm{A}_1 a_2 - a\mathrm{A}_3 - a_1\mathrm{A}_2,\\
c_2 &= \mathrm{A}a_4 + \mathrm{A}_1 a_3 - a\mathrm{A}_4 - a_1\mathrm{A}_3,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
d &= \mathrm{A}a_3 - a\mathrm{A}_3,\\
d_1 &= \mathrm{A}a_4 + \mathrm{A}_1 a_3 - a\mathrm{A}_4 - a_1\mathrm{A}_3,\\
d_2 &= \mathrm{A}a_5 + \mathrm{A}_1 a_4 + \mathrm{A}_2 a_3 - a\mathrm{A}_5 - a_1\mathrm{A}_4 - a_2\mathrm{A}_3,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Comme on a dans ce cas

$$\mathrm{R}_1 = \begin{vmatrix} a & a_1 \\ \mathrm{A} & \mathrm{A}_1 \end{vmatrix} x^{m-1} + \begin{vmatrix} a & a_2 \\ \mathrm{A} & \mathrm{A}_2 \end{vmatrix} x^{m-2} + \ldots,$$

$$\mathrm{R}_2 = \begin{vmatrix} 0 & a & a_1 & a_2 \\ a & a_1 & a_2 & a_3 \\ \mathrm{A} & \mathrm{A}_1 & \mathrm{A}_2 & \mathrm{A}_3 \\ 0 & \mathrm{A} & \mathrm{A}_1 & \mathrm{A}_2 \end{vmatrix} x^{m-2} + \begin{vmatrix} 0 & a & a_1 & a_3 \\ a & a_1 & a_2 & a_4 \\ \mathrm{A} & \mathrm{A}_1 & \mathrm{A}_2 & \mathrm{A}_4 \\ 0 & \mathrm{A} & \mathrm{A}_1 & \mathrm{A}_3 \end{vmatrix} x^{m-3} + \ldots;$$

on voit d'abord que l'on a

$$R_1 = -\mathrm{R}_1.$$

Le terme $a^2\mathrm{A}_1\mathrm{A}_3$ se trouvant dans le premier coefficient de R_2 comme dans le premier de R_2, on en conclut

$$R_2 = \mathrm{R}_2.$$

Dans le premier coefficient de R_3 on trouve le terme

$$-a\mathrm{A}_5 \begin{vmatrix} b & b_1 \\ c & c_1 \end{vmatrix}$$

par

$$d_2 \begin{vmatrix} b & b_1 \\ c & c_1 \end{vmatrix};$$

d'où l'on peut extraire

$$-a\mathrm{A}_5 bc, \quad \text{et de là} \quad a^2\mathrm{A}_5\mathrm{A}_3 b,$$

puis

$$-a^3\mathrm{A}_5\mathrm{A}_3\mathrm{A}_1.$$

Dans le premier coefficient de R_3, le terme homologue est

$$a^3 A_5 A_3 A_1.$$

Il s'ensuit

$$R_3 = - \mathrm{R}_3.$$

La formule générale est encore, d'une part,

$$R_{2p+1} = (-1)^{m-n+1} \mathrm{R}_{2p+1},$$

et de l'autre

$$R_{2p} = \mathrm{R}_{2p}.$$

Ajoutons qu'on a les relations

$$\begin{aligned} a\,F(x) &= A f(x) - R_1, \\ \alpha_1^2 f(x) &= R_1(-Q_1) - a R_2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \alpha_{p+1}^2 R_p &= R_{p+1}(-Q_{p+1}) - \alpha_p^2 R_{p+2}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}$$

qui sont des précédentes pour $m - n = 0$.

III.

39. Le cas de $m - n = 1$ présente un intérêt particulier par l'application au théorème de Sturm.

Nous avons alors, comme on l'a vu,

$$\begin{aligned} a_2 F(x) &= f(x) Q - R_1, \\ \alpha_1^2 f(x) &= R_1 Q_1 - R_2, \\ \alpha_2^2 R_1 &= R_2 Q_2 - \alpha_1^2 R_3, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

D'après ces relations, la suite des fonctions à coefficients réels

$$F(x),\ f(x),\ R_1,\ R_2,\ \ldots$$

jouit de cette propriété que, si une valeur réelle de x annule l'une des fonctions intermédiaires sans annuler les fonctions contiguës, ces deux fonctions, qui la comprennent, acquièrent, pour la valeur de x, des valeurs de signes contraires. C'est l'un des fondements du théorème de Sturm.

Quand, dans un intervalle de α à β, les différentes racines de $F(x)$ sont autres que celles de $f(x)$, si, d'un même côté de chacune des premières, les fonctions $F(x)$, $f(x)$ sont de signes contraires, et du même signe de l'autre côté, il s'ensuit que le nombre des racines de $F(x)$ comprises entre α et β est la différence des deux nombres de variations que présente pour α et β la suite des valeurs correspondantes prises par les polynômes

$$F(x),\ f(x),\ R_1,\ R_2,\ \ldots,$$

pourvu que cette suite soit limitée à un terme constant, en ne changeant pas de signe dans l'intervalle considéré.

Lorsque $f(x)$ se prend égal à la dérivée de $F(x)$, les polynômes R_1, R_2, R_3, ..., ou bien $\mathcal{R}_1$, $\mathcal{R}_2$, $\mathcal{R}_3$, ..., pourront donc se prendre à la place des fonctions de Sturm V_2, V_3, ...

Donc, si l'on pose

$$V = Ax^m + A_1x^{m-1} + \ldots + A_m,$$
$$V_1 = ax^{m-1} + a_1x^{m-2} + \ldots + a_{m-1},$$

V_1 étant la dérivée de V ou cette dérivée à un facteur près positif, les coefficients étant réels, et qu'on développe les équations

$$\frac{Ax + A_1}{a} = \frac{A_2x^{m-2} + \ldots + A_m}{a_1x^{m-2} + \ldots + a_{m-1}},$$
$$\frac{Ax^2 + A_1x + A_2}{ax + a_1} = \frac{A_3x^{m-3} + \ldots + A_m}{a_2x^{m-3} + \ldots + a_{m-1}},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

en

$$bx^{m-1} + b_1x^{m-2} + \ldots + b_{m-1} = 0,$$
$$cx^{m-1} + c_1x^{m-2} + \ldots + c_{m-1} = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

les fonctions de Sturm reviendront aux polynômes suivants :

$$R_1 = \begin{vmatrix} a & a_1 \\ b & b_1 \end{vmatrix} x^{m-2} + \begin{vmatrix} a & a_2 \\ b & b_2 \end{vmatrix} x^{m-3} + \ldots + \begin{vmatrix} a & a_{m-1} \\ b & b_{m-1} \end{vmatrix},$$

$$R_2 = \begin{vmatrix} a & a_1 & a_2 \\ b & b_1 & b_2 \\ c & c_1 & c_2 \end{vmatrix} x^{m-3} + \begin{vmatrix} a & a_1 & a_3 \\ b & b_1 & b_3 \\ c & c_1 & c_3 \end{vmatrix} x^{m-4} + \ldots + \begin{vmatrix} a & a_1 & a_{m-1} \\ b & b_1 & b_{m-1} \\ c & c_1 & c_{m-1} \end{vmatrix},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Sous une autre forme, ces polynômes sont

$$R_1 = \begin{vmatrix} 0 & a & a_1 \\ a & a_1 & a_2 \\ A & A_1 & A_2 \end{vmatrix} x^{m-2} + \begin{vmatrix} 0 & a & a_2 \\ a & a_1 & a_3 \\ A & A_1 & A_3 \end{vmatrix} x^{m-3} + \ldots,$$

$$R_2 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & a & a_1 & a_2 \\ 0 & a & a_1 & a_2 & a_3 \\ a & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ A & A_1 & A_2 & A_3 & A_4 \\ 0 & A & A_1 & A_2 & A_3 \end{vmatrix} x^{m-3} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & a & a_1 & a_3 \\ 0 & a & a_1 & a_2 & a_4 \\ a & a_1 & a_2 & a_3 & a_5 \\ A & A_1 & A_2 & A_3 & A_5 \\ 0 & A & A_1 & A_2 & A_4 \end{vmatrix} x^{m-4} + \ldots,$$

. . . .

Si V_1 est la dérivée de V, tout au plus divisée par m ou un facteur de m, on voit que les polynômes $R_1, R_2, R_3, \ldots$ sont tous divisibles par A. La suppression de ce facteur pourra se faire sur les éléments de la première colonne dans chaque terme; rien ne sera d'ailleurs à changer, s'il est positif. Quand il sera négatif, c'est par sa valeur absolue qu'on divisera, à moins qu'on ne préfère changer les signes de $F(x)$ et de $F'(x)$.

D'autres simplifications pourront être à faire. Par exemple, un facteur commun à A et A_1 se retrouvant dans tous les termes de chaque polynôme, il y aura lieu de les diviser par sa valeur absolue.

Quand, dans la recherche des fonctions de Sturm par des divisions successives, le degré s'abaisse de plus d'une unité, le même abaissement se présente dans le calcul des fonctions R. La suite des fonctions obtenues, quoi qu'il arrive d'ailleurs, continuera à jouir des mêmes propriétés que lorsqu'il en est autrement, puisqu'une pareille circonstance ne sera qu'un cas limite du cas général.

Les premiers termes des fonctions $R_1, R_2, \ldots$, tels termes qu'on veut, peuvent se calculer indépendamment des autres. On a par les premiers, sous une forme ou sous l'autre, des expressions générales, en fonction des coefficients de l'équation $F(x) = 0$, pour les conditions de réalité de toutes les racines, quand elles sont simples.

Deux polynômes qui se suivent R_p, R_{p+1} ayant leurs degrés consécutifs, si l'on opère à partir de ces polynômes comme à partir de $F(x)$, $f(x)$, on a vu (n° 31) que les polynômes R'_{p+2}, R'_{p+3}, ..., qui s'ensuivent, sont liés aux polynômes correspondants $R_{p+2}, R_{p+3}, \ldots$ par les relations

$$R'_{p+2} = \alpha_p^2 R_{p+2}, \quad R'_{p+3} = \alpha_p^4 R_{p+3}, \quad \ldots.$$

De pareils polynômes, quand on le jugera à propos, pourront se calculer à la place des polynômes $R_{p+2}, R_{p+3}, \ldots$; mais, si α_p est différent de ± 1, il y aura lieu de les diviser par $\alpha_p^2, \alpha_p^4, \ldots$.

IV.

40. Les premiers coefficients de ces polynômes $R_1, R_2 \ldots$, lorsque $f(x)$ est la dérivée de $F(x)$, sont précisément, au cas de $A = 1$, les nombres p_μ de M. Borchardt.

Les valeurs de ces coefficients sont en effet

$$A^3 \begin{vmatrix} S_0 & S_1 \\ S_1 & S_2 \end{vmatrix}, \quad A^5 \begin{vmatrix} S_0 & S_1 & S_2 \\ S_1 & S_2 & S_3 \\ S_2 & S_3 & S_4 \end{vmatrix}, \quad A^7 \begin{vmatrix} S_0 & S_1 & S_2 & S_3 \\ S_1 & S_2 & S_3 & S_4 \\ S_2 & S_3 & S_4 & S_5 \\ S_3 & S_4 & S_5 & S_6 \end{vmatrix}, \quad \ldots,$$

S_i désignant la somme des puissances de degré i des racines de $F(x)$.

Pour le démontrer, nous allons prendre les premières expressions des polynômes R indiquées au n° 22.

