ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

C. MŒGLIN
J.-L. WALDSPURGER

Le spectre résiduel de GL(n)

Annales scientifiques de l'É.N.S. 4e série, tome 22, nº 4 (1989), p. 605-674
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1989_4_22_4_605_0>

Ann. scient. Éc. Norm. Sup.,
4e série, t. 22, 1989, p. 605 à 674.

LE SPECTRE RÉSIDUEL DE GL (n)

PAR C. MŒGLIN ET J.-L. WALDSPURGER

Introduction

Soient k un corps global, $\mathbf{A}$ son anneau d'adèles, $G=GL(N)$, ξ un caractère unitaire de $\mathbf{A}^*/k^*$, $L^2=L^2(G(k)\backslash G(\mathbf{A}), \xi)$ l'espace des fonctions sur $G(k)\backslash G(\mathbf{A})$ se transformant sous le centre $Z_G(\mathbf{A})$ selon ξ et de carré intégrable modulo le centre. Soit L^2_d la partie discrète de L^2, *i.e.* la somme des sous-$G(\mathbf{A})$-modules irréductibles. On se propose de décrire cet espace. Considérons l'ensemble des couples (M, V) suivants:

$M=GL(N_1)\times\ldots\times GL(N_m)$ est un sous-groupe de Lévi standard de G.

$V=V_1\otimes\ldots\otimes V_m$ est un sous-espace irréductible de l'espace des formes automorphes cuspidales sur $M(k)\backslash M(\mathbf{A})$.

Notons ρ la représentation de $M(\mathbf{A})$ dans V. On suppose que ρ est unitaire et que la restriction à $Z_G(\mathbf{A})$ de son caractère central est ξ. On définit entre ces couples une relation d'équivalence. Soient (M, V) comme ci-dessus, (M′, V′) un autre couple. On dit que ces couples sont équivalents s'il existe $\underline{s}=(s_1, \ldots, s_m)\in\mathbf{C}^m$ tel que (M′, V′) soit conjugué à (M, V[$\underline{s}$]), où $V[\underline{s}]=V_1[s_1]\otimes\ldots\otimes V_m[s_m]$ et $V_i[s_i]$ désigne l'espace des fonctions $\varphi|\det|^{s_i}$ pour $\varphi\in V_i$. Notons X l'ensemble des classes d'équivalence. Pour $\chi\in X$, Langlands a défini le sous-espace L^2_χ de L^2. Il est formé des fonctions dont le support cuspidal est formé de couples $(M, V)\in\chi$ ([L], p. 95, [A, 1], lemme 6). On a les décompositions suivantes:

$$L^2=\bigoplus_{\chi\in X} L^2_\chi,\qquad L^2_d=\bigoplus_{\chi\in X} L^2_\chi\cap L^2_d.$$

Notons X^0 l'ensemble des $\chi\in X$ tels qu'il existe un couple $(M, V)\in\chi$ tel qu'avec les notations ci-dessus, on ait $N_1=\ldots=N_m$, $V_1=\ldots=V_m$. Soit $\chi\in X^0$. Si k est un corps de nombres, la condition de transformation sous le centre impose qu'il n'y ait dans χ qu'un seul couple vérifiant ces conditions. Si k est un corps de fonctions, la situation est plus compliquée, il y a en général plusieurs couples (*cf.* IV). En tout cas il n'y en a qu'un nombre fini. Dans les deux cas on note $C(\chi)$ l'ensemble de ces couples. Soit $(M, V)\in C(\chi)$. Pour $\underline{s}\in\mathbf{C}^m$, notons $I(V, \underline{s})$ la représentation induite de $G(\mathbf{A})$ (*cf.* I.1 ci-dessous). Pour $\underline{s}=((m-1)/2, \ldots, (1-m)/2)$, la représentation $I(V, \underline{s})$ admet un unique quotient irréductible, noté J(V) (*cf.* I.11). On montre que cette représentation J(V) intervient dans $L^2_\chi \cap L^2_d$ (*cf.* [JS, 1]). Dans ce travail, on montre le théorème suivant :

THÉORÈME. — *Soit* $\chi \in X$. *Alors on a* :

(i) *si* $\chi \notin X^0$, $L^2_\chi \cap L^2_d = \{0\}$;

(ii) *si* $\chi \in X^0$, $L^2_\chi \cap L^2_d$ *est isomorphe à la somme directe des* $J(V)$ *pour* (M, V) *parcourant* $C(\chi)$.

Si k est un corps de nombres et $\chi \in X^0$, $L^2_\chi \cap L^2_d$ est donc irréductible. Ce résultat a été conjecturé par Jacquet [J] et démontré par lui dans un cas particulier.

Nous obtenons ce résultat comme corollaire de la décomposition spectrale de L^2_χ que nous calculons en suivant de près la méthode de Langlands (*cf.* II). Il est connu que pour pouvoir appliquer la méthode de Langlands il faut savoir calculer les pôles des opérateurs d'entrelacements le long de certains chemins. Dans le cas de $GL(N)$ la situation est assez favorable puisque l'on sait, grâce aux travaux de Jacquet, Piateski-Shapiro, Shalika et Shahidi, normaliser les opérateurs d'entrelacements. Ainsi ces opérateurs se représentent comme produit d'un facteur de nature globale (produit de fonctions L de paires et de facteurs ε) et d'un opérateur de nature locale (produit d'opérateurs d'entrelacements normalisés locaux). Le calcul fait pour $GL(4)$ dans ([L], appendice 3) montre que sur les chemins que l'on doit suivre la bande critique ne doit pas créer de difficulté (*cf.* première ligne de la page 307 de [L]). C'est l'assertion la plus facile à vérifier. Ainsi seuls les pôles de $L(s, \pi \times \check{\pi}')$ vont intervenir pour le facteur global. Si s est réel, π, π' cuspidales unitaires, les pôles éventuels sont pour $s=0$ ou 1. On constate que le point $s=0$, non seulement ne crée pas de pôle pour les séries d'Eisenstein, mais au contraire crée des zéros [comme on le voit facilement dans le cas de $GL(2)$]. Ces zéros permettent de compenser d'autres singularités, ce qui est essentiel dans la démonstration. Cela a été remarqué par Langlands pour $GL(4)$ [*cf.* [L], p. 310, (*c*)] et utilisé par Jacquet [J]. Ce résultat s'explique en partie par le fait que les R-groupes pour $GL(N)$ sont triviaux (*cf.* III. 2). Il reste à régler le sort des pôles d'ordre local provenant des opérateurs d'entrelacements normalisés. Notre démonstration est particulière à $GL(N)$ alors que le résultat nous semble devoir être plus général. Le résultat dont nous avons besoin, pour montrer que ces pôles n'interviennent pas est I. 8 réécrit en I. 11 sous la forme adéquate.

Ce travail fait partie d'un projet que nous réalisons avec J.-P. Labesse et P. Perrin visant à comprendre [L]. Nous les remercions de leur collaboration. Nous remercions aussi A. Bouaziz pour ses remarques concernant le cas archimédien.

I A. Pôles des opérateurs d'entrelacement locaux

I. 1. DÉFINITIONS, GÉNÉRALITÉS. — Soient F un corps local, $G = GL(N, F)$, $M = GL(N_1, F) \times \ldots \times GL(N_m, F)$ un sous-groupe de Lévi standard de G, $\pi = \pi_1 \otimes \ldots \otimes \pi_m$ une représentation admissible irréductible de M. Pour $\underline{s} = (s_1, \ldots, s_m) \in \mathbf{C}^m$, on pose :

$$\pi[\underline{s}] := \pi_1[s_1] \otimes \ldots \otimes \pi_m[s_m],$$

où pour $i=1, \ldots, m$, $\pi_i[s_i]$ est la représentation $g \rightarrow |\det(g)|^{s_i}\pi_i(g)$ de $GL(N_i, F)$. Soit $\mathfrak{S}_m$ le groupe des permutations de $\{1, \ldots, m\}$. Pour $\sigma \in \mathfrak{S}_m$, on définit σM, $\sigma\pi$ et $\sigma \underline{s}$, pour $\underline{s} \in \mathbf{C}^m$. Par exemple :

$$\sigma M = GL(N_{\sigma^{-1}1}) \times \ldots \times GL(N_{\sigma^{-1}m}).$$

On note $\pi_1 \times \ldots \times \pi_m$, ou $I(\pi)$, la représentation $\mathrm{Ind}_P^G \pi$ de G, où il s'agit de l'induite normalisée, et où P est le sous-groupe parabolique de G, de Lévi M, contenant le groupe des matrices triangulaires supérieures. On pose :

$$I(\pi, \underline{s}) := I(\pi[\underline{s}]).$$

Fixons un caractère ψ de F, continu, non trivial, et munissons F de la mesure de Haar autoduale pour ψ. Pour $\sigma \in \mathfrak{S}_m$, on définit alors un opérateur d'entrelacement non normalisé, dépendant méromorphiquement d'une variable $\underline{s} \in \mathbf{C}^m$:

$$M(\sigma, \pi, \underline{s}): \quad \pi_1[s_1] \times \ldots \times \pi_m[s_m] \rightarrow \pi_{\sigma^{-1}1}[s_{\sigma^{-1}1}] \times \ldots \times \pi_{\sigma^{-1}m}[s_{\sigma^{-1}m}].$$

Posons :

$$\mathrm{inv}(\sigma) := \{(i, j);\ 1 \leqq i < j \leqq m,\ \sigma i > \sigma j\}$$

et :

$$r(\sigma, \pi, \underline{s}) := \prod_{(i, j) \in \mathrm{inv}(\sigma)} L(s_i - s_j, \pi_i \times \check{\pi}_j)(L(1 + s_i - s_j, \pi_i \times \check{\pi}_j)\, \varepsilon(s_i - s_j, \pi_i \times \check{\pi}_j, \psi))^{-1}.$$

Dans cette formule, si F est non archimédien, les facteurs L et ε sont ceux définis dans [JPSS] (*voir* aussi [Sh 1]) alors que si F est archimédien, ce sont ceux définis à l'aide de la paramétrisation de Langlands en terme de représentations du groupe de Weil (*cf.* [Sh 3]). En outre $\check{\pi}_j$ désigne la représentation contragrédiente de π_j. On définit des opérateurs d'entrelacement normalisés par :

$$N(\sigma, \pi, \underline{s}) := r(\sigma, \pi, \underline{s})^{-1} M(\sigma, \pi, \underline{s}).$$

Toutes ces fonctions de $\underline{s}$ sont invariantes par translations par le sous-espace diagonal de $\mathbf{C}^m$. Nous utiliserons les propriétés suivantes de ces opérateurs :

(1) pour σ, $\sigma' \in \mathfrak{S}_m$ on a l'égalité :

$$N(\sigma', \sigma\pi, \sigma\underline{s})\, N(\sigma, \pi, \underline{s}) = N(\sigma'\sigma, \pi, \underline{s});$$

(2) supposons π_i tempérée pour tout $i=1, \ldots, m$ et $\mathrm{Re}(s_i - s_j) \geqq 0$ pour tous $(i, j) \in \mathrm{inv}(\sigma)$. Alors $N(\sigma, \pi, \bullet)$ est holomorphe au point $\underline{s}$ et $N(\sigma, \pi, \underline{s}) \neq 0$;

(3) supposons π_i unitaire pour tout $i=1, \ldots, m$ et $\mathrm{Re}(s_j - s_j) = 0$ pour tous $(i, j) \in \mathrm{inv}(\sigma)$. Alors $N(\sigma, \pi, \bullet)$ est holomorphe au point $\underline{s}$, et $N(\sigma, \pi, \underline{s})$ est un isomorphisme;

(4) l'adjoint de $(\sigma, \pi, \underline{s})$ est $N(\sigma^{-1}, \rho\check{\pi}, -\sigma\bar{\underline{s}})$.

Cf. ([Sh 1], th. 3.1, [Sh 2], th. 5.1, [A, 2], th. 2.1) pour (1) et la première assertion de (3). Les induites de représentations unitaires sont irréductibles ([B], 0.2 et [V 3]) ce qui implique la seconde assertion de (3). Le (4) est immédiat. Le (2) résulte de ([B-W], p. 332) quand on impose $\mathrm{Re}(s_i - s_j) > 0$ pour tous $1 \leqq i \leqq j \leqq m$. Démontrons le cas général. On peut décomposer $\mathrm{N}(\sigma, \pi, \bullet)$ en produit d'opérateurs associés à des symétries élémentaires. Chacun de ces opérateurs est justiciable soit de (3), soit de la partie déjà démontrée de (2). Cela implique l'holomorphie de $\mathrm{N}(\sigma, \pi, \bullet)$ en $\underline{s}$. Soient w l'élément de plus grande longueur de $\mathfrak{S}_m$, τ un élément de $\mathfrak{S}_m$ tel que $\mathrm{Re}((\tau^{-1} s)_i - (\tau^{-1} s)_j) \geqq 0$ pour tous $1 \leqq i < j \leqq m$, et $\nu := w \tau^{-1} \sigma^{-1}$. On a l'égalité

$$\mathrm{N}(w, \tau^{-1}\pi, \tau^{-1}\underline{s}) = \mathrm{N}(\nu, \sigma\pi, \sigma\underline{s})\, \mathrm{N}(\sigma, \pi, \underline{s})\, \mathrm{N}(\tau, \tau^{-1}\pi, \tau^{-1}\underline{s}).$$

Chacun de ces opérateurs est défini (*i. e.* holomorphe au point $\underline{s}$) car il vérifie les hypothèses de (2): pour $\mathrm{N}(\tau, \tau^{-1}\pi, \tau^{-1}\underline{s})$ c'est l'hypothèse sur $\tau^{-1}\underline{s}$, pour $\mathrm{N}(\sigma, \pi, \underline{s})$ c'est l'hypothèse de départ, pour $\mathrm{N}(\nu, \sigma\pi, \sigma\underline{s})$, comme les longueurs de ν et $\sigma\tau$ s'ajoutent et que $\sigma\underline{s} = \sigma\tau(\tau^{-1}\underline{s})$, cela résulte de l'hypothèse sur $\tau^{-1}\underline{s}$. Pour montrer que $\mathrm{N}(\sigma, \pi, \underline{s}) \neq 0$, il suffit de montrer que $\mathrm{N}(w, \tau^{-1}\pi, \tau^{-1}\underline{s}) \neq 0$, *i. e.* on est ramené au cas où $\underline{s}$ vérifie $\mathrm{Re}(s_i - s_j) \geqq 0$ pour tous $1 \leqq i < j \leqq m$, et $\sigma = w$.

Introduisons la partition $m = p_1 + \ldots + p_r$ telle que, en posant $p'_1 := 0$, $p'_i := \sum_{k=1}^{i-1} p_k$, pour $1 < i \leqq (m+1)$, $\mathrm{Re}(s_i)$ soit constant sur chaque intervalle $p'_k + 1, \ldots, p'_{k+1}$, mais $\mathrm{Re}\, s_i > \mathrm{Re}\, s_{i+1}$ pour $i := p'_k$.

Posons:

$$\Pi_k := \ldots \times \pi_i [\mathrm{Im}(s_i)] \times \ldots,$$

pour $p'_k + 1 \leqq i \leqq p'_{k+1}$ et

$$\Pi := \Pi_1 \otimes \ldots \otimes \Pi_r.$$

Notons $\underline{z} \in \mathbf{C}^r$ l'élément tel que $z_k = \mathrm{Re}(s_i)$ pour $p'_k + 1 \leqq i \leqq p'_{k+1}$, w' l'élément de plus grande longueur de $\mathfrak{S}_r$, $\tilde{w}$ l'élément de $\mathfrak{S}_m$ qui préserve les intervalles et inverse l'ordre dans chacun d'eux, *i. e.* tel que:

$$\tilde{w}(p'_k + j) = p'_{k+1} + 1 - j$$

pour $1 \leqq j \leqq p_k$.

Identifions $\mathfrak{S}_r$ au sous-groupe de $\mathfrak{S}_m$ qui permute les intervalles. On a alors les égalités $\mathrm{I}(\Pi) = \mathrm{I}(\pi)$,

$$\mathrm{N}(w', \Pi, \underline{z}) = \mathrm{N}(w', \pi, \underline{s}),$$

d'où :

$$\mathrm{N}(w, \pi, \underline{s}) = \mathrm{N}(\tilde{w}, w'\pi, w'\underline{s})\, \mathrm{N}(w', \Pi, \underline{z}).$$

Chaque Π_k est tempéré, donc $N(w', \Pi, \underline{z}) \neq 0$ comme on l'a déjà dit. D'après (2), l'opérateur $N(\tilde{w}, w'\pi, w'\underline{s})$ est un isomorphisme. Donc $N(w, \pi, \underline{s}) \neq 0$ ce qui achève la démonstration.

I.2. Sous-quotient de Langlands. — Soient $\delta_1, \ldots \delta_r$ des représentations de la série discrète (unitaire) de $GL(N_1, F), \ldots, GL(N_r, F)$. Pour $\underline{s} \in \mathbf{C}^r$, on peut définir le sous-quotient de Langlands

$$L := L(\delta_1[s_1], \ldots, \delta_r[s_r]).$$

C'est une représentation irréductible de $GL(N, F)$, où $N := N_1 + \ldots + N_r$, qui, par définition, est invariante par permutation de l'ensemble d'indices $\{1, \ldots, r\}$ et qui possède les propriétés suivantes:

(1) si $\operatorname{Re}(s_1) \geqq \ldots \geqq \operatorname{Re}(s_r)$, L est l'unique quotient irréductible de l'induite $\delta_1[s_1] \times \ldots \times \delta_r[s_r]$; c'est son image par l'opérateur $N(w, \delta, \underline{s})$, où w est l'élément de plus grande longueur de $\mathfrak{S}_r$, et $\delta := \delta_1 \otimes \ldots \otimes \delta_r$;

(2) si $\operatorname{Re}(s_1) \leqq \ldots \leqq \operatorname{Re}(s_r)$, L est l'unique sous-module irréductible de cette induite;

(3) en tout cas L intervient dans cette induite avec multiplicité un (en tant que sous-quotient);

(4) $\check{L} = L(\check{\delta}_1[-s_1], \ldots, \check{\delta}_r[-s_r])$.

Le (4) est immédiat. Quand les inégalités sont strictes, (1) et (2) résultent de ([B-W], p. 332). Le cas général s'en déduit par le même argument de regroupement qu'en I.1. Le (3) résulte de même de ([Si], th. 4.4.1) dans le cas non archimédien et de la paramétrisation de Langlands dans le cas archimédien (*cf.* par exemple [V 1]).

On considère la situation de I.1 pour $m := 2$. Dans ce cas, ici et dans la suite, on note σ l'élément non trivial de $\mathfrak{S}_2$.

(5) Remarque. — *Par définition, si* L *est comme ci-dessus, si* π *est une représentation irréductible de* $GL(N', F)$, *et* $\underline{t} \in \mathbf{C}^2$, *on a l'égalité*:

$$r(\sigma, L \otimes \pi, \underline{t}) = \prod_{i=1}^{r} r(\sigma, \delta_i[s_i] \otimes \pi, \underline{t}).$$

Cela justifie la commutativité des différents diagrammes qui seront utilisés dans la suite.

Soient $\delta_1, \ldots, \delta_r, \delta'_1, \ldots, \delta'_{r'}$, des représentations de la série discrète, $\nu \in \mathbf{R}^r$, $\nu' \in \mathbf{R}^{r'}$. On suppose que l'on a:

$$\nu_1 \geqq \ldots \geqq \nu_r, \qquad \nu'_1 \geqq \ldots \geqq \nu'_{r'}.$$

Posons:

$$\pi := L(\delta_1[\nu_1], \ldots, \delta_r[\nu_r]), \qquad \pi' := L(\delta'_1[\nu_1], \ldots, \delta'_r[\nu_{r'}]), \qquad \Pi := \pi \otimes \pi'.$$

Lemme. — *Soit* $\underline{s} := (s, s') \in \mathbf{C}^2$. *Supposons que l'on a*:

$$\nu_r + \operatorname{Re}(s) \geqq \nu'_1 + \operatorname{Re}(s').$$

Alors on a:

(i) $N(\sigma, \Pi, \bullet)$ *est holomorphe en* $\underline{s}$ *et* $N(\sigma, \Pi, \underline{s}) \neq 0$;

(ii) $N(\sigma, \sigma\Pi, \bullet)$ *est holomorphe en* $\sigma\underline{s}$ *si et seulement si* $\pi[s] \times \pi'[s']$ *est irréductible;*

(iii) *si* $N(\sigma, \sigma\Pi, \bullet)$ *est holomorphe en* $\sigma\underline{s}$, *on a* $N(\sigma, \sigma\Pi, \sigma\underline{s}) \neq 0$.

Posons $R = r + r'$, notons τ l'élément suivant de $\mathfrak{S}_R$:

$$\tau: \quad (1, \ldots, r, r+1, \ldots, R) \mapsto (r, \ldots, 1, R, \ldots, r+1)$$

et w l'élément de plus grande longueur de $\mathfrak{S}_R$. Pour $\underline{t} = (t, t') \in \mathbf{C}^2$, posons

$$\lambda(\underline{t}) = (\nu_1 + t, \ldots, \nu_r + t, \nu'_1 + t', \ldots, \nu'_{r'} + t').$$

Posons aussi : $\delta = \delta_1 \otimes \ldots \otimes \delta'_{r'}$. Le diagramme suivant est commutatif:

$$\begin{tikzcd} & \delta_1[\nu_1 + t] \times \ldots \times \delta'_{r'}[\nu'_{r'} + t'] \arrow[dl, "N(\tau, \delta, \lambda(\underline{t}))"'] \arrow[dr, "N(w, \delta, \lambda(\underline{t}))"] & \\ \pi([t] \times \pi'[t'] \arrow[rr, "N(\sigma, \Pi, \underline{t})"'] & & \pi'[t'] \times \pi[t]. \end{tikzcd}$$

La flèche de gauche est en fait indépendante de t et est surjective d'après (1). Alors (i) résulte, grâce à l'hypothèse, des propriétés de $N(w, \delta, \lambda(\underline{t}))$ (I.1(2)). On voit aussi que l'image de $N(\sigma, \Pi, \underline{s})$ est

$$L = L(\delta_1[\nu_1 + s], \ldots, \delta'[\nu'_{r'} + s'])$$

[d'après (1)]. Si $N(\sigma, \sigma\Pi, \bullet)$ est holomorphe en $\sigma\underline{s}$, alors $N(\sigma, \Pi, \underline{s})$ est un isomorphisme [*cf.* I.1(1)] et

$$\pi[s] \times \pi'[s'] \simeq \pi'[s'] \times \pi[s] \simeq L$$

est irréductible. D'où l'implication $\Rightarrow$ de (ii). De plus $N(\sigma, \sigma\Pi, \sigma\underline{s})$ est aussi un isomorphisme d'où (iii). Inversement si $\pi[s] \times \pi'[s']$ est irréductible, $N(\sigma, \Pi, \underline{s})$ est un isomorphisme et l'inverse de $N(\sigma, \Pi, \bullet)$ est holomorphe en $\underline{s}$. Or cet inverse est $N(\sigma, \sigma\Pi, \sigma\bullet)$. D'où (ii).

I.3. Paramètre d'une série discrète. — Soit δ une série discrète de $GL(N, F)$. Supposons d'abord que F soit non archimédien; alors on sait ([Z], 9.3) qu'il existe un demi-entier, noté t, tel que $2t+1$ divise N et une représentation cuspidale (unitaire), notée ρ tels que l'on ait:

δ est l'unique sous-module de l'induite $\rho[t] \times \rho[t-1] \times \ldots \times \rho[-t]$.

On dira que *t est le paramètre de* δ.

Supposons, maintenant, que F soit archimédien; alors:

• si $N \neq 1$, on a $F = \mathbf{R}$; on note r le paramètre d'Harish-Chandra de δ et $t = 1/2r$, on dit que *t est le paramètre de* δ.

• si $N=1$, δ est un caractère unitaire. Si $F=\mathbf{R}$, δ s'écrit sous la forme: $x\mapsto|x|^{i\alpha}$ signe$(x)^{\varepsilon}$, alors que si $F=\mathbf{C}$, δ s'écrit sous la forme: $z\mapsto(z\bar{z})^{i\alpha}(z/\bar{z})^{\varepsilon}$, avec $\alpha\in\mathbf{R}$, $\varepsilon=0$ ou 1 si $F=\mathbf{R}$ et $\varepsilon\in(1/2)\mathbf{Z}$ si $F=\mathbf{C}$. On note $t:=0$ si $F=\mathbf{R}$ et $t:=\varepsilon$ si $F=\mathbf{C}$. On dit encore que t est le paramètre de δ.

I.4. ENTRELACEMENT DE DEUX SÉRIES DISCRÈTES.

LEMME. — *Soient δ, δ' des séries discrètes dont on note t et t' les paramètres. On pose $\underline{\delta}:=\delta\otimes\delta'$. Et on définit, pour $\underline{s}:=(s,s')\in\mathbf{C}^2$ l'opérateur d'entrelacement normalisé:* $N(\sigma,\underline{\delta},\underline{s})$ (cf. I.2). *Alors on a*:

(i) *Supposons que* F *soit non archimédien. Fixons des représentations cuspidales, notées ρ et ρ' comme en* I.3. *L'ensemble des pôles de l'opérateur* $N(\sigma,\underline{\delta},\bullet)$ *est l'ensemble des $\underline{s}\in\mathbf{C}^2$ tels que l'élément $s_0:=s-s'$ associé vérifie*:

(*a*) $\rho\simeq\rho'[\mathrm{Im}(s_0)]$;

(*b*) $\mathrm{Re}(s_0)\equiv t+t' \bmod \mathbf{Z}$, *et* $-(1+t+t')\leqq\mathrm{Re}(s_0)<-|t-t'|$.

Ces pôles sont simples.

(ii) *Supposons que* F *soit archimédien. Alors* $N(\sigma,\underline{\delta},\bullet)$ *est holomorphe en $\underline{s}$ si l'on a*: $\mathrm{Re}(s-s')-(t+t')\notin\mathbf{Z}$.

(i) On reprend les notations de l'énoncé. Pour $s\in\mathbf{C}$, on a, d'après ([JPSS], th. 8.2):

$$L(s,\delta\times\delta')=\prod L(s+j,\rho\times\check{\rho}'),$$

où j parcourt les demi-entiers tels que: $|t-t'|\leqq j\leqq t+t', j\equiv t+t' \bmod \mathbf{Z}$.

On obtient:

$$r(\sigma,\underline{\delta},\underline{s})=L(s_0+|t-t'|,\rho\times\check{\rho}')\,L(1+s_0+t+t',\rho\times\check{\rho}')^{-1}\,\varepsilon(s_0,\delta\times\check{\delta}',\psi)^{-1}. \tag{1}$$

En supposant $t\geqq t'$, on voit aussi que le diagramme ci-dessous est commutatif à un scalaire près provenant des facteurs ε, qui importe peu:

$$\begin{array}{ccc}
\delta[s]\times\delta'[s'] & \xrightarrow{N(\sigma,\underline{\delta},\underline{s})} & \delta'[s']\times\delta[s] \\
\downarrow & & \downarrow \\
\delta[s]\times\rho'[t'+s']\times\ldots\times\rho'[-t'+s'] & \to & \rho'[t'+s']\times\ldots\times\rho'[-t'+s']\times\delta[s]
\end{array}$$

où la flèche du bas est un opérateur d'entrelacement normalisé que l'on n'explicite pas.

Si $\underline{s}$ est un pôle, on a $\mathrm{Re}\,s_0<0$ d'après I.1(2). Supposons que l'on a: $\mathrm{Re}\,s_0<0$. On peut appliquer le lemme I.2 à $\sigma\,\underline{\delta}$. D'après (ii), $\underline{s}$ est un pôle si et seulement si $\delta[s]\times\delta'[s']$ est réductible. D'après [Z], th. 9.7 (*a*) (*voir* aussi [R], prop. 13), la représentation, $\delta[s]\times\delta'[s']$ est réductible si et seulement si la condition (*a*) de l'énoncé et la condition (*b'*) suivante sont vérifiées:

(*b'*) les segments $[-t+\mathrm{Re}(s_0),\ldots,t+\mathrm{Re}(s_0)]$ et $[-t',\ldots,t']$ sont liés au sens de Zélévinski. Rappelons que Zélévinski appelle segment un ensemble de nombres réels de la forme $\Delta=[a,a+1,\ldots,b-1,b]$; il dit que deux segments Δ_1 et Δ_2 sont liés si Δ_1 et Δ_2 est encore un segment et si $\Delta_1\not\subset\Delta_2$ et $\Delta_2\not\subset\Delta_1$.

Mais (b') est équivalent à (b). Il reste à montrer que les pôles sont simples. D'après (a), et quitte à tordre ρ', on peut supposer que l'on a : $\rho \simeq \rho'$, et ne considérer que les s_0 réels. Supposons que l'on ait $t \geqq t'$ (un raisonnement analogue s'applique aussi pour $t' \geqq t$). Dans le diagramme ci-dessus, la flèche du bas se décompose en produit, pour $j \equiv t' \bmod \mathbf{Z}$, $t' \geqq j \geqq -t'$, d'opérateurs élémentaires :

$$\mathrm{N}(\sigma, \delta \otimes \rho'[j], \underline{s}).$$

D'après ce que l'on vient de démontrer, celui-ci n'a de pôle réel qu'en $s_0 = j - t - 1$. Ils sont donc distincts et le diagramme nous ramène à démontrer qu'ils sont simples. La formule (1) montre qu'il suffit de démontrer que l'opérateur non normalisé :

$$\mathrm{M}(\sigma, \delta \otimes \rho'[j], \underline{s})$$

n'a pas de pôle en $s_0 = j - t - 1$.

On a de nouveau un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \delta[s] \times \rho'[s'+j] & \xrightarrow{\mathrm{M}(\sigma,\, \underline{\delta},\, \underline{s})} & \rho'[s'+j] \times \delta[s] \\ \downarrow & & \downarrow \\ \rho[s+t] \times \ldots \times \rho[-t+s] \times \rho'[j+s'] & \rightarrow & \rho'[j+s'] \times \rho[t+s] \times \ldots \times \rho[-t+s] \end{array}$$

où les flèches horizontales sont des opérateurs d'entrelacement non normalisés. La flèche du bas se décompose en produit, pour $k \equiv t \bmod \mathbf{Z}$, $-t \leqq k \leqq t$, d'opérateurs élémentaires :

$$\mathrm{M}(\sigma, \rho[k] \otimes \rho'[j], \underline{s}).$$

D'après ([O], th. 1.f) un tel opérateur n'a de pôle réel qu'en $s_0 = j - k$. Leur produit n'a donc pas de pôles en $s = j - t - 1$, et d'après le diagramme ci-dessus, $\mathrm{M}(\sigma, \delta \otimes \rho'[j], \underline{s})$ non plus, ce qui achève la démonstration.

(ii) Dans le cas où F est archimédien, on cherche un résultat beaucoup moins précis que l'on obtient de la façon suivante : on plonge les séries discrètes dans les séries principales non unitaires; on décompose l'opérateur d'entrelacement en opérateurs d'entrelacements élémentaires et on applique ([O], 5.1) qui calcule les singularités des opérateurs d'entrelacements non normalisés pour les induites de caractères, mais il faut faire attention aux facteurs de normalisations (on fera un calcul précis de ces facteurs en I.7).

I.5. Modules de Speh. — Soit δ une série discrète de $\mathrm{GL}(\mathrm{N}, \mathrm{F})$ et soit a, $b \in \mathbf{R}$ tels que l'on ait : $b - a \in \mathbf{N}$. On dit que $[a, b] := \{a + t$, où $0 \leqq t \leqq b - a\}$ est un segment. On note $\mathrm{J}(\delta, a, b)$ le quotient irréductible de l'induite $\delta[b] \times \ldots \times \delta[a]$. Alors on a :

(1) $\mathrm{J}(\delta, a, b)\,[(-(a+b))/2]$ est une représentation unitaire. (Elle a été introduite par Speh, *cf.* [S].)

Lemme. — *Soient* δ, δ' *des séries discrètes,* $[a, b]$, $[a', b']$ *des segments.*

(i) *On suppose que l'on a :* $((a+b))/2 \geqq ((a'+b'))/2$; *alors* $\mathrm{J}(\delta, a, b) \times \mathrm{J}(\delta', a', b')$ *admet un unique quotient irréductible. Ce quotient est isomorphe à :*

$$\mathrm{L}(\delta[a], \ldots, \delta[b], \delta'[a'], \ldots, \delta'[b']).$$

De même $J(\delta', a', b') \times J(\delta, a, b)$ *admet un unique sous-module irréductible. Ce module est isomorphe à la même représentation*:

$$L(\delta[a], \ldots, \delta[b], \delta'[a'], \ldots, \delta'[b']).$$

(ii) $\pi := J(\delta, a, b) \times J(\delta', a', b')$ *est irréductible si et seulement si les opérateurs d'entrelacement normalisés* $N(\sigma, \pi, \underline{s})$ *et* $N(\sigma, \sigma\pi, \sigma\underline{s})$ (*notations de* I.2), *sont définis en* $\underline{s} = (0, 0)$. *Dans ce cas, on a*:

$$\pi \simeq L(\delta[a], \ldots, \delta[b], \delta'[a'], \ldots, \delta'[b']).$$

(iii) *Soit* t, t' *les paramètres de* δ, δ'; *si l'on a* $b - b' + t - t' \notin \mathbf{Z}$ *alors les conditions équivalentes de* (ii) *sont satisfaites.*

On appelle module standard dominant $J(\delta, a, b) \times J(\delta', a', b')$, une induite de la forme $\delta_1[z_1] \times \ldots \times \delta_r[z_r]$ avec les propriétés suivantes:

– $r = b - a + b' - a' + 2$;

– il existe un élément, noté w, de $\mathfrak{S}_r$ tel que l'on ait:

$$\{\delta_1[z_1], \ldots, \delta_r[z_r]\} = w.\{\delta[b], \ldots, \delta[a], \delta'[b'], \ldots, \delta'[a']\},$$
$$\{z_1, \ldots, z_r\} = w.\{b, \ldots, a, b', \ldots, a'\},$$
$$\operatorname{Re} z_1 \geqq, \ldots, \geqq \operatorname{Re} z_r.$$

On fixe un module standard dominant $J(\delta, a, b) \times J(\delta', a', b')$, noté C^+, d'où r et $w \in \mathfrak{S}_r$. On pose

$$\Pi = \delta[b] \otimes \ldots, \delta[a] \otimes \delta'[b'] \otimes \ldots \otimes \delta'[a'].$$

On identifie un élément $\underline{s} = (s, s')$ de $\mathbf{C}^2$ à l'élément de $\mathbf{C}^r$ suivant:

$$(s, \ldots, s, s', \ldots, s')$$

où s, resp. s', est pris $b - a + 1$, resp. $b' - a' + 1$, fois. On pose:

$$C^+(\underline{s}) = I(w\Pi, w\underline{s}).$$

On a les opérateurs d'entrelacements normalisés suivants:

$$\begin{array}{ccc} C^+(s) & \xrightarrow{N(w^{-1}, w.\Pi, w.\underline{s})} & \delta[b+s] \times \ldots \times \delta[a+s] \times \delta'[b'+s'] \times \ldots \times \delta'[a'+s'] \\ & & \downarrow N(w_0, \Pi, \underline{s}) \\ & & \delta[a+s] \times \ldots \times \delta[b+s] \times \delta'[a'+s'] \times \ldots \times \delta'[b'+s'] \end{array}$$

où w_0 est la permutation évidente. On a évidemment:

$$\operatorname{Im} N(w_0, \Pi, \underline{s}) = J(\delta, a, b)[s] \times J(\delta', a', b')[s'].$$

On suppose d'abord que l'on a:

(1) $$b - b' + t - t' \notin \mathbf{Z}.$$

On vérifie, alors, grâce à I.4, que $N(w^{-1}, w.\Pi, w.\underline{s})$ est un isomorphisme en $\underline{s}=(0,0)$. Ainsi, on a :

$$J(\delta, a, b) \times J(\delta', a', b') \tag{2}$$

est un quotient de C^+. Il admet donc, comme C^+ un unique quotient irréductible qui est isomorphe à : $L(\delta[a], \ldots, \delta[b], \delta[a'], \ldots, \delta[b'])$.