Le premier coefficient de R_1 peut successivement se transformer comme il suit :

$$\begin{vmatrix} 0 & mA & (m-1)A_1 \\ mA & (m-1)A_1 & (m-2)A_2 \\ A & A_1 & A_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & mA & (m-1)A_1 \\ 0 & -A_1 & -2A_2 \\ A & A_1 & A_2 \end{vmatrix}$$

$$= A \begin{vmatrix} mA & (m-1)A_1 \\ -A_1 & -2A_2 \end{vmatrix}$$

$$= A \begin{vmatrix} mA & -(m-1)AS_1 \\ AS_1 & AS_2 - AS_1^2 \end{vmatrix}$$

$$= A \begin{vmatrix} mA & AS_1 \\ AS_1 & AS_2 \end{vmatrix} = A^3 \begin{vmatrix} S_0 & S_1 \\ S_1 & S_2 \end{vmatrix}.$$

Pour celui de R_2, on a

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & mA & (m-1)A_1 & (m-2)A_2 \\ 0 & mA & (m-1)A_1 & (m-2)A_2 & (m-3)A_3 \\ mA & (m-1)A_1 & (m-2)A_2 & (m-3)A_4 & (m-4)A_4 \\ A & A_1 & A_2 & A_3 & A_4 \\ 0 & A & A_1 & A_2 & A_3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 0 & mA & (m-1)A_1 & (m-2)A_2 \\ 0 & 0 & -A_1 & -2A_2 & -3A_3 \\ 0 & -A_1 & -2A_2 & -3A_3 & -4A_4 \\ A & A_1 & A_2 & A_3 & A_4 \\ 0 & A & A_1 & A_2 & A_3 \end{vmatrix}$$

$$= -A \begin{vmatrix} 0 & mA & (m-1)A_1 & (m-2)A_2 \\ 0 & -A_1 & -2A_2 & -3A_3 \\ -A_1 & -2A_2 & -3A_3 & -4A_4 \\ A & A_1 & A_2 & A_3 \end{vmatrix}$$

$$= -A \begin{vmatrix} 0 & mA & (m-1)A_1 & (m-2)A_2 \\ 0 & -A_1 & AS_2 + A_1S_1 & AS_3 + A_1S_2 + A_2S_1 \\ -A_1 & AS_2 + A_1S_1 & AS_3 + A_1S_2 + A_2S_1 & AS_4 + A_1S_3 + A_2S_2 + A_3S_1 \\ A & A_1 & A_2 & A_3 \end{vmatrix}$$

$$= - \begin{vmatrix} 0 & mA & (m-1)A_1 & (m-2)A_2 \\ 0 & -A_1 & AS_2 + A_1S_1 & AS_3 + A_1S_2 + A_2S_1 \\ 0 & A^2S_2 + AA_1S_1 + A_1^2 & \begin{matrix} A^2S_3 + AA_1S_2 \\ + AA_2S_1 + A_1A_2 \end{matrix} & \begin{matrix} A^2S_4 + AA_1S_3 + AA_2S_2 \\ + AA_3S_1 + A_1A_3 \end{matrix} \\ A & A_1 & A_2 & A_3 \end{vmatrix}$$

$$= A \begin{vmatrix} mA & (m-1)A_1 & (m-2)A_2 \\ -A_1 & AS_2 + A_1S_1 & AS_3 + A_1S_2 + A_2S_1 \\ A^2S_2 & A^2S_3 + AA_1S_2 & A^2S_4 + AA_1S_3 + AA_2S_2 \end{vmatrix}$$

$$= A \begin{vmatrix} mA & -A_1 & -2A_2 \\ AS_1 & AS_2 & AS_3 + A_1S_2 \\ A^2S_2 & A^2S_3 & A^2S_4 + AA_1S_3 \end{vmatrix} = A \begin{vmatrix} mA & AS_1 & A_2 \\ AS_1 & AS_2 & AS_3 \\ A^2S_2 & A^2S_3 & A^2S_4 \end{vmatrix} = A^5 \begin{vmatrix} S_0 & S_1 & S_2 \\ S_1 & S_2 & S_3 \\ S_2 & S_3 & S_4 \end{vmatrix}.$$

Pour le premier coefficient de R_3, on trouve de même

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & mA & (m-1)A_1 & (m-2)A_2 & (m-3)A_3 \\ 0 & 0 & mA & (m-1)A_1 & (m-2)A_2 & (m-3)A_3 & (m-4)A_4 \\ 0 & mA & (m-1)A_1 & (m-2)A_2 & (m-3)A_3 & (m-4)A_4 & (m-5)A_5 \\ mA & (m-1)A_1 & (m-2)A_2 & (m-3)A_3 & (m-4)A_4 & (m-5)A_5 & (m-6)A_6 \\ A & A_1 & A_2 & A_3 & A_4 & A_5 & A_6 \\ 0 & A & A_1 & A_2 & A_3 & A_4 & A_5 \\ 0 & 0 & A & A_1 & A_2 & A_3 & A_4 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & mA & (m-1)A_1 & (m-2)A_2 & (m-3)A_3 \\ 0 & 0 & 0 & -A_1 & -2A_2 & -3A_3 & -4A_4 \\ 0 & 0 & -A_1 & -2A_2 & -3A_3 & -4A_4 & -5A_5 \\ 0 & -A_1 & -2A_2 & -3A_3 & -4A_4 & -5A_5 & -6A_6 \\ A & A_1 & A_2 & A_3 & A_4 & A_5 & A_6 \\ 0 & A & A_1 & A_2 & A_3 & A_4 & A_5 \\ 0 & 0 & A & A_1 & A_2 & A_3 & A_4 \end{vmatrix}$$

$$= A \begin{vmatrix} 0 & 0 & mA & (m-1)A_1 & (m-2)A_2 & (m-3)A_3 \\ 0 & 0 & -A_1 & -2A_2 & -3A_3 & -4A_4 \\ 0 & -A_1 & -2A_2 & -3A_3 & -4A_4 & -5A_5 \\ -A_1 & -2A_2 & -3A_3 & -4A_4 & -5A_5 & -6A_6 \\ A & A_1 & A_2 & A_3 & A_4 & A_5 \\ 0 & A & A_1 & A_2 & A_3 & A_4 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 0 & mA & (m-1)A_1 & (m-2)A_2 & (m-3)A_3 \\ 0 & 0 & -A_1 & -2A_2 & -3A_3 & -4A_4 \\ 0 & -A_1 & -2A_2 & -3A_3 & -4A_4 & -5A_5 \\ 0 & -2AA_2+A_1 & -3AA_3+A_2A_1 & -4AA_4+A_1A_3 & -5AA_5+A_1A_4 & -6AA_6+A_1A_5 \\ A & A_1 & A_2 & A_3 & A_4 & A_5 \\ 0 & A & A_1 & A_2 & A_3 & A_4 \end{vmatrix}$$

$$= A \begin{vmatrix} 0 & mA & (m-1)A_1 & (m-2)A_2 & (m-3)A_3 \\ 0 & -A_1 & -2A_2 & -3A_3 & -4A_4 \\ -A_1 & -2A_2 & -3A_3 & -4A_4 & -5A_5 \\ -2AA_2+A_1^2 & -3AA_3+A_1A_2 & -4AA_4+A_1A_3 & -5AA_5+A_1A_4 & -6AA_6+A_1A_5 \\ A & A_1 & A_2 & A_3 & A_4 \end{vmatrix}$$

$$= A \begin{vmatrix} 0 & mA & (m-1)A_1 & (m-2)A_2 & (m-3)A_3 \\ 0 & -A_1 & -2A_2 & -3A_3 & -4A_4 \\ -A_1 & -2A_2 & -3A_3 & -4A_4 & -5A_5 \\ -2AA_2 & -3AA_3-A_1A_2 & -4AA_4-2A_1A_3 & -5AA_5-3A_1A_4 & -6AA_6-4A_1A_5 \\ A & A_1 & A_2 & A_3 & A_4 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & mA & (m-1)A_1 & (m-2)A_2 & (m-3)A_3 \\ 0 & -A_1 & -2A_2 & -3A_3 & -4A_4 \\ 0 & -2AA_2+A_1^2 & -3AA_3+A_1A_2 & -4AA_4+A_1A_3 & -5AA_5+A_1A_4 \\ -2AA_2 & -3AA_3-A_1A_2 & -4AA_4-2A_1A_3 & -5AA_5-3A_1A_4 & -6AA_6-4A_1A_5 \\ A & A_1 & A_2 & A_3 & A_4 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & mA & (m-1)A_1 & (m-2)A_2 & (m-3)A_3 \\ 0 & -A_1 & -2A_2 & -3A_3 & -4A_4 \\ 0 & -2AA_2+A_1^2 & -3AA_3+A_1A_2 & -4AA_4+A_1A_3 & -5AA_5+A_1A_4 \\ 0 & -3AA_3+A_1A_2 & -4AA_4-2A_1A_3+2A_2^2 & -5AA_5-3A_1A_4+2A_2A_3 & -6AA_6-4A_1A_5+2A_2A_4 \\ A & A_1 & A_2 & A_3 & A_4 \end{vmatrix}$$

$$= A \begin{vmatrix} mA & (m-1)A_1 & (m-2)A_2 & (m-3)A_3 \\ -A_1 & -2A_2 & -3A_3 & -4A_4 \\ -2AA_2+A_1^2 & -3AA_3+A_1A_2 & -4AA_4+A_1A_3 & -5AA_5+A_1A_4 \\ -3AA_3+AA_1 & -4AA_4-2A_1A_3+2A_2^2 & -5AA_5-3A_1A_4+2A_2A_3 & -6AA_6-4A_1A_5+2A_3A_4 \end{vmatrix}$$

$$= A \begin{vmatrix} mA & (m-1)A_1 & (m-2)A_2 & (m-3)A_3 \\ AS_1 & AS_2+A_1S_1 & AS_3+A_1S_2+A_2S_1 & AS_4+A_1S_3+A_2S_2+A_3S_1 \\ A^2S_2+AA_1S_1+A_1^2 & A^2S_3+AA_1S_2 & A^2S_4+AA_1S_3+AA_2S_2 & A^2S_5+AA_1S_4+AA_2S_3+AA_3S_2 \\ A^2S_3+AA_1S_2 & \begin{matrix} A^2S_4+AA_1S_3-A_1A_2S_1 \\ -3AA_3 \end{matrix} & \begin{matrix} A^2S_5+AA_1S_4+AA_2S_3 \\ -4A_1A_4-A_1A_3S_1 \end{matrix} & \begin{matrix} A^2S_6+2AA_1S_5+AA_2S_4+AA_3S_3 \\ +A_1A_2S_3+A_1^2S_4+A_1A_3S_2 \end{matrix} \end{vmatrix}$$

$$= A \begin{vmatrix} mA & (m-1)A_1 & (m-2)A_2 & (m-3)A_3 \\ AS_1 & AS_2+A_1S_1 & AS_3+A_1S_2+A_2S_1 & AS_4+A_1S_3+A_2S_2+A_3S_1 \\ A^2S_2 & A^2S_3+AA_1S_2 & A^2S_4+AA_1S_3+AA_2S_2 & A^2S_5+AA_1S_4+AA_2S_3+AA_3S_2 \\ A^2S_3 & A^2S_4+AA_1S_3 & A^2S_5+AA_1S_4+AA_2S_3 & A^2S_6+AA_1S_5+AA_2S_4+AA_3S_3 \end{vmatrix}$$

$$= A \begin{vmatrix} mA & -A_1 & -2A_2 & -3A_3 \\ AS_1 & AS_2 & AS_3+A_1S_2 & AS_4+A_1S_3+A_2S_2 \\ A^2S_2 & A^2S_3 & A^2S_4+AA_1S_3 & A^2S_5+AA_1S_4+AA_2S_3 \\ A^2S_3 & A^2S_4 & A^2S_5+AA_1S_4 & A^2S_6+AA_1S_5+AA_2S_4 \end{vmatrix}$$

$$= A \begin{vmatrix} mA & AS_1 & AS_2+A_1S_1 & AS_3+A_1S_2+A_2S_1 \\ AS_1 & AS_2 & A^2S_3+A_1S_2 & AS_4+A_1S_3+A_2S_2 \\ A^2S_2 & A^2S_3 & A^2S_4+AA_1S_3 & A^2S_5+AA_1S_4+AA_2S_3 \\ A^2S_3 & A^2S_4 & A^2S_5+AA_1S_4 & A^2S_6+AA_1S_5+AA_2S_4 \end{vmatrix}$$

$$A \begin{vmatrix} mA & AS_1 & AS_2 & AS_3 \\ AS_1 & AS_2 & AS_3 & AS_4 \\ A^2S_2 & A^2S_3 & A^2S_4 & A^2S_5 \\ A^2S_3 & A^2S_4 & A^2S_5 & A^2S_6 \end{vmatrix} = A^7 \begin{vmatrix} S_0 & S_1 & S_2 & S_3 \\ S_1 & S_2 & S_3 & S_4 \\ S_2 & S_3 & S_4 & S_5 \\ S_3 & S_4 & S_5 & S_6 \end{vmatrix}.$$

Les transformations, on le voit, se compliquent de plus en plus. Il nous semble inutile de les poursuivre au delà.

En se servant des autres expressions de $R_1, R_2, \ldots$, on obtient les mêmes résultats, par des calculs analogues qui offrent moins de régularité.

V.