En dualisant ce résultat, on voit que $J(\delta', a', b') \times J(\delta, a, b)$ admet un unique sous-module irréductible qui est isomorphe à la même représentation.

En échangeant les rôles de $J(\delta, a, b)$ et $J(\delta', a', b')$ on obtient un résultat analogue pour $J(\delta, a', b') \times J(\delta, a, b)$.

En spécialisant en $s=0$, on a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} C^+ \arrow[r] \arrow[dr] & J(\delta, a, b) \times J(\delta', a', b') \arrow[d, shift right] \\ & J(\delta', a', b') \times J(\delta, a, b) \arrow[u, shift right] \end{tikzcd}$$

où toutes les flèches sont des opérateurs d'entrelacement normalisés (*cf.* I.2, remarque). Ainsi $N(\sigma, \Pi, \underline{s})$ et $N(\sigma, \sigma\Pi, \sigma\underline{s})$ sont définis en $\underline{s}=(0,0)$. On obtient l'irréductibilité de $J(\delta, a, b) \times J(\delta', a', b')$ grâce à (2) et ligne suivante.

On vient de prouver (iii) et la totalité du lemme si $b-b'+t-t' \notin \mathbf{Z}$.

Supposons maintenant que l'on ait : $b-b'+t-t' \in \mathbf{Z}$. Cela entraîne, en particulier, que l'on a : $b-b' \in 1/2\,\mathbf{Z}$. D'où : $(a+b)/2-(a'+b')/2 \in 1/2\,\mathbf{Z}$ (rappelons que $b-a$, $b'-a' \in \mathbf{N}$). Prouvons (i), par récurrence sur $(a+b)/2-(a'+b')/2$.

Dans le cas où $(a+b)/2-(a'+b')/2$ est nul, on sait que l'induite $J(\delta, a, b) \times J(\delta', a', b')$ est irréductible grâce à (1) et (([B], 8.2 (a)) et ([V], 17.6 et subséquent)). D'où, *a fortiori*, (i) et la surjectivité de l'opérateur d'entrelacement normalisé (*cf.* ci-dessus) :

$$C^+ \to J(\delta, a, b) \times J(\delta', a', b').$$

Supposons, maintenant, que l'on a : $(a+b)/2-(a'+b')/2>0$ (*i.e.* $\geqq 1/2$). On a donc soit : $b>b'$ soit $a>a'$. Supposons que l'on ait : $b>b'$, l'autre cas est analogue. Alors C^+ s'écrit sous la forme $\delta[b] \times C'^+$, où C'^+ est un module standard dominant $J(\delta, a, b-1) \times J(\delta', a', b')$, [$J(\delta, a, b-1)$ est la représentation triviale si $a=b$ (cas trivial)]. Par récurrence pour la première flèche, on vérifie que les opérateurs d'entrelacement normalisés écrits ci-dessous, sont surjectifs :

$$C^+ \simeq \delta[b] \times C'^+ \to \delta[b] \times J(\delta, a, b-1) \times J(\delta', a', b') \to J(\delta, a, b) \times J(\delta', a', b').$$

D'où, la première partie de (i), la seconde se prouve de la même façon, ou plus rapidement en passant aux contragrédientes.

(ii) Par symétrie, on fait la même hypothèse qu'en (i) et on garde les mêmes notations. On a alors le diagramme commutatif suivant pour tout $\underline{s}$:

$$\begin{tikzcd}
C^+(\underline{s}) \arrow[rr] \arrow[dr, "T(\underline{s})"] & & \delta[b+s]\times\dots\times\delta'[a'+s'] \\
& J(\delta, a, b)[s] \times J(\delta', a', b')[s'] \arrow[d, "N(\underline{s})"] \arrow[ur, dash] & \\
& J(\delta', a', b')[s'] \times J(\delta, a, b)[s] \arrow[d] & \\
& \delta'[a'+s']\times\dots\times\delta[b+s] &
\end{tikzcd}$$

On note $R(\underline{s})$, le composé de toutes ces flèches. On sait que $R(\underline{s})$ est un opérateur d'entrelacement normalisé (*cf.* I.2 remarque), défini en $\underline{s}=(0,0)$, même démonstration que I.2, lemme. La surjectivité de $T(\underline{s})$ déjà prouvée, en $\underline{s}=(0,0)$ entraîne alors que $N(\underline{s})$ est défini en $\underline{s}=(0,0)$. Ainsi, si $J(\delta, a, b)\times J(\delta', a', b')$ est irréductible, $N(\underline{s})$ est un isomorphisme en $\underline{s}=(0,0)$ et l'opérateur d'entrelacement inverse est donc aussi holomorphe en ce point. Réciproquement si les deux opérateurs d'entrelacement sont définis en $\underline{s}=(0,0)$, il résulte de (i), déjà prouvé que l'on a:

$$L(\delta[a], \dots, \delta[b], \delta[a'], \dots, \delta[b']) \text{ est facteur direct dans } J(\delta, a, b)\times J(\delta', a', b').$$

Utilisant (2), on obtient alors:

$$L(\delta[a], \dots, \delta[b], \dots, \delta[a'], \dots, \delta[b']) \simeq J(\delta, a, b)\times J(\delta', a', b').$$

Cela termine la preuve.

I.6. Entrelacements de 2 modules de Speh tordus. — *Le cas non archimédien.* — Ici, on suppose que F est non archimédien. On conserve les notations de I.5.

I.6.1. Soient δ, δ' des séries discrètes, ρ, ρ' des représentations cuspidales comme en I.3 et t, t' les paramètres de δ, δ'; on suppose que $\rho=\rho'$. Soit aussi $a\in\mathbf{R}$ tel que l'on ait: $a\equiv t+t' \bmod \mathbf{Z}$, $-(1+t+t')\leqq a< -|t-t'|$. Notons D, resp. d, l'unique sous-module irréductible de:

$$\rho[t']\times\rho[t'-1]\times\dots\times\rho[-t+a]$$

$$\rho[t+a]\times\dots\times\rho[-t'], \text{ resp.}$$

(pour $a=-(1+t+t')$, le segment $[-t', t+a]$ est vide, auquel cas il faut supprimer d dans l'énoncé ci-dessous).

Rappelons que Zélévinski a classifié les représentations irréductibles des groupes linéaires ([Z], th. 6.1). En particulier à une représentation cuspidale ρ disons de $GL(n, F)$ et à un ensemble de segments $\Delta_1, \dots, \Delta_r$, on associe une certaine représentation irréductible de GL(N, F), où:

$$N = n(l(\Delta_1) + \ldots + l(\Delta_r)),$$

$l(\Delta_i)$ désignant la longueur de Δ_i en un sens évident.

LEMME. — *Sous ces hypothèses, $\delta' \times \delta[a]$ est de longueur 2. Cette représentation possède un unique quotient irréductible, noté* L, *paramétrisé dans la classification de Zélévinski par la représentation cuspidale ρ et les segments*:

$$[i] \quad pour \quad -t+a \leqq i \leqq -t'-2 \quad et\,pour \quad t+a+2 \leqq i \leqq t',$$

$$[i, i+1] \quad pour \quad -t'-1 \leqq i \leqq t+a.$$

La représentation $\delta' \times \delta[a]$ admet $D \times d$ comme unique sous-module irréductible. L'image de l'opérateur $N(\sigma, \delta' \times \delta[a], 0)$ est le sous-quotient de Langlands, noté L. *L'image de l'opérateur suivant*:

$$\lim_{s_0 \to 0} s_0 N(\sigma, \delta[a] \times \delta', \underline{s})$$

est $D \times d$.

Il résulte de ([Z], th. 9.7) que $D \times d$ est irréductible et du lemme I.4 que les opérateurs ci-dessus sont bien définis.

Considérons d'abord le cas particulier $a = -(1+t+t')$. Le support des représentations pouvant intervenir dans $\delta' \times \delta[a]$ est alors l'ensemble des représentations cuspidales $\rho[i]$, pour $-1-t'-2t \leqq i \leqq t'$ (*cf.* [Z], prop. 1.10, pour la définition du support d'une représentation), chaque représentation n'intervenant qu'une fois. Zélévinski a introduit une involution $\pi \mapsto \pi^t$ dans le groupe de Grothendieck des représentations de longueur finie. On sait que si π est irréductible de support sans multiplicité, alors π^t est irréductible ([Z], 9.15). Pour démontrer que $\delta' \times \delta[a]$ est de longueur 2, il suffit de montrer que $\delta'^t \times \delta[a]^t$ est de longueur 2. Or δ'^t, resp. $\delta[a]^t$, sont classifiées par la représentation cuspidale ρ et les segments $[-t', t']$, resp. $[-t+a, t+a]$. L'assertion résulte alors de [Z], 7.1. Par construction $\delta' \times \delta[a]$ est un sous-module de l'induite $\rho[t'] \times \ldots \times \rho[-t+a]$ [rappelons que l'on suppose $a = -(1+t+t')$]. Comme D est l'unique sous-module irréductible de cette induite, c'est aussi l'unique sous-module irréductible de $\delta' \times \delta[a]$. Comme $\delta' \times \delta[a]$ est de longueur 2, elle admet un unique quotient irréductible dont on trouve la paramétrisation en en calculant le module de Jacquet et en appliquant [Z], 6.9.

Considérons le cas général, supposons que l'on a: $t \geqq t'$ (une démonstration analogue s'applique pour $t' \geqq t$). Posons pour simplifier:

$$N(\underline{s}) := N(\sigma, \delta[a] \times \delta', \underline{s}).$$

Introduisons l'unique sous-représentation irréductible $\tilde{\delta}$ de:

$$\rho[t'] \times \ldots \times \rho[t+a+1].$$

On a une injection naturelle :

$$\delta' \hookrightarrow \tilde{\delta} \times d.$$

Posons :

$$\delta'' := \delta[a] \otimes \tilde{\delta} \otimes d, \qquad \underline{s}'' := (s, s', s'),$$

introduisons les éléments de $\mathfrak{S}_3$:

$$\sigma_{2,3} : (1, 2, 3) \to (1, 3, 2)$$
$$\sigma_{1,2} : (1, 2, 3) \to (2, 1, 3).$$

On constate que le diagramme suivant est commutatif : (*cf.* début de la preuve de I. 4)

$$\begin{array}{ccc} \delta[a+s] \times \delta'[s'] & \xrightarrow{N(\underline{s})} & \delta'[s'] \times \delta[a+s] \\ \downarrow & & \downarrow \\ \delta[a+s] \times \tilde{\delta}[s'] \times d[s'] & \xrightarrow{A(\underline{s})} & \tilde{\delta}[s'] \times d[s'] \times \delta[a+s], \end{array}$$

où $A(\underline{s}) := N(\sigma_{2,3}, \sigma_{1,2}\delta'', \sigma_{1,2}\underline{s}'') \circ N(\sigma_{1,2}, \delta'', \underline{s}'')$.

D'après ([R], proposition 13), $\delta[a] \times d$ est irréductible, donc $N(\sigma_{2,3}, \sigma_{1,2}\delta'', \sigma_{1,2}\underline{s}'')$ est holomorphe en 0 [Lemme I. 2 (ii)] et $N(\sigma_{2,3}, \sigma_{1,2}\delta'', \sigma_{1,2}\underline{s}'')$ est un isomorphisme en 0. L'opérateur $N(\sigma_{1,2}, \delta'', \underline{s}'')$ se déduit de $N(\sigma, \delta[a] \otimes \tilde{\delta}, \underline{s})$. D'après le lemme I. 4, il a un pôle simple en $\underline{s} = 0$. Donc $A(\underline{s})$ aussi. Posons :

$$B := \lim_{s_0 \to 0} s_0 N(\sigma, \delta[a] \otimes \tilde{d}, \underline{s}),$$

$$A := \lim_{s_0 \to 0} s_0 A(\underline{s}),$$

$$N := \lim_{s_0 \to 0} s_0 N(\underline{s}).$$

On a $B \neq 0$ et B n'est pas un isomorphisme car :

$$N(\sigma, \tilde{\delta} \otimes \delta[a], 0) \circ B = 0,$$

et le premier opérateur est non nul [*cf.* I. 1 (2)]. Donc Im B est un sous-module propre non nul de $\tilde{\delta} \times \delta[a]$. Mais, à torsion près, cette induite relève du cas déjà traité. Elle n'a qu'un sous-module propre non nul, à savoir D. Donc $\operatorname{Im} B \simeq D$. Alors Im A est un module isomorphe à $D \times d$. Comme ce module est irréductible, que $\operatorname{Im}(N) \subset \operatorname{Im}(A)$, et que $N \neq 0$, ou en déduit que Im (N) est un module isomorphe à $D \times d$. Posons :

$$\tilde{N}(\underline{s}) := N(\sigma, \delta' \times \delta[a], \sigma\underline{s}),$$

notons L l'image de $\tilde{N}(0)$. Elle est irréductible car c'est le quotient de Langlands. Montrons que l'on a l'égalité :

$$\operatorname{Ker} \tilde{N}(0) = \operatorname{Im} N. \tag{1}$$

On a: $\tilde{\mathrm{N}}(0)\circ \mathrm{N}=0$, d'où $\mathrm{Im\,N} \subset \mathrm{Ker}\,\tilde{\mathrm{N}}(0)$. Écrivons:

$$\mathrm{N}(\underline{s})=(1/s_0)\,\mathrm{N}+\mathrm{N}_0+s_0\ldots$$

$$\tilde{\mathrm{N}}(\underline{s})=\tilde{\mathrm{N}}(0)+s_0\,\tilde{\mathrm{N}}'(0)+s_0^2\ldots$$

L'égalité: $\mathrm{N}(\underline{s})\circ\tilde{\mathrm{N}}(\underline{s})=\mathrm{id}$ implique:

$$\mathrm{N}\circ\tilde{\mathrm{N}}'(0)+\mathrm{N}_0\circ\tilde{\mathrm{N}}(0)=\mathrm{id};$$

d'où l'inclusion: $\mathrm{Ker}\,\tilde{\mathrm{N}}(0)\subset \mathrm{Im\,N}$, et (1).

On conclut alors, avec le lemme de I.5 et un calcul facile de module de Jacquet pour obtenir la paramétrisation dans la classification de Zélévinski.

I.6.2. On conserve les notations précédentes. On fixe $a\in\mathbf{N}$ et on reprend la notation $\mathrm{J}(\delta,-a,0)$ de I.5., *i.e.* $\mathrm{J}(\delta,-a,0)$ est le quotient de Langlands de: $\delta\times\delta[-1]\times\ldots\times\delta[-a]$.

Lemme. — *On pose:* $\pi:=\mathrm{J}(\delta,-a,0)\otimes\delta'[|t-t'|]$. *On a:*

(i) *L'opérateur* $\mathrm{N}(\sigma,\pi,\underline{s})$ *est holomorphe en* $\underline{s}=0$.

(ii) *La représentation induite* $\mathrm{I}(\pi)$ (cf. I.1) *est irréductible.*

Le couple $(\sigma\pi,\underline{s}=0)$ vérifie l'hypothèse du lemme I.2. Le (ii) de ce lemme implique l'équivalence de (i) et (ii). On va démontrer (i) par récurrence sur a. Pour $a=0$, il suffit d'appliquer le lemme I.4. Supposons l'assertion démontrée pour a et prouvons la pour $a+1$. Posons:

$$\delta'':=\delta'[|t-t'|],$$

$$\tilde{\pi}:=\delta\otimes\mathrm{J}(\delta,-a,-1)\otimes\delta[-a-1]\otimes\delta'',$$

$$\underline{s}'':=(s,s,s,s').$$

Introduisons les éléments suivants de $\mathfrak{S}_4$:

$$\sigma':\quad(1,2,3,4)\to(2,3,1,4),$$

$$\sigma'':\quad(1,2,3,4)\to(1,4,3,2),$$

$$\sigma_{1,2}:\quad(1,2,3,4)\to(2,1,3,4).$$

Par construction des quotients de Langlands, on a deux morphismes:

$$\delta\times\mathrm{J}(\delta,-a,-1)\times\delta[-a-1]\to J(\delta,-a-1,0)\to\delta[-a-1]\times\mathrm{J}(\delta,-a,-1)\times\delta,$$

le premier surjectif, le second injectif. On vérifie alors que le diagramme suivant est commutatif:

(1)

$$\begin{array}{ccc} J(\delta, -a-1, 0)[s] \times \delta''[s'] & \xrightarrow{N(\sigma, \pi_{a+1}, \underline{s})} & \delta''[s'] \times J(\delta, -a-1, 0)[s] \\ {\scriptstyle p}\uparrow & & \downarrow{\scriptstyle i} \\ \delta[s] \times J(\delta, -a, -1)[s] \times \delta[s-a-1] \times \delta''[s'] & \xrightarrow{A(\underline{s})} & \delta''[s'] \times \delta[s-a-1] \times J(\delta, -a, -1)[s] \times \delta[s], \end{array}$$

où

$$\pi_{a+1} := J(\delta, -a-1, 0) \otimes \delta'' \qquad \text{et} \qquad A(\underline{s}) := D(\underline{s}) \circ C(\underline{s}) \circ B(\underline{s}),$$

où l'on a posé:

$$B(\underline{s}) = N(\sigma', \tilde{\pi}, \tilde{\underline{s}}),$$
$$C(\underline{s}) = N(\sigma'', \sigma' \tilde{\pi}, \sigma' \tilde{\underline{s}}),$$
$$D(\underline{s}) := N(\sigma_{1,2}, \sigma'' \sigma' \tilde{\pi}, \sigma'' \sigma' \tilde{\underline{s}}).$$

Étudions l'holomorphie de $A(\underline{s})$ en $\underline{s}=0$.

(2) $B(\underline{s})$ est holomorphe en $\underline{s}=0$: il suffit d'appliquer I.1 (2).

(3) Notons w l'élément de plus grande longueur de $\mathfrak{S}_3$, posons:

$$\pi' := \delta \otimes J(\delta, -a, -1) \otimes \delta'', \qquad z := (s, s, s').$$

On a comme ci-dessus un diagramme commutatif:

$$\begin{array}{ccc} \delta[s] \otimes J(\delta, -a, -1)[s] \otimes \delta''[s'] & \xrightarrow{N(w, \pi', z)} & \delta''[s'] \times J(\delta, -a, -1)[s] \times \delta[s] \\ \downarrow & & \uparrow \\ J(\delta, -a, 0)[s] \times \delta''[s'] & \xrightarrow{N(\sigma, \pi', z)} & \delta''[s'] \times J(\delta, -a, 0)[s], \end{array}$$

où $\pi_a := J(\delta, -a, 0) \otimes \delta''$. Par hypothèse de récurrence, la flèche du bas est holomorphe en $\underline{s}=0$, non nulle d'après le lemme I.2 (iii), et, en $\underline{s}=0$, son image est le module irréductible: $\delta'' \times J(\delta, -a, 0)$. Ainsi l'opérateur $C(\underline{s})$ est holomorphe en $\underline{s}=0$, et l'image de $C(0)$ est

$$\delta[-a-1] \times \delta'' \times J(\delta, -a, 0).$$

(4) $D(s)$ se déduit de l'opérateur:

$$N(\sigma, \delta[-a-1] \otimes \delta'', \underline{s})$$

on peut lui appliquer le lemme I.4. Cet opérateur a au plus un pôle simple en $\underline{s}=0$. Il en a si et seulement si $\rho \simeq \rho'$ et

$$0 \leqq a \leqq t + t' - |t - t'|.$$

Si ces conditions ne sont pas vérifiées, (2), (3) et (4) impliquent l'holomorphie de $A(\underline{s})$, donc celle de $N(\sigma, \pi_{a+1}, \underline{s})$ d'après le diagramme (1). Supposons donc ces conditions vérifiées. Posons:

$$N_0 := \lim_{s_0 \to 0} s_0 N(\sigma, \delta[-a-1] \times \delta'', \underline{s}), \qquad D := \lim_{s_0 \to 0} s_0 D(\underline{s}).$$

D'après le lemme I.6.1, on a: $\operatorname{Im} N_0 \simeq d \times d'$ où d' resp. d, est l'unique sous-module irréductible de:

$$\rho[t' + |t - t'|] \times \ldots \times \rho[-t-a-1],$$
$$\text{resp. } \rho[t-a-1] \times \ldots \times \rho[-t' + |t-t'|].$$

On en déduit que l'on a: $\operatorname{Im} D \circ C(0) \simeq d \times d' \times J(\delta, -a, 0)$. L'opérateur $A(\underline{s})$ a au plus un pôle simple [d'après (2), (3), (4)], donc aussi $N(\sigma, \pi_{a+1}, \underline{s})$. Posons:

$$A := \lim_{s_0 \to 0} s_0 A(\underline{s}), \qquad N := \lim_{s_0 \to 0} s_0 N(\sigma, \pi_{a+1}, \underline{s}).$$

On a les égalités:

$$A = D \circ C(0) \circ B(0) = i \circ N \circ p,$$

d'après (1). Alors $i \circ N$ est un morphisme de G-modules, où G est le groupe linéaire ambiant, défini sur π_{a+1}, à valeurs en tout cas dans $\operatorname{Im}(D \circ C(0))$. Nous allons montrer:

(5) $$\operatorname{Hom}_G(\pi_{a+1}, d \times d' \times J(\delta, -a, 0)) = \{0\}.$$

Il résulte de (5), que $N = 0$, *i. e.* $N(\sigma, \pi_{a+1}, \underline{s})$ est holomorphe en $\underline{s} = 0$, ce que l'on voulait démontrer.

Prouvons (5). Pour $i := 0, \ldots, a$, la représentation $d' \times \delta[-j]$ est irréductible d'après ([R], proposition 13). L'opérateur $N(\sigma, d' \otimes \delta[-j], \underline{s})$ est donc holomorphe en $s = 0$ (*cf.* lemme I.2) et $N(\sigma, d' \otimes \delta[-j], 0)$ est un isomorphisme. Considérons le diagramme commutatif:

$$\begin{array}{ccc} d'[s] \times \delta[s'] \times \delta[-1+s'] \times \ldots \times \delta[-a+s'] & \to & \delta[s'] \times \ldots \times \delta[-a+s'] \times d'[s] \\ \downarrow & & \downarrow \\ d'[s] \times J(\delta, -a, 0)[s'] & \to & J(\delta, -a, 0)[s'] \times d'[s]. \end{array}$$

La flèche du haut est un opérateur d'entrelacement produit des opérateurs $N(\sigma, d' \otimes \delta[-j], \underline{s})$. C'est donc un isomorphisme en $\underline{s} = 0$. Alors $N(\sigma, d' \otimes J(\delta, -a, 0), \underline{s})$ est holomorphe en $\underline{s} = 0$ et sa valeur est un isomorphisme. Donc:

$$d' \times J(\delta, -a, 0) \simeq J(\delta, -a, 0) \times d'.$$

D'autre part:

$$J(\delta, -a+1, 0) \times J(\delta, -a-1, -a) \to J(\delta, -a-1, 0).$$

Pour démontrer (5), il suffit donc de démontrer que l'on a:

(6) $$\mathrm{Hom}_G(J(\delta, -a+1, 0) \times J(\delta, -a-1, -a) \times \delta'', d \times J(\delta, -a, 0) \times d') = \{0\}.$$

Notons P le sous-groupe parabolique standard dont le Lévi M n'a que des blocs $GL(n, F)$, où n est tel que ρ est une représentation de $GL(n, F)$. Notons U le radical unipotent de P. D'autre part, notons R le sous-groupe de Lévi dont $d \otimes J(\delta, -a, 0) \otimes d'$ est une représentation. Par réciprocité de Frobenius et exactitude du foncteur de Jacquet, et parce que les représentations sont supportées par M, il y a une injection de l'espace intervenant dans (6) dans:

(7) $$\mathrm{Hom}_M((J(\delta, -a+1, 0) \times J(\delta, -a-1, -a) \times \delta'')_U, (d \otimes J(\delta, -a, 0) \otimes d')_{U \cap R}),$$

où les indices U, $U \cap R$ signifient que l'on a pris les modules de Jacquet. Le module de Jacquet de d' est:

$$\rho[t' + |t-t'|] \otimes \ldots \otimes \rho[-t-a-1],$$

on en déduit que les sous-quotients de $(d \otimes J(\delta, -a, 0) \otimes d')_{U \cap R}$ sont de la forme:

(8) $$\rho[**] \otimes \ldots \otimes \rho[**] \otimes \rho[-t-a-1].$$

On sait calculer le semi-simplifié du module de Jacquet d'une représentation induite ([Z], I. 6). Rappelons le résultat dans un cas simple qui nous suffit. Pour $i=1, \ldots, r$, soit π_i une représentation de longueur finie de $GL(nm_i, F)$. Soit $\pi = \pi_1 \times \ldots \times \pi_r$ la représentation induite de $GL(nm, F)$, où $m = m_1 + \ldots + m_r$. Notons comme ci-dessus $P = MU$ le sous-groupe parabolique standard de $GL(nm, F)$ dont le Lévi M n'a que des blocs $GL(n, F)$. Pour $i=1, \ldots, r$,soit $P_i = M_i U_i$ le sous-groupe analogue de $GL(nm_i, F)$. Supposons que pour tout i, le support cuspidal de π_i soit formé de représentations cuspidales de $GL(n, F)$. Pour $i=1, \ldots, r$ soit $\rho_1^i \otimes \ldots \otimes \rho_{m_i}^i$ un sous-quotient irréductible de $(\pi_i)_{U_i}$, considérons la représentation:

$$R = \rho_1^1 \otimes \ldots \otimes \rho_{m_1}^1 \otimes \rho_1^2 \otimes \ldots \otimes \rho_{m_2}^2 \otimes \ldots \otimes \rho_1^r \otimes \ldots \otimes \rho_{m_r}^r$$

de $M_1 \times \ldots \times M_r$ que l'on identifie à M. Soit enfin $w \in \mathfrak{S}_m$ croissant sur chaque intervalle $\{m_1 + \ldots + m_{i-1} + 1, \ldots, m_1 + \ldots + m_i\}$. Alors wR est un sous-quotient irréductible de π_U et tout sous-quotient irréductible de π_U s'obtient par ce procédé. Or aucune des représentations: $J(\delta, -a+1, 0)$, $J(\delta, -a-1, -a)$, δ'' ne contient dans son module de Jacquet une représentation de la forme (8). Pour $J(\delta, -a+1, 0)$ et δ'' c'est évident car $\rho[-t-a-1]$ n'appartient pas à leur support. Pour $J(\delta, -a-1, -a)$, on utilise le lemme I.6.1 qui décrit la paramétrisation de cette représentation. On en déduit que $J(\delta, -a-1, -a)$ est un sous-module de l'induite suivante:

$$J(\rho, -1, 0)[t-a] \times \ldots \times J(\rho, -1, 0)[-t-a],$$

dont le module de Jacquet ne contient pas de termes de la forme (8). On en déduit que l'espace (7) est nul. D'où (6). Comme on l'a dit, cela achève la démonstration.

I.6.3. On conserve les notations précédentes. Soient a, b, a', $b' \in \mathbf{R}$ tels que $[a, b]$, $[a', b']$ soient des segments. On dit que $[a, b]$ domine $[a', b']$, ce que l'on note:

$$[a, b] \geqq [a', b'],$$

si l'on a:

$$b > b' \qquad \text{ou} \qquad b = b' \quad \text{et} \quad a \geqq a'.$$

On dit que les triplets: (δ, a, b), (δ', a', b') sont liés si les conditions (1), (2) et l'une des conditions (3) (i), (3) (ii), ci-dessous sont vérifiées:

(1) $\rho \simeq \rho'$;

(2) $a - a' \equiv t - t' \bmod \mathbf{Z}$;

(3) (i) $b > b' + |t - t'|$, $a > a' + |t - t'|$, $a - b' \leqq 1 + t + t'$;

(3) (ii) condition symétrique en échangeant les deux segments.

Quand $t = t' = 0$, on retrouve les définitions de ([Z], 4.1). On définit $\mathrm{J}(\delta, a, b)$ et $\mathrm{J}(\delta', a', b')$ comme en I.5. Alors on a:

LEMME. — *Soient* $[a, b]$, $[a', b']$ *deux segments, posons*:

$$\pi := \mathrm{J}(\delta, a, b) \otimes \mathrm{J}(\delta', a', b')$$

(i) *Supposons:* $b \geqq b' - |t - t'|$, *ou* $a \geqq a' - |t - t'|$. *Alors* $\mathrm{N}(\sigma, \pi, \underline{s})$ *est holomorphe en* $\underline{s} = 0$.

(ii) *Supposons que les triplets* (δ, a, b), (δ', a', b') *ne sont pas liés. Alors* π *est irréductible et* $\mathrm{N}(\sigma, \pi, \underline{s})$ *et* $\mathrm{N}(\sigma, \sigma\pi, \sigma\underline{s})$ *sont holomorphes en* $\underline{s} = 0$.

Utilisons le plongement suivant:

$$\mathrm{J}(\delta, a, b) \hookrightarrow \delta[a] \times \ldots \times \delta[b]$$

et son analogue pour $\mathrm{J}(\delta', a', b')$. On a un diagramme commutatif:

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{J}(\delta, a, b)[s] \times \mathrm{J}(\delta', a', b')[s'] & \xrightarrow{\mathrm{N}(\sigma, \pi, \underline{s})} & \mathrm{J}(\delta', a', b')[s'] \times \mathrm{J}(\delta, a, b)[s] \\ \downarrow & & \downarrow \\ \delta[a+s] \times \ldots \times \delta[b+s] \times \delta'[a'+s'] \times \ldots \times \delta'[b'+s'] & \rightarrow & \delta'[a'+s'] \times \ldots \times \delta[b+s], \end{array}$$

où la flèche du bas est un produit d'opérateurs normalisés de la forme $\mathrm{N}(\sigma, \delta[j] \otimes \delta'[j'], \underline{s})$ pour $a \leqq j \leqq b$, $a' \leqq j' \leqq b'$ (et bien sûr $j - a$, $j' - a' \in \mathbf{Z}$). Si aucun de ces opérateurs n'a de pôle en $\underline{s} = 0$, *a fortiori* $\mathrm{N}(\sigma, \pi, \underline{s})$ n'en a pas non plus. Utilisons le lemme I.4. On voit qu'il existe un couple (j, j') tel que l'opérateur ait un pôle si et seulement si les conditions (1) (2) ci-dessus et (4) ci-dessous sont vérifiées:

(4) $$a < b' - |t - t'|, \qquad a' - b \leqq 1 + t + t'.$$

Si (1) ou (2) n'est pas vérifiée, $N(\sigma, \pi, \underline{s})$ est holomorphe en $\underline{s}=0$ et $N(\sigma, \sigma\pi, \sigma\underline{s})$ aussi par symétrie. Cela démontre le lemme dans ce cas [l'assertion d'irréductibilité de (ii) résulte du lemme I.5 (ii)]. On suppose désormais (1) et (2) vérifiées.

Démontrons que $N(\sigma, \pi, \underline{s})$ est holomorphe en $\underline{s}=0$ si $b \geqq b' - |t-t'|$ par récurrence sur $b'-a'$. Supposons d'abord que l'on ait $a'=b'$. Si $a \geqq b' - |t-t'|$, (4) n'est pas vérifiée, d'où l'assertion.

Si $a < b' - |t-t'|$, on a un plongement:

$$J(\delta, a, b) \subsetneq J(\delta, a, c) \times J(\delta, c+1, b)$$

où:

$$c := b' - |t-t'|$$

[le terme $J(\delta, c+1, b)$ disparaît si $b = b' - |t-t'|$]. Posons:

$$\pi'' := J(\delta, a, c) \otimes J(\delta, c+1, b) \otimes \delta'[b'],$$
$$\underline{s}'' := (s, s, s').$$

On a un diagramme commutatif: (pour $a'=b'$, $J(\delta', a', b') = \delta'[b']$)

$$\begin{array}{ccc}
J(\delta, a, b)[s] \times \delta'[b'+s'] & \xrightarrow{N(\sigma, \pi, \underline{s})} & \delta'[b'+s'] \times J(\delta, a, b)[s] \\
\downarrow & & \downarrow \\
J(\delta, a, c)[s] \times J(\delta, c+1, b)[s] \times \delta'[b'+s'] & \to & \delta'[b'+s'] \times J(\delta, a, c)[s] \times J(\delta, c+1, b)[s]
\end{array}$$

où la flèche du bas est:

$$N(\sigma_{1,2}, \sigma_{2,3}\pi'', \sigma_{2,3}\underline{s}'') \circ N(\sigma_{2,3}\pi'', \underline{s}'')$$

(*cf.* I.5 pour la définition de $\sigma_{1,2}$, $\sigma_{2,3}$). L'opérateur $N(\sigma_{2,3}, \pi'', \underline{s}'')$ est holomorphe en $\underline{s}=0$ (il relève du cas: $a \geqq b' - |t-t'|$). L'opérateur $N(\sigma_{1,2}, \sigma_{2,3}\pi'', \sigma_{2,3}\underline{s}'')$ est justiciable du lemme I.6.2 à torsion près. Il est donc holomorphe en $\underline{s}=0$, et donc $N(\sigma, \pi, \underline{s})$ aussi. Supposons maintenant $a' < b'$. On utilise le plongement suivant:

$$J(\delta', a', b') \subsetneq \delta'[a'] \times J(\delta', a'+1, b').$$

Posons:

$$\pi'' := J(\delta, a, b) \otimes \delta'[a'] \otimes J(\delta', a'+1, b'), \qquad \underline{s}'' := (s, s', s').$$

On a encore un diagramme commutatif qui nous ramène à considérer l'opérateur:

$$N(\sigma_{2,3}, \sigma_{1,2}\pi'', \sigma_{1,2}\underline{s}'') \circ N(\sigma_{1,2}, \pi'', \underline{s}'').$$

Par hypothèse de récurrence, chacun de ces opérateurs est holomorphe en $\underline{s}=0$, d'où l'holomorphie de $N(\sigma, \pi, \underline{s})$.

Dualisons le résultat obtenu. Toujours pour: $b \geqq b' - |t-t'|$, $\mathrm{N}(\sigma, \sigma\check{\pi}, -\sigma \underline{s})$, ou encore: $\mathrm{N}(\sigma, \sigma\check{\pi}, \underline{s})$, est holomorphe en $\underline{s}=0$ [*cf.* I. (4)]. Mais l'on a:

$$\sigma\check{\pi} = \mathrm{J}(\check{\delta}', -b', -a') \otimes \mathrm{J}(\check{\delta}, -b, -a).$$

Par un changement de variables évident, on obtient l'holomorphie de $\mathrm{N}(\sigma, \pi, \underline{s})$ quand $a \geqq a' - |t-t'|$, ce qui achève la démonstration de (i).