41. Nous terminerons cette étude par le développement de quelques exemples :

1° Soit

$$F(x) = x^3 + px + q,$$
$$fx = 3x^2 + p.$$

Il s'ensuit

$$\frac{x}{3} = \frac{px+q}{p} \quad \text{et} \quad \frac{x^2+p}{3x} = \frac{q}{p};$$

d'où

$$3x^2 + p, \quad -2px - 3q, \quad px^2 - 3qx + p^2.$$

De là

$$R_1 = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2p \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} 3 & p \\ 0 & -3q \end{vmatrix} = -6px - 9q,$$

$$R_2 = \begin{vmatrix} 3 & 0 & p \\ 0 & -2p & -3q \\ p & -3q & p^2 \end{vmatrix} = p^2(-6p) + 3q(-9q) + p.2p^2 = -4p^3 - 27q^2.$$

2° Soit

$$F(x) = ax^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3,$$
$$F'(x) = 3ax^2 + 2a_1x + a_2;$$

d'où

$$\frac{ax + a_1}{3a} = \frac{a_2x + a_3}{2a_1x + a_2}, \quad \frac{ax^2 + a_1x + a_2}{3ax + 2a_1} = \frac{a_3}{a_2},$$

puis

$$3ax^2 + 2a_1x + a_2,$$
$$2aa_1x^2 + (2a_1^2 - 2aa_2)x + a_1a_2 - 3aa_3,$$
$$aa_2x^2 + (a_1a_2 - 3aa_3)x + a_2^2 - 2a_1a_3,$$

et par là

$$R_1 = \begin{vmatrix} 3a & 2a_1 \\ 2aa_1 & 2a_1^2 - 2aa_2 \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} 3a & a_2 \\ 2aa_1 & a_1 a_1 - 3aa_3 \end{vmatrix}$$
$$= \begin{vmatrix} 3a & 2a_1 \\ -aa_1 & -2aa_2 \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} 3a & a_2 \\ -aa_1 & -3aa_3 \end{vmatrix}$$
$$= -2a(3aa_2 - a_1^2)x - a(9aa_3 + a_1 a_2),$$

$$R_2 = \begin{vmatrix} 3a & 2a_1 & a_2 \\ 2aa_1 & 2a_1^2 - 2aa_2 & a_1 a_2 - 3aa_3 \\ aa_2 & a_1 a_2 - 3aa_3 & a_2^2 - 2a_1 a^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3a & 2a_1 & a_2 \\ -aa_1 & -2aa_2 & -3aa_3 \\ -2aa_2 & -a_1 a_2 - 3aa_3 & -2a_1 a_3 \end{vmatrix}$$
$$= a(18aa_1 a_2 a_3 - 4a_1^3 a_3 - 4a_2^3 a + a_1^2 a_2^2 - 27a^2 a_3^2).$$

Si l'on pose

$$F(x) = ax^3 + 3a_1 x^2 + 3a_2 x + a_3,$$

on a

$$\tfrac{1}{9} R_1 = \begin{vmatrix} 2a & 2a_1 \\ 2aa_1 & 3a_1^2 - aa_2 \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} a & a_2 \\ 2aa_1 & 3a_1 a_2 - aa_3 \end{vmatrix}$$
$$= \begin{vmatrix} 2a & 2a_1 \\ 0 & a_1^2 - aa_2 \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} a & a_2 \\ 0 & a_1 a_2 - aa_3 \end{vmatrix}$$
$$= 2a(a_1^2 - aa_2)x + a(a_1 a_2 - aa_3),$$

$$\tfrac{1}{27} R_2 = \begin{vmatrix} a & 2a_1 & a_2 \\ -aa_1 & -2aa_2 & -aa_3 \\ -2aa_2 & -3a_1 a_2 - aa_3 & -2a_1 a_3 \end{vmatrix}$$
$$= \begin{vmatrix} a & 2a_1 & a_2 \\ 0 & 2a_1^2 - 2aa_2 & a_2 a_1 - aa_3 \\ 0 & a_1 a_2 - aa_3 & 2a_2^2 - 2a_1 a_3 \end{vmatrix}$$
$$= 4a(a_1^2 - aa_2)(a_2^2 - a_1 a_3) - a(a_1 a_2 - aa_3)^2.$$

3° Soit

$$F(x) = ax^4 + a_1 x^3 + a_2 x^2 + a_3 x + a_4,$$
$$F'(x) = 4ax^3 + 3a_1 x^2 + 2a_2 x + a_3;$$

d'où

$$4ax^3 + 3a_1 x^2 + 2a_2 x + a_3,$$
$$3aa_1 x^3 + (3a_1^2 - 2aa_2)x^2 + (2a_1 a_2 - 3aa_3)x + a_1 a_3 - 4aa_4,$$
$$2aa_2 x^3 + (2a_1 a_2 - 3aa_3)x^2 + (2a_2^2 - 2a_1 a_3 - 4aa_4)x + a_2 a_3 - 3a_1 a_4,$$
$$aa_3 x^3 + (a_1 a_3 - 4aa_4)x^2 + (a_2 a_3 - 3a_1 a_4)x + a_3^2 - 2a_2 a_4,$$

puis

$$R_1 = \begin{vmatrix} 4a & 3a_1 \\ 3aa_1 & 3a_1^2 - 2aa_2 \end{vmatrix} x^2 + \begin{vmatrix} 4a & 2a_3 \\ 3aa_1 & 2a_1a_2 - 3aa_3 \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} 4a & a_3 \\ 3aa_1 & a_1a_3 - 4aa_1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 4a & 3a_1 \\ -aa_1 & -2aa_2 \end{vmatrix} x^2 + \begin{vmatrix} 4a & 2a_2 \\ -aa_1 & -3aa_3 \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} 4a & a_3 \\ -aa_1 & -4aa_4 \end{vmatrix},$$

$$R_2 = \begin{vmatrix} 4a & 3a_1 & 2a_2 \\ 3aa_1 & 3a_1^2 - 2aa_2 & 2a_1a_2 - 3aa_3 \\ 2aa_2 & 2a_1a_2 - 3aa_3 & 2a_2^2 - 4aa_4 - 2a_1a_3 \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} 4a & 3a_1 & a_3 \\ 3aa_1 & 2a_1^2 - 2aa_2 & a_1a_3 - 4aa_4 \\ 2aa_2 & 2a_1a_2 - 3aa_3 & a_2a_3 - 3a_1a_4 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 4a & 3a_1 & 2a_2 \\ -aa_1 & -2aa_2 & -3aa_3 \\ -2aa_2 & -a_1a_2 - 3aa_3 & -4aa_4 - 2a_1a_3 \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} 4a & 3a_1 & a_3 \\ -aa_1 & -2aa_2 & -4aa_4 \\ -2aa_2 & -a_1a_2 - 3aa_3 & -3a_1a_4 \end{vmatrix}$$

$$R_3 = \begin{vmatrix} 4a & 3a_1 & 2a_2 & a_3 \\ 3aa_1 & 3a_1^2 - 2aa_2 & 2a_1a_2 - 3aa_3 & a_1a_3 - 4aa_4 \\ 3aa_2 & 2a_1a_2 - 3aa_3 & 2a_2^2 - 4aa_4 - 2a_1a_3 & a_2a_3 - 3a_1a_4 \\ aa_3 & a_1a_3 - 4aa_4 & a_2a_3 - 3a_1a_4 & a_3^2 - 2a_2a_4 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 4a & 3a_1 & 2a_2 & a_3 \\ -aa_1 & -2aa_2 & -3aa_3 & -4aa_4 \\ -2aa_2 & -a_1a_2 - 3aa_3 & -4aa_4 - 2a_1a_3 & -3a_1a_4 \\ -3aa_3 & -2a_1a_3 - 4aa_4 & -a_2a_3 - 3a_1a_4 & -2a_2a_4 \end{vmatrix}$$

Si l'on prend

$$F(x) = ax^4 + 4a_1x^3 + 6a_2x^2 + 4a_3x + a_4,$$

il s'ensuit

$$\frac{\cdot}{5} = 3\begin{vmatrix} a & a \\ -aa_1 & -aa_2 \end{vmatrix} x^2 + 3\begin{vmatrix} a & a_2 \\ -aa_1 & -aa_3 \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} a & a_3 \\ -aa_1 & -aa_4 \end{vmatrix}$$

$$= 3a(a_1^2 - aa_2)x^2 + 3a(a_1a_2 - aa_3)x + a(a_1a_3 - aa_4),$$

$$\frac{\cdot}{3} = \begin{vmatrix} a & a_1 & 3a_2 \\ -aa_1 & -aa_2 & -3aa_3 \\ -3aa_2 & -2a_1a_2 - aa_3 & -aa_4 - 8a_1a_3 \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} a & a_1 & a_3 \\ -aa_1 & -aa_2 & -aa_4 \\ -3aa_2 & -2a_1a_2 - aa_3 & -3a_1a_4 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a & a_1 & 3a_2 \\ 0 & a_1^2 - aa_2 & 3a_1a_2 - 3aa_3 \\ 0 & a_1a_2 - aa_3 & 9a_2^2 - aa_4 - 8a_1a_3 \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} a & a_1 & a_3 \\ 0 & a_1^2 - aa_2 & a_1a_3 - aa_4 \\ 0 & a_1a_2 - aa_3 & 3a_2a_3 - 3a_1a_4 \end{vmatrix}$$

$$= a[(a_1^2 - aa_2)(9a_2^2 - aa_4 - 8a_1a_3) - 3(a_1a_2 - aa_3)^2]x$$
$$+ a[3(a_1^2 - aa_2)(a_2a_3 - a_1a_4) - (a_1a_2 - aa_3)(a_1a_3 - aa_4)],$$

$$\frac{R_3}{4^4} = \begin{vmatrix} a & 3a_1 & 3a_2 & a_3 \\ -aa_1 & -3aa_2 & -3aa_3 & -aa_4 \\ -3aa_2 & -6a_1a_2 - 3aa_3 & -8a_1a_3 - aa_4 & -3a_1a_4 \\ -3aa_3 & -8a_1a_3 - aa_4 & -6a_2a_3 - 3a_1a_4 & -3a_2a_4 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a & 3a_1 & 3a_2 & a_3 \\ 0 & 3(a_1^2 - aa_2) & 3(a_1a_2 - aa_3) & a_1a_3 - aa_4 \\ 0 & 3(a_1a_2 - aa_3) & 9a_2^2 - 8a_1a_3 - aa_4 & 3(a_2a_3 - a_1a_4) \\ 0 & a_1a_3 - aa_4 & 3(a_2a_3 - a_1a_4) & 3(a_3^2 - a_2a_4) \end{vmatrix}$$

$$= a \begin{vmatrix} 3(a_1^2 - aa_2) & 3(a_1a_2 - aa_3) & a_1a_3 - aa_4 \\ 3(a_1a_2 - aa_3) & 9a_2^2 - 8a_1a_3 - aa_4 & 3(a_2a_3 - a_1a_4) \\ a_1a_3 - aa_4 & 3(a_2a_3 - a_1a_4) & 3(a_3^2 - a_2a_4) \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} &= [9a(a_1^2 - aa_2)(a_3^2 - a_4a_2) - a(a_1a_3 - aa_4)^2](9a_2^2 - 8a_1a_3 - aa_4) \\ &\quad + 18a(a_1a_3 - aa_4)(a_1a_2 - aa_3)(a_3a_2 - a_4a_1) \\ &\quad - 27a(a_1^2 - aa_2)(a_2a_3 - a_1a_4)^2 - 27a(a_3^2 - a_1a_2)(a_2a_1 - a_3a)^2. \end{aligned}$$

Remarque. — Quand on pose

$$\begin{aligned} F(x) = \varphi(x, y) = A x^m + m A_1 x^{m-1} y + \frac{m(m-1)}{1.2} A_2 x^{m-2} y^2 + \ldots \\ + \frac{m(m-1)}{1.2} A_{m-2} x^2 y^{m-2} + m A_{m-1} x y^{m-1} + A_m y^m, \end{aligned}$$

comme l'on a

$$mF(x) = x\varphi'_x(x, y) + y\varphi'_y(x, y) \quad \text{et} \quad F'(x) = \varphi'_x(x, y),$$

y s'estimant égal à l'unité, la recherche d'un plus grand commun diviseur entre $F(x)$ et $F'(x)$ revient à le chercher entre $\varphi'_x(x, y)$ et $\varphi'_y(x, y)$.

Quand on prend

$$\varphi(x, y) = ax^3 + 3a_1x^2y + 3a_2xy^2 + a_3y^3,$$

on a

$$\tfrac{1}{3}\varphi'_x(x, y) = ax^2 + 2a_1xy + a_2y^2,$$

$$\tfrac{1}{3}\varphi'_y(x, y) = a_1x^2 + 2a_2xy + a_3y^2,$$

de là

$$\frac{a}{a_1} = \frac{2a_1x + a_2y}{2a_2x + a_3y} \quad \text{et} \quad \frac{ax + 2a_1y}{a_1x + 2a_2y} = \frac{a_2}{a_3},$$

ou bien

$$3(aa_2 - a_1^2)x + (aa_3 - a_1a_2)y,$$
$$(aa_3 - a_1a_2)x + 2(a_1a_3 - a_2^2),$$

ce qui donne

$$-R_1 = 2(aa_2 - a_1^2)x + (aa_3 - a_1a_2),$$
$$R_2 = \begin{vmatrix} 2(aa_2 - a_1^2) & aa_3 - a_1a_2 \\ aa_3 - a_1a_2 & 2(a_1a_3 - a_2^2) \end{vmatrix}$$
$$= 4(aa_2 - a_1^2)(a_1a_3 - a_2^2) - (aa_3 - a_1a_2)^2.$$

On trouve ainsi les mêmes valeurs de R_1 et de R_2 que ci-dessus, sauf des facteurs numériques positifs et le facteur a. On peut donc, même pour l'application du théorème de Sturm, opérer ainsi, en prenant soin d'avoir a positif.

Pareillement, si l'on a

$$\varphi(x, y) = ax^4 + 4a_1x^3y + 6a_2x^2y^2 + 4a_3xy^3 + a^4y^4,$$

ce qui donne

$$\tfrac{1}{4}\varphi'_x(xy) = ax^3 + 3a_1x^2y + 3a_2xy^2 + a_3y^3,$$
$$\tfrac{1}{4}\varphi'_y(xy) = a_1x^3 + 3a_2x^2y + 3a_3xy^2 + a_4y^3,$$

il en résulte

$$3(aa_2 - a_1^2)x^2 + 3(aa_3 - a_1a_2)xy + (aa_4 - a_1a_3)y^2,$$
$$3(aa_3 - a_1a_2)x^2 + (8a_1a_3 - 9a_2^2 + aa_4)xy + 3(a_1a_4 - a_2a_3)y^2,$$
$$(aa_4 - a_1a_3)x^2 + 3(a_1a_4 - a_2a_3)xy + 3(a_2a_4 - a_3^2)y^2,$$

et de là

$$-R_1 = 3(aa_2 - a_1^2)x^2 + 3(aa_3 - a_1a_2)x + aa_4 - a_1a_3,$$
$$R_2 = \begin{vmatrix} 3(aa_2 - a_1^2) & 3(aa_3 - a_1a_2) \\ 3(aa_3 - a_1a_2) & 8a_1a_3 - 9a_2^2 + aa_4 \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} 3(aa_2 - a_1^2) & aa_4 - a_1a_3 \\ 3(aa_3 - a_1a_2) & 3(a_1a_4 - a_2a_3) \end{vmatrix},$$
$$-R_3 = \begin{vmatrix} 3(aa_2 - a_1^2) & 3(aa_3 - a_1a_2) & aa_4 - a_1a_3 \\ 3(aa_3 - a_1a_2) & 8a_1a_3 - 9a_2^2 + aa_4 & 3(a_1a_4 - a_2a_3) \\ aa_4 - a_1a_3 & 3(a_1a_4 - a_2a_3) & 3(a_2a_4 - a_3^2) \end{vmatrix};$$

au facteur près a, les mêmes déterminants que ci-dessus se retrouvent ainsi.

On a par là une façon plus simple encore de procéder dans la recherche des fonctions de Sturm ou de fonctions équivalentes, pourvu qu'on ait soin d'avoir positif le premier terme de $F(x)$. Dans le cas contraire, il n'y aurait du reste qu'à changer les signes des termes dans $F(x)$ et $F'(x)$, pour joindre ces fonctions aux résultats obtenus, ou à changer ceux des résultats obtenus.

4° Soit

$$F(x) = x^6 + x^5 - x^4 - x^3 + x^2 - x + 1 = \varphi(x, y).$$

De là

$$\begin{aligned} \varphi'_x(x, y) &= 6x^5 + 5x^4 - 4x^3 - 3x^2 + 2x - 1, \\ \varphi'_y(x, y) &= x^5 - 2x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 5x + 6, \end{aligned}$$

d'où l'on tire

$$\begin{aligned} &-17x^4 - 14x^3 + 27x^2 - 32x + 37, \\ &-7x^4 + 2x^3 - 9x^2 + 8x + 14, \\ &3x^4 - 2x^3 - x^2 + 6x - 3, \\ &-16x^4 + 8x^3 + 27x^2 - 16x - 7, \\ &37x^4 + 28x^3 - 27x^2 - 14x + 7, \end{aligned}$$

et de là

$$\begin{aligned} -R_1 &= -17x^4 - 14x^3 + 27x^2 - 32x + 37, \\ \tfrac{1}{3}R_2 &= -44x^3 + 114x^2 - 120x + 7, \\ -\tfrac{1}{12}R_3 &= 86x^2 - 138x - 31, \end{aligned}$$

de sorte qu'on a ainsi la suite de fonctions

$$\begin{aligned} F(x) &= x^6 + x^5 - x^4 - x^3 + x^2 - x + 1, \\ F'(x) &= 6x^5 + 5x^4 - 4x^3 - 3x^2 + 2x - 1, \\ R_1 &= 17x^4 + 14x^3 - 27x^2 + 32x - 37, \\ \tfrac{1}{3}R_2 &= -44x^3 + 114x^2 - 120x + 7, \\ \tfrac{1}{12}R_3 &= -86x^3 + 138x^2 + 31. \end{aligned}$$

Au lieu de continuer par le calcul de déterminants du quatrième ordre, opérons directement à partir de $-44x^3 + 114x^2 - 120x + 7$ et $-86x^3 + 138x^2 + 31$.

Les fonctions intermédiaires qui s'ensuivent, divisées par 8.11 et 2.11, sont

$$\begin{aligned} &-69x^2 + 46x + 47, \\ &-62x^2 + 188x - 213, \end{aligned}$$

de sorte qu'il y a à considérer

$$\begin{aligned}&-86x^3+138x^2+31,\\&-69x^2+46x+47,\\&-62x^2+188x-213;\end{aligned}$$

d'où

$$R''_4=11(506x-173),$$
$$R''_5=-11^2.2.4717.$$

5° Soit

$$F(x)=x^7+2x^6-x^5-4x^4-3x^3+2x^2+4x-2,$$
$$F'(x)=f(x)=7x^6+12x^5-5x^4-16x^3-9x^2+4x+4.$$

Les fonctions intermédiaires sont, avec $f(x)$,

$$\begin{aligned}&12x^6+26x^5+2x^4-20x^3-28x^2-16x+22,\\&-5x^6+2x^5+33x^4+24x^3-31x^2-30x+20,\\&-16x^6-20x^5+24x^4+18x^3+16x^2+24x-26,\\&-9x^6-28x^5-31x^4+16x^3+83x^2+26x-44,\\&4x^6-16x^5-30x^4+24x^3+26x^2+0x-10;\end{aligned}$$

d'où

$$R_1=2(19x^5+37x^4+26x^3-44x^2-80x+53),$$
$$R_2=4.3(28x^4-6x^3-41x^2+55x-21),$$
$$R_3=16.9(-68x^3+23x^2+159x-91).$$

On voit dans R_1 le facteur 2, premier avec le premier coefficient 7 de $f(x)$. Son carré est facteur dans R_2, puis, au lieu de sa troisième puissance, c'est la quatrième qui divise R_3. De même le facteur 3 de R_2 est au carré dans R_3.

En opérant là directement à partir de

$$\frac{1}{4.3}R^2=28x^4-6x^3-41x^2+55x-21,$$
$$\frac{1}{16.9}R_3=-68x^3+23x^2+159x-91,$$

on trouve les fonctions

$$\begin{aligned}&322x^3+763x^2+119x-441,\\&2226x^3+119x^2-4333x+2107,\\&-1274x^2-441x^2+2107x-833;\end{aligned}$$

d'où

$$R''_4 = 2.29645(-x^2 - x + 1) = 2.7^2.11^2.5(-x^2 - x + 1).$$

On peut diviser par 7 les fonctions considérées, ce qui donne

$$\begin{aligned} &46x^3 + 109x^2 + 17x - 63, \\ &318x^3 + 17x^2 - 619x + 301, \\ -&182x^3 - 63x^2 + 301x - 119; \end{aligned}$$

il en résulte

$$R'''_4 = 2.4235(-x^2 - x + 1) = 2.7.5.11^2(-x^2 - x + 1),$$

puis

$$R'''_5 = \begin{vmatrix} -68 & 23 & 159 \\ 46 & 109 & 17 \\ 318 & 17 & -619 \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} \text{»} & \text{»} & -91 \\ \text{»} & \text{»} & -63 \\ \text{»} & \text{»} & 301 \end{vmatrix} = 0x + 0.$$

D'après quoi, $x^2 + x - 1$ est un plus grand commun diviseur de $F(x)$ et $F'(x)$.

Si l'on pose là

$$\varphi(x, y) = x^7 + 2x^6y - x^5y^2 - 4x^4y^3 - 3x^3y^4 + 2x^2y^5 + 4xy^6 - 2y^7,$$

on a

$$\begin{aligned} \varphi'_x(x, y) &= 7x^6 + 12x^5 - 5x^4 - 16x^3 - 9x^2 + 4x + 4, \\ \varphi'_y(x, y) &= 2x^6 - 2x^5 - 12x^4 - 12x^3 + 10x^2 + 24x - 14; \end{aligned}$$

d'où l'on déduit les polynômes

$$\begin{aligned} &-19x^5 - 37x^4 - 26x^3 + 44x^2 + 80x - 53, \\ &-37x^5 - 103x^4 - 44x^3 + 131x^2 + 95x - 80, \\ &-26x^5 - 44x^4 + 65x^3 + 16x^2 - 116x + 59; \end{aligned}$$

de là

$$\begin{aligned} -R_1 &= -19x^5 - 37x^4 - 26x^3 + 44x^2 + 80x - 53, \\ \tfrac{1}{27}R_2 &= 28x^4 - 6x^3 - 41x^2 + 55x - 21, \\ -\frac{1}{9 \cdot 98}R_3 &= 68x^3 - 23x^2 - 159x + 91. \end{aligned}$$

On voit que ce procédé abaisse l'ordre des déterminants d'une unité.

6° Soit

$$\begin{aligned} F(x) &= 30x^4 - 15x^3 + 3x^2 - 5x + 10, \\ f(x) &= 12x^3 - 4x^2 + x - 3. \end{aligned}$$

Les polynômes d'où se déduisent les fonctions R sont

$$
\begin{aligned}
&12x^3 - 4x^2 + x - 3,\\
-&120x^3 + 54x^2 - 45x - 75,\\
&30x^3 - 45x^2 - 92x + 31,\\
-&90x^3 - 75x^2 + 31x + 5.
\end{aligned}
$$

Il en résulte

$$
\begin{aligned}
R_1 &= 12.7.(2x^2 - 5x - 15),\\
R_2 &= -12.7^2.4(13x + 16),\\
R_3 &= 7^2.12.2.1376^2 + 7^3.12.4.983.
\end{aligned}
$$

Il est à remarquer que le facteur 6 commun au premier coefficient de $F(x)$ et au premier de $f(x)$ se retrouve dans R_1, R_2, R_3. Le facteur 7, apparu dans R_1, étranger au premier coefficient de $f(x)$, est porté au carré dans R_2 et au cube dans R_3.

7° Soit

$$
\begin{aligned}
F(x) &= x^5 - x^4 - 2x^2 + 3x + 2,\\
f(x) &= x^4 - 2x - 1.
\end{aligned}
$$

Les polynômes à considérer pour la formation des R sont

$$
\begin{aligned}
&x^4 + 0x^3 + 0x^2 - 2x - 1,\\
&0x^4 + 0x^3 + 0x^2 - 3x - 1,\\
&0x^4 + 0x^3 - 2x^2 - x + 0,\\
-&2x^4 - 2x^3 - x^2 + 4x + 2,\\
-&x^4 - x_3 + 0x^2 + 2x + 1.
\end{aligned}
$$

Il s'ensuit

$$
\begin{aligned}
R_1 &= 0x^3 + 0x^2 - 2x - 1 = -2x - 1,\\
R_2 &= 0x^2 + 0x + 0 = 0,\\
R_3 &= 8x + 4 = 4(2x + 1),\\
R_4 &= 1.
\end{aligned}
$$

On voit que R_1 est du premier degré au lieu d'être du troisième; puis R_2 est nul, R_3 est bien du premier degré, c'est le produit de R_1 par -4; mais ce facteur ne se présente pas dans R_4.

8° Soit

$$
\begin{aligned}
F(x) &= x^6 + x^5 + x^4 + x^2 - x - 2,\\
f(x) &= x^5 + x^3 - 1.
\end{aligned}
$$

Les polynômes à considérer étant

$$
\begin{aligned}
&x^5 + x^3 - 1,\\
&x^3 - x^2 + 1,\\
&x^5 + x^4 + x - 1,\\
-&x^4 + 2,\\
&x^3 + 3x - 1,\\
-&x^5 + x^4 - x^3 + 2x^2 - x + 1,
\end{aligned}
$$

on trouve

$$
\begin{aligned}
R_1 &= +x^3 - x^2 + 1,\\
R_2 &= -x^3 + x^2 - 1,\\
R_3 &= -x^2 + x + 1.
\end{aligned}
$$

Ainsi R_1 est là du troisième degré au lieu d'être du quatrième, et R_2 en est le produit par -1.