Supposons que les triplets (δ, a, b), (δ', a', b') ne sont pas liés. Montrons que $\mathrm{N}(\sigma, \pi, \underline{s})$ est holomorphe en $\underline{s}=0$. L'holomorphie de $\mathrm{N}(\sigma, \sigma\pi, \sigma \underline{s})$ en résultera par symétrie. Comme on l'a expliqué, on peut supposer vérifiées (1), (2) et (4). Alors (3) (ii) n'est pas vérifiée, puisque les triplets ne sont pas liés. Grâce à (4), on a nécessairement $b' \leqq b + |t-t'|$ ou $a' \leqq a + |t-t'|$. Alors l'holomorphie résulte de (i). Cela achève la démonstration.

I. 7. Entrelacements de deux modules de Spech tordus. — *Le cas archimédien.* — Ici $\mathrm{F}=\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$, on reprend les notations: $[a, b]$, $[a', b']$ des segments, δ, δ' des séries discrètes, t, t' leurs paramètres, $\mathrm{J}(\delta, a, b)$, $\mathrm{J}(\delta', a', b')$ des paragraphes précédents. Dans le cas archimédien, il est plus facile de prouver des résultats d'irréductibilité plutôt que l'holomorphie de certains opérateurs d'entrelacement; on renvoie à I. 5 pour l'équivalence entre ces résultats.

On dit que $[a, b]$ domine $[a', b']$ sous les mêmes hypothèses qu'en I. 6. 3 et on dit que (δ, a, b) et (δ', a', b') sont liés si la condition (1) et l'une des conditions (2) (i) ou (2) (ii) ci-dessous sont vérifiées:

(1) $a - a' \equiv t - t' \bmod \mathbf{Z}$;

(2) (i) $b \geqq b' + |t-t'| + 1$, $a \geqq a' + |t-t'| + 1$;

(2) (ii) la condition symétrique en échangeant les segments.

Cette définition diffère de celle du cas p-adique, pour des raisons évidentes.

Lemme. — $\mathrm{J}(\delta, a, b) \times \mathrm{J}(\delta', a', b')$ *est une représentation irréductible si* (δ, a, b) *et* (δ', a', b') *ne sont pas liés.*

Il est vraisemblable que les démonstrations de I. 6 s'adaptent au cas archimédien (l'argument sur les modules de Jacquet étant remplacé par un argument sur l'annulateur dans l'algèbre enveloppante). Toutefois il faudrait savoir décomposer les induites dans GL (3) et GL (4) ce que nous n'avons pas fait. On présente donc une autre démonstration, beaucoup moins élémentaire (c'est le moins que l'on puisse dire) mais peut-être un peu plus générale. Cette méthode a été développée par Vogan (*cf.* [V. 3]) pour prouver les résultats d'irréductibilité dont il avait besoin pour classifier les représentations unitaires de GL (N, F) (F archimédien). Il faut d'abord remarquer que le résultat cherché est symétrique en δ et δ' alors que les démonstrations de ([V,3]) (et donc la démonstration qui suit) dépend de l'ordre entre les paramètres de δ et δ'. Il faut donc commencer par réduire un peu le problème. D'abord, grâce à I. 5, on vérifie que si (1) n'est pas vérifié alors $\mathrm{J}(\delta, a, b) \times \mathrm{J}(\delta', a', b')$ est irréductible. Ensuite, comme en I. 6. 3, on vérifie qu'il suffit de prouver que $\mathrm{J}(\delta, a, b) \times \mathrm{J}(\delta', a', b')$ est irréductible quand la condition suivante est réalisée :

$$(c)\,|b-b'|\leqq|t-t'|,\qquad b, b'\in\mathbf{R}.$$

On supposera donc dans la suite que (c) est vérifiée. On pose :

$$\mathrm{L}:=\mathrm{L}(\delta[a], \ldots, \delta[b], \delta'[a'], \ldots, \delta'[b']).$$
$$\pi:=\mathrm{J}(\delta, a, b)\otimes \mathrm{J}(\delta', a', b').$$

Comme dans ([V,3]), il faut commencer par traiter le cas où δ et δ' sont des caractères (dans ce cas les données θ-stables associées à L par Vogan ne donnent pas de renseignements supplémentaires). Dans ce cas on prouve que les opérateurs d'entrelacements, notés $\mathrm{N}(\sigma, \pi, \underline{s})$ et $\mathrm{N}(\sigma, \sigma\pi, \sigma\underline{s})$ (*cf.* I.5) sont définis en $s=0$.

On pose encore : $s_0:=s-s'$, on écrit δ et δ' comme en I.3 d'où t, t', ε, ε'. On commence par calculer les facteurs de normalisations correspondant à $\mathrm{N}(\sigma, \pi, \underline{s})$ et $\mathrm{N}(\sigma, \sigma\pi, \sigma\underline{s})$. On vérifie que l'on a :

$$r(\sigma, \pi, \underline{s})=\prod_{a'\leqq j\leqq b'}\mathrm{L}(\delta[a]\times\overline{\delta}'[-j], s_0)/\mathrm{L}(\delta[b]\times\overline{\delta}'[-j], s_0+1)$$
$$=\prod_{a\leqq i\leqq b}\mathrm{L}(\delta[i]\times\overline{\delta}'[-b'], s_0)/\mathrm{L}(\delta[i]\times\overline{\delta}'[-a'], s_0+1).$$

On obtient évidemment $r(\sigma, \sigma\pi, \sigma\underline{s})$ en changeant s_0 en $-s_0$ et en échangeant les triplets (δ, a, b) et (δ', a', b'). D'après Olshanskii (*cf.* [O], 5), les pôles de l'opérateur d'entrelacement non normalisé $\mathrm{M}(\sigma, \pi, \underline{s})$ sont ceux de la fonction :

$$\prod_{1\leqq k\leqq \inf(b-a+1,\, b'-a'+1)}\mathrm{L}(\delta[(a+b)/2]\times\overline{\delta}'[-(a'+b')/2], s_0+k-(b-a+b'-a')/2-1)$$
$$=\prod_{a\leqq i\leqq b}\mathrm{L}(\delta[i]\times\overline{\delta}'[-b'], s_0)\qquad \text{si}\quad b-a\leqq b'-a',$$
$$=\prod_{a'\leqq j\leqq b'}\mathrm{L}(\delta[a]\times\overline{\delta}'[-j], s_0)\qquad \text{si}\quad b'-a'\leqq b-a.$$

Les pôles de $\mathrm{M}(\sigma, \sigma\pi, \sigma\underline{s})$ s'obtiennent en changeant s_0 en $-s_0$ et en échangeant les triplets (δ, a, b) et (δ', a', b')). Par symétrie, on suppose que l'on a :

$$(1)\qquad b-a\geqq b'-a'.$$

On en déduit que $\mathrm{N}(\sigma, \pi, \underline{s})$ a un pôle en $\underline{s}=0$ seulement si l'on a :

$$(2)\qquad b-b'+|\varepsilon-\varepsilon'|+1\in-\mathbf{N},$$

et que $\mathrm{N}(\sigma, \sigma\pi, \sigma\underline{s})$ a un pôle en $s=0$ seulement si l'on a

$$(3)\qquad a'=a+|\varepsilon-\varepsilon'|+1\in-\mathbf{N}.$$

Pour avoir des pôles, il faut donc : soit $b<b'$ soit $a'<a$. Si $b<b'$, on voit, grâce à l'hypothèse (1) que (3) n'est pas vérifiée et il faut donc que l'on ait :

$$a'-a\geqq b'-b\geqq|\varepsilon-\varepsilon'|+1.$$

Si $b \geqq b'$ alors (2) n'est pas vérifiée et il faut encore,

$$b-b' \geqq a-a' \geqq |\varepsilon-\varepsilon'|+1.$$

D'où le lemme dans ce cas. Remarquons que le cas où $F=\mathbf{C}$ est maintenant complètement réglé. On supposera donc, dans la suite que $F=\mathbf{R}$ que δ n'est pas un caractère et que l'on a $t \geqq t'$. La démonstration qui suit a des variantes suivant que $t'(t-t') \neq 0$. Le principe général étant le même, on va essayer de traiter tous les cas simultanément mais il faut quelques notations:

$$d=1 \text{ si } \delta' \text{ est un caractère unitaire, } d=2 \text{ sinon,}$$
$$n=2\,(b-a+1)+d\,(b'-a'+1),$$
$$i.e.\ \mathrm{J}\,(\delta, a, b) \times \mathrm{J}\,(\delta', a', b') \text{ est une représentation de } \mathrm{GL}\,(n, \mathbf{R}).$$

On fixe une décomposition de $\mathbf{R}^n$, sous la forme: $\underline{\mathrm{W}}_1 \oplus \underline{\mathrm{W}}_2$ en deux sous-espaces vectoriels de dimension $2(b-a+1)$ et $d(b'-a'+1)$ respectivement. On pose pour $i=1, 2, \mathrm{W}_i := \underline{\mathrm{W}}_i \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C}$ et on fixe aussi des décompositions:

$$\mathrm{W}_i = \mathrm{W}_i^- \oplus \mathrm{W}_i^+ \qquad \text{pour} \quad i=1,2 \quad \text{si } d \neq 1 \qquad \text{et pour} \quad i=1 \quad \text{si } d=1,$$

telles que W_i^- et W_i^+ soient conjugués par l'élément non trivial de $\mathrm{Gal}(\mathbf{C}/\mathbf{R})$. On note $\mathfrak{q}_0$ la sous-algèbre parabolique de g, stabilisant le drapeau suivant:

$$\mathrm{W}_1^+ \subset \mathrm{W}_1^+ \oplus \mathrm{W}_2^+ \subset \mathrm{W}_1^+ \oplus \mathrm{W}_2 \subset \mathrm{W}_1 \oplus \mathrm{W}_2 \qquad \text{si} \quad d=2,$$
$$\mathrm{W}_1^+ \subset \mathrm{W}_1^+ \oplus \mathrm{W}_2 \subset \mathrm{W}_1 \oplus \mathrm{W}_2 \qquad \text{si} \quad d=1.$$

On note $\mathfrak{q}$ la sous-algèbre parabolique de g, stabilisant le drapeau suivant:

$$\mathrm{W}_1^+ \subset \mathrm{W}_1^+ \oplus \mathrm{W}_2 \subset \mathrm{W}_1 \oplus \mathrm{W}_2 \qquad \text{si} \quad t \neq t',$$
$$\mathrm{W}_1^+ \oplus \mathrm{W}_2^+ \subset \mathrm{W}_1 \oplus \mathrm{W}_2 \qquad \text{si} \quad t=t'.$$

On vérifie que ces sous-algèbres sont θ-stables, où θ est l'involution de Cartan qui sur $\mathfrak{g}$ s'écrit: $\mathrm{X} \mapsto -{}^t\mathrm{X}$ et que l'on a: [*cf.* [V, 3], 6.7(3)].

La sous-algèbre parabolique θ-stable associée par Vogan à L (dans [V, 1], 6.5) coïncide avec $\mathfrak{q}$ si $t=t'$ et avec $\mathfrak{q}_0$ si $t \neq t'$ (*cf.* ([V, 3], 6.7).

On note M_0 et M les sous-groupes de $\mathrm{GL}(n, \mathbf{R})$ normalisant $\mathfrak{q}_0$ et $\mathfrak{q}$ respectivement. On a:

$$\mathrm{M}_0 \simeq \mathrm{GL}(b-a+1, \mathbf{C}) \times \mathrm{GL}(b'-a'+1, \mathrm{F}') \quad \text{où } \mathrm{F}'=\mathbf{R} \quad \text{si } d=1 \quad \text{et} \quad \mathrm{F}'=\mathbf{C} \quad \text{si } d=2,$$
$$\mathrm{M} \simeq \mathrm{GL}(b-a+1), \mathbf{C}) \times \mathrm{GL}(b'-a'+1, \mathbf{R}) \quad \text{si } t \neq t'$$
$$\simeq \mathrm{GL}(n/2, \mathbf{C}) \quad \text{si } t=t'.$$

On pose aussi: $\mathfrak{m} := \mathrm{Lie}(\mathrm{M}) \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C}$. On note encore $\mathrm{R}_{\mathfrak{q}}^*$ et $\mathrm{R}_{\mathfrak{q}_0}^*$ les foncteurs d'induction cohomologique pour $\mathrm{GL}(n, \mathbf{R})$, définis (*cf.* [V,3], 6) grâce à $\mathfrak{q}$ et $\mathfrak{q}_0$ et $\mathrm{R}_{\mathfrak{q}_0, \mathrm{M}}^*$ celui défini pour M par $\mathfrak{q}_0 \cap \mathfrak{m}$. On a par exemple:

$R_{\mathfrak{q}}^*$ représente les dérivées du foncteur qui à Y, module de Harish-Chandra pour M associe:

$$\mathrm{Hom}_{U(\mathfrak{q})}(U(\mathfrak{g}), Y \otimes \tilde{\tau})_{K-\mathrm{fini}}$$

où K est le compact maximal de $GL(n, \mathbf{R})$ ensemble des points fixes pour θ, (les dérivées portent sur le foncteur: K-fini) et où $\tilde{\tau}$ est un caractère de M défini en ([V,3], 8.6.1). Cette normalisation diffère de ([V,2] et [V,1]), il faudra en tenir compte quand on renverra à ces travaux, mais elle a l'avantage d'éviter des torsions sur les caractères infinitésimaux.

On note χ le caractère de $\mathbf{C}^*$ défini par:

$$z \mapsto \chi(z) = (z/\bar{z})^t$$

et χ' le caractère de $\mathbf{C}^*$ (si $d=2$) défini de façon analogue en remplaçant t par t' et coïncidant avec δ' si $d=1$ (*i. e.* si δ' est un caractère).

On définit de façon usuelle:

$$J(\chi, a, b), J(\chi', a', b').$$

On remarque que $J(\chi, a, b) \otimes J(\chi', a', b')$ s'identifie naturellement à un caractère de M_0 et donc de $\mathfrak{q}_0$. On note S (resp. S_0) le plus grand entier tel que $R_{\mathfrak{q}}^j \neq 0$ (resp. $R_{\mathfrak{q}_0}^j \neq 0$ [*cf.* ([V,3], 6.3)]. Montrons que l'on a:

$$(4)\qquad \begin{aligned} &R_{\mathfrak{q}_0, M}^j(J(\chi, a, b) \otimes J(\chi', a', b')) = 0 \qquad \text{si} \quad j \neq S_0 - S,\\ &R_{\mathfrak{q}_0, M}^{S_0 - S}(J(\chi, a, b) \otimes J(\chi', a', b')) \simeq J(\chi, a, b) \otimes J(\delta', a', b') \qquad \text{si} \quad t \neq t',\\ &R_{\mathfrak{q}_0, M}^{S_0 - S}(J(\chi, a, b) \otimes J(\chi', a', b')) \simeq J(\chi, a, b) \times J(\chi', a', b') \quad \text{si} \quad t = t'. \end{aligned}$$

Il n'y a rien à prouver si $\mathbf{q} = \mathbf{q}_0$. On suppose donc qu'il n'en est pas ainsi, *i. e.* $d=2$. Supposons d'abord que l'on a:

$$t \neq t'.$$

Dans ce cas $R_{\mathfrak{q}_0, M}^*$ s'identifie naturellement au foncteur d'induction pour $GL(2(b'-a'+1), \mathbf{R})$ défini grâce à la sous-algèbre parabolique de $\mathrm{end}(\mathbf{C}^{2(b'-a'+1)})$, notée $\bar{\mathfrak{q}}_0$ stabilisant le drapeau suivant:

$$W_2^+ \subset W_2.$$

On a, pour tout j:

$$R_{\mathfrak{q}_0, M}^j(J(\chi, a, b) \otimes J(\chi', a', b')) = J(\chi, a, b) \otimes R_{\bar{\mathfrak{q}}_0}^j(J(\chi', a', b').$$

Il faut donc vérifier que l'on a:

$$\begin{aligned} R_{\bar{\mathfrak{q}}_0}^j(J(\chi', a', b')) &= 0 \qquad \text{si} \quad j \neq S_0 - S,\\ &= J(\delta', a', b') \qquad \text{si} \quad j = S_0 - S. \end{aligned}$$

Ces assertions sont essentiellement prouvées dans ([V, 3]) mais elles ne sont malheureusement pas écrites sous cette forme. On peut les prouver de la façon suivante:

si $t' \geqslant 0$ le résultat principal de ([V,2]) donne: les assertions de nullité, l'irréductibilité de $R_{q0}^{S_0-S}(J(\chi', a', b'))$ et le fait que cette représentation tordue par le caractère $|\det|^{(a'+b')/2}$ est unitaire. On reconnaît alors $R_{q0}^{S_0-S}(J(\chi', a', b'))$ à l'aide de la classification des représentations unitaire, de son « K »-type minimal et de son caractère infinitésemal.

Si t' n'est plus très grand, on obtient les résultats cherchés par translation, nous ferons cette démonstration plus loin [*cf.* (13) et subséquent].

On suppose maintenant que l'on a:

$$t = t';$$

dans ce cas $R_{q0, M}^{*}$ s'identifie au foncteur d'induction (usuel) pour $GL(n/2, \mathbf{C})$ à partir d'un sous-groupe parabolique de Levi $GL(b-a+1, \mathbf{C}) \times GL(b'-a'+1), \mathbf{C})$. On a, ici, $S_0 - S = 0$; le calcul de $R_{q0, M}^{S_0-S}$ est alors évident et les assertions de nullité sont connues (*cf.* ([V,1], 6.3.5).

On remarque que, grâce aux hypothèses et à la partie du lemme déjà prouvée, on a:

$R_{q0, M}^{S_0-S}(J(\chi, a, b) \otimes J(\chi', a', b'))$ est un module de Harish-Chandra irréductible pour M.

Notons le Y pour simplifier les notations. Grâce à (4) et à ([V,1], 6.3.6), on a:

(7) $$R_{q0}^{j+S_0-S}(J(\chi, a, b) \otimes J(\chi', a', b')) \simeq R_q^j(Y) \quad \text{pour tout } j.$$

On sait (*cf.* ([V,3], 2^e assertion de 6.5 (*c*), « dualisée ») et (7) si $t \neq t'$) que l'on a:

(8) L est un sous-module de $R_q^S(Y)$.

En outre le K-type minimal de L intervient avec multiplicité un dans $R_q^S(Y)$; il en est donc de même pour L. On va montrer que l'on a:

(9) $R_q^S(Y)$ contient $J(\delta, a, b) \times J(\delta', a', b')$ et $J(\delta', a', b') \times J(\delta, a, b)$ comme sous-quotients.

Admettons, momentanément (9) et terminons la démonstration. Grâce à (8) et subséquent, L, qui intervient dans $J(\delta, a, b) \times J(\delta', a', b')$ et $J(\delta', a', b') \times J(\delta, a, b)$ est nécessairement un sous-module de ces deux représentations. Or pour au moins l'une des deux, il en est l'unique quotient irréductible [*cf.* I. 5 (i)], ce qui entraîne qu'il coïncide avec cette représentation. Cela est évidemment la conclusion cherchée.

Il reste donc à prouver (9). Pour cette preuve, on a aussi besoin de prouver:

(10) $$R_q^j(Y) = 0 \qquad \text{si} \quad j \neq S.$$

On note λ le caractère infinitésimal de $J(\delta, a, b) \times J(\delta', a', b')$, λ' celui de Y et λ'' celui de $J(\chi, a, b) \otimes J(\chi', a', b')$. On identifie λ'' à un élément de $\mathbf{C}^n$ modulo le groupe de Weyl de

M_0 *i. e.* modulo $(\mathfrak{S}_{b-a+1})^2 \times (\mathfrak{S}_{b'-a'+1})^d$. Et on a :

- λ' est l'image de λ'' modulo l'action du groupe de Weyl de M,
- λ est l'image de λ'' modulo l'action du groupe $\mathfrak{S}_n$.

On vérifie que λ'' est l'image de l'élément de $\mathbf{C}^n$ suivant :

- $(t+i)_{a \leqq i \leqq b}$; $(-t+i)_{a \leqq i \leqq b}$; $(t'+i)_{a' \leqq i \leqq b'}$; $(-t'+i)_{a' \leqq i \leqq b'}$ si $t' \neq 0$,
- $(t+i)_{a \leqq i \leqq b}$; $(-t+i)_{a \leqq i \leqq b}$; $(i)_{a' \leqq i \leqq b'}$ si $t'=0$.

Soit α une racine de M dans le radical nilpotent de q; on vérifie que l'on a, si $t \geqq t'$:

- $\langle \lambda', \alpha \rangle = t+z$ avec soit $z = \pm i \pm j \pm t'$ $(a \leqq i \leqq b, a' \leqq j \leqq b')$ soit $z = t \pm i \pm j$ avec $a \leqq i$, $j \leqq b$.

Ainsi, si $t \gg t'$, on a $\langle \lambda', \alpha \rangle > 0$ et les hypothèses de ([V,2]) sont satisfaites. Si $t=t'$ un calcul analogue montre que les hypothèses de ([V,2]) sont satisfaites si $t \gg 0$. Supposons donc, d'abord, que l'on a $t \gg 0$ et $t \gg t'$ si $t \neq t'$. Grâce au résultat principal de ([V,2]) on obtient (10) et le fait que $R_q^S(Y)$ est irréductible isomorphe à L. Introduisant un paramètre s petit et non nul, *i. e.* en remplaçant a, b par $a+s$, $b+s$, on obtient de la même façon [en tenant compte de (7)] :

$$R_{q_0}^j (J(\chi, a, b)[s] \otimes J(\chi', a', b')) = 0 \qquad \text{si} \quad j \neq S_0,$$

$$R_{q_0}^{S_0} (J(\chi, a, b)[s] \otimes J(\chi', a', b')) \simeq J(\delta, a, b)[s] \times J(\delta', a', b').$$

Grâce à (10) et à la formule type Blattner de ([V,1], 6.3.12), on obtient alors :

$$\begin{aligned} L_{|K} \simeq R_q^S(Y)_{|K} \simeq J(\delta, a, b)[s] \times J(\delta', a', b')_{|K} \\ \simeq J(\delta, a, b) \times J(\delta', a', b')_{|K} \simeq J(\delta', a', b') \times J(\delta, a, b)_{|K}. \end{aligned}$$

Comme L est sous-quotient de $J(\delta, a, b) \times J(\delta', a', b')$ et de $J(\delta', a', b') \times J(\delta, a, b)$ il coïncide avec ces deux représentations et on obtient une version plus forte de (9).

Ne faisons plus d'hypothèses sur t. On fixe $m \gg 0$ et on va translater à l'aide de la représentation de dimension finie de $GL(n, \mathbf{R})$, notée E, dont le plus haut poids est :

$$(m, \ldots, m, 0, \ldots, 0, -m, \ldots, -m)$$

où m et $-m$ interviennent chacun $(b-a+1)$ fois si $t \neq t'$ et $n/2$ fois si $t=t'$ (il n'apparaît pas de 0 si $t=t'$).

On remarque que cette représentation est isomorphe à sa contragrédiente. On note χ_m le caractère de $\mathbf{C}^*$ défini par :

$$\chi_m(z) = (z/\bar{z})^{t+m}$$

et δ_m la série discrète de $GL(2(b-a+1))$ de paramètre de Harish-Chandra $2(t+m)$. Si $t=t'$, on définit de même χ'_m et δ'_m que l'on note : $\underline{\chi}'$ et $\underline{\delta}'$; si $t \neq t'$, on pose $\underline{\chi}' = \chi'$ et $\underline{\delta}' = \delta'$ pour unifier les notations.

On vient donc de prouver que l'on a [on utilise aussi, ici (7)] :

$$(11)\quad \begin{cases} \mathrm{R}^{j}_{\mathfrak{q}0}(\mathrm{J}(\chi_m, a, b) \otimes \mathrm{J}(\underline{\chi}', a', b')) = 0 \quad \text{si} \quad j \neq \mathrm{S}_0, \\ \mathrm{R}^{\mathrm{S}_0}_{\mathfrak{q}0}(\mathrm{J}(\chi_m, a, b) \otimes \mathrm{J}(\underline{\chi}', a', b') \simeq \mathrm{J}(\delta_m, a, b) \times \mathrm{J}(\underline{\delta}', a', b') \simeq \mathrm{J}(\underline{\delta}', a', b') \times \mathrm{J}(\delta_m, a, b). \end{cases}$$

On note proj_λ la projection sur le caractère infinitésimal λ; c'est un foncteur exact. Vérifions que l'on a :

$$(12)\qquad \mathrm{J}(\delta, a, b) \times \mathrm{J}(\delta', a', b') \quad \text{et} \quad \mathrm{J}(\delta', a', b') \times \mathrm{J}(\delta, a, b)$$

sont des sous-quotients de $\mathrm{proj}_\lambda((\mathrm{J}(\delta_m, a, b) \times \mathrm{J}(\underline{\delta}', a', b')) \otimes \mathrm{E})$.

On le fait pour $\mathrm{J}(\delta, a, b) \times \mathrm{J}(\delta', a', b')$; l'autre assertion est analogue. On note P le parabolique à partir duquel on induit, H son Levi standard (isomorphe à $\mathrm{GL}(2(b-a+1), \mathbf{R}) \times \mathrm{GL}(d(b'-a'+1), \mathbf{R})$ et ${}^u\mathfrak{p}$ l'algèbre de Lie du radical unipotent de P complexifiée. On note E_H la représentation irréductible de H de plus haut poids :

$$(m, \ldots, m, -m, \ldots, -m); \qquad (0, \ldots, 0) \quad \text{si} \quad t \neq t'$$
$$(m, \ldots, m, -m, \ldots, -m); \qquad (m, \ldots, m, -m, \ldots, -m) \quad \text{si} \quad t = t'.$$

On note aussi, E_P la représentation irréductible de P triviale sur le radical unipotent de P et isomorphe à E_H quand on la restreint à H.

On a :

$$\mathrm{Hom}_\mathrm{H}(\mathrm{E}_\mathrm{H}, \mathrm{E}) \neq 0.$$

On identifie arbitrairement E_H à un sous-H-module de E, noté $\bar{\mathrm{E}}_\mathrm{H}$ et on note $\mathrm{U}({}^u\mathfrak{p})$ l'algèbre enveloppante de ${}^u\mathfrak{p}$. Alors on a :

$$\mathrm{U}({}^u\mathfrak{p})\,\bar{\mathrm{E}}_\mathrm{H}/{}^u\mathfrak{p}\,\mathrm{U}({}^u\mathfrak{p})\,\bar{\mathrm{E}}_\mathrm{H} \text{ est un sous-quotient de E restreint à P.}$$

Le centre de $\mathrm{GL}(2(b-a+1), \mathbf{R})$ (qui est de dimension un) agit sur ${}^u\mathfrak{p}$ par un caractère non trivial, alors qu'il agit trivialement sur $\bar{\mathrm{E}}_\mathrm{H}$. Cela permet de vérifier que l'on a :

$$(\mathrm{U}({}^u\mathfrak{p})\,\bar{\mathrm{E}}_\mathrm{H}/{}^u\mathfrak{p}\,\mathrm{U}({}^u\mathfrak{p})\,\bar{\mathrm{E}}_\mathrm{H})_{|\,\mathrm{H}} \simeq \mathrm{E}_\mathrm{H}.$$

D'où, comme P-module :

$$\mathrm{U}({}^u\mathfrak{p})\,\bar{\mathrm{E}}_\mathrm{H}/{}^u\mathfrak{p}\,\mathrm{U}({}^u\mathfrak{p})\,\bar{\mathrm{E}}_\mathrm{H} \simeq \mathrm{E}_\mathrm{P}.$$

Cela prouve que E_P est isomorphe à un sous-quotient de E restreint à P. Or on a :

$$(\mathrm{J}(\delta_m, a, b) \times \mathrm{J}(\underline{\delta}', a', b')) \otimes \mathrm{E} \simeq \mathrm{ind}_\mathrm{P}^{\mathrm{GL}(n, \mathbf{R})}((\mathrm{J}(\delta_m, a, b) \otimes \mathrm{J}(\underline{\delta}', a', b')) \otimes \mathrm{E}_{|\,\mathrm{P}}).$$

Induction au sens des modules de Harish-Chandra. L'exactitude du foncteur d'induction, assure qu'il suffit de prouver que l'on a :

$$.\,\mathrm{J}(\delta, a, b) \otimes \mathrm{J}(\delta', a', b') \text{ est un sous-quotient de } (\mathrm{J}(\delta_m, a, b) \otimes \mathrm{J}(\underline{\delta}', a', b')) \otimes \mathrm{E}_\mathrm{P}.$$

En d'autres termes, il suffit de prouver que l'on a:

(13) $$\mathrm{J}(\delta, a, b) \text{ est un sous-quotient de } \mathrm{J}(\delta_m, a, b) \otimes \mathrm{E}',$$

où E' est la représentation de $\mathrm{GL}(2(b-a+1), \mathbf{R})$ de plus haut poids:

$$(m, \ldots, m, -m, \ldots, -m),$$

ainsi qu'une assertion analogue à (13) pour (δ', a', b') si $\delta' \neq \chi'$.

Cette assertion est dans ([V, 3]): on note $\mathfrak{q}_1$ la sous algèbre parabolique de $\mathrm{end}(\mathbf{C}^{2(b-a+1)})$ stabilisant le drapeau: $\mathrm{W}_1^+ \subset \mathrm{W}_1$ et on a:

$$\mathrm{J}(\delta, a, b) \simeq \mathrm{R}_{\mathfrak{q}_1}^{\mathrm{S}_1} \mathrm{J}(\chi, a, b), \mathrm{J}(\delta_m, a, b) = \mathbf{R}_{\mathfrak{q}_1}^{\mathrm{S}_1}(\mathrm{J}(\chi_m, a, b))$$

où S_1 est l'analogue de S_0. On vérifie ensuite que $\mathrm{J}(\delta, a, b)$ est la projection de $\mathrm{J}(\delta_m, a, b) \otimes \mathrm{E}'$ sur le caractère infinitésimal de $\mathrm{J}(\delta, a, b)$ par les arguments développés dans un cadre un peu plus difficile ci-dessous.

Il reste donc à prouver que l'on a, pour tout j:

$$\mathrm{proj}_\lambda(\mathrm{R}_{\mathfrak{q}_0}^j((\mathrm{J}(\chi_m, a, b) \otimes \mathrm{J}(\underline{\chi}', a', b')) \otimes \mathrm{E}) \simeq \mathrm{R}_{\mathfrak{q}_0}^j(\mathrm{J}(\chi, a, b) \otimes \mathrm{J}(\chi', a', b')).$$

On suppose dans ce qui suit que l'on a: $t' \neq 0$. Les changements à effectuer si $t' = 0$ sont minimes. Rappelons que l'on a:

$$\begin{aligned}\mathfrak{q}_0 \simeq \mathrm{end}(\mathrm{W}_1^+) \oplus \mathrm{end}(\mathrm{W}_2^+) \oplus \mathrm{end}(\mathrm{W}_2^-) \oplus \mathrm{end}(\mathrm{W}_1^-)\\ \oplus \mathrm{end}(\mathrm{W}_1^+, \mathrm{W}_2) \oplus \mathrm{end}(\mathrm{W}_2, \mathrm{W}_1^-) \oplus \mathrm{end}(\mathrm{W}_2^+, \mathrm{W}_2^-) \oplus \mathrm{end}(\mathrm{W}_1^+, \mathrm{W}_1^-).\end{aligned}$$

On remarque que E contient un vecteur de plus haut poids, noté e, sur lequel $\mathfrak{q}_0$ agit par le caractère suivant:

$$\pm m, \text{trace} \quad \text{sur } \mathrm{end}(\mathrm{W}_1^\pm)$$

$$\pm m, \text{trace} \quad \text{si } t' = t \text{ ou le caractère trivial si } t' \neq t \text{ sur end } (\mathrm{W}_2^\pm).$$

On note $\mathrm{E}_1 := \mathbf{C}e$; on fixe une filtration de E par des sous-$\mathfrak{q}_0$-modules notée: $\mathrm{E}_0 := 0 \subset \mathrm{E}_1 \subset \ldots \subset \mathrm{E}_k = \mathrm{E}$ telle que $\mathrm{E}_i/\mathrm{E}_{i-1}$ soit irréductible comme $\mathfrak{q}_0$-module. On sait que l'on a: $\mathrm{E}_i/\mathrm{E}_{i-1} \simeq \mathrm{E}_1$ si et seulement si $i=1$ (propriétés des vecteurs de plus haut poids).

Grâce à ([V,1], 7.2.1) et du fait que $\mathrm{J}(\chi_m, a, b) \otimes \mathrm{J}(\underline{\chi}', a', b')$ est un caractère de M_0, il suffit de prouver que l'on a:

(14) $$\begin{gathered}\text{le caractère infinitésimal de } (\mathrm{J}(\chi_m, a, b) \otimes \mathrm{J}(\underline{\chi}', a', b')) \otimes \mathrm{E}_i/\mathrm{E}_{i-1},\\ \text{noté } \lambda_i \text{ n'a pas pour image } \lambda \text{ dans } \mathbf{C}^n/\mathfrak{S}_n \text{ si } i \neq 1,\end{gathered}$$

(15) $$(\mathrm{J}(\chi_m, a, b) \otimes \mathrm{J}(\underline{\chi}', a', b')) \otimes \mathrm{E}_1 \simeq \mathrm{J}(\chi, a, b) \otimes \mathrm{J}(\chi', a', b').$$

On pose: $\eta := 1$ si $t = t'$ et $\eta := 0$ si $t \neq t'$. On identifie $\mathrm{J}(\chi_m, a, b)$ au caractère:

$$(\pm(t+m) + (b+a)/2).\text{ trace de } \mathrm{end}(\mathrm{W}_1^\pm)$$

et $J(\underline{\chi}', a', b')$ au caractère :

$$(\pm(t'+\eta m)+(b'+a')/2).\text{trace de end}(W_2^{\pm}).$$

Il est clair que (15) résulte de cette description. On fixe $1<i$ et on identifie E_i/E_{i-1} à une représentation irréductible de

$$\text{end}(W_1^+) \oplus \text{end}(W_1^-) \oplus \text{end}(W_2^+) \oplus \text{end}(W_2^-);$$

on note:

(16) $$w_1^{\pm} \geqq \ldots \geqq w_{b-a+1}^{\pm}; \qquad v_1^{\pm} \geqq \ldots \geqq v_{b'-a'+1}^{\pm},$$

son plus haut poids.

Chacun de ces entiers relatifs est compris entre $-m$ et m.

Ainsi le caractère infinitésimal de $(J(\chi_m, a, b) \otimes J(\underline{\chi}', a', b')) \otimes E_i/E_{i-1}$ est l'image modulo l'action du groupe de Weyl de M_0 de l'élément de $\mathbf{C}^n$ suivant:

$$(w_j^{\pm} \pm (t+m)+(b+a)/2+(b-a)/2+1-j)_{1 \leqq j \leqq b-a+1};$$

$$(v_j^{\pm} \pm (t'+\eta m)+(b'+a')/2+(b'-a')/2+1-j)_{1 \leqq j \leqq b'-a'+1}$$

$$=(w_j^{\pm} \pm (t+m)+b+1-j)_{1 \leqq j \leqq b-a+1}; \qquad (v_j^{\pm} \pm (t'+\eta m)+b'+1-j)_{1 \leqq j \leqq b'-a'+1}.$$

On va prouver (14) pour cette valeur de i. Supposons que λ_i est conjugué de λ modulo $\mathfrak{S}_n$ et obtenons une contradiction.