9° Soit

$$
\begin{aligned}
F(x) &= x^7 - x^6 + x^5 - x^4 - x^3,\\
f(x) &= x^6 + x^4 - x - 1.
\end{aligned}
$$

Les polynômes intermédiaires sont, en y comprenant $f(x)$,

$$
\begin{aligned}
&x^6 + x^4 - x - 1,\\
&x^3 - x^2 + 1,\\
&x^6 + 2x^4 - x^3 - x - 1,\\
&x^5 - x^4 + x^3 + 1,\\
-&x^5 + 2x + 1,\\
-&x^6 + 2x^2 + x,\\
-&x^6 + x^5 - x^4 + x^3 + x^2;
\end{aligned}
$$

d'où résulte

$$
\begin{aligned}
R_1 &= x^3 - x^2 + 1,\\
R_2 &= 0,\\
R_3 &= -x^3 + x^2 - 1,\\
R^4 &= -2x,\\
R_5 &= 6x,\\
&\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

10° Soit

$$
\begin{aligned}
F(x) &= x^7 + x^6 - x^4 - x^2 - x - 1,\\
f(x) &= x^6 + x^5 - x^3 - 1.
\end{aligned}
$$

Les polynômes intermédiaires sont

$$\begin{aligned}
&x^6 + x^5 - x^3 - 1,\\
&-x^3 - x^2 + x + 1,\\
&-x^6 - x^5 - x^4 + x^2 + x + 1,\\
&-x^5 - x^4 + x^3 + 2x^2 - 1,\\
&x^4 + x^3 - x - 1,\\
&-x^6 + x^4 + x^3 - x^2 - x + 1,
\end{aligned}$$

et l'on trouve

$$\begin{aligned}
R_1 &= -x^2 + 1,\\
R_2 &= 0,\\
R_3 &= 0,\\
R_4 &= x^2 - 1,\\
R_5 &= 0.
\end{aligned}$$

D'après le dernier résultat, le polynôme $x^2 - 1$ est là le plus grand commun diviseur de $F(x)$ et de $f(x)$.

Ces exemples, par leur variété, répondent suffisamment, je l'espère, aux faits démontrés jusqu'ici.

TROISIÈME PARTIE.

I.

La résolution de deux équations entières en x et y, $\Phi(x, y) = 0$, $\varphi(x, y) = 0$, se présente sous un jour nouveau, quand on y applique les considérations et les procédés de calcul que nous avons exposés.

Nous n'avons pas à parler du cas où un diviseur, fonction de x ou de y, seul appartiendrait à l'un des polynômes $\Phi(x, y)$, $\varphi(x, y)$, ou à tous les deux. Ainsi nous supposerons qu'aucun des deux polynômes n'admet un pareil diviseur.

Si on les ordonne par rapport à x, ils constitueront deux fonctions entières de x, de degrés m et n $(m \geq n)$, $F(x)$, $f(x)$. Les coefficients, pour toute valeur de module fini, déterminée, attribuée à y, auront des valeurs analogues.

Résoudre le système des deux équations, c'est trouver toute valeur de y, telle que pour cette valeur les deux polynômes $F(x), f(x)$ s'annulent à la fois par une ou plusieurs déterminations correspondantes de x, admettent donc p racines communes $(p \leqq n)$, finies, déterminées. Ainsi posée, la question est tout entière dans le calcul des polynômes $R_1, R_2, \ldots$, ou des polynômes $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2, \ldots$, précédemment définis. Ces polynômes seront des fonctions entières de x, de degrés décroissants, ayant pour coefficients des fonctions entières de y.

Il a été reconnu qu'un facteur commun au premier coefficient de $F(x)$ et au premier de $f(x)$ se reproduit dans tous les polynômes R. Si ces premiers coefficients, comme fonctions de y, ne sont pas premiers entre eux, la fonction de y, qui en sera le plus grand commun diviseur, se retrouvera donc dans chacun des polynômes R. Il convient, dans notre exposition, de distinguer ce cas du cas général. Nous entendrons qu'il soit d'abord écarté, sauf à y revenir.

Par le calcul des polynômes $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2, \ldots$, on aboutira à un résultat indépendant de x, constant ou fonction de y, ou bien à un polynôme ayant ses coefficients tous nuls, et de telle sorte qu'il en soit de même des polynômes suivants; ce qui aura lieu, si le polynôme précédent est en x du degré correspondant à son indice.

Dans le premier cas, le résultat final R_n sera le résultant dit de Sylvester ou de Cauchy.

Si l'on attribue à y une valeur qui l'annule, il y aura p valeurs de x correspondantes, une au moins, qui seront racines communes des polynômes $F(x), f(x)$.

En effet, on sait que, les racines de $F(x)$ étant $x_1, x_2, \ldots x_m$, celles de $f(x)$ étant $x'_1, x'_2, \ldots, x'_n$, si l'on pose $\varphi = F(x'_1)\,F(x'_2)\ldots F(x'_n)$ et $\psi = f(x_1)f(x_2)\ldots f(x_n)$, on a la double relation

$$a^m\varphi = A^n\psi(-1)^{mn} = \pm R_n.$$

D'après quoi, si R_n s'annule, les produits $a^n\varphi$, $A^n\psi$ s'annulent à la fois. Mais, lorsque, comme dans l'hypothèse faite, les coefficients a et A n'ont en y aucun diviseur commun, ce sont φ et ψ qui s'annulent; donc alors toute valeur de y, qui annule R_n, est telle qu'il y correspond au moins une valeur de x, formant avec elle une solution commune aux équations $\Phi(x,y) = 0$, $\varphi(x,y) = 0$.

Ainsi, quand le premier coefficient de $F(x)$ et le premier de $f(x)$ sont premiers entre eux, les valeurs de y, qui entrent dans les solutions communes aux deux équations proposées, ne peuvent provenir que de l'équation $R_n = 0$, et à toute racine de $R_n = 0$ il correspond au moins une solution.

Or, lorsque les équations $F(x) = 0, f(x) = 0$, les coefficients ayant des valeurs déterminées, ont p racines communes, il est établi que ces racines sont données par $R_{n-p} = 0$, et qu'elles annulent tous les R d'indices inférieurs à $n-p$, tandis que les R d'indices supérieurs sont nuls identiquement.

En conséquence, si $y = y_1$ est une racine de l'équation $R_n = 0$ et qu'il y corresponde p racines communes de $F(x)$ et de $f(x)$, la substitution de $y = y_1$ dans R_{n-1}, R_{n-2}. ..., R_{n-p+1} donnera des résultats nuls; mais, par la substitution dans R_{n-p}, on aura un polynôme entier en x du degré p qui, égalé à zéro, donnera les p racines.

Donc, si l'on substitue y_1 dans R_{n-1}, R_{n-2}, ..., le premier de ces polynômes qui ne s'annulera pas sera d'un degré correspondant à son indice, par rapport à x. En l'égalant à zéro, il donnera les valeurs de x correspondant à y_1, en nombre égal à la différence entre n et son indice.

Quand il n'y aura qu'une valeur de x pour $y = y_1$, c'est par $R_{n-1} = 0$ qu'elle sera donnée. C'est là le cas général.

Mais, lorsque plusieurs valeurs de x, en nombre p, répondent à une même racine y_1 de R_n, les coefficients de R_{n-1}, R_{n-2}, ..., R_{n-p+1}, s'annulant pour cette racine, ne sont pas premiers entre eux.

Or, quand les coefficients de R_{n-p+1} ont un diviseur commun $\psi(y)$, qui soit premier avec le premier coefficient de R_{n-p}, le polynôme suivant R_{n-p+2} est divisible par $\psi^2(y)$, le polynôme R_{n-p+3} l'est par $\psi^3(y)$, et ainsi de suite.

C'est pourquoi, si l'on considère les polynômes R_1, R_2, ... dans l'ordre où on les calcule, une valeur y_1 de y, à laquelle répondent p valeurs de x, s'accusera par le fait même que $y - y_1$ divise le polynôme R_{n-p+1}, sans diviser le premier coefficient de R_{n-p}. Les polynômes suivants R_{n-p+2}, ... seront respectivement divisibles par $(y - y_1)^2$, $(y - y_1)^3$, ...

Lorsque le polynôme R_{n-p+1} présentera un diviseur $\psi(y)$ qui soit premier avec le premier coefficient du polynôme R_{n-p}, ce qui suppose ce premier coefficient différent de zéro, chaque racine de $\psi(y)=0$, substituée dans R_{n-p}, conduira par l'équation $R_{n-p}=0$ à p valeurs de x correspondantes. On aura par là le système $\psi(y)=0$, $R_{n-p}=0$. Les polynômes R_{n-p+1}, R_{n-p+2}, ... devront ensuite être simplifiés, en les divisant successivement par $\psi(y)$, $\psi^2(y)$, $\psi^3(y)$, ...

Si un diviseur $y-y_1$ de R_{n-p+1} appartient au premier coefficient de R_{n-p}, cette circonstance sera, pour $y=y_1$, celle où, dans la suite des polynômes R, le degré s'abaisse de plus d'une unité. Alors, quand R_{n-p+1} est le premier polynôme qui s'annule pour $y=y_1$, et que le degré en x du polynôme R_{n-p} devient $p-q$ pour cette valeur de y, le polynôme R_{n-p+q} ne s'annulera plus pour $y=y_1$. Jusque-là, il n'y aura donc pas à tenir compte de cette valeur de y.

Si un diviseur $\psi(y)$ de R_{n-p+1}, sans diviser le premier coefficient de R_{n-p}, n'est pas premier avec lui, on devra chercher leur plus grand commun diviseur δ, et le changer en $\delta\psi_1(y)$. Ce qui précède s'appliquera au facteur $\psi_1(y)$, premier avec le premier coefficient de R_{n-p}. Il n'y aura pas à s'occuper de δ, à moins qu'on ne veuille reconnaître ce qui correspond à ses différentes racines dans la suite des polynômes R.

D'après cela, si l'on désigne par $p, p', p'', \ldots,$ en ordre décroissant, les nombres de valeurs de x qui correspondent à des valeurs de y, le polynôme R_{n-p+1} est le premier polynôme qui présente un diviseur $y-y_1$ n'appartenant pas au premier coefficient du polynôme précédent R_{n-p}, ou plus généralement un diviseur $\psi(y)$ premier avec le premier coefficient de R_{n-p}, ou, à défaut d'être tel, qui soit le produit de leur plus grand commun diviseur δ et de $\psi_1(y)$. Alors pour $y=y_1$, ou pour chaque racine, soit de $\psi(y)$, soit de $\psi_1(y)$, il y a p valeurs de x correspondantes données par $R_{n-p}=0$; puis les polynômes suivants devront être simplifiés en les divisant par le carré, le cube, etc., de $(y-y_1)$, ou de $\psi(y)$, ou de $\psi_1(y)$; ensuite le polynôme $R_{n-p'+1}$, ou plutôt le polynôme obtenu à sa place, se prêtera, avec le polynôme précédent et les suivants, à des considérations et procédés analogues, et ainsi de suite.

Si, avant d'atteindre le polynôme R_n, on tombe sur un polynôme R_{p+1} qui soit nul identiquement, sans que le polynôme précédent R_p

soit d'un degré inférieur à celui que donne son rang, au degré $n-p$, les polynômes suivants sont tous nuls également, quelque valeur qu'on attribue à y. Alors le polynôme R_p est, comme fonction de x, le plus grand commun diviseur de $F(x)$ et de $f(x)$.

Mais, si l'on appelle D ce plus grand commun diviseur sous une forme où ses coefficients n'admettent aucun diviseur commun en y, et que $F_1(x)$, $f_1(x)$ soient les quotients de $F(x)$ et de $f(x)$ par D, il est à observer que D divisera, outre $F(x)$ et $f(x)$, tous les polynômes qui suivent jusqu'à R_p inclusivement. Or, si l'on attribue à y une valeur telle qu'il y ait une ou plusieurs valeurs correspondantes de x satisfaisant avec elle à $F_1(x)=0$, $f_1(x)=0$, cette valeur de y, en général, n'annulera D qu'avec d'autres valeurs de x; par conséquent toute solution commune à $F_1(x)=0$, $f_1(x)=0$ annulera les quotients de R_1, R_2, ..., R_p par D. Donc, le quotient de R_p par D, quotient indépendant de x, Y, aura pour racines les valeurs de y qui figurent dans les solutions du système $F_1(x)=0$, $f_1(x)=0$. D'après quoi, les coefficients de R_p ayant Y pour leur plus grand commun diviseur, de sorte que D soit le quotient de R_p par Y, l'équation $Y=0$ comportera toutes les valeurs de y qui font partie des solutions de ce système $F_1(x)=0$, $f_1(x)=0$.

Réciproquement, toute valeur de y qui annulera Y donnera, par le premier des polynômes précédents, après leur division par D, qui ne s'annulera pas, quand on y substituera cette valeur de y, une ou plusieurs valeurs de x qui, avec elle, constitueront des solutions communes aux équations $\Phi(x,y)=0$, $\varphi(x,y)=0$, en général étrangères à D, par conséquent communes aux équations $F_1(x)=0$, $f_1(x)=0$.

Donc l'équation $Y=0$ sera l'équation finale due à l'élimination de x entre $\Phi(x,y)=0$, $\varphi(x,y)=0$. Et, si l'on substitue dans les polynômes qui précèdent R_p, après les avoir divisés par D, une racine de l'équation $D=0$, les valeurs de x correspondantes relatives à $F_1(x)=0$ et $f_1(x)=0$ seront données par le premier des quotients, pris en remontant, qui ne s'annulera pas.