En particulier, on a:

$$w_1^+ + t + m + b \geqq t + b \quad \text{avec inégalité stricte si } w_1^+ > -m.$$

On a par hypothèse: $t'-t \leqq b-b' \leqq t-t'$ et on en déduit que $t+b$ est la plus grande composante de λ vu comme élément de $\mathbf{C}^n$ modulo permutation. Il faut donc avoir $w_1^+ = -m$.

De (16), on tire alors: $w_1^+ = \ldots = w_{b-a+1}^+ = -m$. On a alors aussi pour tout $1 \leqq i \leqq b'-a'+1$, $v_i^+ \geqq -\eta m$ (*cf.* par exemple [V,1], 3.2.12). On a encore:

- $b'+t' \geqq b'-t' \geqq b-t$. (*i.e.* $b'+t'$ est la plus grande des composantes de λ_i non encore spécifiées)
- $v_1^+ + (t'+\eta m) + b' \geqq t'+b'$ avec inégalité stricte si $v_1^+ > -\eta m$.

Comme ci-dessus, il faut $v_1^+ = -\eta m$. De (16) on obtient: $v_1^+ = \ldots = v_{b'-a'+1}^+ = -\eta m$ puis (même référence que ci-dessus): $v_i^- \geqq \eta m$ pour tout $1 \geqq i \geqq b'-a'+1$. C'est maintenant $b'-t'$ qui est la plus grande composante de λ_i non encore spécifiée. On a:

$$v_1^- - (t'+\eta m) + b') \geqq b'-t' \quad \text{avec inégalité stricte si } v_1^- > \eta m.$$

D'où nécessairement: $v_1^- = \eta m$ et avec (16) et ce qui précède:

$$v_1^- = \ldots = v_{b'-a'+1}^- = \eta m.$$

On a alors nécessairement :

$$w_1^- = \ldots = w_{b-a+1}^- = m,$$

i. e. $E_i/E_{i-1} \simeq E_1$ ce qui est la contradiction cherchée.

I.8. RÉSULTAT PRINCIPAL. — Pour $i := 1, \ldots, m$, soient δ_i une représentation de la série discrète de $GL(n_i, F)$, $\Delta_i := [a_i, b_i]$ un segment $J_i := J(\delta_i, a_i, b_i)$, $p_i := b_i - a_i + 1$, $p'_1 := 0$, $p'_i := \sum_{k=1}^{i-1} p_k$. Posons :

$$r := \sum_{i=1}^{m} p_i.$$

Pour $\underline{s} := (s_1, \ldots, s_m) \in \mathbf{C}^m$, notons $\lambda(\underline{s}) := (\lambda_1(\underline{s}), \ldots, \lambda_r(\underline{s})) \in \mathbf{C}^r$ l'élément

$$\lambda(\underline{s}) = (b_1 + s_1, \ldots, a_1 + s_1, b_2 + s_2, \ldots, a_m + s_m).$$

Posons :

$$\delta := \delta_1 \otimes \ldots \otimes \delta_1 \otimes \delta_2 \otimes \ldots \otimes \delta_m \otimes \ldots \otimes \delta_m,$$

où δ_i apparaît p_i-fois. On pose aussi :

$$J := J_1 \otimes J_2 \otimes \ldots \otimes J_m.$$

Notons w l'élément de $\mathfrak{S}_r$ qui inverse l'ordre dans chaque segment $[p'_i + 1, p'_{i+1}]$, *i. e.* tel que pour $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, p_i$,

$$w(p'_i + j) = p'_{i+1} + 1 - j.$$

Soit $\underline{s} \in \mathbf{C}^m$. L'opérateur :

$$N(w, \delta, \lambda(\underline{s})) : \quad I(\delta, \lambda(\underline{s})) \to I(\delta, w\lambda(\underline{s}))$$

est bien défini. Il est en fait indépendant de $\underline{s}$, quand on réalise les induites dans des espaces indépendants de $\underline{s}$. Son image est le sous-module $I(J, \underline{s})$.

Fixons un élément $w' \in \mathfrak{S}_r$ tel que, en posant $\lambda'(\underline{s}) = w'^{-1}\lambda(\underline{s})$, on ait :

(*) $$\text{pour tous } 1 \leqq i \leqq j \leqq r, \qquad \operatorname{Re}(\lambda'(0)_i - \lambda'(0)_j) \geqq 0.$$

Posons : $\delta' := w'^{-1}\delta$. L'opérateur $N(ww', \delta', \lambda'(\underline{s}))$ est défini en tant qu'opérateur méromorphe. Il se factorise par $N(w, \delta, \lambda(\underline{s}))$, son image est donc incluse dans $I(J, \underline{s})$.

Introduisons la condition :

(**P**) : soient $1 \leqq i < j \leqq m$; alors (δ_i, a_i, b_i) n'est pas lié à (δ_j, a_j, b_j) ou $[a_i, b_i]$ domine $[a_j, b_j]$ (*cf.* I.6 et 1.7).

LEMME. — *Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_r$. Supposons σ croissant sur chaque intervalle* : $[p'_i + 1, p'_{i+1}]$.

(i) *Il existe un opérateur méromorphe, noté* $\mathrm{N}_\sigma(\underline{s})$ *tel que le diagramme suivant soit commutatif*:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{I}(\delta', \lambda'(\underline{s})) \arrow[rr, "\mathrm{N}(w', \delta', \lambda'(\underline{s}))"] \arrow[dr, "\mathrm{N}(ww', \delta', \lambda'(\underline{s}))"'] \arrow[ddr] & & \mathrm{I}(\delta, \lambda(\underline{s})) \arrow[dl, "\mathrm{N}(w, \delta, \lambda(\underline{s}))"] \arrow[ddl] \\
& \mathrm{I}(\mathrm{J}, \underline{s})) \arrow[d, "\mathrm{N}_\sigma(\underline{s})"] & \\
& \mathrm{I}(\sigma\delta, \sigma w \lambda(\underline{s})) &
\end{tikzcd}$$

où les flèches verticales extérieures sont respectivement: $\mathrm{N}(\sigma ww', \delta', \lambda'(\underline{s}))$ *et* $\mathrm{N}(\sigma w, \delta, \lambda(\underline{s}))$.

(ii) *Supposons* (**P**) *vérifiée. Alors les opérateurs ci-dessus sont tous holomorphes en* $\underline{s}=0$. *L'opérateur* $\mathrm{N}(ww', \delta', \lambda'(0))$ *a pour image* $\mathrm{I}(\mathrm{J}, 0)$ *tout entier et* $\mathrm{N}_\sigma(0) \neq 0$.

D'après l'hypothèse sur σ, l'opérateur $\mathrm{N}(\sigma, \delta, w\lambda(\underline{s}))$ est bien défini en tant qu'opérateur méromorphe. Définissons $\mathrm{N}_\sigma(\underline{s})$ comme la restriction de cet opérateur à $\mathrm{I}(\mathrm{J}, \underline{s})$. On obtient (i). La condition (*) et I.1(2) assurent que les flèches partant de $\mathrm{I}(\delta', \lambda'(\underline{s}))$ sont holomorphes en $\underline{s}=0$, et que $\mathrm{N}(\sigma ww', \delta', \lambda'(0)) \neq 0$. Supposons démontrée la surjectivité de $\mathrm{N}(ww', \delta', \lambda'(0))$. Toutes les induites se réalisant dans des espaces indépendants de $\underline{s}$, on en déduit l'existence d'un inverse à droite:

$$i(\underline{s}): \quad \mathrm{I}(\mathrm{J}, \underline{s}) \to \mathrm{I}(\delta', \lambda'(\underline{s})),$$

(en tant qu'application linéaire, pas en tant que morphisme de représentations), holomorphe en $\underline{s}=0$. Alors

$$\mathrm{N}_\sigma(\underline{s}) = \mathrm{N}(\sigma ww', \delta', \lambda'(\underline{s})) \circ i(\underline{s})$$

est holomorphe en $\underline{s}=0$. La commutativité du diagramme implique les autres assertions.

Tout revient donc à démontrer la surjectivité de $\mathrm{N}(ww', \delta', \lambda'(0))$. Soit r un élément de $\mathfrak{S}_m$ tel que:

$$\Delta_{\tau 1} \geqq \Delta_{\tau 2} \geqq \ldots \geqq \Delta_{\tau m}$$

(*cf.* I.6 pour la notation $\geqq$). Considérons l'opérateur:

$$\mathrm{N}(\tau, \tau^{-1}\mathrm{J}, \tau^{-1}\underline{s}): \quad \mathrm{I}(\tau^{-1}\mathrm{J}, \tau^{-1}\underline{s}) \to \mathrm{I}(\mathrm{J}, \underline{s}).$$

Soit $(i', j') \in \mathrm{inv}(\tau)$ (*cf.* I.2), posons: $i := \tau i'$, $j := \tau j'$. On a: $i > j$ et $\Delta_i \geqq \Delta_j$. La condition (**P**) implique que les triplets (δ_i, a_i, b_i) et (δ_j, a_j, b_j) ne sont pas liés. Les lemmes I.6.3 (ii) et I.7, I.5 (dans le cas archimédien) impliquent alors que l'opérateur ci-dessus est holomorphe en $\underline{s}=0$, et que $\mathrm{N}(\tau, \tau^{-1}\mathrm{J}, 0)$ est un isomorphisme. En identifiant $\mathfrak{S}_m$ à un sous-groupe de $\mathfrak{S}_r$, on a le diagramme commutatif suivant:

$$\begin{tikzcd}
& \mathrm{I}(\delta', \lambda'(\underline{s})) \arrow[dr, "\mathrm{N}(ww', \delta', \lambda'(\underline{s}))"] & \\
\mathrm{I}(\tau^{-1}\mathrm{J}, \tau^{-1}\underline{s}) \arrow[ur, "\mathrm{N}(\tau^{-1}ww', \delta', \lambda'(\underline{s}))"] \arrow[rr, "\mathrm{N}(\tau, \tau^{-1}\mathrm{J}, \tau^{-1}\underline{s})."'] & & \mathrm{I}(\mathrm{J}, \underline{s})
\end{tikzcd}$$

Ce diagramme nous ramène à prouver la surjectivité en $\underline{s}=0$ de la flèche de gauche. Or posons: $w_\tau := \tau^{-1} w \tau$, $w'_\tau := \tau^{-1} w'$. Ces éléments jouent le même rôle pour τ^{-1} J que w et w' pour J et on a:

$$\mathrm{N}(\tau^{-1} ww', \delta', \lambda'(\underline{s})) = \mathrm{N}(w_\tau w'_\tau, \delta', \lambda'(\underline{s})).$$

On est donc ramené au problème initial pour τ^{-1} J. Autrement dit on est ramené au cas où: $\Delta_1 \geqq \ldots \geqq \Delta_m$, ce que l'on supposera désormais.

Soient: u', v', u, $v \in \mathfrak{S}_r$ les éléments tels que:

- $u' = w'$ sur $w'^{-1}(\{1, \ldots, p_1\})$,
- u' est croissant sur $\{1, \ldots, r\} - w'^{-1}(\{1, \ldots, p_1\})$,
- $u' = w' u'^{-1}$,
- $u = w$ sur $\{1, \ldots, p_1\}$,
- $u = \mathrm{id}$ sur $\{p_1 + 1, \ldots, r\}$,
- $v = wu^{-1}$.

On a: $v' = \mathrm{id}$ sur $\{1, \ldots, p_1\}$, donc v' commute à u et

$$(1) \qquad \begin{cases} ww' = vv' uu', \\ \mathrm{N}(ww', \delta', \lambda'(\underline{s})) = \mathrm{N}(vv', uu'\delta', uu'\lambda'(\underline{s})) \circ \mathrm{N}(uu', \delta', \lambda'(\underline{s})). \end{cases}$$

On peut écrire:

$$uu'\delta' = \delta_1 \otimes \ldots \otimes \delta_1 \otimes \delta'^v, \qquad uu'\lambda'(s) = (a_1 + s_1, \ldots, b_1 + s_1, \lambda'^v(\underline{s}^v))$$

où $\underline{s}^v := (s_2, \ldots, s_m)$ et δ'^v, $\lambda'^v(\underline{s}^v)$ sont les analogues de δ' et $\lambda'(\underline{s})$ relativement aux segments $\Delta_2, \ldots, \Delta_m$.

Supposons démontrée l'assertion suivante:

$$(2) \qquad \text{l'image de } \mathrm{N}(uu', \delta', \lambda'(0)) \text{ est } \mathrm{J}_1 \times \mathrm{I}(\delta'^v, \lambda'^v(0)).$$

L'opérateur $\mathrm{N}(vv', uu'\delta', \lambda'(0))$ est induit de l'opérateur qui est l'identité sur le premier terme et est l'analogue de $\mathrm{N}(ww', \delta', \lambda'(0))$ sur $\mathrm{I}(\delta'^v, \lambda'^v(0))$. Comme on a encore: $\Delta_2 \geqq \ldots \geqq \Delta_m$, en raisonnant par récurrence sur m, on peut supposer que cet analogue a pour image: $\mathrm{J}_2 \times \ldots \times \mathrm{J}_m$, donc que l'image de $\mathrm{J}_1 \times \mathrm{I}(\delta'^v, \lambda'^v(0))$ par $\mathrm{N}(vv', uu'\delta', uu'\lambda'(0))$ est $\mathrm{J}_1 \times \ldots \times \mathrm{J}_m$. D'après (1), cela démontre la surjectivité de $\mathrm{N}(ww', \delta', \lambda'(0))$.

Démontrons (2). Pour $i = 1, \ldots, p_1$ posons $j_i := w'^{-1}(i)$. On a: $\lambda'(0)_{j_i} = b_1 + 1 - i$. Posons: $k_i := \sup\{z; \lambda'(0)_z = b_1 + 1 - i\}$ et formellement: $k_0 = 0$.

D'après (*), on a les inégalités:

$$0=k_0<j_1\leqq k_1<j_2\leqq k_2\ldots<j_{p_1}\leqq k_{p_1}<\ldots$$

Notons u^i l'élément de $\mathfrak{S}_r$ tel que l'on ait:

$$u^i(j_{p_1})=k_{i-1}+1,\qquad u^i(j_{p_1-1})=k_{i-1}+2,\ldots,u^i(j_i)=k_{i-1}+p_1+1-i$$
$$u^i \text{ est croissant sur } \{1,\ldots,r\}\diagdown\{j_i,j_{i+1},\ldots,j_{p_1}\}.$$

Posons:

$$D^i:=\delta'_1\otimes\ldots\otimes\delta'_{k_{i-1}},\qquad \mu^i(\underline{s}):=(\lambda'(\underline{s})_1,\ldots,\lambda'(\underline{s})_{k_{i-1}}),$$
$$d^i:=\ldots\otimes\delta'_z\otimes\ldots,\qquad \nu^i(\underline{s})=(\ldots,\lambda'(\underline{s})_z,\ldots)$$

où z parcourt la suite: $(u^i)^{-1}(k_{i-1}+p_1+2-i),\ldots,(u^i)^{-1}(r)$. On va montrer par récurrence décroissante sur i que l'on a:

(3) l'image de $N(u^i,\delta',\lambda'(0))$ est $I(D^i,\mu^i(0))\times J(\delta_1,a_1,b_1+1-i)\times I(d^i,\nu^i(0))$.

Pour $i:=1$, on vérifie que $u^1=uu'$, D^1 est triviale, $d^1=\delta'^v$, $\nu^1(\underline{s})=\lambda'^v(\underline{s})$ et (3) est identique à (2).

Posons formellement: $u^i=\mathrm{id}$ pour $i=p_1+1$. Soit $i\in\{1,\ldots,p_1\}$. Si $i<p_1$, supposons (3) démontrée pour $i+1$. *Posons:*

$$\tau^i:=u^i(u^{i+1})^{-1},$$

écrivons:

$$N(u^i,\delta',\lambda'(\underline{s}))=N(\tau^i,u^{i+1}\delta',u^{i+1}\lambda'(\underline{s}))\circ N(u^{i+1},\delta',\lambda'(\underline{s})).$$

On a:

$$\tau^i(j_i)=k_{i-1}+p_1+1-i,$$
$$\tau^i(k_i+1)=k_{i-1}+1,\qquad \tau^i(k_i+2)=k_{i-1}+2,\ldots,\tau^i(k_i+p_i-i)=k_{i-1}+p_1-i,$$
$$\tau^i \text{ croissant sur les autres éléments.}$$

Les couples inversés par τ^i sont donc les couples suivants:

$$(z,j_i)\qquad\text{pour}\quad k_{i-1}+1\leqq z<j_i,$$
$$(z,z'),\ \text{pour}\ k_{i-1}+1\leqq z<k_i+1\leqq z'\leqq k_i+p_1-i.$$

D'autre part, on a:

$$u^{i+1}\lambda'(\underline{s})=(\mu^{i+1}(\underline{s}),a_1+s_1,\ldots,b_1+s_1-i,\nu^{i+1}(\underline{s})).$$

Grâce à (*), on voit que l'on a:

$$u^{i+1}\lambda'(0)_z\geqq u^{i+1}\lambda'(0)_{z'},$$

pour tout $(z, z') \in \operatorname{inv}(\tau^i)$. D'après I.1(2), $N(\tau^i, u^{i+1}\delta', u^{i+1}\lambda'(\underline{s}))$ est holomorphe en $\underline{s}=0$, donc

$$\operatorname{Im} N(u^i, \delta', \lambda'(0)) = N(\tau^i, u^{i+1}\delta', u^{i+1}\lambda'(0)) \operatorname{Im} N(u^{i+1}, \delta', \lambda'(0)).$$

Cette dernière image est connue par l'hypothèse de récurrence si $i<p_1$; si $i=p_1$ elle est connue car l'opérateur est l'identité. On voit que la restriction à cette image de $N(\tau^i, u^{i+1}\delta', u^{i+1}\lambda'(0))$ se déduit de l'opérateur que nous allons décrire (les facteurs de normalisation se comportent bien). Posons:

$$\begin{gathered} D := \delta'_{k_{i-1}+1} \otimes \ldots \otimes \delta'_{k_i}, \\ z := (\lambda'(0)_{k_{i-1}+1}, \ldots, \lambda'(0)_{k_i}), \\ q := k_i - k_{i-1}, \qquad \text{si} \quad i<p_1, \\ k_i - k_{i-1} - 1 \qquad \text{si} \quad i=p_1, \\ j := j_i - k_{i-1}, \end{gathered}$$

Soit τ l'élément de $\mathfrak{S}_{q+1}$ tel que l'on ait:

$$\tau(q+1)=1, \qquad \tau(j)=2 \quad \text{si } i<p_1 \qquad \text{ou} \qquad \tau(j)=1 \quad \text{si } i=p_1,$$
$$\tau \text{ croissant sur les autres éléments.}$$

L'opérateur en question est:

$$N(\tau, D \otimes J(\delta_1, a_1, b_1 - i), (z, 0)).$$

Il nous reste seulement à démontrer que l'on a:

(4) L'image de cet opérateur est:

$$J(\delta_1, a_1, b_1+1-i) \times D_1[z_1] \times \ldots \times D_j \check{[z_j]} \times \ldots \times D_q[z_q],$$

où le chech indique que l'on a supprimé le terme correspondant. Supposons $i<p_1$. Cet opérateur est le produit des opérateurs d'entrelacement suivants:

$$\begin{aligned} & D_1[z_1] \times \ldots \times D_q[z_q] \times J(\delta_1, a_1, b_1 - i) \\ & \xrightarrow{N_1} D_1[z_1] \times \ldots \times D_j \check{[z_j]} \times \ldots \times D_q[z_q] \times D_j[z_j] \times J(\delta_1, a_1, b_1 - i) \\ & \xrightarrow{N_2} D_1[z_1] \times \ldots \times D_j \check{[z_j]} \times \ldots \times D_q[z_q] \times J(\delta_1, a_1, b_1 - i) \times D_j[z_j] \\ & \xrightarrow{N_3} J(\delta_1, a_1, b_1 - i) \times D_j[z_j] \times D_1[z_1] \times \ldots \times D_j \check{[z_j]} \times \ldots \times D_q[z_q]. \end{aligned}$$

N_1 est bien défini et c'est un isomorphisme. En effet c'est le produit d'opérateurs échangeant $D_j[z_j]$ et $D_h[z_h]$ pour $j<h\leqq q$. Or pour un tel h, $z_j = z_h$ par définition de k_i et on applique I.1(3). N_2 et N_3 sont bien définis pour la raison donnée ci-dessus pour

l'opérateur associé à τ^i. Par définition du quotient de Langlands, l'image de N_2 est:

$$D_1[z_1]\times\ldots\times D_j\check{[z_j]}\times\ldots D_q[z_q]\times J(\delta_1, a_1, b_1-i+1).$$

Sur cette image, N_3 s'identifie à l'opérateur d'entrelacement N_4 qui envoie cette induite sur:

$$J(\delta_1, a_1, b_1-i+1)\times D_1[z_1]\times\ldots\times D_j\check{[z_j]}\times\ldots D_q[z_q].$$

C'est un produit d'opérateurs qui échangent $J(\delta_1, a_1, b_1-i+1)$ et $D_h[z_h]$ pour $h\in\{1, \ldots, q\}\setminus\{j\}$. Pour un tel h, on a:

$$z_h\geqq z_q=z_j=b_1+1-i.$$

On a aussi:

$$b_1+2-i>z_h.$$

En effet, si $i>1$, cela résulte des inégalités suivantes:

$$b_1+2-i=\lambda'(0)_{j_{i-1}}=\lambda'(0)_{k_{i-1}}>z_1\geqq z_h.$$

Si $i=1$, l'hypothèse: $\Delta_1\geqq\Delta_2\geqq\ldots\Delta_m$ implique: $b_1\geqq\lambda'(0)_{h'}$ pour tout $h'\in\{1, \ldots, r\}$, d'où encore l'inégalité cherchée.

On voit alors que les triplets (δ_1, a_1, b_1+1-i), (D_h, z_h, z_h) ne sont pas liés. Les opérateurs ci-dessus sont des isomorphismes d'après les lemmes I.5, I.6, I.7 donc N_4 également. Cela démontre (4). Quand $i=p_1$, la représentation $J(\delta_1, a_1, b_1-i+1)$ disparaît des constructions ci-dessus, la démonstration de (4) ne fait que se simplifier. Cela achève la démonstration.

I.9. Irréductibilité de certaines induites. — Soient $J_1, \ldots, J_m$ comme en I.8.

Proposition. — *Supposons les triplets (δ_i, a_i, b_i) et (δ_j, a_j, b_j) non liés deux à deux. Alors la représentation induite $J_1\times\ldots\times J_m$ est irréductible.*

Réindiçons les représentations $\delta_i[c]$, $i=1, \ldots, m$, $a_i\leqq c\leqq b_i$, par $\delta^{(k)}[\nu^{(k)}]$, $k=1, \ldots, r$, dans un ordre tel que $\nu^{(k)}\geqq\nu^{(k+1)}$. Soient

$$I=\delta^{(1)}[\nu^{(1)}]\times\ldots\times\delta^{(r)}[\nu^{(r)}],\qquad J=J_1\times\ldots\times J_m,$$

et L le quotient de Langlands de I. D'après I.8, J est quotient de I. Donc [*cf.* I.2 (1), (3)]:

(1) J n'a qu'un quotient irréductible;

(2) ce quotient est L;

(3) L intervient avec multiplicité un dans J (en tant que sous-quotient).

Appliquons ce résultat aux triplets $(\check{\delta}_i, -b_i, -a_i)$ qui vérifient les mêmes hypothèses et dualisons le résultat obtenu. On obtient:

(4) L intervient comme sous-module de J.

Les propriétés (2), (3), (4) impliquent que L est facteur direct de J. Alors (1) implique que $L=J$, d'où le lemme.

I. 10. ENTRELACEMENT POUR LES REPRÉSENTATIONS UNITAIRES. — Soit π une représentation irréductible unitaire de $GL(N, F)$. D'après ([T], th. A (ii) et [V, 3]), il existe un entier $m \geqq 1$, des représentations δ_i de la série discrète de $GL(N_i, F)$, pour $i=1, \ldots, m$, des demi-entiers $b_i \geqq 0$, des réels ν_i tels que $-1/2 < \nu_i < 1/2$, de telle sorte que l'on ait:

$$\pi \simeq J(\delta_1, -b_1, b_1)[\nu_1] \times \ldots \times J(\delta_m, -b_m, b_m)[\nu_m].$$

Ces termes sont uniquement déterminés à l'ordre près. Posons:

$$e(\pi) = 2 \inf \{ 1/2 - |\nu_i|; i=1, \ldots, m \}.$$

PROPOSITION. — *Soient* $\pi = \pi_1 \otimes \ldots \otimes \pi_r$ *une représentation irréductible unitaire de* $GL(N_1, F) \times \ldots \times GL(N_r, F)$, $\underline{s} \in \mathbf{C}^r$, $\sigma \in \mathfrak{S}_r$. *Supposons que pour tous* $1 \leqq i < j \leqq r$, *la condition suivante soient vérifiée*:

(a) $\mathrm{Re}(s_i - s_j) > -\inf \{ e(\pi_h); h=1, \ldots, r \}$.

Alors l'opérateur $N(\sigma, \pi, \bullet)$ *est holomorphe en* $\underline{s}$ *et l'on a*: $N(\sigma, \pi, \underline{s}) \neq 0$.

Pour tout $j=1, \ldots, r$, introduisons les termes m^j, $\delta_i^j, b_i^j, \nu_i^j$ relatifs à π_j. Posons $m := m^1 + \ldots m^r$. Identifions $\{ (i,j); j=1, \ldots, r, i=1, \ldots, m^j \}$ à $\{ 1, \ldots, m \}$ par:

$$(i,j) \to \sum_{k<j} m^k + i$$

(une somme vide est nulle).

Pour $k=1, \ldots, m$, soit (i,j) le couple correspondant, posons:

$$\delta_k := \delta_i^j [\mathrm{Im}(s_j)], \qquad a_k = -b_i^j + \nu_i^j + \mathrm{Re}(s_j).$$
$$b_k = b_i^j + \nu_i^j + \mathrm{Re}(s_j), \qquad J_k := J(\delta_k, a_k, b_k).$$

Soit σ' l'élément de $\mathfrak{S}_m$ qui permute les intervalles

$$I^j = \{ m^1 + \ldots + m^{j-1} + 1, \ldots, m^1 + \ldots + m^j \}$$

de telle sorte que $\sigma'(I^j)$ précède $\sigma'(I^h)$ si et seulement si $\sigma(j) < \sigma(h)$. Posons: $J := J_1 \otimes \ldots \otimes J_m$. Un argument facile, déjà donné en I. 8, montre que le comportement de $N(\sigma, \pi, \bullet)$ en $\underline{s}$ est le même que celui de $N(\sigma', J, \bullet)$ en 0. Considérons la situation de I. 8 (ce qui introduit un entier alors noté r et que l'on note, ici, r'; on a: $r' = \sum_{i,j} 2 b_i^j + 1$). On peut identifier $\mathfrak{S}_m$ à un sous-groupe de $\mathfrak{S}_{r'}$. En se reportant à la démonstration du lemme I. 8, on voit que $N(\sigma', J, \bullet)$ n'est autre que l'opérateur $N_{\sigma'}(\bullet)$. Le (ii) de ce lemme démontre la proposition pourvu que l'on vérifie la condition (**P**).

Soient donc k, $h \in \{ 1, \ldots, m \}$. Supposons que (δ_k, a_k, b_k) et (δ_h, a_h, b_h) sont liés et que (a_h, b_h) domine (a_k, b_k), on doit montrer qu'alors on a: $k > h$. Notons (i,j), (p, q) les couples correspondant à k et h. On a: [la première propriété résulte de la propriété de dominance et la deuxième de la propriété de liaison (*cf.* I. 6. 3 et I. 7)]

$$b_p^q + \nu_p^q + \mathrm{Re}(s_q) \geqq b_i^j + \nu_i^j + \mathrm{Re}(s_j) + 1,$$
$$-b_p^q + \nu_p^q + \mathrm{Re}(s_q) \geqq -b_i^j + \nu_i^j + \mathrm{Re}(s_j) + 1,$$

Ces inégalités impliquent que l'on a:

$$\mathrm{Re}(s_j - s_q) \leqq \nu_p^q - \nu_i^j - 1 \leqq -(1/2)(e(\pi_j) + e(\pi_q)).$$

Donc $j \neq q$ et (j, q) ne vérifie pas la condition (a) de l'énoncé.

Mais alors $q < j$ et $h < k$ ce que l'on voulait démontrer.

I.11 Généralisation de I.8. — Soit π une représentation unitaire de $\mathrm{GL}(\mathrm{N}, \mathrm{F})$ possédant un modèle de Whittaker. Les termes associés à π (*cf.* I.10) vérifient $b_i = 0$, *i. e.*

$$\pi \simeq \delta_1 [\nu_1] \times \ldots \times \delta_q [\nu_q].$$

On suppose que l'on a, comme cela est licite: $\nu_1 \geqq \ldots \geqq \nu_q$. Soient $[a, b]$ un segment réel, $p = b - a + 1$, w l'élément de plus grande longueur de $\mathfrak{S}_p$. L'opérateur suivant:

$$\mathrm{N}(w, \pi[b] \otimes \ldots \otimes \pi[a], 0)$$

est défini. Notons $\mathrm{J}(\pi, a, b)$ son image. Elle est irréductible ([J], prop. 2.2) et isomorphe à:

$$\mathrm{J}(\delta_1, \nu_1 + a, \nu_1 + b) \times \ldots \times \mathrm{J}(\delta_q, \nu_q + a, \nu_q + b).$$

Ces propriétés seront démontrées au cours de la démonstration ci-dessous. Considérons maintenant, pour $i = 1, \ldots m$, une représentation irréductible unitaire π_i possédant un modèle de Whittaker, b_i un demi-entier, $\mathrm{J}_i = \mathrm{J}(\pi_i, -b_i, b_i), p_i := 2b_i + 1$. Posons:

$$\pi := \pi_1 \otimes \ldots \otimes \pi_1 \otimes \ldots \otimes \pi_m \otimes \ldots \otimes \pi_m$$

où la représentation π_i apparaît p_i fois dans l'expression ci-dessus.

On introduit: r, J, w, etc. comme en I.8. On pose:

$$e(\mathrm{J}) := \inf\{e(\mathrm{J}_i); i = 1, \ldots, m\},$$

cf. I.10.

Proposition. — *Soient* $\sigma \in \mathfrak{S}_r$, $\underline{s} \in \mathbf{C}^m$, $w' \in \mathfrak{S}_r$. *On définit* $\lambda(\underline{s})$ *comme en* I.8. *Posons*: $\pi' = w'^{-1}\pi$, $\lambda'(\underline{s}) = w'^{-1}(\lambda(\underline{s}))$. *Supposons vérifiées les conditions suivantes*:

(a) *pour tous* $1 \leqq i < j \leqq r$, $\mathrm{Re}(\lambda'(\underline{s})_i - \lambda'(\underline{s})_j) > -e(\mathrm{J})$;

(b) σ *est croissant sur chaque intervalle* $[p'_i + 1, p'_{i+1}]$;

(c) *pour tous* $1 \leqq i < j \leqq m$

$$\mathrm{Re}(s_i - s_j) > -e(\mathrm{J}).$$

Alors on a:

(i) *il existe un opérateur méromorphe, noté* $N_\sigma(\underline{t})$ $(\underline{t}\in \mathbf{C}^m)$ *tel que le diagramme suivant soit commutatif*

$$\begin{tikzcd}
I(\pi',\lambda'(\underline{t})) \arrow[rr] \arrow[dr, "N(ww',\pi',\lambda'(\underline{t}))"'] \arrow[ddr, bend right, "N(\sigma ww',\pi',\lambda'(\underline{t}))"'] & & I(\pi,\lambda(\underline{t})) \arrow[dl, "N(w,\pi,\lambda(\underline{t}))"] \arrow[ddl, bend left, "N(\sigma w,\pi,\lambda(\underline{t}))"] \\
& I(J,\underline{t}) \arrow[d, "N_\sigma(\underline{t})"] & \\
& I(\sigma\pi,\sigma w\lambda(\underline{t})) &
\end{tikzcd}$$

(ii) *les opérateurs ci-dessus sont tous holomorphes en* $\underline{s}$. *L'opérateur* $N(ww',\pi',\lambda'(\underline{s}))$ *est surjectif et* $N_\sigma(\underline{s})\neq 0$.

Comme en I.8, il s'agit de montrer la surjectivité de $N(ww',\pi',\lambda'(\underline{s}))$. Introduisons, pour $j=1,\ldots,m$, les termes δ_i^j, ν_i^j, $i=1,\ldots,q_j$, relatifs à π_j. Posons: $q:=\sum_{j=1}^{m}p_j q_j$. Notons D la représentation obtenue en remplaçant, dans l'expression de π, chaque représentation π_j par:

$$\delta_1^j\otimes\ldots\otimes\delta_{q_j}^j;$$

notons $\mu(\underline{t})\in\mathbf{C}^q$ le terme obtenu en remplaçant, dans l'expression de $\lambda(\underline{t})$, le terme $c+t_j$, $(a_j\leqq c\leqq b_j)$ par:

$$(c+\nu_1^j+t_j,\ldots,c+\nu_{q_j}^j+t_j).$$

Alors $I(\pi,\lambda(\underline{t}))\simeq I(D,\mu(\underline{t}))$. On peut identifier w' et w à des éléments de $\mathfrak{S}_q$ et alors $I(\pi',\lambda'(\underline{t}))\simeq I(w'^{-1}D, w'^{-1}\mu(t))$, etc. Choisissons un élément $w''\in\mathfrak{S}_q$ de telle sorte qu'en posant: $\mu''(\underline{t}):=w''^{-1}w'^{-1}\mu(\underline{t})$, on ait:

$$\mathrm{Re}(\mu''(\underline{s})_i-\mu''(\underline{s})_j)\geqq 0,$$

pour tous $1\leqq i<j\leqq q$. Posons: $D''=w''^{-1}w'^{-1}D$. On a le diagramme:

$$(1)\qquad I(D'',\mu''(\underline{t})) \underset{N(w''^{-1},\,w'^{-1}D,\,w'^{-1}\mu(\underline{t}))}{\overset{N(w'',\,D'',\,\mu''(\underline{t}))}{\rightleftarrows}} I(w'^{-1}D, w'^{-1}\mu(\underline{t}))$$

L'hypothèse (a) permet de montrer comme en I. 10 que ces opérateurs sont définis au point $\underline{s}$. Ce sont alors des isomorphismes. Soit $v \in \mathfrak{S}_q$ l'élément défini par:

$$v\left(\sum_{j=1}^{i-1} p_j q_j + kq_i + h + 1\right) = \sum_{j=1}^{i-1} p_j q_j + hp_i + k + 1,$$

pour $k=0, \ldots, p_i - 1$, $h=0, \ldots, q_i - 1$. On voit que $v\,\mathrm{D}$, resp. $v\mu(\underline{t})$ est composé de blocs

$$\delta_i^j \otimes \ldots \otimes \delta_i^j$$

comportant p_j termes, resp.

$$(b_j + t_j + \nu_k^j, b_j - 1 + t_j + \nu_k^j, \ldots, a_j + t_j + \nu_k^j).$$

Le nombre de blocs est $q' = \sum_{j=1}^{m} q_j$. Indiçons les dans l'ordre naturel. Le bloc ci-dessus étant, disons, le h-ième, on lui associe le triplet:

$$(d_h, \alpha_h, \beta_h) = (\delta_i^j [\mathrm{Im}(s_j)], a_j + \nu_k^j + \mathrm{Re}(s_j), b_j + \nu_k^j + \mathrm{Re}(s_j)).$$

Posons:

$$\mathrm{J}'_h := \mathrm{J}(d_h, \alpha_h, \beta_h), \qquad \mathrm{J}' := \mathrm{J}'_1 \otimes \ldots \otimes \mathrm{J}'_q.$$

Pour $\underline{t} \in \mathbf{C}^m$, soit $\nu(\underline{t}) \in \mathbf{C}^q$ tel que, avec ces notations, on ait: $\nu(\underline{t})_h = t_j - s_j$. Notons μ l'élément qui préserve ces blocs et inverse l'ordre dans chacun d'eux. Soit enfin τ tel que $\tau uv = w$. On vérifie que τ est croissant sur chaque bloc. D'après I. 10, on a un diagramme:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{I}(\mathrm{D}'', \mu''(\underline{t})) \arrow[rr, "\mathrm{N}(vw'w'',\, \mathrm{D}'',\, \mu''(\underline{t}))"] \arrow[dr, "\mathrm{N}(uvw'w'',\, \mathrm{D}'',\, \mu''(\underline{t}))"] \arrow[ddr, "\mathrm{N}(ww'w'',\, \mathrm{D}'',\, \mu''(\underline{t}))"'] & & \mathrm{I}(v\mathrm{D}, v\mu''(\underline{t})) \arrow[dl] \\
& \mathrm{I}(\mathrm{J}', \nu(\underline{t})) \arrow[d, "\mathrm{N}_\tau(\nu(\underline{t}))"] & \\
& \mathrm{I}(w\mathrm{D}, w\mu(\underline{t})) &
\end{tikzcd}$$

Comme en I. 10, l'hypothèse (c) permet de vérifier l'hypothèse (**P**) de I. 8. Donc $\mathrm{N}_\tau(\nu(\underline{t}))$ est holomorphe en $\underline{s}$ et $\mathrm{N}(uvw'w'', \mathrm{D}'', \mu''(\underline{s}))$ a pour image $\mathrm{I}(\mathrm{J}', 0)$. Appliquons d'abord cela au cas $m=1$, $\underline{s}=0$. On obtient que $\mathrm{N}(w, \pi_1[b_1] \otimes \ldots \otimes \pi_1[-b_1], 0)$ se factorise par:

$$\pi_1[b_1] \times \ldots \times \pi_1[-b_1] \to \mathrm{J}'_1 \times \ldots \times \mathrm{J}'_{q_1} \to \mathrm{J}_1,$$

où la dernière flèche est: $\mathrm{N}_\tau(0)$.

Dans ce cas les triplets (d_h, α_h, β_h) ne sont pas liés deux à deux. Donc (I. 9) la représentation $\mathrm{J}'_1 \times \ldots \times \mathrm{J}'_{q_1}$ est irréductible, et $\mathrm{N}_\tau(0)$ est un isomorphisme. Cela démontre les assertions précédant la proposition. Revenons au cas général. Par construction $\mathrm{N}_\tau(\nu(\underline{t}))$ se déduit d'opérateurs analogues correspondant à chaque représentation π_j. D'après ce que l'on vient de dire (à quelques décalages près), on obtient que $\mathrm{N}_\tau(\nu(\underline{s}))$

est un isomorphisme de $\mathrm{I}(\mathrm{J}', 0)$ sur $\mathrm{I}(\mathrm{J}, \underline{s})$. Les diagrammes (1), (2), leurs propriétés et ce dernier résultat montrent que l'image de $\mathrm{N}(ww', \pi', \lambda'(\underline{s}))$ est $\mathrm{I}(\mathrm{J}, \underline{s})$, ce qui achève la démonstration.

II. B. Décomposition du produit scalaire

II. 1. NOTATIONS, DÉFINITIONS. — On considère le cas d'un corps de nombres. On expliquera au IV comment modifier les constructions dans le cas d'un corps de fonctions. Soient donc k un corps de nombres, $\mathbf{A}$ l'anneau des adèles de k, $\mathrm{G} := \mathrm{GL}(\mathrm{N}, k)$, ξ, un caractère unitaire de $\mathbf{A}^*/k^*$. On va légèrement modifier les constructions de l'introduction.

On considère l'ensemble des couples (M, V) suivants :

$\mathrm{M} = \mathrm{GL}(\mathrm{N}_1) \times \ldots \times \mathrm{GL}(\mathrm{N}_m)$ est un sous-groupe de Lévi standard de G,

$\mathrm{V} := \mathrm{V}_1 \otimes \ldots \mathrm{V}_m$ est un sous-espace irréductible de l'espace des formes automorphes cuspidales sur $\mathrm{M}(k) \backslash \mathrm{M}(\mathbf{A})$.

Notons $\rho = \rho_1 \otimes \ldots \otimes \rho_m$ la représentation de $\mathrm{M}(\mathbf{A})$ dans V. On adopte les mêmes notations que dans le cas local (*cf.* I. 1). On fait les hypothèses suivantes :

- ρ est unitaire;
- la restriction de son caractère central à $\mathrm{Z}_{\mathrm{G}}(\mathbf{A})$ est ξ;

$$(1) \qquad \begin{cases} \text{soient } i, j \in \{1, \ldots, m\},\ s \in \mathbf{C}; \text{ supposons que si l'on a :} \\ \mathrm{N}_i = \mathrm{N}_j \quad \text{et} \quad \rho_i \simeq \rho_j[s], \quad \text{alors on a } \mathrm{V}_i = \mathrm{V}_j. \end{cases}$$

Nous fixons pour le reste de l'article une classe de conjugaison, notée χ, de tels couples (M, V) (cette notation diffère de celle de l'introduction). Cette classe χ est contenue dans une classe d'équivalence (au sens de l'introduction), notée $\tilde{\chi}$. On pose $\mathrm{L}^2_\chi = \mathrm{L}^2_{\tilde{\chi}}$. Cela est justifié par les considérations de la fin du paragraphe.

Fixons un sous-groupe compact maximal K de $\mathrm{G}(\mathbf{A})$ en bonne position relativement au sous-groupe de Borel standard fixé et munissons le d'une mesure de Haar. Soit $(\mathrm{M}, \mathrm{V}) \in \chi$, on adopte les notations ci-dessus. On réalise l'induite $\mathrm{I}(\rho, \underline{s})$ dans un sous-espace $\mathrm{I}(\rho)$ de l'espace des fonctions $f : \mathrm{K} \to \mathrm{V}$. L'espace V est muni du produit hermitien $\langle , \rangle$ défini par intégration sur $\mathrm{M}(k) \backslash \mathrm{M}(\mathbf{A})$ (disons qu'il est linéaire à droite).

Alors $\mathrm{I}(\rho, -\bar{\underline{s}}) \times \mathrm{I}(\rho, \underline{s})$ est muni d'un produit linéaire à droite, antilinéaire à gauche, défini par :

$$\langle f', f \rangle = \int_{\mathrm{K}} \langle f'(k), f(k) \rangle \, dk.$$

On définit des opérateurs d'entrelacement, des facteurs de normalisation par produit des facteurs locaux (on fixe pour cela un caractère ψ de $k \backslash \mathbf{A}$), puis des opérateurs normalisés.

On a les relations, pour $f \in \mathrm{I}(\rho, \underline{s})$, $f' \in \mathrm{I}(\sigma\rho, -\sigma\overline{\underline{s}})$:

$$\langle f', \mathrm{M}(\sigma, \rho, \underline{s}) f \rangle = \langle \mathrm{M}(\sigma^{-1}, \sigma\rho, -\sigma\overline{\underline{s}}) f', f \rangle,$$

$$r(\sigma, \rho, \underline{s}) = \overline{r(\sigma^{-1}, \sigma\rho, -\sigma\overline{\underline{s}})}.$$

$$\langle f', \mathrm{N}(\sigma, \rho, \underline{s}) f \rangle = \langle \mathrm{N}(\sigma^{-1}, \sigma\rho, -\sigma\overline{\underline{s}}) f', f \rangle.$$

Pour simplifier les notations, on pourra omettre la lettre ρ en posant par exemple:

$$\mathrm{M}(\sigma, \underline{s}) = \mathrm{M}(\sigma, \rho, \underline{s}).$$

Cela ne crée pas d'ambiguïté.

On a la relation:

$$\mathrm{M}(\sigma', \sigma\underline{s}) \circ \mathrm{M}(\sigma, \underline{s}) = \mathrm{M}(\sigma'\sigma, \underline{s}).$$

Comme les opérateurs normalisés vérifient la même relation, on en déduit que l'on a:

(2) $$r(\sigma', \sigma\underline{s})\, r(\sigma, \underline{s}) = r(\sigma'\sigma, \underline{s}).$$

Pour $m=2$ et σ, σ' égaux à l'élément non trivial de $\mathfrak{S}_2$, on obtient:

(3) $$\mathrm{L}(s, \rho_1 \times \check{\rho}_2)(\mathrm{L}(s+1, \rho_1 \times \check{\rho}_2)\, \varepsilon(s, \rho_1 \times \check{\rho}_2))^{-1}\, \mathrm{L}(-s, \rho_2 \times \check{\rho}_1) \times (\mathrm{L}(1-s, \rho_2 \times \check{\rho}_1)\, \varepsilon(-s, \rho_2 \times \check{\rho}_1))^{-1} = 1,$$

relation qui résulte aussi de l'équation fonctionnelle des fonctions L.

Dans le cas $m=2$, $\rho_1 = \rho_2$, pour σ l'élément non trivial de $\mathfrak{S}_2$, on a:

(4) $$\mathrm{M}(\sigma, 0) = -1.$$

Cela résulte de [KS], prop. 6.3 et du fait que la représentation induite $\rho_1 \times \rho_2$ est irréductible.

Notons $\mathrm{X}(\mathrm{M})$ le sous-espace des $\underline{s} \in \mathbf{C}^m$ tels que $\sum s_i \mathrm{N}_i = 0$. On munit $\mathrm{X}(\mathrm{M}) \cap \mathbf{R}^m$ de la mesure $d_x \underline{s}$ telle que, avec une notation évidente, on ait:

$$d_x \underline{s} \,.\, d(\sum_i \mathrm{N}_i s_i) = ds_1 \ldots ds_m \;(\underline{s} \in \mathbf{R}^m).$$

Notons $\mathbf{I}(\rho)$ l'espace des fonctions $\varphi : \mathrm{X}(\mathrm{M}) \to \mathrm{I}(\rho)$ holomorphes, de type Paley-Wiener et K-finies. Pour $\underline{s} \in \mathrm{X}(\mathrm{M})$, on identifie $\varphi(\underline{s})$ à un élément de $\mathrm{I}(\rho, \underline{s})$. Cela munit $\mathbf{I}(\rho)$ d'une action de $\mathrm{G}(\mathbf{A})$. Pour $\underline{\lambda} \in \mathrm{X}(\mathrm{M}) \cap \mathbf{R}^m$, la variété $\{\underline{s} \in \mathrm{X}(\mathrm{M});\ \mathrm{Re}(\underline{s}) = \underline{\lambda}\}$ est un espace principal homogène sur $\mathrm{X}(\mathrm{M}) \cap \mathbf{R}^m$. On munit cette variété de la mesure $d_x s$ qui s'en déduit.

Soit $(\mathrm{M}', \mathrm{V}', \rho')$ un autre triplet tel que $(\mathrm{M}', \mathrm{V}') \in \chi$. On note $\mathrm{W}(\rho, \rho')$ l'ensemble des $\sigma \in \mathfrak{S}_m$ tels que $\sigma\mathrm{M} = \mathrm{M}'$, $\sigma\mathrm{V} = \mathrm{V}'$ (la notation est justifiée par le théorème de multiplicité un, *i. e.* ρ détermine V).

Fixons $\underline{\lambda} \in X(M) \cap \mathbf{R}^m$, très dominant, *i. e.* tel que $\lambda_i - \lambda_{i+1}$, soit très grand pour tout $i=1, \ldots, m-1$. Pour $\varphi \in \mathbf{I}(\rho)$, $\varphi' \in \mathbf{I}(\rho')$, on définit:

$$\langle \varphi', \varphi \rangle = (2\pi)^{1-m} \int_{\underline{s} \in X(M),\, \mathrm{Re}(\underline{s}) = \underline{\lambda}} \sum_{\sigma \in W(\rho, \rho')} \langle M(\sigma^{-1}, -\sigma \bar{\underline{s}})\, \varphi'(-\sigma \underline{s}), \qquad \varphi(\underline{s}) \rangle \, d_x \underline{s}.$$

Ce terme ne dépend pas du choix de λ. D'après ([L], lemme 4.6 (ii)), il y a des applications:

$$A: \quad \mathbf{I}(\rho) \to L^2_\chi, \qquad A': \quad \mathbf{I}(\rho') \to L^2_\chi,$$

telles que l'on ait: $\langle \varphi', \varphi \rangle = \langle A' \varphi', A \varphi \rangle$, le second produit scalaire étant celui de L^2. De plus L^2_χ est le complété des images des différentes applications A quand (M, V) parcourt χ. On trouve la décomposition spectrale de L^2_χ en décomposant le produit ci-dessus.

II.2 DÉCOMPOSITION DU PRODUIT SCALAIRE. — Considérons une suite:

$$\underline{p} = (p_1, \ldots, p_r; W_1, \ldots, W_r),$$

où les p_i sont des entiers $\geqq 1$ tels que $p_1 + \ldots + p_r = m$, et les W_i des sous-espaces irréductibles de l'espace des formes automorphes cuspidales, disons sur $GL(n_i, k) \backslash GL(n_i, \mathbf{A})$. On note π_i la représentation de $GL(n_i, \mathbf{A})$ dans W_i. On pose:

$$M_{\underline{p}} = GL(n_1) \times \ldots \times GL(n_1) \times \ldots \times GL(n_r) \times \ldots \times GL(n_r),$$
$$W_{\underline{p}} = W_1 \otimes W_1 \otimes \ldots \otimes W_r \otimes \ldots \otimes W_r,$$
$$\pi_{\underline{p}} = \pi_1 \otimes \ldots \otimes \pi_1 \otimes \ldots \otimes \pi_r \otimes \ldots \otimes \pi_r.$$

où chaque terme indicé par i intervient p_i fois.

On note $\mathfrak{p}$ l'ensemble des suites $\underline{p}$ telles que $(M_{\underline{p}}, W_{\underline{p}}) \in \chi$. Soit $\underline{p} \in \mathfrak{p}$. Pour $i=1, \ldots, r+1$, on pose:

$$p_i' := \sum_{k=1}^{i-1} p_k,$$

et pour $i=1, \ldots, r$, on pose:

$$\Delta_i = \{ p_i' + 1, \ldots, p_{i+1}' \} \subset \mathbf{N}.$$

On pose:

$$X(\underline{p}) = X(M_{\underline{p}}),$$
$$V(\underline{p}) = \{ \underline{s} \in X(\underline{p});\ s_i - s_{i+1} = 1 \text{ si } i, i+1 \text{ sont dans un même intervalle } \Delta_k \},$$
$$V^0(\underline{p}) = \{ \underline{s} \in X(\underline{p});\ s_i - s_{i+1} = 0 \text{ si } i, i+1 \text{ sont dans un même intervalle } \Delta_k \},$$
$$\lambda(\underline{p}) = ((p_1 - 1)/2, (p_1 - 3)/2, \ldots, (1 - p_1)/2, (p_2 - 1)/2, \ldots, (1 - p_r)/2).$$

Ce point est la projection (pour la structure hermitienne naturelle) de l'origine sur $\mathrm{V}(\underline{p})$ et $\mathrm{V}^0(\underline{p})$ est l'espace vectoriel sous-jacent à $\mathrm{V}(\underline{p})$. On munit $\mathrm{V}^0(\underline{p}) \cap \mathbf{R}^m$ de la mesure $d_{\underline{p}} \underline{s}$ pour laquelle, avec des notations évidentes :

$$d_{\underline{p}} \underline{s} \prod d(s_i - s_{i+1}) = d_{\mathrm{X}(\underline{p})} \underline{s},$$

le produit étant pris sur les couples i, $i+1$ contenus dans un même intervalle. Pour tout $\underline{\lambda} \in \mathrm{V}(\underline{p}) \cap \mathbf{R}^m$, on déduit une mesure sur la variété $\{\underline{s}; \underline{s} \in \mathrm{V}(\underline{p}), \mathrm{Re}(\underline{s}) = \underline{\lambda}\}$. On note $d(\underline{p})$ la dimension de $\mathrm{V}(\underline{p})$, $w_{\underline{p}} \in \mathfrak{S}_m$ l'élément qui inverse l'ordre dans chaque intervalle, *i. e.* tel que

$$w_{\underline{p}}(p'_k + i) = p'_{k+1} + 1 - i, \qquad i = 1 \ldots p_k.$$

Par définition :

$$r(w_{\underline{p}}, \pi_{\underline{p}}, \underline{s}) = \prod_{k=1}^{r} \prod_{p'_k < i < j \leqq p'_{k+1}} \mathrm{L}(s_i - s_j, \pi_k \times \check{\pi}_k)(\mathrm{L}(s_i - s_j + 1, \pi_k \times \check{\pi}_k)\, \varepsilon(s_i - s_j, \pi_k \times \check{\pi}_k))^{-1}.$$

Posons :

$$f_{\underline{p}}(s) = \prod_{k=1}^{r} \prod_{p'_k < i < p'_{k+1}} (s_i - s_{i+1} - 1).$$

Rappelons les propriétés fondamentales des fonctions $\mathrm{L}(s, \pi \times \pi')$ ($s \in \mathbf{C}$, π, π' représentations cuspidales unitaires irréductibles) :

(1) si π' n'est pas isomorphe à $\check{\pi}[t]$ pour aucun $t \in \mathbf{C}$, $\mathrm{L}(s, \pi \times \pi')$ est entière;

(2) $\mathrm{L}(s, \pi \times \tilde{\pi})$ a deux pôles simples en $s = 1$ et $s = 0$ et est holomorphe hors de ces points;

(3) $\mathrm{L}(s, \pi \times \pi')$ n'a pas de zéros dans les domaines $\{s; \mathrm{Re}(s) \geqq 1$ ou $\mathrm{Re}(s) \leqq 0\}$.

Pour (3) et l'analogue de (1) et (2) pour un corps de fonctions, *voir* [JS 2] complété par [JPSS] ((3) est dû en partie à Shahidi). Dans le cas d'un corps de nombres, voir l'appendice.

On voit que la fonction $f_{\underline{p}}(s)\, r(w_{\underline{p}}, \pi_{\underline{p}}, \underline{s})$ est holomorphe sur $\mathrm{V}(\underline{p})$ et y est constante. On note $c'_{\underline{p}}$ cette valeur constante et

$$c_{\underline{p}} = (1/r!)(2\pi)^{-d(\underline{p})} c'_{\underline{p}}.$$

On note $\mathrm{W}(\uparrow, p)$ l'ensemble des $\sigma \in \mathfrak{S}_m$ croissants sur chaque intervalle Δ_k. Soit T un réel grand. Pour tout sous-ensemble $\mathrm{D} \subset \mathbf{C}^m$ muni d'une mesure, on notera $\int_{\mathrm{D}}^{\mathrm{T}}$ l'intégrale sur $\mathrm{D} \cap \{\underline{s} \in \mathbf{C}^m; \|\mathrm{Im}(s)\| \leqq 2\mathrm{T}\}$, où $\|\bullet\|$ désigne la norme usuelle. Soient φ, φ' comme en I.1 et $a(\varphi, \varphi')$, $b(\varphi, \varphi')$ deux termes dépendant de φ et φ'. On écrira :

$$a(\varphi, \varphi') =_{\mathrm{T}} b(\varphi, \varphi')$$

si $a(\varphi, \varphi')-b(\varphi, \varphi')$ est de la forme:

$$\int_{D} c(\underline{s})\,\varphi(\underline{s})\,\overline{\varphi'(\gamma\underline{\bar{s}})}\,d\underline{s},$$

où D est une sous-variété de $\mathbf{C}^m$ munie d'une mesure (il est sous-entendu que l'intégrale converge) $c(\bullet)$ est la restriction à D d'une fonction holomorphe, $\gamma \in \mathrm{GL}(m, \mathbf{C})$, de telle sorte que pour $\underline{s} \in \mathrm{D}$, on ait $\|\mathrm{Im}(\underline{s})\| > \mathrm{T}$, $\|\mathrm{Im}(\gamma\underline{s})\| > \mathrm{T}$ et $\mathrm{Re}\,\underline{s}$ comme $\mathrm{Re}\,\gamma\,\underline{s}$ restent dans un compact indépendant de T.

Soient $(\mathrm{M}, \mathrm{V}, \rho)$, $(\mathrm{M}', \mathrm{V}', \rho')$ comme en II.1, $\varphi \in \mathbf{I}(\rho)$, $\varphi' \in \mathbf{I}(\rho')$. Fixons $\mathrm{T}>0$. Pour $\underline{p} \in \mathfrak{p}$, posons:

$$\langle \varphi', \varphi \rangle_{\underline{p}}^{\mathrm{T}} = c_{\underline{p}} \int_{\underline{s} \in \mathrm{V}(\underline{p}),\, \mathrm{Re}(\underline{s}) = \lambda(\underline{p})}^{\mathrm{T}} \sum_{\sigma, \tau} \langle \mathrm{N}(w_{\underline{p}}, -w_{\underline{p}}\underline{\bar{s}})\,\mathrm{M}(\tau^{-1}, -\tau\, w_{\underline{p}}\underline{\bar{s}})\,\varphi'(-\tau w_{\underline{p}}\underline{\bar{s}}),$$
$$\mathrm{M}(\sigma^{-1}, \sigma\underline{s})\,\varphi(\sigma\underline{s}) \rangle\, d_{\underline{p}}\underline{s},$$

où l'on somme sur

$$\sigma \in \mathrm{W}(\uparrow, \underline{p}) \cap \mathrm{W}(\pi_{\underline{p}}, \rho), \qquad \tau \in \mathrm{W}(\uparrow, \underline{p}) \cap \mathrm{W}(\pi_{\underline{p}}, \rho').$$

Nous justifierons la définition ci-dessus en montrant (lemme III.3) que la fonction à intégrer est holomorphe sur le domaine d'intégration.

Proposition. — *Soient* $\varphi \in \mathbf{I}(\rho)$, $\varphi' \in \mathrm{I}(\rho')$ *et* $\mathrm{T}>0$. *On a la relation suivante*:

$$\langle \varphi', \varphi \rangle =_{\mathrm{T}} \sum_{\underline{p} \in \mathfrak{p}} \langle \varphi', \varphi \rangle_{\underline{p}}^{\mathrm{T}}.$$

Cela sera démontré en III.4.

II.3 La décomposition spectrale. — Nous allons déduire la décomposition spectrale de la proposition précédente. On garde les notations de II.1 et II.2. Soit $\underline{p} \in \mathfrak{p}$. Pour $i=1, \ldots, r$ soit J_i la représentation de $\mathrm{GL}(n_i p_i, \mathbf{A})$ dont, pour toute place v de k, la composante locale $\mathrm{J}_{i,v}$ est $\mathrm{J}(\pi_{i,v}, (1-p_i)/2, (p_i-1)/2)$. (*cf.* I.11). Posons $\mathrm{J}_{\underline{p}} := \mathrm{J}_1 \otimes \ldots \otimes \mathrm{J}_r$. Pour $\underline{s} \in \mathrm{V}(\underline{p})$, notons $z(\underline{s}) \in \mathbf{C}^r$ le terme tel que $z(\underline{s})_k = s_j - \lambda(\underline{p})_j$ pour $j \in \Delta_k$ (ce terme est indépendant de j). Remarquons que la normalisation des opérateurs d'entrelacement est telle que pour presque toute place v de k, $\mathrm{N}(w_{\underline{p}}, \underline{s})_v$ est l'identité sur l'élément K_v-invariant de $\mathrm{I}(\pi_{\underline{p},v})$. On voit alors que pour $\underline{s} \in \mathrm{V}(\underline{p})$, l'image de la représentation induite $\mathrm{I}(\pi_{\underline{p}}, \underline{s})$ par $\mathrm{N}(w_{\underline{p}}, \underline{s})$ est $\mathrm{I}(\mathrm{J}_{\underline{p}}, z(\underline{s}))$. En outre on a:

$$z(-w_{\underline{p}}\underline{\bar{s}}) = -\overline{z(\underline{s})}.$$

L'opérateur $\mathrm{N}(w_{\underline{p}}, \underline{s})$ a pour adjoint $\mathrm{N}(w_{\underline{p}}, -w_{\underline{p}}\underline{\bar{s}})$. Il en résulte qu'il existe une forme sesquilinéaire $\mathrm{G}(\mathbf{A})$-invariante, notée $\langle\langle , \rangle\rangle$ sur $\mathrm{I}(\mathrm{J}_{\underline{p}}, -\overline{z(s)}) \times \mathrm{I}(\mathrm{J}_{\underline{p}}, z(\underline{s}))$ telle que l'on ait

$$\langle\langle \mathrm{N}(w_{\underline{p}}, -w_{\underline{p}}\underline{\bar{s}})f', \mathrm{N}(w_{\underline{p}}, \underline{s})f \rangle\rangle = \langle \mathrm{N}(w_{\underline{p}}, -w_{\underline{p}}\underline{\bar{s}})f', f \rangle,$$

pour tous $f \in \mathrm{I}(\pi_p, \underline{s}), f' \in \mathrm{I}(\pi_p, -w_p \bar{\underline{s}})$. Quand $\mathrm{Re}(\underline{s}) = \lambda(\underline{p})$, on a: $-w_p \bar{\underline{s}} = \underline{s}$, la forme ci-dessus devient une forme hermitienne sur $\mathrm{I}(\mathrm{J}_p, z(\underline{s}))$. Notons $\mathrm{Z}(\underline{p}) := \{ z(\underline{s}); \underline{s} \in \mathrm{V}(\underline{p}), \mathrm{Re}(\underline{s}) = \lambda(\underline{p}) \}$, munissons $\mathrm{Z}(\underline{p})$ de la mesure $d_p \underline{z}$ déduite de $d_p \underline{s}$.

Soient $(\mathrm{M}, \mathrm{V}, \rho)$ comme en II.1 et $\varphi \in \mathbf{I}(\rho)$. On définit une fonction, notée $\mathrm{A}_{\underline{p}} \varphi$ de $\mathrm{Z}(\underline{p})$ dans $\mathrm{I}(\mathrm{J}_{\underline{p}})$ par

$$(\mathrm{A}_{\underline{p}} \varphi)(z(\underline{s})) = \sum \mathrm{N}(w_p, \underline{s})\, \mathrm{M}(\sigma^{-1}, \sigma \underline{s})\, \varphi(\sigma \underline{s}),$$

sommé sur les $\sigma \in \mathrm{W}(\uparrow, \underline{p}) \cap \mathrm{W}(\pi_p, \rho)$. Pour un autre triplet $(\mathrm{M}', \mathrm{V}', \rho')$, on définit de même $\mathrm{A}'_{\underline{p}}$. On a alors, pour $\varphi' \in \mathrm{I}(\bar{\rho}')$, $\varphi \in \mathbf{I}(\rho)$:

$$\langle \varphi', \varphi \rangle_{\underline{p}}^{\mathrm{T}} = c_{\underline{p}} \int_{\mathrm{Z}(\underline{p})}^{\mathrm{T}} \langle\langle \mathrm{A}'_{\underline{p}} \varphi'(\underline{z}), \mathrm{A}_{\underline{p}} \varphi(\underline{z}) \rangle\rangle\, d_p \underline{z},$$

avec pour l'intégrale une notation évidente.

Soit maintenant $\tau \in \mathfrak{S}_m$ un élément qui permute les intervalles Δ_k et est croissant sur chacun d'eux. On définit l'élément $\tau \underline{p} \in \mathfrak{p}$, l'application $\tau : \mathrm{Z}(\underline{p}) \to \mathrm{Z}(\tau \underline{p})$ et l'opérateur $\mathrm{M}(\tau, \mathrm{J}_{\underline{p}}, \underline{z})$. On voit que les fonctions $\Phi_{\underline{p}} := \mathrm{A}_{\underline{p}} \varphi$ et $\Phi_{\tau \underline{p}} = \mathrm{A}_{\tau \underline{p}} \varphi$ vérifient la condition:

(1) $$\Phi_{\tau p}(\tau \underline{z}) = \mathrm{M}(\tau, \mathrm{J}_{\underline{p}}, \underline{z})\, \Phi_{\underline{p}}(\underline{z}) \quad \text{pour tout } \underline{z} \in \mathrm{Z}(\underline{p}).$$

Soit $\underline{z} \in \mathrm{Z}(\underline{p})$, Φ, $\Phi' \in \mathrm{I}(\mathrm{J}_{\underline{p}}, \underline{z})$. On a l'égalité:

(2) $$\langle\langle \mathrm{M}(\tau, \mathrm{J}_{\underline{p}}, \underline{z})\, \Phi', \mathrm{M}(\tau, \mathrm{J}_{\underline{p}}, \underline{z})\, \Phi \rangle\rangle = \langle\langle \Phi', \Phi \rangle\rangle.$$

En effet revenons aux définitions, soit $\underline{s}$ tel que $\underline{z} = z(\underline{s})$, f, $f' \in \mathrm{I}(\pi_p, \underline{s})$ telles que l'on ait:

$$\Phi = \mathrm{N}(w_{\underline{p}}, \underline{s}) f, \qquad \Phi' = \mathrm{N}(w_{\underline{p}}, \underline{s}) f'.$$

On a:

$$\mathrm{M}(\tau, \mathrm{J}_{\underline{p}}, \underline{z})\, \Phi = \mathrm{M}(\tau, \pi_{\underline{p}}, w_{\underline{p}} \underline{s})\, \mathrm{N}(w_{\underline{p}}, \underline{s}) f = \mathrm{N}(w_{\tau p}, \tau \underline{s})\, \mathrm{M}(\tau, \pi_{\underline{p}}, \underline{s}) f.$$

De même pour Φ'. Le membre de gauche de (2) vaut donc:

$$\langle \mathrm{M}(\tau, \pi_{\underline{p}}, w_{\underline{p}} \underline{s})\, \mathrm{N}(w_{\underline{p}}, \underline{s}) f', \mathrm{M}(\tau, \pi_{\underline{p}}, \underline{s}) f \rangle$$

qui est égal à:

$$\langle \mathrm{N}(w_{\underline{p}}, \underline{s}) f', f \rangle$$

par adjonction et donc à $\langle\langle \Phi', \Phi \rangle\rangle$.

Pour $\underline{p} \in \mathfrak{p}$, introduisons l'ensemble « avec multiplicités » $\{\underline{p}\}$, que l'on appelle la classe de $\underline{p}$; il est formé des $\tau \underline{p}$ pour τ vérifiant les hypothèses ci-dessus (on introduit des multiplicités pour tenir compte du fait que l'on peut avoir: $\tau_1 \underline{p} = \tau_2 \underline{p}$ pour deux éléments $\tau_1 \neq \tau_2$). Soit $\mathfrak{p}^0$ l'ensemble des classes ainsi obtenues. Il résulte de (1) et (2) que l'on a:

$$\langle \varphi', \varphi \rangle_{\underline{p}}^{\mathrm{T}} = \langle \varphi', \varphi \rangle_{\underline{p}'}^{\mathrm{T}}$$

quand $\underline{p}$ et $\underline{p}'$ sont dans la même classe. Pour une classe $\{\underline{p}\}$, notons $L_{\{\underline{p}\}}$ l'ensemble des collections: $\Phi_{\{\underline{p}\}}=\{\Phi_{\underline{p}};\underline{p}\in\{\underline{p}\}\}$ de fonctions $\Phi_{\underline{p}}:Z(\underline{p})\to\bar{I}(J_{\underline{p}})$ mesurables, vérifiant (1) telles que:

$$\langle\langle \Phi_{\{\underline{p}\}}, \Phi_{\{\underline{p}\}}\rangle\rangle := \sum_{\underline{p}\in\{\underline{p}\}} c_p \int_{Z(\underline{p})} \langle\langle \Phi_{\underline{p}}(\underline{z}), \Phi_{\underline{p}}(\underline{z})\rangle\rangle \, d_{\underline{p}}\underline{z}$$

soit finie. Pour $\varphi\in\mathbf{I}(\rho)$, posons $A_{\{\underline{p}\}}\varphi:=\{A_{\underline{p}}\varphi;\underline{p}\in\{\underline{p}\}\}$. Définissons de même $A'_{\{\underline{p}\}}\varphi'$ pour $\varphi'\in\mathbf{I}(\rho')$. Pour $\{\underline{p}\}\in\mathfrak{p}^0$, l'application $A_{\{\underline{p}\}}$ est à valeur dans $L_{\{\underline{p}\}}$.

On se débarasse du «T» de façon à avoir une égalité ordinaire en suivant Langlands (*cf.* par exemple [L], p. 228, 7 (x) et subséquent et preuve de 7.5). On a ainsi montré que les plans singuliers du système sont les $\sigma V(\underline{p})$ pour $\underline{p}\in\mathfrak{p}$ et $\sigma\in W(\uparrow,\underline{p})$ le long desquels on prend les résidus de la façon suivante: si σ est l'identité on définit les hyperplans, notés H_i, tels que H_i est défini par l'équation $s_i-s_{i+1}=1$ pour i et $i+1$ dans un même intervalle de $\underline{p}$ et on prend les résidus successivement le long de ces hyperplans ordonnés par exemple de telle sorte que H_i arrive avant H_j si i et j sont dans un même intervalle de $\underline{p}$ et $i>j$ (les résidus ne dépendent pas des choix faits *cf.* preuve de II.2 en III.4). Si σ n'est pas l'identité on conjugue par σ. Une collection de plans du type $\{\sigma V(\underline{p}), \underline{p}\text{ fixé } \sigma\in W(\uparrow,\underline{p})\}$ est munie d'une projection orthogonale définie sur L^2_χ qui vaut $c_{\underline{p}}A_{\{\underline{p}\}}$. On obtient la décomposition spectrale de L^2_χ à l'aide des champs d'espaces hilbertiens obtenus comme complétés des images des applications $A_{\{\underline{p}\}}$. L'unicité de la décomposition spectrale (à des données de mesures nulles près) et les résultats généraux de Langlands tels qu'exprimés par exemple dans ([A,1], main theorem) donnent le (ii) ci-dessous. D'autre part on vérifie que l'on a:

pour $\{\underline{p}\}\in\mathfrak{p}^0$, l'application $A_{\{\underline{p}\}}$ est à valeur dans $L_{\{\underline{p}\}}$ et $\langle\langle,\rangle\rangle$ est un produit hermitien défini positif. On a donc démontré:

THÉORÈME. — (i) *Pour* $\varphi\in\mathbf{I}(\rho)$, $\varphi'\in\mathbf{I}(\rho')$, *on a l'égalité*:

$$\langle \varphi', \varphi\rangle = \sum_{\{\underline{p}\}\in\mathfrak{p}^0} \langle\langle A_{\{\underline{p}\}}\varphi', A_{\{\underline{p}\}}\varphi\rangle\rangle.$$

(ii) *L'espace* $\bigoplus_{\{\underline{p}\}\in\mathfrak{p}^0} L_{\{\underline{p}\}}$ *est le complété des images des applications* $A_{\{\underline{p}\}}$ *quand* (M, V) *parcourt* χ.