D'ailleurs, ce qui a été dit plus haut à l'égard de R_n et des polynômes qui le précèdent est ici applicable à Y et aux quotients obtenus. Notamment les racines de Y auxquelles répondent plusieurs valeurs de x, s'il y en a, pourront se découvrir en procédant au rebours de proche en proche; et il y aura lieu, s'il s'en trouve, de faire des simplifications correspondantes dans la suite des quotients.

Lorsqu'une valeur de y égale à y_1 annule le premier coefficient de $F(x)$ et le premier de $f(x)$ sans annuler les suivants à la fois, le facteur $y - y_1$ appartient à tous les polynômes R; ou plutôt, si $\psi(y)$ est un facteur commun au premier coefficient de $F(x)$ et au premier de $f(x)$ et qu'il n'ait pas de diviseur commun avec les deux suivants, ce facteur divise tous les polynômes R. Un diviseur commun aux deux premiers coefficients de $F(x)$ et aux deux premiers de $f(x)$ est au carré dans les polynômes R à partir de R_2. En général, quand les h premiers coefficients de $F(x)$ et les h premiers de $f(x)$ ont un diviseur commun, la puissance h de ce diviseur appartient à R_k, R_{k+1}, ..., pourvu qu'on ait $2k > h - (m - n)$, et de moindres puissances divisent les R précédents. Cela est établi au n° 33.

Il conviendra de supprimer les diviseurs de ce genre, puisque les polynômes R se simplifient par la suppression. Pour une valeur de y annulant un pareil diviseur, les polynômes $F(x)$, $f(x)$ perdant chacun un ou plusieurs premiers termes, il y aura bien des valeurs de x correspondantes infinies. C'est un genre de solutions dont nous ne nous sommes pas occupés. Si les équations proposées comportent une ou plusieurs solutions composées d'une pareille valeur de y et de valeurs finies de x, ces solutions se présenteront d'elles-mêmes, après la simplification régulière dont il s'agit, comme on le verra plus loin par un exemple.

Ces considérations nous permettent de formuler la règle suivante pour la résolution de deux équations $\Phi(x, y) = 0$, $\varphi(x, y) = 0$.

Les premiers membres des deux équations ayant été débarrassés, s'il y a lieu, de tout facteur fonction de y seul ou de x seul, on les ordonnera soit par rapport à x, soit par rapport à y. Supposons-les ordonnés par rapport à x.

On calculera les polynômes R_1, R_2, ..., jusqu'à un polynôme R_n indépendant de x, ou bien jusqu'à un polynôme R_{p+1} qui soit identiquement nul, alors que le précédent se trouve du degré $n - p$.

Si le premier coefficient de $F(x)$ et le premier de $f(x)$ ne sont pas premiers entre eux, à les considérer comme fonction de y, leur plus grand commun diviseur divisera tous les polynômes obtenus. Un diviseur commun aux deux premiers coefficients de $F(x)$ et aux deux premiers de $f(x)$ sera au carré dans R_2 et les polynômes suivants. Un diviseur commun aux h premiers coefficients de $F(x)$ et aux h premiers de $f(x)$ sera à la puissance h dans R_h et les polynômes suivants, pourvu qu'on ait $2k > h - (m - n)$, et à de moindres puissances dans les R précédents. On supprimera ces diviseurs aux puissances dont il s'agit ainsi, sauf à tenir compte, suivant les circonstances, des valeurs de x infinies qui, avec les valeurs de y en provenant, constitueront des solutions communes aux équations proposées.

Si l'on va jusqu'à R_n, lorsque tous les coefficients d'une fonction précédente R_{n-p+1} s'annuleront pour une valeur y_1 de y sans que le premier coefficient de R_{n-p} s'annule, il suffira de substituer cette valeur de y dans R_{n-p} pour avoir, par $R_{n-p} = 0$, p valeurs de x correspondantes. Le facteur $y - y_1$ se reproduira alors au delà à des puissances de plus en plus élevées, et il conviendra de le supprimer à ces puissances. S'il arrive que plusieurs facteurs tels que $y - y_1$ répondent à un même nombre de valeurs de x, il n'y aura pas lieu en général de les séparer, cela s'appliquera à leur produit $\psi(y)$.

On cherchera donc si les polynômes R à partir de R_1 ont ainsi des diviseurs; à mesure qu'on en trouvera, on fera les simplifications dont on vient de parler, en déterminant les solutions correspondantes, au moins en établissant les systèmes correspondants d'équations.

On aboutira par là à avoir, au lieu de R_n, soit une constante, soit un polynôme. Dans le dernier cas, chaque racine du polynôme donnera, en général, par le polynôme qui remplacera R_{n-1}, une valeur de x correspondante, accidentellement si R_{n-1} fait défaut, plusieurs valeurs de x par le premier polynôme précédent qui ne manquera pas.

Si, au lieu d'aller jusqu'à R_n, on est arrêté à un polynôme R_p, on cherchera le plus grand commun diviseur Y de ses coefficients, et l'on divisera par Y le polynôme R_p. Le quotient D sera, avec des coefficients premiers entre eux, le plus grand commun diviseur de $\Phi(x, y)$ et $\varphi(x, y)$. On divisera par D ces deux polynômes $\Phi(x, y)$, $\varphi(x, y)$, ainsi que les polynômes $R_1, R_2, \ldots$. Les quotients $\Phi_1(x, y)$, $\varphi_1(x, y)$, puis $r_1, r_2, \ldots, r_{p-1}$ et Y seront dans les mêmes conditions que les polynômes Φ, φ, R_1, R_2, ... au cas précédent. On les traitera de la même manière.

II.

L'évaluation du degré maximum de y dans chacun des coefficients des polynômes R_1, R_2, ... n'est pas sans intérêt.

Dans R_1 le coefficient de x^{n-1} est un déterminant dont les termes effectifs sont des produits d'éléments pris dans ses différentes lignes et colonnes. Distinguons les lignes où figurent des coefficients de $f(x)$ et celles où se trouvent des coefficients de $F(x)$, et concevons un terme dans le développement du déterminant.

Ce terme contiendra un facteur provenant de la ligne où a est le premier coefficient à gauche : soit α_1 son rang dans cette ligne; il contiendra un facteur appartenant à la ligne où a est au second rang : soit α_2 son rang dans cette ligne, et ainsi de suite. Soit de même β_1 le rang de l'élément qui appartient à la ligne des coefficients de $F(x)$ où A est au premier rang à gauche; soit β_2 le rang d'un élément appartenant à une ligne où A est au second rang, etc.

Si m et n sont les degrés de $\Phi(x, y)$, $\varphi(x, y)$ aussi bien par rapport à x et y que par rapport à x en particulier, le degré de a_i ou A_i sera i au maximum. Alors le degré d'un élément de rang α_1 sera $\alpha_1 - 1$, de rang α_2 sera $\alpha_2 - 2$, ...; celui d'un élément de rang β_i sera $\beta_i - i$; ou bien les degrés seront moindres.

Le degré maximum de chaque terme dans le premier coefficient de R_1 sera, en conséquence,

$$(\alpha_1 - 1) + (\alpha_2 - 2) + \ldots + [\alpha_{m-n+1} - (m - n + 1)] + \beta_1 - 1;$$

mais, en observant que les nombres $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{m-n+1}$ et β_1 comprennent tous les nombres depuis 1 jusqu'à $m - n + 2$ inclusivement, on voit que ce degré est

$$\frac{(m - n + 3)(m - n + 2)}{2} - \frac{(m - n + 2)(m - n + 1)}{2} - 1 = m - n + 1.$$

Tel est ainsi, au maximum, le degré par rapport à y du premier terme de R_1. Pour le second, le degré augmente, en général, d'une unité par l'élément qui provient de la dernière colonne. Le degré du second terme sera donc, en général, $m - n + 2$: celui du troisième sera $m-n+3$, et ainsi de suite; celui du dernier s'élèvera jusqu'à m en général.

De même, en employant pour R_2 des notations analogues, on a, pour évaluation maximum du degré de son premier terme par rapport à y,

$$(\alpha_1 - 1) + (\alpha_2 - 2) + \ldots + [\alpha_{m-n+2} - (m-n+2)] + (\beta_1 - 1) + (\beta_2 - 2)$$
$$= \frac{(m-n+5)(m-n+4)}{2} - \frac{(m-n+3)(m-n+2)}{2} - 3 = 2(m-n) + 2^2.$$

D'un terme au suivant, le degré augmentera aussi dans R_2 d'une unité, au moins en général, de sorte que le degré du dernier terme sera au maximum

$$2(m-n) + 2^2 + n - 2 = 2m - n + 2.$$

Dans R_3, le degré du premier terme pourra monter à

$$3(m-n) + 3^2,$$

et celui du dernier à

$$3m - 2n + 6.$$

En général, pour R_p, le degré du premier terme est

$$p(m-n) + p^2,$$

celui du dernier

$$pm - (p-1)n + p(p-1) = pm - (p-1)(n-p);$$

de sorte que, si $m-n=1$, c'est, au premier terme,

$$p(p+1),$$

et, au dernier,

$$m + (p-1)(p+1).$$

Au cas de $p=n$, le dernier résultat, indépendant de x, est ainsi du degré mn au plus.

Lorsque $\Phi(x,y)$, $\varphi(x,y)$ sont de degrés $M=m+q$, $N=n+q'$, leurs degrés en x étant m et n, les coefficients A_i seront au plus de degré $q+i$, et les coefficients a_i de degré $q'+i$. Il y aura donc à augmenter de q' chacun des nombres $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, et de q chacun des nombres $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$. Les résultats qui s'ensuivent sont faciles à obtenir; ils n'ont une forme remarquable que pour R_n, dont le degré maximum est alors

$$mn + mq' + nq = (M - q)(N - q') + (M - q)q' + (N - q')q = MN - qq'.$$

Ce mode d'évaluation du degré se trouve, pour ce qui regarde le résultant de Sylvester ou de Cauchy, c'est-à-dire R_n, dans le *Traité d'Algèbre* de M. Briot, qui l'y attribue à M. Bouquet.

Avant de présenter quelques applications, je terminerai cet exposé par un rapprochement entre la méthode de résolution qui vient d'être tracée et celle qui est due à M. Labatie. J'emprunte les notations, à des parenthèses près, au *Traité d'Algèbre* de MM. Mayer et Choquet.

III.

Les deux polynômes qu'on ordonne par rapport à x étant A et B, si $c, c_1, c_2, \ldots$ sont les multiplicateurs consécutivement employés pour avoir des restes entiers qu'on désigne par $(R)r$, $(R_1)r_1$, $(R_2)r_2, \ldots$; $r, r_1, r_2, \ldots$ y étant les diviseurs fonctions de y, les relations qu'impliquent les divisions successives sont

$$\begin{aligned} cA &= Bq + (R)r, \\ c_1B &= (R)q_1 + (R_1)r_1, \\ c_2(R) &= (R_1)q_2 + (R_2)r_2, \\ c_3(R_1) &= (R_2)q_3 + (R_3)r_2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Si d est le plus grand commun diviseur de c et de r, d_1 celui de $\frac{cc_1}{d}$ et de r_1, d_2 celui de $\frac{cc_1c_2}{dd_1}$ et de r_2, etc., les systèmes par lesquels se remplace le système proposé sont, dans le procédé de M. Labatie,

$$\left[\frac{r}{d} = 0, \quad B = 0\right], \quad \left[\frac{r_1}{d_1} = 0, \quad (R) = 0\right], \quad \left[\frac{r_2}{d_2} = 0, \quad (R_1) = 0\right], \quad \ldots.$$

Cela rappelé, supposons d'abord que les polynômes désignés dans notre travail par $R_1, R_2, R_3, \ldots$ n'aient pas de diviseur en y. Les relations qui les concernent sont

$$a^{m-n+1}F(x) = f(x)Q + R_1(-1)^{\frac{m-n}{2} \text{ ou } \frac{m-n+1}{2}},$$

$$\alpha_1^2 f(x) = R_1 Q_1 - R_2 a^{m-n+1}(-1)^{\frac{m-n}{2} \text{ ou } \frac{m-n+1}{2}}$$

$$\alpha_2^2 R_1 = R_2 Q_2 - \alpha_1^2 R_3,$$

$$\alpha_3^2 R_2 = R_3 Q_3 - \alpha_2^2 R_4,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Or, si les quantités c, r se multiplient ou se divisent par un même facteur ou diviseur, le quotient $\frac{r}{d}$ ne change pas, ni le quotient $\frac{c}{d}$. Si l'on multiplie ou si l'on divise c_1 et r_1, il en est de même de $\frac{cc_1}{dd_1}$ et de $\frac{r_1}{d_1}$, etc. On peut donc adopter les relations précédentes pour l'application de la méthode de M. Labatie.

Le premier reste ne présentant pas de facteur en y, on a $r = 1$, $d = 1$; donc le premier système n'existe pas.