COROLLAIRE. — : $L^2_\chi \simeq \bigoplus_{\{\underline{p}\}\in\mathfrak{p}^0} L_{\{\underline{p}\}}$.

Grâce au corollaire on obtient le théorème de l'introduction: $L^2_\chi\cap L^2_d$ est la somme des $L\{\underline{p}\}$, tels que $Z(\underline{p})$ soit réduit à un point [*i. e.* $\underline{p}$ est de la forme ($r=1$, $p_1=m$, W_1)].

III. Démonstration du résultat principal

III.1. Fixons φ, φ' comme dans l'énoncé de la proposition II.2. Fixons un ensemble fini S de places v de k tel que si $v\notin S$ les composantes locales $\rho_{i,v}$ des représentations

$\rho_i, i=1, \ldots, m$, (*cf.* II.1), soient non ramifiées et φ et φ' soient invariantes par K_v. Remarquons tout de suite qu'appliquer à φ ou φ' un opérateur d'entrelacement normalisé N revient essentiellement à leur appliquer un produit N_S sur les places $v \in S$ d'opérateurs locaux, la régularité des fonctions obtenues relève alors de la partie locale.

LEMME. — *Soient* $\underline{p} \in \mathfrak{p}$, $\sigma \in W(\pi_{\underline{p}}, \rho)$, $\tau \in W(\pi_{\underline{p}}, \rho')$:

(i) *Les fonctions*

$$N(w_{\underline{p}}, \underline{s})\, M(\sigma^{-1}, \sigma \underline{s})\, \varphi(\sigma \underline{s}),$$

$$\text{resp. } N(w_{\underline{p}}, -w_{\underline{p}} \underline{s})\, M(\tau^{-1}, -\tau w_{\underline{p}} \underline{s})\, \varphi'(-\tau\, w_{\underline{p}} \underline{s}),$$

sont holomorphes en un point général de $V(\underline{p})$.

(ii) *Elles sont nulles si* $\sigma \notin W(\uparrow, \underline{p}), \tau \notin W(\uparrow, \underline{p})$.

(iii) *Supposons* $\sigma \in W(\uparrow, \underline{p})$, $\tau \in W(\uparrow, \underline{p})$. *Alors*

$$M(\sigma^{-1}, \sigma \underline{s})\, \varphi(\sigma \underline{s}),$$

$$\text{resp. } M(\tau^{-1}, -\tau w_{\underline{p}} s)\, \varphi'(-\tau w_{\underline{p}} \underline{s})$$

est holomorphe en un point général de $V(\underline{p})$.

Ce lemme permet de définir les différentes fonctions ci-dessus en tant que fonctions méromorphes sur $V(\underline{p})$.

Démonstration. — Comme $\underline{s} \mapsto -w_{\underline{p}} \underline{s}$ est une bijection de $V(\underline{p})$ sur lui-même, il suffit de traiter le cas des fonctions faisant intervenir σ. Supposons d'abord $\sigma \in W(\uparrow, \underline{p})$. On a l'égalité :

$$M(\sigma^{-1}, \sigma \underline{s})\, \varphi(\sigma \underline{s}) = r(\sigma^{-1}, \sigma \underline{s})\, N(\sigma^{-1}, \sigma \underline{s})\, \varphi(\sigma \underline{s}).$$

Il est clair par construction que les pôles de ces fonctions sont sur des hyperplans de la forme $s_i - s_j = c$ pour les couples $(i, j) \in \operatorname{inv}(\sigma)$, où $\operatorname{inv}(\sigma) := \{(i, j);\ 1 \leqq i < j \leqq m, \sigma(i) > \sigma(j)\}$. D'après l'hypothèse sur σ, un tel hyperplan ne contient pas $V(\underline{p})$. D'où (iii) et (i) quand $\sigma \in W(\uparrow, \underline{p})$. Supposons maintenant $\sigma \notin W(\uparrow, \underline{p})$.

On a l'égalité :

$$r(\sigma^{-1}, \sigma \underline{s}) = r_0(\sigma^{-1}, \sigma \underline{s}) \prod_{k=1}^{r} \prod L(s_j - s_i, \pi_k \times \check{\pi}_k)\, L(s_j - s_i + 1, \pi_k \times \check{\pi}_k)^{-1}$$

où le produit intérieur porte sur $\{(i, j);\ p'_k + 1 \leqq i < j \leqq p'_{k+1},\ \sigma(i) > \sigma(j)\}$ et où on a rassemblé dans r_0 les facteurs ε et les contributions des couples (i, j) provenant d'intervalles distincts. Le terme r_0 se traite comme ci-dessus. Pour $\underline{s} \in V(\underline{p})$ et pour un couple (i, j) intervenant dans le produit ci-dessus, $s_j - s_i$ est un entier < 0. Le terme correspondant n'a donc pas de pôle. Il intervient au moins un couple $(i, i+1)$. La fonction $L(s_{i+1} - s_i + 1, \pi_k \times \check{\pi}_k)$ a un pôle, son inverse est nulle. Donc $r(\sigma^{-1}, \sigma \underline{s}) = 0$. Montrons que $N(w_{\underline{p}}, \underline{s})\, N(\sigma^{-1}, \sigma \underline{s})\, \varphi(\sigma \underline{s})$ est holomorphe en un point général de $V(\underline{p})$. Il suffit de vérifier que pour $\psi \in \mathbf{I}(\pi_{\underline{p}})$, invariante par K_v pour $v \notin S$, la fonction:

$$\langle \psi(-w_{\underline{p}}\bar{\underline{s}}), N(w_{\underline{p}}, \underline{s}) N(\sigma^{-1}, \sigma\underline{s}) \varphi(\sigma\underline{s}) \rangle$$

vérifie la même condition. Or elle est égale à

$$\langle N(\sigma w_{\underline{p}}, -w_{\underline{p}}\bar{\underline{s}}) \psi(-w_{\underline{p}}\bar{\underline{s}}), \varphi(\sigma\underline{s}) \rangle.$$

Maintenant, pour $p'_k+1 \leqq i < j \leqq p'_{k+1}$, on a $\operatorname{Re}((-w_p s)_i - (-w_p \underline{s})_j) > 0$, un tel couple ne contribue pas aux pôles d'après I.10 et on conclut comme précédemment. Le (ii) résulte des ces deux résultats. Cela achève la démonstration de (i) et du lemme.

III.2 Lemme principal. — On conserve les notations précédentes. Fixons η vérifiant: $0 < \eta < 1/2$ tel que l'on ait:

(1) si $v \in S$ et $i = 1, \ldots, m$, $\eta < e(\rho_{i,v})$, *cf.* I.10;

(2) pour $i, j = 1, \ldots, m$ la fonction $L(s, \rho_i \times \check{\rho}_j)$ n'a pas de zéro dans le domaine $\{s \in \mathbf{C};\, 1-\eta < \operatorname{Re}(s) \leqq 1, |\operatorname{Im}(s)| \leqq 3T\}$.

Soit $\underline{p} \in \mathfrak{p}$. Introduisons comme en II.2 les termes Δ_k, $V(\underline{p})$, etc. Soit $x \in V(\underline{p})^0 \cap \mathbf{R}^m$. Notons $z^0 = (z_1^0, \ldots, z_r^0)$ l'élément de $\mathbf{R}^r$ tel que $z_k^0 = x_i$ pour $i \in \Delta_k$. Pour $k = 1, \ldots, r$, notons E_k^x le segment:

$$\{z_k^0 + (1-p_k)/2, \ldots, z_k^0 + (p_k-1)/2\}.$$

Notons $\mathbf{E}^x$ l'ensemble des couples (k, h) tels que:

(i) $1 \leqq k < h \leqq r$;

(ii) $\pi_k \simeq \pi_h$;

(iii) les segments E_k^x et E_h^x sont liés au sens de Zélévinski (*i.e.* ils ne sont pas inclus l'un dans l'autre et $E_k^x \cup E_h^x$ est encore un segment). Pour $\underline{s} \in V(\underline{p})$, notons $z(\underline{s}) = (z_1, \ldots, z_r)$ l'élément de $\mathbf{C}^r$ tel que $z_k = s_i - \lambda(\underline{p})_i$ pour $i \in \Delta_k$. Définissons une fonction e^x sur $V(\underline{p})$ par:

$$e^x(\underline{s}) = \prod_{(k,h) \in \mathbf{E}^x} (z_k - z_k^0 - z_h + z_h^0).$$

Posons enfin:

$$V_x = \{\underline{s} \in V(\underline{p});\, \operatorname{Re}\underline{s} = \lambda(\underline{p}) + x, \|\operatorname{Im}\underline{s}\| \leqq 2T\}.$$

Lemme. — *Soient $\underline{p} \in \mathfrak{p}$, $x \in V(\underline{p})^0 \cap \mathbf{R}^m$. Supposons vérifiée la condition suivante: si $1 \leqq i < j \leqq m$, $x_i - x_j > -\eta$.*

Alors la fonction sur $V(p)$ suivante:

$$e^x(s) \sum_{\tau \in W(\uparrow, \underline{p}) \cap W(w_p, \underline{p}')} N(w_p, -w_p\underline{s}) M(\tau^{-1}, -\tau w_p \underline{s}) \varphi(-\tau w_p \underline{s})$$

est holomorphe dans un voisinage de V_x dans $V(\underline{p})$.

Si de plus $x_i - x_j \notin (1/2)\mathbf{Z}$ *quand* i *et* j *n'appartiennent pas à un même intervalle, alors chaque terme de la somme ci-dessus est holomorphe dans un voisinage de* V_x.

Comme dans la démonstration du lemme III.1, on est ramené par adjonction à démontrer l'holomorphie de:

$$A(\underline{s}) = e^x(\underline{s}) \sum_{\tau \in W(\uparrow, \underline{p}) \cap W(\pi_{\underline{p}}, \rho')} M(\tau, w_{\underline{p}}\underline{s})\, N(w_{\underline{p}}, \underline{s})\, \psi(\underline{s})$$

pour une fonction $\psi \in \mathbf{I}(\pi_p)$ qui est K_v-invariante si $v \notin S$. Pour $\tau \in W(\uparrow, \underline{p})$, la restriction de $N(\tau, w_p \underline{s})$ à l'image de $N(w_p, \underline{s})$ est holomorphe dans un voisinage de V_x d'après la proposition I.11 (holomorphie de N_τ). Calculons $r(\tau, w_{\underline{p}}\underline{s})$. Pour k, $h = 1, \ldots, r$, posons:

$$r(k, h, \underline{s}) = \prod L(s_i - s_j, \pi_k \times \check{\pi}_h)\, L(s_i - s_j + 1, \pi_k \times \check{\pi}_h)^{-1},$$

produit sur les $i \in \Delta_k$, $j \in \Delta_h$ tels que $(w_{\underline{p}} i, w_{\underline{p}} j) \in \operatorname{inv}(r)$ (*cf.* II.2, pour les définitions). Comme $\tau \in W(\uparrow, \underline{p})$, on a l'égalité:

$$r(\tau, w_{\underline{p}}\underline{s}) = \varepsilon(\underline{s}) \prod_{1 \leq k < h \leq r} r(k, h, \underline{s})$$

où $\varepsilon(\underline{s})$ rassemble les facteurs ε. Posons: $\tau' := \tau w_{\underline{p}}$. Pour $i \in \Delta_k$ et $h > k$, posons:

$$\alpha(i, h) := \inf\{j;\, j \in \Delta_h, \tau'(i) > \tau'(j)\},$$

si cet ensemble est non vide. Dans ce cas, on a $\tau'(i) > \tau'(j)$ pour tout $j \in [\alpha(i, h), p'_{h+1}]$. Si j et $j+1$ appartiennent à ce dernier ensemble on a $s_{j+1} = s_j - 1$. On voit alors que la contribution à $r(k, h, \underline{s})$ des couples (i, j) pour i fixé est:

$$L(s_i - s_{\alpha(i, h)}, \pi_k \times \check{\pi}_h)\, L(s_i - s_{p'_{h+1}} + 1, \pi_k \times \check{\pi}_h)^{-1}.$$

Notons $I_{k, h}$ l'ensemble des i tels que l'ensemble précédent soit non vide (rappelons que l'on a supposé $h > k$).

On obtient

$$r(k, h, s) = \prod_{i \in I_{k, h}} L(s_i - s_{\alpha(i, h)}, \pi_k \times \check{\pi}_h)\, L(s_i - s_{p'_{h+1}} + 1, \pi_k \times \check{\pi}_h)^{-1}. \tag{3}$$

Pour $j \in \Delta_h$, posons:

$$\beta(j, h) := \sup\{i;\, i \in \Delta_k, \tau'(i) > \tau'(j)\},$$

quand cet ensemble est non vide et notons $J_{h, k}$ l'ensemble des j tels que cet ensemble soit non vide. On obtient de même:

$$r(k, h, s) = \prod_{j \in J_{h, k}} L(s_{\beta(j, k)} - s_j, \pi_k \times \check{\pi}_h)\, L(s_{p'_{k+1}} - s_j + 1, \pi_k \times \check{\pi}_h)^{-1}. \tag{4}$$

Supposons $p_h \geqq p_k$. Pour $i \in I_{k, h}$ et s dans un voisinage de V_x, on a:

$$\operatorname{Re}(s_i - s_{p'_{h+1}}) \geqq \operatorname{Re}(s_{p'_{k+1}} - s_{p'_{h+1}}) > -\eta.$$

Dans la formule (3), les dénominateurs ne s'annulent pas. Les pôles proviennent donc des numérateurs. En tenant compte de l'hypothèse II. 1 (1), on voit qu'il n'y en a pas si $\pi_k \not\simeq \pi_h$ et qu'ils sont sur les hyperplans $s_i - s_{\alpha(i, h)} = 1$ ou 0 si $\pi_k \simeq \pi_h$, *a fortiori* sur les hyperplans $s_i - s_j = 1$ ou 0. Si $p_h \leqq p_k$ on utilise la formule (4) et on obtient la même conclusion. Il existe un voisinage, noté V de V_x tel que ces hyperplans ne coupent V que si $z_k^0 + p_k/2 \equiv z_h^0 + p_h/2 \bmod \mathbf{Z}$. Notons C l'ensemble des couples (k, h) vérifiant cette condition et tels que $k < h$ et $\pi_k \simeq \pi_h$. Remarquons que si x vérifie les conditions de la dernière partie de l'énoncé, C est vide et les calculs ci-dessus démontrent l'holomorphie de chaque terme de la somme dans V.

Dans le cas général, introduisons l'élément:

$$z(\underline{s}) := (z_1, \ldots, z_r) \in \mathbf{C}^r$$

Cet élément paramétrise $V(\underline{p})$. Les calculs ci-dessus montrent qu'il existe une fonction, notée $n : C \to \mathbf{N}$ telle que:

$$\Big(\prod_{(k, h) \in C} (z_k - z_k^0 - z_h + z_h^0)^{n(k, h)}\Big) A(\underline{s})$$

soit holomorphe dans un voisinage de V_x. Pour démontrer que $A(\underline{s})$ elle-même est holomorphe dans un tel voisinage, il suffit de démontrer la propriété suivante:

(5) Soit $(k, h) \in C$, notons $H_{k, h}$ l'hyperplan de $V(\underline{p})$ défini par: $(z_k - z_k^0 - z_h + z_h^0) = 0$. Alors il existe un voisinage V de V_x tel que $A(\underline{s})$ soit holomorphe en un point général de $V \cap H_{k, h}$.

On choisit V tel que pour $\underline{s} \in V$, on ait:

si $1 \leqq i < j \leqq m$, $\operatorname{Re} s_i - \lambda(\underline{p})_i - \operatorname{Re} s_j + \lambda(\underline{p})_j > -\eta$, $\|\operatorname{Im} \underline{s}\| < 3T$.

Soit $(k, h) \in C$. Par point général de $H_{k, h} \cap V$ on entend un point tel que pour tout couple $(k', h') \neq (k, h)$ tel que $k' < h'$, tous $i \in \Delta_{k'}$, $j \in \Delta_{h'}$, la fonction $L(s_i - s_j, \pi_{k'} \times \check{\pi}_{h'}) L(s_i - s_j + 1, \pi_{k'} \times \check{\pi}_{h'})^{-1}$ n'a pas de pôle en ce point. Ces conditions n'excluent que des hyperplans. Posons:

$$J_0 := \{(i, j);\, i \in \Delta_k, j \in \Delta_h, \lambda(\underline{p})_i + x_i - \lambda(\underline{p})_j - x_j = 0\},$$
$$J_1 = \{(i, j);\, i \in \Delta_k, j \in \Delta_h, \lambda(\underline{p})_i + x_i - \lambda(\underline{p})_j - x_j = 1\}.$$

Fixons un point général, $\underline{s}$, de $H_{k, h} \cap V$. Soit $w' \in \mathfrak{S}_m$ tel que, en posant $w'^{-1} \underline{s} = \underline{s}'$, on ait $\operatorname{Re}(s_i' - s_j') > -\eta$ pour tous $1 \leqq i < j \leqq m$. Pour $(i, j) \in J_0$, on a $s_i = s_j$, on peut donc imposer la condition supplémentaire $w'^{-1} j = w'^{-1} i + 1$. Posons $\pi_p' = w'^{-1} \pi_p$, $M_p' = w'^{-1} M_p$. On peut appliquer la proposition I. 11 (aux changements près: $z(\underline{s}) \leftrightarrow \bar{\underline{s}}$, $m \leftrightarrow r$). L'opérateur $N(w_p, w', \underline{s}')$ a pour image $I(J_p, z(\underline{s}))$ [qui en tant qu'espace ne dépend pas de $\underline{s}$)]. On peut en choisir une section locale holomorphe, donc trouver un voisinage $V(\underline{s})$ de $\underline{s}$ dans $V(\underline{p})$ et une fonction holomorphe $\psi' : w'^{-1} V(\underline{s}) \to I(\underline{\pi}_p')$, K-finie et invariante par K_v pour toute $v \notin S$, de telle sorte que l'on ait:

$$N(w_p, \underline{y}) \psi(\underline{y}) = N(w_p w', \underline{y}') \psi'(\underline{y}'),$$

pour tout $\underline{y} \in V(\underline{s})$, où l'on a posé $\underline{y}' := w'^{-1} \underline{y}$.

Quitte à restreindre $V(s)$, on peut choisir un voisinage $X(\underline{s}')$ de $\underline{s}'$ dans $X(M'_p)$ tel que $X(\underline{s}') \cap w'^{-1} V(\underline{p}) = w'^{-1} V(\underline{s})$ et tel que ψ' s'étende en une fonction holomorphe encore notée $\psi' : X(\underline{s}') \to I(\pi'_p)$ possédant les mêmes propriétés d'invariance que la fonction initiale. Quitte à restreindre encore $V(\underline{s})$ et $X(\underline{s}')$, on peut supposer que $\mathrm{Re}(y'_i - y'_j) > -\eta$ pour tous $1 \leqq i < j \leqq m$ et tout $\underline{y}' \in X(\underline{s})$.

Soient $\tau \in W(\uparrow, \underline{p})$ et $y \in V(\underline{s})$. On a l'égalité (de fonctions méromorphes):

$$M(\tau, w_p \underline{y}) N(w_p, \underline{y}) \psi(\underline{y}) = r(\tau, w_p \underline{y}) N_\tau(z(\underline{y})) N(w_p, \underline{y}) \psi(\underline{y})$$
$$= r(\tau, w_p \underline{y}) N_\tau(z(\underline{y})) N(w_p w', \underline{y}') \psi'(\underline{y}') = r(\tau, w_p w' \underline{y}') N(\tau w_p w', \underline{y}') \psi'(\underline{y}').$$

Cela nous ramène à démontrer l'holomorphie dans $w'^{-1} V(\underline{s})$ [éventuellement en restreignant $V(\underline{s})$] de la fonction:

$$B(\underline{y}') = e^x(\underline{y}) \sum_{\tau \in W(\uparrow, \underline{p}) \cap W(\pi_p, \rho')} r(\tau, w_p w' \underline{y}') N(\tau w_p w', \underline{y}') \psi'(\underline{y}').$$

Notons $\mathfrak{S}(k, h)$ le sous-groupe de $\mathfrak{S}_m$ engendré par les permutations échangeant les deux éléments d'un couple $(i, j) \in J_0$. $W(\pi_p, \rho')$ est stable par multiplication à droite par $\mathfrak{S}(k, h)$ alors que $W(\uparrow, \underline{p})$ ne l'est pas. Posons

$$W' := W(\uparrow, \underline{p}) \mathfrak{S}(k, h) \cap W(\pi_p, \rho').$$

Définissons une fonction méromorphe dans $X(\underline{s}')$ par:

$$C(\underline{y}') = \sum_{\tau \in W'} r(\tau, w_p w' \underline{y}') N(\tau w_p w', \underline{y}') \psi'(\underline{y}').$$

Montrons que B est la restriction de C à $w'^{-1} V(\underline{s})$ multipliée par $e^x(\underline{y})$. Il suffit de voir que les termes correspondant à $\tau \notin W(\uparrow, \underline{p})$ s'annulent sur $w'^{-1} V(s)$. Le terme $N(\tau w_p w', \underline{y}') \psi'(\underline{y}')$ est holomorphe d'après la proposition I.10 et l'hypothèse concernant $X(\underline{s}')$. On montre comme au lemme III.1 que $r(\tau, w_p w' \underline{y}')$ s'annule en un point général de $w'^{-1} V(\underline{s})$ quand $\tau \notin W(\uparrow, \underline{p})$. Cela démontre l'assertion.

Étudions maintenant le comportement de $C(\underline{y}')$. Comme on vient de le dire, les termes $N(\tau w_p w', \underline{y}') \psi'(\underline{y}')$ sont holomorphes. Rappelons que pour $\tau \in \mathfrak{S}_m$,

$$r(\tau, w_p w' \underline{y}') = \varepsilon(\underline{y}) \prod_{1 \leqq k' \leqq h' \leqq r} \prod L(y_i - y_j, \pi_{k'} \times \check{\pi}_{h'}) L(y_i - y_j + 1, \pi_{k'} \times \check{\pi}_{h'})^{-1}$$

le produit intérieur étant pris sur les $i \in \Delta_{k'}$, $j \in \Delta_{h'}$, tels que $(w_p(i), w_p(j)) \in \mathrm{inv}(\tau)$.

Quitte à restreindre $X(\underline{s}')$, les termes suivants ne donnent pas de pôles:

ceux provenant d'un même intervalle: $\mathrm{Re}(y_i - y_j)$ est proche d'un entier <0;

ceux provenant d'intervalles $(\Delta_{k'}, \Delta_{h'}) \neq (\Delta_k, \Delta_h)$ car $\underline{s}$ est général;

ceux provenant des couples (i, j) des intervalles (Δ_k, Δ_h) tels que $(i, j) \notin J_1$: $\mathrm{Re}(y_i - y_j)$ est proche d'un entier $\neq 1$ et la fonction $L(s, \pi_k \times \check{\pi}_h) L(s+1, \pi_k \times \check{\pi}_h)^{-1}$ n'a pas de pôle (si l'entier est $\neq 0$ c'est clair; au point $s = 0$, les singularités se compensent).

Il ne reste que les couples $(i, j) \in \mathrm{J}_1$, qui donnent des pôles simples. Donc la fonction :

(6) $$\Big(\prod_{(i,j) \in \mathrm{J}_1} (y_i - y_j - 1)\Big)\, r(\tau, w_p w' \underline{y}')$$

est holomorphe dans $\mathrm{X}(\underline{s}')$ et donc aussi la fonction :

(7) $$\Big(\prod_{(i,j) \in \mathrm{J}_1} (y_i - y_j - 1)\Big)\, \mathrm{C}(\underline{y}').$$

Soient $(i, j) \in \mathrm{J}_0$ et H l'hyperplan de $\mathrm{X}(\mathrm{M}'_p)$ défini par la relation $\underline{y}' \in \mathrm{H} \Leftrightarrow y_i = y_j$. Montrons que $\mathrm{C}(\underline{y}')$ s'annule sur $\mathrm{H} \cap \mathrm{X}(\underline{s}')$.

Il suffit de le vérifier en un point général de $\mathrm{H} \cap \mathrm{X}(\underline{s})$ pour lequel, d'après (6), les fonctions $r(\tau, w_p w' \underline{y}')$ sont holomorphes. Notons σ l'élément qui échange $w_p(i)$ et $w_p(j)$. Comme $(w_p(i), w_p(j)) \in \mathrm{J}_0$, on a $\sigma \in \mathfrak{S}(k, h)$. Posons $\sigma' := (w_p w')^{-1} \sigma w_p w'$. D'après l'hypothèse sur w', σ' est la symétrie élémentaire qui échange $w'^{-1}(i)$ et $w'^{-1}(i)+1$. Soit $\tau \in \mathrm{W}'$ et $\underline{y}'$ un point général de $\mathrm{H} \cap \mathrm{X}(\underline{s}')$. Il est fixe par σ' et $w_p w' \underline{y}'$ est fixe par σ. On en déduit les égalités [*cf.* II.1(2)] :

$$r(\tau\sigma, w_p w' \underline{y}') = r(\tau, w_p w' \underline{y}')\, r(\sigma, w_p w' \underline{y}')$$
$$\mathrm{N}(\tau\sigma w_p w', \underline{y}') = \mathrm{N}(\tau w_p w', \underline{y}')\, \mathrm{N}(\sigma', \underline{y}').$$

On peut calculer $r(\sigma, w_p w' \underline{y})$. Les couples intervenant sont $(w_p(i), w_p(j))$, $(w_p(i), e)$, $(e, w_p(j))$ pour $w_p(i) < e < w_p(j)$. Comme $w_p w' \underline{y}'$ est fixe par σ, on voit grâce à II.1(3) que pour tout e, les contributions des couples $(w_p(i), e)$ et $(e, w_p(j))$ se compensent. On vérifie alors l'égalité :

$$r(\sigma, w_p w' \underline{y}') = r(\sigma', \underline{y}').$$

Considérons l'opérateur $\mathrm{M}(\sigma', \underline{y}')$. Il est scalaire car $\mathrm{I}(\pi_i \otimes \pi_i, 0)$ est irréductible. D'après II.1.1(4), on a l'égalité :

$$\mathrm{M}(\sigma', \underline{y}') = -\mathrm{id}.$$

Les quatre égalités précédentes démontrent l'égalité :

$$r(\tau\sigma, w_p w' \underline{y}')\, \mathrm{N}(\tau\sigma w_p w', \underline{y}')\, \psi'(\underline{y}') = -r(\tau, w_p w' \underline{y}')\, \mathrm{N}(\tau w_p w', \underline{y}')\, \psi'(\underline{y}').$$

Mais alors : $\mathrm{C}(\underline{y}') = -\mathrm{C}(\underline{y}')$, d'où $\mathrm{C}(\underline{y}') = 0$ ce qui démontre l'assertion.

Il en résulte que la fonction (7) est visible par :

$$\prod_{(i,j) \in \mathrm{J}_0} (y_i - y_j),$$

i. e. il existe une fonction holomorphe $\mathrm{D}(\underline{y}')$ dans $\mathrm{X}(\underline{s}')$ telle que :

$$\mathrm{C}(\underline{y}') = \Big(\prod_{(i,j) \in \mathrm{J}_0} (y_i - y_j)\Big)\Big(\prod_{(i,j) \in \mathrm{J}_1} (y_i - y_j - 1)\Big)^{-1} \mathrm{D}(\underline{y}').$$

Restreignons ces fonctions à $w'^{-1}\mathrm{V}(\underline{s})$. Pour $(i,j)\in \mathrm{J}_0$, resp. $(i,j)\in \mathrm{J}_1$, y_i-y_j, resp. y_i-y_j-1, devient $z_k-z_k^0-z_h+z_h^0$. On obtient:

$$\mathrm{B}(\underline{y}')=e^x(\underline{y})(z_k-z_k^0-z_h+z_h^0)^n\,\mathrm{D}(\underline{y}'),$$

où $n=|\mathrm{J}_0|-|\mathrm{J}_1|$. En considérant les différents cas possibles pour la position relative des segments E_k^x et E_h^x, on voit que l'on a:

$$|\mathrm{J}_1|\leqq|\mathrm{J}_0|$$

sauf dans le cas où E_k^x et E_k^x sont liés. Dans ce cas E_h^x précède E_k^x en vertu de l'hypothèse sur x et on a $|\mathrm{J}_1|=|\mathrm{J}_0|+1$, d'où $n=-1$. Mais l'on a alors $(k,h)\in\mathbf{E}^x$, donc $z_k-z_k^0-z_h+z_h^0$ divise $e^x(\underline{y})$ et B est bien holomorphe dans $w'^{-1}\mathrm{V}(\underline{s})$, d'où (5), ce qui achève la démonstration.

Nous utiliserons ce lemme dans les cas particuliers que nous allons expliciter dans les paragraphes suivants.

III.3. Soient $\underline{p}\in\mathfrak{p}$ et $t\in\{0,\ldots,m\}$. On dit que $\underline{p}$ est t-admissible si $p_i=1$ pour tout $i=1,\ldots,t$. On note $\mathfrak{p}_t$ l'ensemble de ces partitions. Soient $\underline{p}\in\mathfrak{p}_t$ et $x\in\mathrm{V}(\underline{p})^0\cap\mathbf{R}^m$. On dit que x est $(t,\underline{p})$-admissible si l'on a: x_i-x_{i+1} est très grand pour $i\leqq t$ et $|x_i-x_j|<\eta$ pour $t+1\leqq i,j\leqq m$. Posons:

$$\mathrm{W}_t(\uparrow,\underline{p}):=\{\sigma\in\mathrm{W}(\uparrow,\underline{p});\ \sigma(i)=i \text{ pour tout } i=1,\ldots,t\},$$

et pour tout $k=t+1,\ldots,r$,

$$\mathrm{W}_t^k(\uparrow,\underline{p})=\{\sigma\in\mathrm{W}_t(\uparrow,\underline{p});\ \sigma(p'_k+1)=t+1\}.$$

Lemme. — *Soient $t\in\{0,\ldots,m\}$, $\underline{p}\in\mathfrak{p}_t$, $x\in\mathrm{V}(\underline{p})^0\cap\mathbf{R}^m$ un point $(t,\underline{p})$ admissible. Les fonctions sur $\mathrm{V}(\underline{p})$ suivantes*:

$$\sum_{\sigma\in\mathrm{W}_t^{t+1}(\uparrow,\underline{p})\cap\mathrm{W}(\pi_{\underline{p}},\rho)}\mathrm{N}(w_p,\underline{s})\,\mathrm{M}(\sigma^{-1},\sigma\underline{s})\,\varphi(\sigma\underline{s}),$$

$$\sum_{\sigma\in\mathrm{W}_t(\uparrow,\underline{p})\cap\mathrm{W}(\pi_{\underline{p}},\rho)}\mathrm{N}(w_p,\underline{s})\,\mathrm{M}(\sigma^{-1},\sigma\underline{s})\,\varphi(\sigma\underline{s}),$$

$$\sum_{\tau\in\mathrm{W}(\uparrow,\underline{p})\cap\mathrm{W}(\pi_{\underline{p}},\rho')}\mathrm{N}(w_p,-w_p\underline{s})\,\mathrm{M}(\tau^{-1},-\tau w_p\underline{s})\,\varphi(-r\,w_p\underline{s})$$

sont holomorphes dans un voisinage dans $\mathrm{V}(\underline{p})$ de V_x. Supposons $x_i\neq x_j$ quand i et j n'appartiennent pas à un même intervalle. Alors chaque terme des sommes ci-dessus est holomorphe dans un voisinage de V_x.

Remarque. — L'holomorphie des deux dernières sommes résulte en fait de ([L], lemme 7.6).

Le point x vérifie l'hypothèse du lemme III.2 et $\mathbf{E}^x=\varnothing$. L'holomorphie de la troisième fonction résulte donc de ce lemme. Pour les deux premières fonctions, il est clair que les t premières variables n'interviennent que d'une façon inessentielle. On peut supposer

$t=0$. Le changement $g \mapsto w_p \underline{s}$ ramène la deuxième fonction à la troisième déjà traitée. Pour la première, supposons $p_1 > 1$ (le cas $p_1 = 1$ est analogue et plus simple). Introduisons l'élément $\underline{\tilde{p}} = (\tilde{p}_1, \ldots, \tilde{p}_{r+1}, \tilde{\mathrm{W}}_1, \ldots, \tilde{\mathrm{W}}_{r+1})$ de $\mathfrak{p}$ tel que:

$$\tilde{p}_1 = 1, \qquad \tilde{p}_2 = p_1 - 1, \qquad \tilde{p}_k = p_{k-1} \quad \text{pour } k = 3, \ldots, r+1.$$
$$\tilde{\mathrm{W}}_1 = \tilde{\mathrm{W}}_2 = \mathrm{W}_1, \qquad \tilde{\mathrm{W}}_k = \mathrm{W}_{k-1} \quad \text{pour } k = 3, \ldots, r+1.$$

Soit $v \in \mathfrak{S}_m$ l'élément tel que:

$$v(1) = p_1, \qquad v(i) = i-1 \quad \text{pour } i = 2, \ldots, p_1, \qquad v(i) = i \quad \text{pour } p_1 < i \leqq m.$$

On a les égalités:

$$\mathrm{W}^1(\uparrow, \underline{p}) = \mathrm{W}_1(\uparrow, \underline{\tilde{p}}), \qquad \mathrm{W}(w_{\underline{p}}, \rho) = \mathrm{W}(\pi_{\underline{\tilde{p}}}, \rho), \qquad w_{\underline{p}} = v w_{\underline{\tilde{p}}},$$
$$\mathrm{N}(w_{\underline{p}}, \underline{s}) = \mathrm{N}(v, w_{\underline{\tilde{p}}} \underline{s}) \, \mathrm{N}(w_{\underline{\tilde{p}}}, \underline{s}).$$

L'opérateur $\mathrm{N}(v, w_{\underline{\tilde{p}}} \underline{s})$ est défini et constant sur $\mathrm{V}(\underline{p})$. Cela nous ramène à démontrer l'holomorphie de la fonction sur $\mathrm{V}(\underline{p})$:

$$(1) \qquad \sum_{\sigma \in \mathrm{W}_1(\uparrow, \underline{\tilde{p}}) \cap \mathrm{W}(\pi_{\underline{\tilde{p}}}, \rho)} \mathrm{N}(w_{\underline{\tilde{p}}}, \underline{s}) \, \mathrm{M}(\sigma^{-1}, \sigma \underline{s}) \, \varphi(\sigma \underline{s}).$$

C'est la restriction de la fonction sur $\mathrm{V}(\underline{\tilde{p}})$ définie par la même formule. Il suffit donc de considérer cette dernière fonction. Effectuons le changement de variables $\underline{\tilde{s}} = -w_{\underline{\tilde{p}}} \underline{s}$. On impose à $\underline{\tilde{s}}$ d'appartenir à un voisinage dans $\mathrm{V}(\underline{\tilde{p}})$ de $\mathrm{V}_{\tilde{x}}$, d'où:

$$\tilde{x} = -\lambda(\underline{\tilde{p}}) - w_{\underline{\tilde{p}}} \lambda(\underline{p}) - w_{\underline{\tilde{p}}} x.$$

On a l'égalité:

$$-\lambda(\underline{\tilde{p}}) - w_{\underline{\tilde{p}}} \lambda(\underline{p}) = (-(p_1 - 1)/2, 1/2, \ldots, 1/2, 0, \ldots, 0),$$

où $1/2$ est pris $p_1 - 1$-fois. De nouveau la première coordonnée n'intervient que de façon inessentielle car on ne somme que sur $\mathrm{W}_1(\uparrow, \underline{\tilde{p}})$. Pour les autres coordonnées, on a:

$$|\tilde{x}_i - \tilde{x}_j| < \eta, \qquad \text{pour} \quad p_1 < i \leqq j \leqq m,$$
$$|\tilde{x}_i - 1/2 - \tilde{x}_j| < \eta \qquad \text{pour} \quad 2 \leqq i \leqq p_1 < j \leqq m.$$

On peut appliquer à $\underline{\tilde{p}}$ et $\tilde{x}$ le lemme III.2. Les relations ci-dessus impliquent $\mathbf{E}^{\tilde{x}} = \varnothing$, d'où l'holomorphie de la fonction:

$$\sum_{\sigma \in \mathrm{W}_1(\uparrow, \underline{\tilde{p}}) \cap \mathrm{W}(\pi_{\underline{\tilde{p}}}, \rho)} \mathrm{N}(w_{\underline{\tilde{p}}}, -w_{\underline{\tilde{p}}} \underline{\tilde{s}}) \, \mathrm{M}(\sigma^{-1}, -\sigma w_{\underline{\tilde{p}}} \underline{\tilde{s}}) \, \varphi(-\sigma w_{\underline{\tilde{p}}} \underline{\tilde{s}}).$$

En revenant à la variable $\underline{s}$ et en restreignant à $\mathrm{V}(\underline{p})$, on obtient l'holomorphie de la fonction (1).

LEMME III.4. — *Soient* $t \in \{0, \ldots, m\}$, $\underline{p} \in \mathfrak{p}_t$, $x \in V(\underline{p})^0 \cap \mathbf{R}^m$. *Supposons vérifiées les conditions suivantes*:

$x_i - x_{i+1}$ *est très grand pour* $i \leqq t$;

$|x_i - x_j| < \eta$ *pour* $p'_{t+2} < i \leqq j \leqq m$;

$-\eta < x_i - x_j < 1/2 + \eta$ *pour* $p'_{t+1} < i \leqq p'_{t+2} < j \leqq m$.

Alors les fonctions sur $V(\underline{p})$ *suivantes*:

$$\sum_{\sigma \in W_t^{t+1}(\uparrow, \underline{p}) \cap W(\pi_{\underline{p}}, \rho)} N(w_p, \underline{s}) M(\sigma^{-1}, \sigma \underline{s}) \varphi(\sigma \underline{s}),$$

$$\sum_{\tau \in W(\uparrow, \underline{p}) \cap W(\pi_{\underline{p}}, \rho')} N(w_{\underline{p}}, -w_{\underline{p}} \underline{s}) M(\tau^{-1}, -\tau w_{\underline{p}} \underline{s}) \varphi(-\tau w_{\underline{p}} \underline{s}),$$

sont holomorphes dans un voisinage dans $V(\underline{p})$ *de* V_x.

Pour la deuxième fonction on applique directement le lemme III.2. On a $\mathbf{E}^x = \varnothing$ d'où le résultat. Pour la première, on raisonne comme dans la démonstration du lemme III.3: on suppose $t = 0$, on introduit la partition $\underline{\tilde{p}}$ et le point $\tilde{x}$. Ce point vérifie les relations:

$$|\tilde{x}_i - \tilde{x}_j| < \eta \qquad \text{pour} \quad p_1 < i \leqq j \leqq m,$$

$$-\eta < x_i - \tilde{x}_j < 1/2 + \eta \qquad \text{pour} \quad 2 \leqq i \leqq p_1 < j \leqq m.$$

On peut alors appliquer le lemme III.2, d'où la conclusion.

LEMME III.5. — *Soient* $t \in \{0, \ldots, m\}$, $\underline{p} \in \mathfrak{p}_t$, $x \in V(\underline{p})^0 \cap \mathbf{R}^m$ *un point* $(t, \underline{p})$ *admissible et* $u \in \{t+1, \ldots, r\}$. *La fonction sur* $V(\underline{p})$:

$$\sum_{\sigma, \tau} < N(w_p, -w_{\underline{p}} \underline{s}) M(\tau^{-1}, -\tau w_{\underline{p}} \underline{s}) \varphi'(-\tau w_{\underline{p}} \underline{s}), M(\sigma^{-1}, \sigma \underline{s}) \varphi(\sigma \underline{s}) >$$

sommée sur $\sigma \in W_t^u(\uparrow, \underline{p}) \cap W(\pi_p, \rho)$, $\tau \in W(\uparrow, \underline{p}) \cap W(\pi_{\underline{p}}, \rho')$, *est holomorphe dans un voisinage de* V_x.

Soit $v \in \mathfrak{S}_r$ l'élément défini par:

$$v: \quad (1 \ldots t, t+1, \ldots, u-1, u, u+1, \ldots, r) \mapsto (1 \ldots t, t+2, \ldots, u, t+1, u+1, \ldots, r).$$

On identifie v à un élément de $\mathfrak{S}_m$ permutant les intervalles, on définit la partition $v\underline{p}$ qui est encore t-admissible. Si $\sigma \in W_t^u(\uparrow, \underline{p})$, $\sigma v^{-1} \in W_t^{t+1}(\uparrow, v\underline{p})$. Par changement de variables et en utilisant la formule d'adjonction pour les opérateurs d'entrelacement, on est ramené à étudier le comportement au voisinage de

$$\{\underline{s} \in V(v\underline{p}); \operatorname{Re}(\underline{s}) = \lambda(v\underline{p}) + vx, \|\operatorname{Im}(\underline{s})\| \leqq 2T\}$$

de la fonction:

$$A(s) = \sum_{\sigma, \tau} \langle N(w_{v\underline{p}}, -w_{v\underline{p}} \underline{s}) M(\tau^{-1}, -\tau w_{v\underline{p}} \bar{\underline{s}}) \varphi'(-\tau w_{v\underline{p}} \bar{\underline{s}}), M(\sigma^{-1}, \sigma \underline{s}) \varphi(\sigma \underline{s}) \rangle$$

sommée sur

$$\sigma \in W_t^{t+1}(\uparrow, v\underline{p}) \cap W(\pi_{v\underline{p}}, \rho), \tau \in W(\uparrow, v\underline{p}) \cap W(\pi_{v\underline{p}}, \rho').$$

D'après II.3, on peut écrire:

$$A(s) = \langle\langle \sum_{\tau} N(w_{v\underline{p}}, -w_{v\underline{p}}\underline{s}) M(\tau^{-1}, -\tau w_{v\underline{p}}\underline{\bar{s}}) \varphi'(-\tau w_{v\underline{p}}\underline{\bar{s}}),$$
$$\sum_{\sigma} N(w_{v\underline{p}}, \underline{s}) M(\sigma^{-1}, \sigma\underline{s}) \varphi(\sigma\underline{s}) \rangle\rangle$$

Remarquons que vx est $(t, v\underline{p})$-admissible. La régularité de chacune des sommes au voisinage de l'ensemble indiqué résulte du lemme III.3.

III.6. Preuve de II.2. — Soient $t \in \{0, \ldots, m\}$, $\underline{p} \in \mathfrak{p}_t$, $x \in V(\underline{p})^0 \cap \mathbf{R}^m$ un point $(t, \underline{p})$-admissible. Posons:

$$c_{\underline{p}, t} = (2\pi)^{-d(\underline{p})} c'_{\underline{p}}/(r-t)!.$$

Remarquons que $W_t(\uparrow, \underline{p}) = \bigcup_{u=t+1}^{r} W_t^u(\uparrow, \underline{p})$. Le lemme III.5 nous autorise à définir

$$\langle \varphi', \varphi \rangle_{\underline{p}, t}^{T} := c_{\underline{p}, t} \int_{\underline{s} \in V(\underline{p}), \operatorname{Re}(\underline{s}) = \lambda(\underline{p}) + x}^{T} \sum_{\sigma, \tau} \langle N(w_{\underline{p}}, -w_{\underline{p}}\underline{\bar{s}}) M(\tau^{-1}, -\tau w_{\underline{p}}\underline{\bar{s}}) \varphi'(-\tau w_{\underline{p}}\underline{\bar{s}}),$$
$$M(\sigma^{-1}, \sigma\underline{s}) \varphi(\sigma\underline{s}) \rangle d_{\underline{p}}\underline{s},$$

sommé sur $\sigma \in W_t(\uparrow, \underline{p}) \cap W(\pi_{\underline{p}}, \rho)$, $\tau \in W(\uparrow, \underline{p}) \cap W(\pi_{\underline{p}}, \rho')$. Deux points $(t, \underline{p})$-admissibles peuvent être joints par un segment de points $(t, \underline{p})$-admissibles. Le théorème des résidus montre que l'expression ci-dessus, à égalité $=_T$ près, ne dépend pas de x.

Proposition. — *Soit $t \in \{0, \ldots, m\}$. On a l'égalité:*

$$\langle \varphi', \varphi \rangle =_T \sum_{\underline{p} \in \mathfrak{p}_t} \langle \varphi', \varphi \rangle_{\underline{p}, t}^{T}.$$

Pour $t=0$, la formule est celle de la proposition II.2 qui résulte donc de l'énoncé ci-dessus.

On fait une récurrence descendante sur t. Pour $t=m$, les partitions t-admissibles vérifient $p_1 = \ldots = p_m = 1$. On a: $W_m(\uparrow, \underline{p}) = \{1\}$. Le seul terme $\underline{p}$ contribuant à la somme est celui pour lequel $1 \in W(\pi_{\underline{p}}, \rho)$, *i. e.* $\pi_{\underline{p}} = \rho$. Pour celui-ci, la somme en σ se réduit au terme $\sigma = 1$. La formule de l'énoncé est pratiquement la définition de $\langle \varphi', \varphi \rangle$.

Supposons la proposition démontrée en t. Fixons $\underline{p} \in \mathfrak{p}_t$ et x un point $(t, \underline{p})$-admissible tel que $x_i \neq x_j$ si i, j appartiennent à des intervalles distincts. On utilise ce point pour définir $\langle \varphi', \varphi \rangle_{\underline{p}, t}^{T}$. Introduisons un point $y \in \mathbf{R}^m$ tel que

$$y_i - y_j = x_i - x_j \quad \text{si} \quad i \neq t \quad \text{et} \quad j \neq t,$$

mais

$$|y_t - y_j| < \eta \quad \text{pour} \quad j \in \{t+1, \ldots, m\}.$$

Joignons $\lambda(\underline{p})+y$ à $\lambda(\underline{p})+x$ par un segment noté S. Notons I la même intégrale que celle figurant dans la définition de $\langle \varphi', \varphi \rangle^{\mathrm{T}}_{\underline{p}, t}$ (sans la constante $c_{\underline{p}, t}$), sauf que l'on intègre ici pour $\mathrm{Re}(\underline{s})=\lambda(\underline{p})+y$. On va calculer $\langle \varphi', \varphi \rangle^{\mathrm{T}}_{\underline{p}, t}-c_{\underline{p}, t}\mathrm{I}$ par la méthode des résidus, en déplaçant la base de l'espace d'intégration le long de S (c'est la méthode de Langlands). On doit étudier la régularité de la fonction que l'on intègre. Comme au lemme III. 5, on est ramené aux deux fonctions :

$$\mathrm{A}(s)=\sum \mathrm{N}(w_{\underline{p}}, \underline{s})\,\mathrm{M}(\sigma^{-1}, \sigma\underline{s})\,\varphi(\sigma\underline{s}),$$
$$\mathrm{B}(\underline{s})=\sum \mathrm{N}(w_{\underline{p}}, -w_{\underline{p}}\underline{s})\,\mathrm{M}(\tau^{-1}, -\tau w_{\underline{p}}\underline{s})\,\varphi'(-\tau w_{\underline{p}}\underline{s}),$$

sommées sur $\sigma \in \mathrm{W}_t(\uparrow, \underline{p}) \cap \mathrm{W}(\pi_{\underline{p}}, \rho)$, $\tau \in \mathrm{W}(\uparrow, \underline{p}) \cap \mathrm{W}(\pi_{\underline{p}}, \rho')$. La fonction $\mathrm{A}(\underline{s})$ est holomorphe quand $\mathrm{Re}(\underline{s})$ est sur S. En effet les t premières coordonnées n'interviennent dans $\mathrm{A}(\underline{s})$ que d'une façon inessentielle (seulement via φ). Mais les autres coordonnées sont constantes (ou plus exactement leurs différences sont constantes) le long de S et on est immédiatement ramené au lemme III. 3. Étudions $\mathrm{B}(\underline{s})$. On peut appliquer le lemme III. 2 en tout point x' tel que $\lambda(\underline{p})+x' \in \mathrm{S}$. On a $\mathbf{E}^{x'}=\varnothing$ sauf s'il existe h tel que $t<h\leqq r$, $\pi_t \simeq \pi_h$ et $x'_t=x'_{p'_h+1}+(p_h+1)/2$. Dans ce dernier cas le h en question est unique (on a supposé $x_i \neq x_j$ si i, j appartiennent à des intervalles distincts) et $\mathbf{E}^{x'}=\{(t, h)\}$. Soit P l'ensemble des h tels que $t<h\leqq r$, $\pi_t \simeq \pi_h$. La fonction :

$$\mathrm{B}(\underline{s})\prod_{h\in \mathrm{P}}(s_t-s_{p'_h+1}-1)$$

est donc holomorphe pour $\mathrm{Re}\,\underline{s} \in \mathrm{S}$.

Pour $h \in \mathrm{P}$, définissons la fonction sur $\mathrm{V}(\underline{p})$:

$$\mathrm{C}_h(\underline{s})=(s_t-s_{p'_h+1}-1)\langle\langle \mathrm{B}(\bar{\underline{s}}), \mathrm{A}(\underline{s})\rangle\rangle$$

et soit H_h l'hyperplan défini par $s_t-s_{p'_h+1}-1=0$.

La formule des résidus ([L], 7. 1) montre que l'on a :

$$(3) \qquad \langle \varphi', \varphi \rangle^{\mathrm{T}}_{\underline{p}, t}-c_{\underline{p}, t}\mathrm{I}={}_{\mathrm{T}}2\pi c_{\underline{p}, t}\sum \int^{\mathrm{T}}_{\underline{s}\in \mathrm{V}(\underline{p})\cap \mathrm{H}_h,\ \mathrm{Re}(\underline{s})=\mathrm{S}\cap \mathrm{H}_h} \mathrm{C}_h(\underline{s})\, d_h\underline{s},$$

où la somme porte sur $h \in \mathrm{P}$ et où $d_h\underline{s}$ est défini de façon similaire à $d_{\underline{p}}\,\underline{s}$.

Fixons $h \in \mathrm{P}$. Soit $v \in \mathfrak{S}_r$ l'élément tel que :

$$v:\ (1\ldots t, t+1, \ldots, h-1, h, h+1, \ldots, r) \mapsto (1, \ldots, t, t+2\ldots h, t+1, h+1, \ldots, r).$$

On identifie v à un élément de $\mathfrak{S}_m$ permutant les intervalles. Notons ${}^h\underline{p}$ l'élément de $\mathfrak{p}$:

$${}^h\underline{p}:=({}^hp_1, \ldots, {}^hp_{r-1}; {}^h\mathrm{W}_1, \ldots, {}^h\mathrm{W}_{r-1}),$$

où

$${}^hp_i=p_i, \qquad {}^h\mathrm{W}_i=\mathrm{W}_i \quad \text{pour } i<h, i\neq t, {}^hp_i=p_{i+1}$$
$${}^h\mathrm{W}_i=\mathrm{W}_{i+1} \quad \text{pour } h\leqq i<r, \qquad {}^hp_t=p_h+1, \qquad {}^h\mathrm{W}_t=\mathrm{W}_t=\mathrm{W}_h.$$

On note ${}^h\Delta_k$ les segments correspondant à ${}^h\underline{p}$. Remarquons que ${}^h\underline{p}$ est $(t-1)$-admissible. On a l'égalité:

$$v(\mathrm{V}(\underline{p}) \cap \mathrm{H}_h) = \mathrm{V}({}^h\underline{p}).$$

Posons: ${}^h y = v(\mathrm{S} \cap \mathrm{H}_h) - \lambda({}^h\underline{p})$. On vérifie que l'on a:

$$
\begin{gathered}
{}^h y_i - {}^h y_{i+1} \text{ est très grand pour } i \leqq t-1, \\
|{}^h y_i - {}^h y_{i+1}| = |x_{v^{-1} i} - x_{v^{-1} j}| < \eta \qquad \text{si} \quad p'_{t+1} \leqq i, j \leqq m, \\
{}^h y_i - {}^h y_j = 1/2 + x_{i'} - x_{v^{-1} j} \qquad \text{si} \quad i \in {}^h\Delta_t, \qquad {}^h p'_{t+1} \leqq j \leqq m \quad \text{où } i' \in \Delta_h.
\end{gathered}
\tag{4}
$$

Notons v' l'élément de $\mathfrak{S}_m$ qui est l'identité sur ${}^h\Delta_k$ pour $k \neq t$ et tel que

$$v'(t+i) = t+i-1$$

pour $1 \leqq i < {}^h p_t$,

$$v'(t) = {}^h p'_{t+1}.$$

On a les égalités:

$$v w_{\underline{p}} v^{-1} v'^{-1} = v' v w_{\underline{p}} v^{-1} = w_{{}^h\underline{p}}.$$

Dans le h-ième terme de (3), on fait les changements de variables: $\underline{s} = v^{-1} \underline{s}'$, $\sigma = \sigma' v$, $\tau = \tau' v' v$. La variable σ' parcourt maintenant: $\mathrm{W}^t_{t-1}(\uparrow, {}^h\underline{p}) \cap \mathrm{W}(\pi_{{}^h p}, \rho)$. On peut imposer à τ de vérifier $\tau(p'_{h+1}) < \tau(t)$. En effet il résulte du début de la démonstration du lemme III.2 que si τ ne vérifie pas cette condition, le terme correspondant dans la somme définissant $\mathrm{B}(\underline{s})$ n'a pas de pôle le long de H_h. Quand on impose à τ cette condition, τ' parcourt l'ensemble $\mathrm{W}(\uparrow, {}^h\underline{p}) \cap \mathrm{W}(\pi_{h_{\underline{p}}}, \rho')$. On vérifie les égalités:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{M}(\sigma^{-1}, \sigma \underline{s})\, \varphi(\sigma \underline{s}) &= \mathrm{M}(v^{-1}, \underline{s}')\, \mathrm{M}(\sigma'^{-1}, \sigma' \underline{s}')\, \varphi(\sigma' \underline{s}'), \\
\mathrm{N}(w_{\underline{p}}, -w_{\underline{p}} \underline{s})\, &\mathrm{M}(\tau^{-1}, -\tau w_{\underline{p}} \underline{s})\, \varphi'(-\tau w_{\underline{p}} \underline{s}) \\
= (r(v^{-1}, -v \underline{s})\, &r(v, -w_{\underline{p}} \underline{s})\, r(v', -v'^{-1} w_{h_{\underline{p}}} \underline{s}'))^{-1} \\
&\times \mathrm{M}(v^{-1}, -\underline{s}')\, \mathrm{N}(w_{h_{\underline{p}}}, -w_{h_{\underline{p}}} \underline{s}')\, \mathrm{M}(\tau'^{-1}, -\tau' w_{h_{\underline{p}}} \underline{s}')\, \varphi'(-\tau' w_{h_{\underline{p}}} \underline{s}').
\end{aligned}
\tag{5}
$$

Comme v ne fait que permuter les intervalles Δ_k, on a: $r(v, -w_{\underline{p}} \underline{s}) = r(v, -\underline{s})$ et les facteurs de normalisation ci-dessus se réduisent à:

$$r(v'^{-1}, -w_{{}^h\underline{p}} \underline{s}').$$

On vérifie l'égalité suivante (*cf.* II.2 pour la définition de $f_{\underline{p}}$) entre fonctions sur $\mathrm{X}(\underline{p})$:

$$f_{\underline{p}}(\underline{s})(s_t - s_{p'_h+1} - 1)\, r(v'^{-1}, -w_{{}^h\underline{p}} \underline{s}')\, r(w_{\underline{p}}, \underline{s}) = f_{{}^h\underline{p}}(\underline{s}')\, r(w_{{}^h\underline{p}}, \underline{s}').$$

On en déduit que la valeur sur $\mathrm{V}(\underline{p}) \cap \mathrm{H}_h$ de la fonction:

$$(s_t - s_{p'_h+1} - 1)\, \overline{r(v'^{-1}, -w_{{}^h\underline{p}} \underline{s}')}$$

est $\bar{c}'_{\underline{h_p}}\bar{c}'^{-1}_{\underline{p}}$, ou encore $c'_{\underline{h_p}}c'^{-1}_{\underline{p}}$ car ces nombres sont réels. Grâce à (5) et à la formule d'adjonction, on obtient que la h-ième intégrale de la formule (3) vaut:

$$(6)\quad c'_{\underline{h_p}}c'^{-1}_{\underline{p}}\int^{\mathrm{T}}_{\underline{s}\in \mathrm{V}(^h\underline{p}),\,\mathrm{Re}(\underline{s})=\lambda(^h\underline{p})+^h y}\ \sum_{\sigma,\tau}\langle \mathrm{N}(w_{\underline{h_p}}, -w_{\underline{h_p}}\underline{s})\,\mathrm{M}(\tau, -\tau\, w_{\underline{h_p}}\underline{s}),$$
$$\mathrm{M}(\sigma^{-1}, \sigma\underline{s})\,\varphi(\sigma\underline{s})\rangle\, d_{h_p}\underline{s},$$

sommé sur $\sigma\in \mathrm{W}^t_{t-1}(\uparrow, {}^h\underline{p})\cap \mathrm{W}(\pi_{h_p}, \rho)$, $\tau\in \mathrm{W}(\uparrow, {}^h\underline{p})\cap \mathrm{W}(\pi_{h_p}, \rho')$. Le point ${}^h y$ n'est pas $(t-1, {}^h\underline{p})$-admissible à cause de la présence du 1/2 dans les formules (4). Introduisons un point ${}^h x\in \mathrm{V}({}^h\underline{p})^0\cap \mathbf{R}^m$ tel que:

$${}^h x_i-{}^h x_j={}^h y_i-{}^h y_j$$

si $i\notin\Delta'_t, j\notin\Delta'_t$,

$$|{}^h x_i-{}^h x_j|<\eta$$

si $i\in\Delta'_t$, $i<j$.

Soit ${}^h\mathrm{S}$ le segment joignant $\lambda({}^h\underline{p})+{}^h x$ à $\lambda({}^h\underline{p})+{}^h y$. Notons I^h l'intégrale figurant dans la formule (6) et ${}^h\mathrm{I}$ la même intégrale où on remplace ${}^h y$ par ${}^h x$. On calcule $\mathrm{I}^h-{}^h\mathrm{I}$ en faisant varier la base de l'espace d'intégration le long de ${}^h\mathrm{S}$. Comme au lemme III.5, on est ramené à étudier la régularité des fonctions:

$$\mathrm{D}(s)=\sum \mathrm{N}(w_{\underline{h_p}}; \underline{s})\,\mathrm{M}(\sigma^{-1}, \sigma\underline{s})\,\varphi(\sigma\underline{s}),$$
$$\mathrm{E}(s)=\sum \mathrm{N}(w_{\underline{h_p}}, -w_{\underline{h_p}}\underline{s})\,\mathrm{M}(\tau^{-1}, -\tau\, w_{\underline{h_p}}\underline{s})\,\varphi'(-\tau\, w_{\underline{h_p}}\underline{s}).$$

σ, τ varient comme dans (6). Ces fonctions sont holomorphes d'après le lemme III.4 appliqué à la partition ${}^h\underline{p}$.

La fonction que l'on intègre est donc holomorphe quand $\mathrm{Re}(\underline{s})\in{}^h\mathrm{S}$ et l'on obtient:

$$\mathrm{I}^h={}_{\mathrm{T}}{}^h\mathrm{I}.$$

D'où l'égalité:

$$\langle \varphi', \varphi\rangle^{\mathrm{T}}_{\underline{p},t}={}_{\mathrm{T}}c_{\underline{p},t}\mathrm{I}+\sum 2\pi\, c_{\underline{p},t}c'^{-1}_{\underline{p}}c'_{\underline{h_p}}({}^h\mathrm{I}),$$

sommée sur $h\in\mathrm{P}$. Considérons l'intégrale I. Soit $u\in\{t, \ldots, r\}$ et $v\in\mathfrak{S}_r$ l'élément tel que:

$$v:\quad (1, \ldots, t-1, t, t+1, \ldots, u, u+1, \ldots, r)\to(1, \ldots, t-1, u, t, \ldots, u-1, u+1, \ldots, r).$$

Introduisons la partition: ${}_u\underline{p}=v\underline{p}$. Comme au lemme III.5, I est égale à $\mathrm{I}({}_u\underline{p}, u)$ où pour une partition $\underline{\tilde{p}}:=(\tilde{p}_1, \ldots, \tilde{p}_{\tilde{r}}, \tilde{\mathrm{W}}_1, \ldots, \tilde{\mathrm{W}}_{\tilde{r}})$ $(t-1)$-admissible et $u\in\{t, \ldots, \tilde{r}\}$, on pose:

$$\mathrm{I}(\underline{\tilde{p}}, u)=\int_{\underline{s}\in \mathrm{V}(\underline{\tilde{p}}),\,\mathrm{Re}(\underline{s})=\lambda(\underline{\tilde{p}})+\tilde{x}}\ \sum_{\sigma,\tau}\langle \mathrm{N}(w_{\underline{\tilde{p}}}, -w_{\underline{\tilde{p}}}\underline{s})\,\mathrm{M}(\tau^{-1}, -\tau\, w_{\underline{\tilde{p}}}\underline{s})\,\varphi'(-\tau\, w_{\underline{\tilde{p}}}\underline{s}),$$
$$\mathrm{M}(\sigma^{-1}, \sigma\underline{s})\,\varphi(\sigma\underline{s})\rangle\, d_{\underline{\tilde{p}}}\underline{s},$$

sommé sur

$$\sigma \in W^u_{t-1}(\uparrow, \underline{\tilde{p}}) \cap W(\pi_{\underline{\tilde{p}}}, \rho), \qquad \tau \in W(\uparrow, \underline{\tilde{p}}) \cap W(\pi_{\underline{\tilde{p}}}, \rho'),$$

$\tilde{x}$ étant un point $(t-1, \underline{\tilde{p}})$-admissible. On peut écrire:

$$I = (r-t+1)^{-1} \sum_{u=1}^{r} I({}_u\underline{p}, u).$$

Remarquons que: $c_{\underline{p}, t}(r-t+1)^{-1} = c_{{}_u\underline{p}, t-1}$.

De même pour chaque intégrale ${}^h I$, introduisons l'élément $v \in \mathfrak{S}_{r-1}$ tel que:

v: $(1, \ldots, t-1, t, t+1, \ldots, h-1, h, \ldots, r-1) \mapsto (1, \ldots, t-1, h-1, t, \ldots, h-2, h, \ldots, r-1)$,

et $\underline{p}^h = v^h \underline{p}$. On obtient:

$${}^h I = I(\underline{p}^h, h-1).$$

Remarquons que $2\pi c_{\underline{p}, t} c'^{-1}_{\underline{p}} c'_{{}^h\underline{p}} = c_{\underline{p}^h, t-1}$.

On obtient l'égalité:

$$\langle \varphi', \varphi \rangle^{\mathrm{T}}_{\underline{p}, t} = {}_{\mathrm{T}}\sum_{u=t}^{r} c_{{}_u\underline{p}, t-1} I({}_u p, u) + \sum c_{\underline{p}^h, t-1} I(\underline{p}^h, h-1),$$

où la deuxième somme porte sur $h \in P$.

Notons maintenant $r(\underline{p})$, $P_{\underline{p}}$ les objets désignés ci-dessus par r et P et sommons la formule ci-dessus sur $\underline{p} \in \mathfrak{p}_t$. On vérifie que l'application:

$$\{(\underline{p}, u); \underline{p} \in \mathfrak{p}_t, t \leqq u \leqq r(\underline{p})\} \cup \{(\underline{p}, h); \underline{p} \in \mathfrak{p}_t, h \in P_{\underline{p}}\} \to \{(\underline{\tilde{p}}, k); \underline{\tilde{p}} \in \mathfrak{p}_{t-1}, t \leqq k \leqq r(\underline{\tilde{p}})\}$$

(l'union, ci-dessus est une union disjointe), application définie par $(\underline{p}, u) \mapsto ({}_u\underline{p}, u)$ sur le premier ensemble, $(\underline{p}, h) \mapsto (\underline{p}^h, h-1)$ sur le deuxième est une bijection. On construit l'application réciproque ainsi:

Soit $(\underline{\tilde{p}}, k)$ dans l'ensemble d'arrivée; si $\tilde{p}_k = 1$, le couple provient de $(\underline{p}, k)$ où $\underline{p}$ est obtenue à partir de $\underline{\tilde{p}}$ en mettant $\tilde{p}_k$, $\tilde{W}_k$ à la t-ième place; si $\tilde{p}_k > 1$, le couple provient de $(\underline{p}, k+1)$, où $\underline{p}$ est obtenue en mettant $(1, \tilde{W}_k)$ à la t-ième place et $(\tilde{p}_k - 1, \tilde{W}_k)$ à la $(k+1)$-ième (et en effectuant les décalages convenables). On obtient:

$$\sum_{\underline{p} \in t} \langle \varphi', \varphi \rangle^{\mathrm{T}}_{\underline{p}, t} = {}_{\mathrm{T}}\sum_{\underline{\tilde{p}} \in t-1} c_{\underline{\tilde{p}}, t-1} \sum_{k=t}^{r(\tilde{p})} I(\underline{\tilde{p}}, k).$$

Fixons $\underline{\tilde{p}}$. Les intégrales définissant $I(\underline{\tilde{p}}, k)$ font intervenir un point $\tilde{x}$. On peut prendre le même point pour toutes ces intégrales d'après le lemme III.5. Comme

$\mathrm{W}_{t-1}(\uparrow, \underline{\tilde{p}}) = \bigcup_{k=t}^{r(\tilde{p})} \mathrm{W}_{t-1}^{k}(\uparrow, \underline{\tilde{p}})$, les définitions conduisent à l'égalité:

$$c_{\underline{\tilde{p}}, t-1} \sum_{k=t}^{r(\tilde{p})} \mathrm{I}(\underline{\tilde{p}}, k) = {}_{\mathrm{T}}\langle \varphi', \varphi \rangle^{\mathrm{T}}_{\underline{\tilde{p}}, t-1},$$

d'où

$$\sum_{\underline{p} \in \mathfrak{p}_t} \langle \varphi', \varphi \rangle^{\mathrm{T}}_{\underline{p}, t} = {}_{\mathrm{T}} \sum_{\underline{\tilde{p}} \in \mathfrak{p}_{t-1}} \langle \varphi', \varphi \rangle^{\mathrm{T}}_{\underline{\tilde{p}}, t-1}.$$

En utilisant l'hypothèse de récurrence, on achève la démonstration de la proposition.

IV. Le cas des corps de fonctions

Supposons que k est un corps de fonctions. On va indiquer quelles modifications on doit faire dans les constructions et résultats des chapitres II et III. Notons $\mathbf{F}_q$ le sous-corps des constantes de k. Soient M, V, ρ comme en II.1. On pose:

$$\mathrm{X}(\mathrm{M}) := \{ \underline{s} \in \mathbf{C}^m; \sum_j s_j \mathrm{N}_j \in (2\pi i/\log q)\, \mathbf{Z} \}.$$

Posons:

$$\mathrm{Y}(\rho) := \{ \underline{s} \in \mathbf{C}^m; \rho \simeq \rho[\underline{s}] \}.$$

et

$$\mathrm{Y}(\rho_j) := \{ s \in \mathbf{C}; \rho_j \simeq \rho_j[s] \}.$$

Il existe un entier, noté $e(\rho_j)$ divisant N_j tel que $\mathrm{Y}(\rho_j) = (2\pi i/e(\rho_j) \log q)\, \mathbf{Z}$ et on a:

$$\mathrm{Y}(\rho) = \mathrm{Y}(\rho_1) \oplus \ldots \oplus \mathrm{Y}(\rho_m).$$

On pose:

$$\mathrm{X}(\rho) := \mathrm{X}(\mathrm{M})/\mathrm{Y}(\rho).$$

Soit $\underline{s} \in \mathrm{Y}(\rho)$. L'isomorphisme: $\rho \simeq \rho[\underline{s}]$ et le théorème de multiplicité un impliquent que pour $v \in \mathrm{V}$, la fonction $v_{\underline{s}}$ définie par $v_{\underline{s}}(g) = v(g) \prod_j |\det(g_j)|^{s_j}$ appartient à V. On note $\mathbf{I}(\rho)$ l'espace des fonctions $\varphi : \mathrm{X}(\mathrm{M}) \to \mathrm{I}(\rho)$, K-finies, polynomiales en les variables $q^{\pm s_i}$ et telles que:

(1) $$\varphi(\underline{s} + \underline{t})(k) = (\varphi(\underline{s})(k))_{-t}$$

pour tous $\underline{t} \in \mathrm{Y}(\rho)$, $k \in \mathrm{K}$. On vérifie que pour $\varphi \in \mathbf{I}(\rho)$, $\varphi' \in \mathbf{I}(\rho')$, $\sigma \in \mathrm{W}(\rho, \rho')$, la fonction:

$$\langle \mathrm{M}(\sigma^{-1}, -\sigma \bar{\underline{s}})\, \varphi'(-\sigma \bar{\underline{s}}), \varphi(\underline{s}) \rangle$$

est invariante par $Y(r)$. On munit toute variété $\{\underline{s} \in X(M); \operatorname{Re}(\underline{s})=\underline{\lambda}\}$ de la mesure analogue à celle du cas des corps de nombres (bien qu'ici ces variétés soient compactes et non connexes). On en déduit une mesure $d_x \underline{s}$ sur la variété $\{\underline{s} \in X(\rho); \operatorname{Re}(\underline{s})=\lambda\}$. On définit alors, pour $\varphi \in \mathbf{I}(\rho)$, $\varphi' \in \mathbf{I}(\rho')$:

$$\langle \varphi', \varphi \rangle = (2\pi/\log(q))^{1-m} \left(\prod_{j=1}^{m} e(\rho_j) \right) \times \int_{\underline{s} \in X(\rho),\, \operatorname{Re}(\underline{s})=\lambda} \sum_{\sigma \in W(\rho, \rho')} \langle M(\sigma^{-1}, -\sigma \overline{\underline{s}})\, \varphi'(-\sigma \overline{\underline{s}}), \varphi(\underline{s}) \rangle \, d_x \underline{s}.$$

La constante devant l'intégrale est un peu artificielle mais simplifie la rédaction (*cf.* ci-dessous).