Pour le second reste, on a $r_1 = \pm a^{m-n+1}$; d'ailleurs $\frac{c}{d} = a^{m-n+1}$, d'où $\frac{cc_1}{d} = a^{m-n+1}\alpha_1^2$, par suite $d_1 = a^{m-n+1}$, $\frac{cc_1}{dd_1} = \alpha_1^2$ et $\frac{r_1}{d_1} = \pm 1$.

Le second système n'existe pas davantage, et ainsi de suite. Dans le cas supposé, il n'y a donc aucun système auxiliaire; aussi notre méthode n'en donne-t-elle aucun.

Supposons, en second lieu, que, R_1 n'ayant pas de diviseur en y, on trouve $R_2 = R'_2 r'_2$, et que r'_2 soit premier avec α_1.

On a alors

$$(R_1) r_1 = \pm a^{m-n+1} R'_2 r'_2,$$

de sorte qu'il vient

$$(R_1) = R'_2 \quad \text{et} \quad r_1 = \pm a^{m-n+1} r'_2.$$

On a d'ailleurs

$$\frac{cc_1}{d} = a^{m-n+1}\alpha_1^2, \quad \text{d'où} \quad d_1 = a^{m-n+1},$$

puisque α_1^2 est premier avec r'_2.

Donc on a

$$\frac{cc_1}{dd_1} = \alpha_1^2 \quad \text{et} \quad \frac{r_1}{d_1} = \pm r'_2,$$

c'est-à-dire que le système

$$\left[\frac{r_1}{d_1} = 0, \quad (\mathrm{R}) = 0\right]$$

n'est autre que

$$r'_2 = 0, \quad \mathrm{R}_1 = 0.$$

Sans pousser plus loin cette comparaison, on voit assez comment les restes consécutifs, alors même qu'il n'y correspond aucun système auxiliaire, sont, par l'effet seul des multiplicateurs qui interviennent dans les divisions successives, quelque soin qu'on mette à les prendre le plus simples possible, compliqués de facteurs. Nos polynômes, au contraire, ne présentent pas de facteur sans un pareil système, si le facteur est premier avec le premier coefficient du polynôme précédent.

L'application à quelques exemples nous paraît un complément indispensable. Rien n'est plus propre à faire ressortir les avantages de notre pratique. Si des calculs deviennent encore compliqués, il n'y aura pas lieu de s'en étonner: c'est dans l'essence même de la question.

IV.

Applications.

1° (Mayer et Choquet) :

$$\Phi(x, y) = x^3 + 3yx^2 + (3y^2 - y + 1)x + y^3 - y^2 + 2y = 0,$$
$$\varphi(x, y) = x^2 + 2yx + y^2 - y = 0.$$

Les polynômes à considérer pour la formation des R sont

$$x^2 + 2yx + y^2 - y,$$
$$2yx^2 + (4y^2 - 1)x + 2y^3 - 2y^2 - 2y,$$
$$y \;\; - y)x^2 + (2y^3 - 2y^2 - 2y)x + y^4 - 2y^3 - 2y^2 - y.$$

Il s'ensuit

$$R_1 = -x - 2y,$$

$$R_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2y & y^2 - y \\ 2y & 4y^2 - 1 & 2y^3 - 2y^2 - 2y \\ y^2 - y & 2y^3 - 2y^2 - 2y & y^4 - 2y^3 - 2y^2 - y \end{vmatrix}$$

$$= -(y^4 - 2y^3 - 2y^2 - y) + 2y(2y^3 - 2y^2 - 2y) + (y^2 - y)(-3y^2 - y)$$

$$= -y^2 + y.$$

L'équation finale est ainsi

$$y(y-1) = 0;$$

d'où

$$y = 0 \quad \text{avec} \quad x + 2y = 0,$$

et

$$y - 1 = 0 \quad \text{avec} \quad x + 2y = 0;$$

ce qui donne les deux solutions

$$y = 0, \quad x = 0 \qquad \text{et} \qquad y = 1, \quad x = -2.$$

2° (*Id.*) :

$$F(x) = x^3 + 2yx^2 + 2y(y-2)x + y^2 - 4 = 0,$$

$$f(x) = x^2 + 2yx + 2y^2 - 5y + 2 = 0.$$

De là d'abord

$$x^2 + 2yx + 2y^2 - 5y + 2,$$

$$2yx^2 + (4y^2 - y + 2)x + 4y^3 - 11y^2 + 4y + 4,$$

$$(2y^2 - 5y + 2)x^2 + (4y^3 - 11y^2 + 4y + 4)x + 4y^2(y-2)(y-3);$$

d'où

$$R_1 = (-y+2)x - y^2 + 4 = (-y+2)(x+y+2),$$

$$R_2 = 4y^2(y-2)(y-3)(-y+2) - (4y^3 - 11y^2 + 4y + 4)$$
$$(-y^2 + 4) + (2y^2 - 5y + 2)(y-2)(-9y+2)$$
$$= -4y^2(y-2)^2(y-3) + (y-2)(4y^4 - 21y^3 + 32y^2 - 16y + 12),$$
$$= -4y^2(y-2)^2(y-3) + (y-2)^2(4y^3 - 13y^2 + 5y - 6)$$
$$= (y-2)^2(-y^2 + 5y - 6).$$

On a deux solutions par le système

$$y - 2 = 0, \quad x^2 + 2yx + 2y^2 - 5y + 2 = 0$$

ou

$$y = 2, \quad x^2 + 4x = 0,$$

qui consistent donc en

$$y = 2, \quad x = 0 \quad \text{et} \quad y = 2, \quad x = -4.$$

On en a deux autres par

$$y^2 - 5y + 6 = 0, \quad x + y + 2 = 0;$$

d'où

$$y = 3, \quad x = -5; \quad \text{et} \quad y = 2, \quad x = -4.$$

3° (*Id.*) :

$$\Phi(x, y) = x^3 - 3yx^2 + 3x^2 + 3y^2x - 6yx - x - y^3 + 3y^2 + y - 3,$$
$$\varphi(x, y) = x^3 + 3yx^2 - 3x^2 + 3y^2x - 6yx - x + y^3 - y + 3.$$

Comme on en tire immédiatement

$$\tfrac{1}{2}[\Phi(x, y) - \varphi(x, y)] = -3yx^2 + 3x^2 - y^3 + 3y^2 + y - 3,$$

nous poserons

$$F(x) = x^3 - 3(y-1)x^2 + (3y^2 - 6y - 1)x - y^3 + 3y^2 + y - 3,$$
$$f(x) = -3(y-1)x^2 - y^3 + 3y^2 + y - 3.$$

Les fonctions à considérer sont

$$-3(y-1)x^2 - y^3 + 3y^2 + y - 3,$$
$$(y^3 - 3y^2 + 2y)x,$$
$$(-y^3 + 3y^2 + y - 3)x^2 + (3y^2 - 6y - 1)(-y^3 + 3y^2 + y - 3);$$

d'où

$$R_1 = -3(y-1)(y^3 - 3y^2 + 2y)x = -3(y-1)^2y(y-2)x,$$
$$R_2 = -(3y^2 - 6y - 1)(-y^3 + 3y^2 + y - 3)(y-1)^2y(y-2)x$$
$$\quad - (-y^3 + 3y^2 + y - 3)^2(y^3 - 3y^2 + 2y)$$
$$= 8y^2(y-1)^3(y-2)^2(y+1)(y-3).$$

Le facteur $y - 1$ est au carré dans R_1; il appartient, en effet, à $f(x)$ sans appartenir au premier coefficient de $F(x)$.

Il répond à $y=1$ par $F(x)=0$ trois valeurs de x qui sont $x=0$ et $x=\pm 2$.

En supprimant ce facteur et ses puissances dans $f(x)$, R_1 et R_2, on obtient

$$\begin{aligned} f_1(x) &= -3x^2-y^2+2y+3, \\ r_1 &= -3y(y-2)x, \\ r_2 &= 8y^2(y-2)^2(y+1)(y-3). \end{aligned}$$

Par le facteur y et le facteur $y-2$ de r_1, on a les systèmes

$$(y=0,\ -3x^2+3=0),\quad (y=2,\ -3x^2+3=0);$$

d'où

$$y=0,\ x=1 \quad \text{et} \quad y=0,\ x=-1,$$

puis

$$y=2,\ x=1 \quad \text{et} \quad y=2,\ x=-1.$$

Il s'ensuit

$$r'_1=-x,\quad r'_2=(y+1)(y-3);$$

d'où les solutions

$$y=-1,\ x=0 \quad \text{et} \quad y=3,\quad x=0.$$

En écartant d'abord de $f(x)$ le facteur $y-1$, conformément à la recommandation faite, on eût eu

$$\begin{gathered} -3x^2-y^2+2y+3, \\ (y^2-2y)x, \\ (-y^2+2y+3)x^2+(3y^2-6y-1)(-y^2+2y+3), \end{gathered}$$

et de là

$$\begin{aligned} R_1 &= -3y(y-2)x, \\ R_2 &= \begin{vmatrix} -3 & 0 & -y^2+2y+3 \\ 0 & y^2-2y & 0 \\ -y^2+2y+3 & 0 & (3y^2-6y-1)(-y^2+2y+3) \end{vmatrix} \\ &= (-y^2+2y+3)\begin{vmatrix} -3 & 0 & -y^2+2y+3 \\ 0 & y^2-2y & 0 \\ 1 & 0 & 3y^2-6y-1 \end{vmatrix} \\ &= (-y^2+2y+3)(y^2-2y)\begin{vmatrix} -3 & -y^2+2y+3 \\ 1 & 3y^2-6y-1 \end{vmatrix} \\ &= -8y^2(y-2)^2(y+1)(y-3). \end{aligned}$$

4° (*Id.*) :

$$\Phi(x),\ y = (y-2)x^2 - 2x + 5y - 2 = 0,$$
$$\varphi(x),\ y = (yx^2 - 5x + 4y = 0.$$

Les degrés en x étant les mêmes, les polynômes intermédiaires sont

$$(-3y+10)x - y^2 - 6y,$$
$$(-y^2 - 6y)x + 17y - 10;$$

d'où

$$R_1 = (-3y+10)x - y^2 - 6y,$$
$$R_2 = \begin{vmatrix} -3y+10 & -y^2-6y \\ -y^2-6y & 17y-10 \end{vmatrix} = -y^4 - 12y^3 - 87y^2 + 200y - 100.$$

Le système proposé est ainsi changé en

$$y^4 + 12y^3 + 87y^2 - 200y + 100 = 0,$$
$$(3y-10)x + y^2 + 6y = 0.$$

5° :

$$F(x) = x^4 + x^2y^2 + y^4 = 0,$$
$$f(x) = x^3 - y^3 = 0.$$

Les polynômes à considérer sont

$$x^3 - y^3,$$
$$-y^2x^2 - y^3x - y^4,$$
$$-y^3x^2 - y^4x - y^5,$$
$$-y^3x^3 - y^4x^2 + y^2x;$$

d'où

$$R_1 = y^2(-x^2 - xy - y^2),$$
$$R_2 = 0x + 0.$$

De là

$$Y = y^2,\quad D = -x^2 - xy - y^2,$$

puis

$$\frac{F(x)}{D} = F_1(x) = -x^2 + xy - y^2,$$
$$\frac{f(x)}{D} = f_1(x) = -x + y,$$
$$r_1 = Y = y^2.$$

On en tire, comme solution double,

$$y = 0, \quad x = 0.$$

6°

$$F(y) = y^4 - 2xy^3 + (2x^2 - 1)y^2 + (-x^3 + x)y - x^2 = 0,$$
$$f(y) = -y^3 + (x^2 + x)y^2 - (x^3 + x^2)y + x^4 = 0.$$

Les polynômes préliminaires sont

$$-y^3 + (x^2 + x)y^2 - (x^3 + x^2)y + x^4,$$
$$(x^2 + x)y^3 + (-3x^3 + x^2 - 1)y^2 + (3x^4 + x^3 + x)y - 2x^5 - x^2,$$
$$(-x^3 - x^2)y^3 + (3x^4 + x^3 + x)y^2 + (-3x^5 - x^4 - x^2)y + 2x^6 + x^3,$$
$$x^4y^3 - (2x^5 + x^2)y + (2x^6 + x^3)y - x^7 - x^4.$$

De là

$$R_1 = (-x^4 + x^3 + 1)(y^2 - xy + x^2), \quad R_2 = 0y + 0,$$

par suite

$$D = y^2 - xy + x^2 \quad \text{et} \quad X = -x^4 + x^3 + 1,$$

puis

$$F_1(y) = y^2 - xy - 1,$$
$$f_1(y) = -y + x^2,$$
$$r_1 = -x^4 + x^3 + 1;$$

d'où le système

$$x^4 - x^3 - 1 = 0, \quad y = x^2.$$

7°

$$F(x) = x^3 - 3yx^2 + (y^2 + 2y)x - y,$$
$$f(x) = -yx^2 + 2yx + y^2 - 3y + 1.$$

De là

$$-yx^2 + 2yx + y^2 - 3y + 1,$$
$$2yx^2 + (y^3 - 3y^2 - 3y + 1)x - 3y^3 + 8y^2 - 3y,$$
$$(y^2 - 3y + 1)x^2 - (3y^3 - 8y^2 + 3y)x + y^4 - 3y^2 + 2y,$$

puis

$$\begin{aligned} R_1 &= (-y^4 + 3y^3 - y^2 - y)x + 3y^4 - 10y^3 + 9y^2 - 2y \\ &= y(y-1)[(-y^2 + 2y + 1)x + 3y^2 - 7y + 2], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_2 &= (y-1)^2(-y^6 + 10y^5 - 31y^4 + 41y^3 - 25y^2 + 7y - 1) \\ &= (y-1)^4(-y^4 + 8y^3 - 14y^2 + 5y - 1). \end{aligned}$$

Le facteur y de R_1 appartenant au premier coefficient de $f(x)$, il n'y répond rien. Mais il en est autrement du facteur $y-1$, auquel correspond le système

$$\left.\begin{array}{r} y=1, \\ -x^2+2x-1=0 \end{array}\right\} \text{ ou } \left\{\begin{array}{l} y=1, \\ (x-1)^2=0. \end{array}\right.$$

Puis, si l'on supprime $(y-1)^2$ dans R_2, il vient

$$(y-1)^2(-y^4+8y^3-14y^2+5y-1)=0,$$

avec

$$(-y^2+2y+1)x+3y^2-7y+2=0.$$

De là encore, comme solution double,

$$\left.\begin{array}{r} y=1, \\ 2x-2=0 \end{array}\right\} \text{ ou } \left\{\begin{array}{l} y=1, \\ x=1. \end{array}\right.$$

Ensuite, on a

$$y^4-8y^3+14y^2-5y+1=0,$$
$$(y^2-2y-1)x=3y^2-7y+2.$$

La particularité qui se présente là pour $y=1$ est à remarquer.

Si l'on ordonne les mêmes polynômes par rapport à y, on a

$$F(y)=xy^2+(-3x^2+2x-1)y+x^3,$$
$$f(y)=y^2+(-x^2+2x-3)y+1;$$

d'où

$$y(x^3-5x^2+5x-1)+x^3-x,$$
$$y(x-x^3)+x^5-2x^4+3x^3-3x^2+2x-1,$$

ce qui donne

$$R_1=y(x^3-5x^2+5x-1)+x^3-x=(x-1)[y(x^2-4x+1)+x^2+x]$$

$$R_2=\begin{vmatrix} x^3-5x^2+5x-1 & x^3-x \\ x-x^3 & x^5-2x^4+3x^3-3x^2+2x-1 \end{vmatrix}$$
$$=(x-1)^2(x^6-5x^5+8x^4-8x^3+8x^2-5x+1)$$
$$=(x-1)^4(x^4-3x^3+x^2-3x+1).$$

Par le facteur $x-1$ de R_1, on a le système

$$x=1,\quad (y-1)^2=0.$$

Suppression faite de $x-1$ dans R_1 et de $(x-1)^2$ dans R_2, il vient

$$r_1 = y(x^2-4x+1)+x^2+x,$$
$$r_2 = (x-1)^2(x^4-3x^3+x^2-3x+1;$$

d'où, d'une part,

$$(x-1)^2=0,\quad -2y+2=0,$$

ou

$$(x-1)^2=0,\quad y=1;$$

d'autre part,

$$x^4-3x^3+x^2-3x+1=0,$$
$$y(x^2-4x+1)+x^2+x=0.$$

Comme l'équation est réciproque, il est aisé de la résoudre et d'obtenir les valeurs de y qui accompagnent ses racines.

8°

$$F(x) = (y^2-1)x^4-3y^2x^3+(y-1)x^2-y^3=0,$$
$$(y-1)x^3+2yx^2-y^2=0.$$

De là

$$(y-1)x^3+2yx^2-y^2,$$
$$(2y^3-2y)x^3+(-6y^3-y^2+2y-1)x^2+(-y^4+y^2)x+4y^4-y^3,$$
$$(-y^4+y^2)x^2+(4y^4-y^3)x+2y^4-y^3+y^2,$$
$$(-y^4+y^2)x^3+(4y^4-y^3)x^2+(2y^4-y^3+y^2)x,$$

ce qui donne

$$R_1 = (y-1)[(-10y^3-5y^2+2y-1)x^2-(y^2-1)y^2x+(6y+1)y^3],$$
$$R_2 = y^2(y-1)[y(-y^5-40y^4-8y^3+13y^2-7y+1)x$$
$$+6y^6-19y^5-6y^4-2y^3-9y^2+3y-1],$$
$$R_3 = y^4(y-1)(y^9-127y^8+84y^7-4y^6+6y^5+33y^4-13y^3+14y^2-4y+1).$$

Le facteur $y-1$ est commun au premier coefficient de $F(x)$ et au premier de $f(x)$ sans appartenir aux suivants. On le voit reproduit dans R_1, R_2 et R_3.

En laissant de côté ce facteur et la valeur de x infinie qui y correspond, on voit dans R_2 le facteur y^2 qui est premier avec le premier coefficient de R_1. Il y correspond le système

$$y^2=0,\quad x^2=0,$$

d'où, comme solution quadruple,

$$y = 0, \quad x = 0.$$

Suppression faite de y^2 et de y^4 dans R_3, on a en outre le système

$$\begin{aligned}
&y^9 - 127y^8 + 84y^7 - 4y^6 + 6y^5 + 33y^4 - 13y^3 + 14y^2 - 4y + 1 = 0,\\
&y(-y^5 - 40y^4 - 8y^3 + 13y^2 - 7y + 1)x\\
&\qquad\qquad + 6y^6 - 19y^5 - 6y^4 - 2y^3 - 9y^2 + 3y - 1 = 0.
\end{aligned}$$

Le même exemple, si l'on ordonne les polynômes par rapport à y, donne

$$\begin{aligned}
F(y) &= -y^3 + (x^4 - 3x^2)y^2 + x^2y - x^4 - x^2,\\
f(y) &= -y^2 + (x^3 + 2x^2)y - x^3;
\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}
&-y^2 + (x^3 + 2x^2)y - x^3,\\
&-x^2(x + 2)y^2 + (x^7 - x^6 - 6x^5 + x^3 + x^2)y - x^7 + 3x^6 - x^4 - x^2,\\
&x^3y^2 - (x^7 - 3x^6 + x^4 + x^2)y + x^7 + 2x^6 + 2x^4.
\end{aligned}$$

Par là

$$\begin{aligned}
R_1 &= x^2[(-x^5 + 2x^4 + 10x^3 + 4x^2 - x - 1)y + x^5 - 4x^4 - 2x^3 + x^2 + 1],\\
R_2 &= x^4(-7x^9 + 24x^8 + 30x^7 + 3x^6 + 16x^5 - 6x^3 + 1).
\end{aligned}$$

On a ainsi par R_1 le même système

$$x^2 = 0, \quad y^2 = 0;$$

puis on a par ailleurs

$$\begin{aligned}
&-7x^9 + 24x^8 + 30x^7 + 3x^6 + 16x^5 - 6x^3 + 1 = 0,\\
&(-x^5 + 2x^4 + 10x^3 + 4x^2 - x - 1)y + x^5 - 4x^4 - 2x^3 + x^2 + 1 = 0.
\end{aligned}$$

9°

$$\begin{aligned}
F(y) &= -y^3 + (x^4 - 3x^2)y^2 + x^2y - x^4,\\
f(y) &= -y^2 + (x^3 + 2x^2)y - x^3;
\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}
&-y^2 + (x^3 + 2x^2)y - x^3,\\
&-(x^3 + 2x^2)y^2 + (x^7 - x^6 - 6x^5 + x^3 + x^2)y - x^7 + 3x^6 - x^4,\\
&x^3y^2 + (-x^7 + 3x^6 - x^4)y + x^7 + 2x^6 - x^5,
\end{aligned}$$

puis

$$R_1 = x^2[(-x^5+2x^4+10x^3+4x^2-x-1)y + x^2(x^3-4x^2-2x+1)],$$
$$R_2 = x^7(-7x^6+25x^5+30x^4-11x^3-10x^2+x+1).$$

Par le facteur x^2 de R_1, on a le système

$$x^2 = 0, \quad y^2 = 0.$$

Il vient ensuite

$$r_1 = (-x^5+2x^4+10x^3+4x^2-x-1)y + x^2(x^3-4x^2-2x+1),$$
$$r_2 = x^5(-7x^6+25x^5+30x^4-11x^3-10x^2+x+1);$$

d'où encore le système

$$x^5 = 0, \quad y = 0,$$

puis le système

$$-7x^6+25x^6+30x^4-11x^3-10x^2+x+1,$$
$$(-x^5+2x^4+10x^3+4x^2-x-1)y + x^2(x^3-4x^2-2x+1) = 0.$$

En traitant le même exemple pour l'élimination de x, on obtient

$$F(x) = (y^2-1)x^4 - 3y^2x^3 + yx^2 - y^3,$$
$$f(x) = (y-1)x^3 + 2yx^2 - y^2;$$

d'où

$$(y-1)x^3 + 2yx^2 - y^2,$$
$$2y(y^2-1)x^3 + (-6y^3-y^2+y)x^2 - y^2(y^2-1)x + 4y^4 - y^3,$$
$$-y^2(y^2-1)x^2 + y^3(4y-1)x + y^3(2y-1),$$
$$-y^2(y^2-1)x^3 + y^3(4y-1)x^2 + y^3(2y-1)x,$$

et de là

$$R_1 = y(y-1)[(-10y^2-5y+1)x^2 - y(y^2-1)x + y^2(6y+1)],$$
$$R_2 = y^4(y-1)[(-y^4-40y^3-8y^2+9y-2)x + 6y^4-19y^3-6y^2+6y-1],$$
$$R_3 = y^7(y-1)(y^6-111y^5+72y^4-y^3-13y^2+10y-1).$$

Le facteur $y-1$ commun aux premiers coefficients de $F(x)$ et de $f(x)$ se voit là dans R_1, R_2 et R_3. Ce facteur écarté, on a par le facteur y de R_1 le système

$$y = 0, \quad x^3 = 0,$$

puis on a

$$r_1 = (-10y^2 - 5y + 1)x^2 - y(y^2 - 1)x + y^2(6y + 1),$$
$$r_2 = y^2[(-y^4 - 40y^3 - 8y^2 + 9y - 2)x + 6y^4 - 19y^3 - 6y^2 + 6y - 1],$$
$$r_3 = y^4(y^6 - 111y^5 + 72y^4 - y^3 - 13y^2 + 10y - 1);$$

Par le facteur y^2 de r_2, il vient encore

$$y^2 = 0, \quad x^2 = 0,$$

après quoi il reste

$$y^6 - 111y^5 + 72y^4 - y^3 - 13y^2 + 10y - 1 = 0,$$
$$-(y^4 - 40y^3 - 8y^2 + 9y - 2)x + 6y^4 - 19y^3 - 6y^2 + 6y - 1 = 0.$$

10°

$$F(x) = x^5 - x^4 + (y - 2)x^2 + 3x + 2,$$
$$f(x) = x^4 - yx^2 - 2x + y - 1;$$

d'où

$$x^4 - yx^2 + 2x + y - 1,$$
$$-yx^3 + (y - 2)x - (y + 1),$$
$$-yx^4 + (y - 2)x^2 - (y + 1)x,$$
$$-2x^4 + (y - 2)x^3 - (y + 1)x^2 + (y + 4)x + y^2 - y + 2,$$
$$(y - 1)x^4 - (y + 1)x^3 + (y^2 - y + 2)x + 3y + 1,$$

puis

$$R_1 = -yx^3 + (y - 2)x - (y + 1),$$
$$R_2 = (y^3 - y^2 + 2y)x^2 + (3y^2 + y)x - y^3 + 5y^2,$$
$$R_3 = (2y^4 + 3y^3 + 18y^2 - 11y + 8)x + y^5 - 4y^4 + 5y^3 + 2y^2 + 4,$$
$$R_4 = -y^7 + 7y^6 - 7y^5 + 20y^4 + 122y^3 - 52y^2 + 38y + 1.$$

Le facteur y de R_2 ne se reproduit pas au delà, appartenant au premier coefficient de R_1. Il n'y répond aucune solution. Le système résultant est ainsi

$$y^7 - 7y^6 + 7y^5 - 20y^4 - 122y^3 + 52y^2 - 3y - 1 = 0,$$
$$(2y^4 + 3y^3 + 18y^2 - 11y + 8)x + y^5 - 4y^4 + 5y^3 + 2y^2 + 4 = 0.$$

En faisant l'élimination de y, on trouve immédiatement

$$R_1 = x^7 - x^5 - x^4 + x^3 + 3x^2 - 3x - 2 = 0,$$
$$(-x^2 + 1)y + x^4 - 2x - 1 = 0.$$