On définit $\mathfrak{p}$ comme dans le cas des corps de nombres (*cf.* II.2). Soit $\underline{p} \in \mathfrak{p}$. On pose:

$$V(\underline{p}) = \{\underline{s} \in X(M_{\underline{p}});\ s_i - s_{i+1} = 1 \text{ si } i,\ i+1 \text{ sont dans un même intervalle } \Delta_k\}.$$

$$V'(\underline{p}) = V(\underline{p})/Y(\pi_{\underline{p}}) \cap V^0(\underline{p}).$$

Pour $\underline{s} \in X(M_{\underline{p}})$, on pose:

$$f_p(\underline{s}) = \prod_{k=1}^{r} \prod_{p_k' < i < p_{k+1}'} (q^{e(\pi_k)(s_i - s_{i+1} - 1)} - 1),$$

et on note $c'_{\underline{p}}$ la valeur de la fonction $f_{\underline{p}}(\underline{s})\, r(w_{\underline{p}}, \pi_{\underline{p}}, \underline{s})$ sur $V(\underline{p})$. On pose:

$$c_{\underline{p}} := (1/r!) \left(\prod_{k=1}^{r} e(\pi_k) \right) c'_{\underline{p}} (2\pi/\log(q))^{-d(\underline{p})}.$$

et:

$$\langle \varphi', \varphi \rangle_{\underline{p}} = c_{\underline{p}} \int_{\underline{s} \in V'(\underline{p}),\, \operatorname{Re}(\underline{s})=\lambda(\underline{p})} \dots d_{\underline{p}} \underline{s},$$

où la fonction à intégrer et la mesure sont les mêmes que dans le cas d'un corps de nombres. La proposition II.2 devient l'égalité:

$$\langle \varphi', \varphi \rangle = \sum_{\underline{p} \in \mathfrak{p}} \langle \varphi', \varphi \rangle_{\underline{p}}.$$

La démonstration est la même que dans le cas des corps de nombres. Seule la formule des résidus prend une forme un peu différente. Cela conduit à la modification des constantes que l'on vient d'expliquer.

Le théorème II.3 reste vrai en imposant aux fonctions de L_p une condition de variance analogue à (1). Le spectre discret est encore issu des termes $\underline{p}$ de la forme (m, W_1). Mais maintenant pour un tel $\underline{p}$, $Z(\underline{p})$ n'est plus réduit à un point: c'est par définition:

$$\{z \in \mathbf{C};\ z N \in (2\pi i)/\log(q)\mathbf{Z}\}/Y(\pi_1) \simeq \mathbf{Z}/(N/e(\pi_1))\,\mathbf{Z}.$$

Revenons aux notations de l'introduction. Soit $\chi \in X^0$ et $(M, V) \in \chi$ tel que:

$$N_1 = \ldots = N_m, \qquad V_1 = \ldots = V_m.$$

Alors $C(\chi)$ a $N/e(\rho_1)$ éléments: ce sont les $(M, V[\underline{s}])$ pour $\underline{s} = (s, \ldots, s)$ tels que $s \in (2\pi i/N \log q)\,\mathbf{Z}/(2\pi i/e(\rho_1) \log q)\,\mathbf{Z}$.

Et $L^2_\chi \cap L^2_d$ est donc isomorphe à la somme des $J(V[\underline{s}])$ pour ces $\underline{s}$.

BIBLIOGRAPHIE

[A, 1] J. ARTHUR, *Eisenstein Series and the Trace Formula*, in *Automorphic Forms, Representations and L-functions* (*Proc. of Symp. in Pure Math.*, vol. XXXIII, part I, Providence, 1979).

[A, 2] J. ARTHUR, *Intertwining Operators and Residues I; Weighted Characters* (*J. of Funct. Analysis*, vol. 84, 1989, p. 19-84).

[B] J. BERNSTEIN, *P-invariant Distributions on GL(N) and the Classification of Unitary Representations of GL(N), non Archimedean Case*, in (*Lie Group Representations*, vol. II, Springer LN 1041).

[BW] A. BOREL et N. WALLACH, *Continuous Cohomology, Discrete Subgroups, and Representations of Reductive Groups* (*Annals of Math. Studies*, vol. 94, Princeton, 1980).

[J] H. JACQUET, *On the Residual Spectrum of GL(N)*, in (*Lie Group Representations*, vol. II, Springer LN, p. 1041).

[JPSS] H. JACQUET, L. PIATETESKI-SHAPIRO et J. SHALIKA, *Rankin-Selberg Convolutions* (*Amer. J. of Math.*, vol. 105, 1983, p. 367-463).

[JS, 1] H. JACQUET et J. SHALIKA, *Sur le spectre résiduel du groupe linéaire* (*C.R. Acad. Sci. Paris*, 293, 1981, p. 541-543).

[JS, 2] H. JACQUET et J. SHALIKA, *On Euler Products and the Classification of Automorphic Representations*, vol. I, II (*Amer. J. of Math.*, vol. 103, 1981, p. 499-558 et 777-815).

[KS] K. KEYS et F. SHAHIDI, *Artin L-functions and Normalization of Intertwining Operators* (*Ann. scient. Ec. Norm. Sup.*, vol. 21, 1988, p. 67-89).

[L] R. LANGLANDS, *On the Functional Equations Satisfied by Eisenstein Series*, Springer, LN 544.

[O] G. OLSHANSKII, *Intertwining Operators and Complementary Series in the Class of Representations Induced from Parabolic Subgroups of the General Linear Group over a Locally Compact Division Algebra* (*Mat. USSR Sbornik*, vol. 22, 1974, p. 217-255).

[R] F. RODIER, *Représentations de GL(n, k) où k est un corps p-adique* (*Sém. Bourbaki*, vol. 587, 1981-1982).

[S] B. SPEH, *Some Results on Principal Series for GL(n, **R**)* (*Ph. D. dissertation* M.I.T., juin 1977).

[Sh 1] F. SHAHIDI, *Local Coefficients and Normalization of Intertwining Operators for GL(n)* (*Comp. Math.*, vol. 48, 1983, p. 271-295).

[Sh 2] F. SHAHIDI, *Fourier Transforms of Intertwining Operators and Plancherel Measures for GL(n)* (*Amer. J. of Math.*, vol. 106, 1984, p. 67-111).

[Sh 3] F. SHAHIDI, *Local Coefficients as Artin Factors for Real Groups* (*Duke Math. J.*, vol. 52, 1985, p. 973-1007).

[Si] A. SILBERGER, *Discrete Series and Classification for p-adic Groups I* (*Amer. J. of Math.*, 103, 1981, p. 1241-1321).

[T] M. TADIC, *Classification of Unitary Representations of Irreductible Representations of General Linear Group, Non-archimedean case* (*Ann. Scient. Ec. Norm. Sup.*, 19, 1986, p. 335-382).

[V, 1] D. VOGAN, *Representations of Real Reductive Lie Groups*, Boston-Basel-Stuttgart: Birkhäuser, 1981.

[V, 2] D. VOGAN, *Unitarizability of Certain Series of Representations* (*Ann. of Math.*, vol. 120, 1984, p. 141-187).

[V, 3] D. VOGAN, *The Unitary Dual of GL(n) Over an Archimedean Field* (*Inv. math.*, vol. 83, 1986, p. 449-505).

[Z] A. ZELEVINSKI, *Induced Representations of Reductive p-adic Groups II. On Irreductible Representations of GL(n)* (*Ann. Scient. Ec. Norm. Sup.*, vol. 13, 1980, p. 165-210).

APPENDICE

Pôles des fonctions L de paires pour GL(N)

Dans l'article principal, nous utilisons les propriétés suivantes [*cf.* II.2(1), (2) de cet article]:

le corps de base k étant un corps de nombres, soient ρ, ρ' des représentations automorphes cuspidales unitaires irréductibles de $GL(n, \mathbf{A})$, resp. $GL(n', \mathbf{A})$; si $n \neq n'$ ou si $n=n'$ et qu'il n'existe pas $t \in \mathbf{C}$ tel que $\rho \simeq \rho'[t]$ alors $L(s, \rho \times \check{\rho}')$ est entière; si $n=n'$ et $\rho \simeq \rho'$ $L(s, \rho \times \check{\rho}')$ a deux pôles simples en 0 et 1 et est holomorphe hors de ces points.

L. Clozel nous a fait remarquer qu'aucune démonstration de ces faits n'était publiée: il manque aux travaux de Jacquet, Piatetski-Shapiro et Shalika l'analogue archimédien de leur article intitulé Rankin-Selberg convolutions. Nous ignorons si ces auteurs savent compléter leur démonstration. En tout cas on propose ici une démonstration tout à fait différente des propriétés ci-dessus. On donne en fait une autre façon de déterminer le spectre résiduel dans le cas simple où on induit à partir des deux représentations ρ et ρ'. Un point s où la fonction L a un pôle créant nécessairement une contribution à ce spectre, cela détermine les pôles de cette fonction.

On utilise les notations de l'article principal et on fera référence à la partie locale, notée I, de cet article. Ses résultats sont bien sûr indépendants des propriétés ci-dessus que nous n'avions utilisées que dans la partie globale.

Soient k un corps de nombres, n, n' deux entiers $\geqq 1$, W, resp. W' un sous-espace irréductible de l'espace des formes automorphes cuspidales sur $GL(n, k) \backslash GL(n, \mathbf{A})$ resp. $GL(n', k) \backslash GL(n', \mathbf{A})$, ρ, resp. ρ' la représentation de $GL(n, \mathbf{A})$ dans W, resp. $GL(n', \mathbf{A})$ dans W'. On suppose ρ et ρ' unitaires, *i. e.* leurs caractères centraux le sont. On définit la fonction méromorphe $L(s, \rho \times \check{\rho}')$, pour $s \in \mathbf{C}$.

Proposition. — *Soit* $s \in \mathbf{C}$. *Supposons* $0 < \mathrm{Re}\, s \leqq 1/2$. *Alors* $L(\bullet, \rho \times \rho')$ *est holomorphe au point* s.

Comme on sait où sont les pôles dans le demi-plan $\mathrm{Re}\, s \geqq 1$ ([JS], prop. 3.3, 3.6), que l'on connaît l'équation fonctionnelle ([S1], th. 4.1, [S2], th 1, [S3], prop. 3.1), on obtient:

Corollaire. — (i) *Supposons vérifiée l'une des conditions suivantes*:

(a) $n \neq n'$;

(b) $n=n'$ *et il n'existe pas de* $t \in \mathbf{C}$ *tel que* $\rho \simeq p'[t]$.

Alors $L(s, \rho \times \check{\rho}')$ *est entière.*

(ii) *Supposons* $n=n'$, $\rho \simeq \rho'$. *Alors* $L(s, \rho \times \check{\rho}')$ *a deux pôles simples en* 0 *et* 1 *et est holomorphe hors de ces points.*

Posons $N=n+n'$, $G=GL(N)$. Soient Q, resp. Q', le sous-groupe parabolique standard de GL(N) de sous-groupe de Lévi $GL(n') \times GL(n)$, resp. $GL(n) \times GL(n')$, soient U, U' les radicaux unipotents de Q et Q' respectivement. Si $n=n'$, on a $Q=Q'$, $U=U'$. Comme en I.2, on note σ l'élément non trivial de $\mathfrak{S}_2$. Posons $\underline{\rho}=\rho \otimes \rho'$. On définit l'espace $\mathbf{I}(\underline{\rho})$ (*cf.* II.1.1). Pour $\varphi \in \mathbf{I}(\underline{\rho})$ et $\underline{s}=(s, s') \in \mathbf{C}^2$, on identifie $\varphi(\underline{s})$ à un élément de $\mathbf{I}(\underline{\rho}, \underline{s})$ qui est l'espace de la représentation induite de $\underline{\rho}[\underline{s}]$. Notons $C_{Q'}$ l'espace des fonctions lisses sur $Q'(k)U(\mathbf{A})\backslash G(\mathbf{A})$ à valeurs complexes. On a une application naturelle $i': I(\rho, \underline{s}) \to C_{Q'}$ décrite de la façon suivante: si $f \in I(\rho, \underline{s})$ et $g \in G(\mathbf{A})$, $f(g)$ est un élément de $\overline{W} \otimes W'$ qui est un espace de fonctions sur $GL(n, \mathbf{A}) \times GL(n', \mathbf{A})$; on peut évaluer $f(g)$ au point (1.1), cela nous donne $(i'f)(g)$. On a de même une application i: $I(\sigma, \underline{\rho}, \sigma\underline{s}) \to C_Q$.

Pour $\varphi \in \mathbf{I}(\underline{\rho})$ et $\underline{s}=(s, s') \in \mathbf{C}^2$, on construit la série d'Eisenstein (fonction méromorphe de $\underline{s}$) $E(\varphi, \underline{s}, g)$: est une fonction de $g \in G(\mathbf{A})$; posons $s_0 = s - s'$; si $\operatorname{Re} s_0$ est assez grand on a

$$E(\varphi, \underline{s}, g) = \sum_{\gamma \in Q'(k)\backslash G(k)} [i' \varphi(\underline{s})](\gamma g).$$

Soient P un sous-groupe parabolique standard propre de G, N son radical unipotent, $E^N(\varphi, \underline{s}, g)$ le terme constant de $E(\varphi, \underline{s}, g)$ le long de N. Il est bien connu que $E^N(\varphi, \underline{s}, g) = 0$ si $P \neq Q$ et $P \neq Q'$. Si $n \neq n'$, on a

$$E^{U'}(\varphi, \underline{s}, g) = i' \varphi(\underline{s})(g),$$
$$E^U(\varphi, \underline{s}, g) = [i\, M(\sigma, \underline{s})\, \varphi(\underline{s})](g).$$

Si $n = n'$, $E^U(\varphi, \underline{s}, g)$ est la somme des deux termes ci-dessus. On a l'égalité

$$M(\sigma, \underline{s})\, \varphi(\underline{s}) = L(s_0, \rho \times \check{\rho}')\,(L(s_0+1, \rho \times \check{\rho}')\, \varepsilon(s_0, \rho \times \check{\rho}'))^{-1}\, N(\sigma, \underline{s})\, \varphi(\underline{s}).$$

Soit $s \in \mathbf{C}$, avec $0 < \operatorname{Re} s \leqq 1//2$. Supposons que la fonction $L(\bullet, \rho \times \check{\rho}')$ a un pôle en s, disons d'ordre $r > 0$. Appliquons les constructions ci-dessus au voisinage du point $\underline{s} = (s/2, -s/2)$ (pour lequel on a $s_0 = s$). L'opérateur $N(\sigma, \bullet)$ est holomorphe et non nul au point s (I.10). Alors $E^U(\varphi, \bullet, g)$ a un pôle au point $\underline{s}$. Plus précisément, comme le comportement de $E(\varphi, \bullet, g)$ est contrôlé par celui de ses termes constants, on peut définir la fonction

$$E(\varphi, g) = \lim_{s' \to s} (s' - s)^r\, E(\varphi, \underline{s}', g)$$

[avec $\underline{s}' = (s'/2, -s'/2)$]. C'est une fonction automorphe sur $G(k)\backslash G(\mathbf{A})$, non nulle et qui vérifie, avec les notations ci-dessus

$$\text{(1)} \qquad \begin{cases} E^N(\varphi, g) = 0 \quad \text{si} \quad P \neq Q, \\ E^U(\varphi, g) = c\,[i\, N(\sigma, \underline{s})\, \varphi(\underline{s})](g), \end{cases}$$

où c est une constante non nulle.

Notons maintenant B le sous-groupe de Borel standard de G et N son radical unipotent. Fixons un caractère continu non trivial ψ de $\mathbf{A}/k$. On en déduit un caractère $\underline{\psi}$ de $N(\mathbf{A})$. On définit usuellement le coefficient de Fourier $E^{\underline{\psi}}(\varphi, \underline{s}', g)$ pour $\underline{s}' \in \mathbf{C}^2$. D'après ([S 2], cor. à la prop. 2.4, [S 1], prop. 3.1 et [CS]), on a une égalité [disons pour $\underline{s}' = (s'/2, -s'/2)$]:

$$E^{\underline{\psi}}(\varphi, \underline{s}', g) = L(s'+1, \rho \times \check{\rho}')^{-1}\, W(\varphi, \underline{s}', g),$$

où W est une fonction holomorphe pour $\mathrm{Re}\, s' \geqq 0$. Le terme ci-dessus n'a pas de pôles en s. On en déduit :

$$E_{-}^{\psi}(\varphi, g) = 0. \tag{2}$$

Notons P le sous-groupe parabolique standard de G de sous-groupe de Lévi $\mathrm{GL}(\mathrm{N}-1) \times \mathrm{GL}(1)$.

LEMME 1. — (i) *la série*

$$\sum_{\gamma \in (\mathrm{P} \cap \mathrm{Q})(k) \backslash \mathrm{P}(k)} \mathrm{E}^{\mathrm{U}}(\varphi, \gamma g)$$

est absolument convergente.

(ii) *Sa somme est égale à* $\mathrm{E}(\varphi, g)$.

Démonstration. — Pour $t = 1, \ldots, \mathrm{N}-1$, notons P_t le sous-groupe parabolique standard de G de sous-groupe de Lévi $\mathrm{GL}(t) \times \mathrm{GL}(1) \times \ldots \times \mathrm{GL}(1)$ et U_t son radical unipotent. On note encore $\underline{\psi}$ la restriction de $\underline{\psi}$ à U_t. Fixons la fonction φ et posons :

$$\mathrm{E}^t(g) = \int_{\mathrm{U}_t(k) \backslash \mathrm{U}_t(\mathrm{A})} \mathrm{E}(\varphi, ug)\, \underline{\psi}(u)^{-1}\, du.$$

Notons $\underline{\psi}'$ le caractère de $\mathrm{U}_{n'}(\mathrm{A})$ défini par

$$\underline{\psi}'(u) = \psi\left(\sum_{n'+1}^{\mathrm{N}-1} u_{i,\, i+1}\right)$$

où $u = (u_{ij})_{i \leqq i,\, j \leqq \mathrm{N}}$. Notons que l'on n'a pas pris le coefficient $u_{n',\, n'+1}$. Posons

$$\mathrm{E}'(g) = \int_{\mathrm{U}_{n'}(k) \backslash \mathrm{U}_{n'}(\mathrm{A})} \mathrm{E}(\varphi, ug)\, \underline{\psi}'(u)^{-1}\, du.$$

Enfin notons P_t^0 le sous-groupe des éléments $p = (p_{ij})$ de P_t tels que $p_{ii} = 1$ pour $i > t$. On démontre par récurrence descendante la formule :

$$\mathrm{E}(\varphi, g) = \sum_{\gamma_{\mathrm{N}-1} \in \mathrm{P}_{\mathrm{N}-2}^0(k) \backslash \mathrm{P}_{\mathrm{N}-1}^0(k)} \ \sum_{\gamma_{\mathrm{N}-2} \in \mathrm{P}_{\mathrm{N}-3}^0(k) \backslash \mathrm{P}_{\mathrm{N}-2}^0(k)} \times \ldots$$

$$\times \sum_{\gamma_t \in \mathrm{P}_{t-1}^0(k) \backslash \mathrm{P}_t^0(k)} \mathrm{E}^t(\gamma_t \ldots \gamma_{\mathrm{N}-2}\, \gamma_{\mathrm{N}-1}\, g)$$

si $t > n'$,

$$+0$$

si $t \leqq n'$,

$$+ \sum_{\gamma_{\mathrm{N}-1} \in \mathrm{P}_{\mathrm{N}-2}^0(k) \backslash \mathrm{P}_{\mathrm{N}-1}^0(k)} \ldots \sum_{\gamma_{n'+1} \in \mathrm{P}_{n'}^0(k) \backslash \mathrm{P}_{n'+1}^0(k)} \mathrm{E}'(\gamma_{n'+1} \ldots \gamma_{\mathrm{N}-2}\, \gamma_{\mathrm{N}-1}\, g).$$

C'est le même raisonnement que dans le cas d'une forme cuspidale: on passe de t à $t-1$ en développant la fonction $u \to \mathrm{E}^t(ug)$ en série de Fourier, u variant dans un certain sous-groupe U'_t tel que $\mathrm{U}_{t-1}=\mathrm{U}'_t\,\mathrm{U}_t$; il faut utiliser la relation (1). Pour $t=1$, on a $\mathrm{E}^1(g)=\mathrm{E}^{\psi}_{-}(\varphi, g)$ par définition, qui est nul d'après (2). On obtient donc:

$$\mathrm{E}(\varphi, g)=\sum_{\gamma \in \mathrm{P}^0_{n'}(k)\backslash \mathrm{P}^0_{\mathrm{N}-1}(k)} \mathrm{E}'(\gamma g), \tag{3}$$

pourvu que cette série soit absolument convergente. On va démontrer cette assertion dans un cas simple, le cas général se traitant de façon analogue. Notons K le sous-groupe compact maximal habituel de $\mathrm{G}(\mathbf{A})$. On suppose donc $g=1$ et qu'il existe $f \in \mathrm{W}$, $f' \in \mathrm{W}'$ et une fonction $a: \mathrm{K} \to \mathbf{C}$ de telle sorte que

$$c\,\mathrm{N}(\sigma, \underline{s})\,\varphi(\underline{s})(k)=a(k) f' \otimes f$$

pour tout $k \in \mathrm{K}$. Identifions $\mathrm{GL}(\mathrm{N}-1)$ à un sous-groupe de $\mathrm{P}^0_{\mathrm{N}-1}$. Alors

$$\mathrm{P}^0_{\mathrm{N}-1} \cap \mathrm{Q} \backslash \mathrm{P}^0_{\mathrm{N}-1} \text{ s'identifie à } \tilde{\mathrm{Q}} \backslash \mathrm{GL}(\mathrm{N}-1),$$

où $\tilde{\mathrm{Q}}$ est le sous-groupe parabolique standard de $\mathrm{GL}(\mathrm{N}-1)$ de sous-groupe de Lévi $\mathrm{GL}(n') \times \mathrm{GL}(n-1)$. Et $\mathrm{P}^0_{n'} \backslash \mathrm{P}^0_{\mathrm{N}-1} \cap \mathrm{Q}$ s'identifie à $\tilde{\mathrm{N}} \backslash \mathrm{GL}(n-1)$; où $\tilde{\mathrm{N}}$ est le sous-groupe unipotent maximal standard de $\mathrm{GL}(n-1)$. Pour $g \in \mathrm{G}(\mathbf{A})$, posons $g=h'(g)\,h(g)\,u(g)\,k(g)$, avec $h'(g) \in \mathrm{GL}(n', \mathbf{A})$, $h(g) \in \mathrm{GL}(n, \mathbf{A})$, $u(g) \in \mathrm{U}(\mathbf{A})$, $k(g) \in \mathrm{K}$. Il résulte des définitions que l'on a l'égalité

$$\mathrm{E}^{\mathrm{U}}(\varphi, g)=a(k(g)) f'(h'(g)) f(h(g)). \tag{4}$$

Notons W_f le coefficient de Fourier non dégénéré de f. On a l'égalité

$$\mathrm{E}'(g)=a(k(g)) f'(h'(g))\,\mathrm{W}_f(h(g)). \tag{5}$$

Considérons d'abord la somme partielle, pour $\gamma \in \mathrm{GL}(\mathrm{N}-1, k)$ fixé:

$$\sum_{\tilde{\mathrm{N}}(k)\backslash \mathrm{GL}(n-1, k)} |\mathrm{E}'(\gamma' \gamma)|.$$

Remarquons que $h'(\gamma' \gamma)=h'(\gamma)$, $k(\gamma' \gamma)=k(\gamma)$, $h(\gamma' \gamma)=\gamma' h(\gamma)$. La somme ci-dessus vaut donc

$$|a(k(\gamma)))|\,|f'(h'(\gamma))| \sum_{\gamma' \in \tilde{\mathrm{N}}(k)\backslash \mathrm{GL}(n-1, k)} |\mathrm{W}_f(\gamma' h(\gamma))|.$$

Il résulte de ([JPSS], prop. 12.2, 2.3.7 et 8.3.3), que pour tout réel T assez grand, il existe une constante c' telle que la série intervenant dans l'expression ci-dessus soit majorée par

$$c' |\det h(\gamma)|^{-\mathrm{T}}.$$

[pour appliquer ([JPSS]), on remarque que $h(\gamma)\in \mathrm{GL}(n-1, \mathbf{A})$]. Il reste alors à montrer que

$$\sum_{\gamma \in \tilde{\mathrm{Q}}(k)\backslash \mathrm{GL}(\mathrm{N}-1, k)} |a(k(\gamma))| |f'(h'(\gamma))| |\det h(\gamma)|^{-\mathrm{T}}$$

est convergente. Mais c'est essentiellement une série d'Eisenstein pour le groupe $\mathrm{GL}(\mathrm{N}-1)$, construite à partir des représentations ρ' de $\mathrm{GL}(n', \mathbf{A})$ et $|\det|^{-\mathrm{T}}$ de $\mathrm{GL}(n-1, \mathbf{A})$. Elle converge pour T assez grand. Cela démontre la convergence de (3).

Utilisons la formule classique

$$f(h)=\sum_{\gamma' \in \tilde{\mathrm{N}}(k)\backslash \mathrm{GL}(n-1, k)} \mathrm{W}_f(\gamma' h)$$

pour tout $h\in \mathrm{GL}(n, \mathbf{A})$. On obtient d'après (4) et (5):

$$\sum_{\gamma' \in \tilde{\mathrm{N}}(k)\backslash \mathrm{GL}(n-1, k)} \mathrm{E}'(\gamma' g)=\mathrm{E}^{\mathrm{U}}(\varphi, g).$$

En remarquant enfin que $\mathrm{P}^0_{\mathrm{N}-1}\cap \mathrm{Q}\backslash \mathrm{P}^0_{\mathrm{N}-1}$ s'identifie à $\mathrm{P}\cap \mathrm{Q}\backslash \mathrm{P}$, on obtient finalement

$$\mathrm{E}(\varphi, g)=\sum_{\gamma \in (\mathrm{P}\cap \mathrm{Q})(k)\backslash \mathrm{P}(k)} \mathrm{E}^{\mathrm{U}}(\varphi, \gamma g),$$

ce qui démontre le lemme.

Décomposons ρ, ρ', $\mathrm{I}(\rho, \underline{s})$, $\mathrm{I}(\sigma\rho, \sigma\underline{s})$ en produit tensoriel de représentations locales ρ_v, etc. sur les places v de k. Notons J_v le sous-espace de $\mathrm{I}(\sigma\rho_v, \sigma\underline{s})$ image de $\mathrm{N}_v(\sigma, \underline{s})$. Quand φ varie, la fonction $\mathrm{N}(\sigma, \underline{s})\,\varphi(\underline{s})$ parcourt le produit tensoriel (restreint) $\otimes_v \mathrm{J}_v$. Rappelons que J_v est un espace de fonctions sur $\mathrm{G}(k_v)$ à valeurs dans l'espace de $\rho'_v\otimes\rho_v$, vérifiant une condition de transformation à gauche par $\mathrm{Q}(k_v)$. Remarquons que $\mathrm{QP}(=\{qp; q\in \mathrm{Q}, p\in \mathrm{P}\})$ est un fermé de Zariski de G différent de G lui-même: c'est l'ensemble des g tels que si $g^{-1}=(g_{ij})$, on a $g_{\mathrm{N}, i}=0$ pour $i=1, \ldots, n'$.

LEMME 2. — *Soit v une place finie de k telle que ρ_v et ρ'_v soient non ramifiées. Il existe $j_v\in \mathrm{J}_v$, non nulle, dont la restriction à $\mathrm{Q}(k_v)\,\mathrm{P}(k_v)$ soit nulle.*

Admettons ce lemme pour un instant et terminons la démonstration de la proposition. On fixe une place v vérifiant les hypothèses du lemme, on choisit j_v vérifiant sa conclusion. On choisit φ telle que $\mathrm{N}(\sigma, \underline{s})\,\varphi(\underline{s})$ soit non nulle et ait pour v-ième composante j_v. D'après (1) $\mathrm{E}^{\mathrm{U}}(\varphi, \bullet)$ n'est pas identiquement nulle. *A fortiori* $\mathrm{E}(\varphi, \bullet)$ ne l'est pas non plus. Comme $\mathrm{G}(k)\,\mathrm{B}(\mathbf{A})$ est dense dans $\mathrm{G}(\mathbf{A})$, il existe $b\in \mathrm{B}(\mathbf{A})$ tel que $\mathrm{E}(\varphi, b)\neq 0$. D'après le lemme 1, il existe donc $\gamma\in \mathrm{P}(k)$ tel que $\mathrm{E}^{\mathrm{U}}(\varphi, \gamma b)\neq 0$. Mais $\mathrm{E}^{\mathrm{U}}(\varphi, \gamma b)$ se déduit de $\mathrm{N}(\sigma, \underline{s})\,\varphi(\underline{s})(\gamma b)$ par évaluation en un point. La composante locale en v de $\mathrm{N}(\sigma, \underline{s})\,\varphi(\underline{s})(\gamma b)$ est $j_v(\gamma b)$ qui est nulle car $\gamma b\in \mathrm{P}(k_v)$. Contradiction. Cela achève la démonstration.

Il reste à démontrer le lemme 2. Fixons donc une place v vérifiant les hypothèses de lemme. Pour $\nu\in \mathbf{C}$, notons $1[\nu]$ le caractère $|\bullet|^{\nu}$ de k_v^*. Il existe des nombres complexes

$\nu_1, \ldots, \nu_n, \nu'_1, \ldots, \nu'_{n'}$ tels que:

$$\rho_v = 1[\nu_1] \times \ldots \times 1[\nu_n],$$
$$\rho'_v = 1[\nu'_1] \times \ldots \times 1[\nu'_{n'}],$$
$$1/2 > \operatorname{Re}\nu_1 \geqq \ldots \geqq \operatorname{Re}\nu_n > -1/2, \qquad \sum_{i=1}^{n} \operatorname{Re}\nu_i = 0,$$
$$1/2 > \operatorname{Re}\nu'_1 \geqq \ldots \geqq \operatorname{Re}\nu'_{n'} > -1/2, \qquad \sum_{i=1}^{n'} \operatorname{Re}\nu'_i = 0.$$

Remarquons que cela implique $\operatorname{Re}\nu'_1 \geqq 0$. Soit $w \in \mathfrak{S}_N$ la permutation

$$w:\quad (1, \ldots, n, n+1, \ldots, N) \mapsto (n'+1, \ldots, N, 1, \ldots, n'),$$

et posons

$$\pi = 1[\nu_1 + s/2] \times \ldots \times 1[\nu_n + s/2] \times 1[\nu'_1 - s/2] \times \ldots \times 1[\nu'_{n'} - s/2].$$

On a des isomorphismes:

$$j:\quad \rho_v[s/2] \times \rho'_v[-s/2] \to \pi,$$
$$j':\quad \rho'_v[-s/2] \times \rho_v[s/2] \to w\pi.$$

Par exemple notons V, V', X, Y les espaces de $\rho_v[s/2]$, $\rho'_v[-s/2]$, $\rho'_v[-s/2] \times \rho_v[s/2]$, $w\pi$. Ce sont des espaces de fonctions respectivement de

$$\mathrm{GL}(n, k_v) \to \mathbf{C}$$
$$\mathrm{GL}(n', k_v) \to \mathbf{C}$$
$$\mathrm{G}(k_v) \to \mathrm{V}' \otimes \mathrm{V}$$
$$\mathrm{G}(k_v) \to \mathbf{C}$$

vérifiant des conditions de transformation selon des sous-groupes paraboliques adéquats. Pour $x \in \mathrm{X}$ et $g \in \mathrm{G}(k_v)$, on a $x(g) \in \mathrm{V}' \otimes \mathrm{V}$, on peut évaluer $x(g)$ au point (1,1), cela nous donne la valeur de $[j'(x)](g)$. Il est clair alors que les conditions:

(i) la restriction de x à $\mathrm{Q}(k_v)\,\mathrm{P}(k_v)$ est nulle;

(ii) la restriction de $j'(x)$ à $\mathrm{Q}(k_v)\,\mathrm{P}(k_v)$ est nulle,

sont équivalentes.

D'autre part on a le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} \rho_v[s/2] \times \rho'_v[-s/2] \arrow[r, "\mathrm{N}(\sigma, s)"] \arrow[d, "j"] & \rho'_v[-s/2] \times \rho_v[s/2] \arrow[d, "j'"] \\ \pi \arrow[r, "\mathrm{N}(w)"] & w\pi \end{tikzcd}$$

où $N(w)$ est l'opérateur d'entrelacement déduit de w. Notons E l'image de $N(w)$. Les considérations ci-dessus nous ramènent à prouver qu'il existe dans E un élément dont la restriction à $Q(k_v)P(k_v)$ est nulle. Introduisons les éléments suivants de $\mathfrak{S}_N$:

$$w': \quad (1, \ldots, n, n+1, \ldots, N) \mapsto (2, \ldots, n+1, 1, n+2, \ldots, N)$$
$$w'': \quad (1, 2, \ldots, n+1, n+2, \ldots N) \mapsto (1, n'+1, \ldots, N, 2, \ldots, n').$$

On a $w = w'' w'$, d'où la décomposition $N(w) = N(w'') N(w')$. Les couples inversés par w' sont les $(i, n+1)$ pour $1 \leqq i \leqq n$. Les différences des paramètres correspondants sont $s + \nu_i - \nu'_1$. Mais on a

$$-1 < \mathrm{Re}(s + \nu_i - \nu'_1) < 1.$$

Donc $N(w')$ est un isomorphisme. Et E est l'image par $N(w'')$ de $w'\pi$. Notons π'' la représentation de $GL(N-1, k_v)$ suivante:

$$\pi'' = 1[\nu_1 + s/2] \times \ldots \times 1[\nu_n + s/2] \times 1[\nu'_2 - s/2] \times \ldots \times 1[\nu'_{n'} - s/2].$$

Identifions $\mathfrak{S}_{N-1}$ à l'ensemble des éléments de $\mathfrak{S}_N$ qui fixent 1. Alors w'' s'identifie à un élément, disons $\tilde{w}$, de $\mathfrak{S}_{N-1}$. On a un diagramme commutatif:

$$\begin{array}{ccc} w'\pi & \xrightarrow{N(w'')} & w\pi \\ \downarrow & & \downarrow \\ 1[\nu'_1 - s/2] \times \pi'' & \underset{N(\tilde{w})}{\rightarrow} & 1[\nu'_1 - s/2] \times \tilde{w}\pi'' \end{array}$$

où on a noté abusivement $N(\tilde{w})$ l'opérateur déduit par induction de

$$\pi'' \xrightarrow{N(\tilde{w})} \tilde{w}\pi''.$$

Ce diagramme prouve qu'il existe une sous-représentation δ de $\tilde{w}\pi''$ telle que

$$E \simeq 1[\nu'_1 - s/2] \times \delta.$$

Notons R le sous-groupe parabolique standard de G dont le sous-groupe de Lévi est $GL(1) \times GL(N-1)$. L'ensemble RQP est un fermé de Zariski de G différent de G: c'est l'ensemble des $g \in G$ tels que si $g^{-1} = (g_{ij})$, on ait $g_{n1} = 0$. L'espace Z de $1[\nu'_1 - s/2] \times \delta$ est un espace de fonctions sur $G(k_v)$ vérifiant une condition de transformation sous $R(k_v)$. Montrons qu'il existe un élément de cet espace, non nul, de restriction nulle à $R(k_v)Q(k_v)P(k_v)$. On construit d'abord une fonction

$$\mu: \quad R(k_v) \backslash G(k_v) \to \mathbf{C}$$

de la façon suivante: pour $g \in K_v$ (le sous-groupe compact maximal standard), posons $g^{-1} = (g_{ij})$ et

$$\mu(g) = \begin{cases} 1 & \text{si } |g_{n1}| = 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On prolonge μ par invariance sous $R(k_v)$. On choisit un élément g tel que $\mu(g) \neq 0$, un élément z dans Z tel que $z'(g) \neq 0$. Alors le produit μz répond à la question.

Par le même raisonnement fait plus haut pour l'isomorphisme j', un tel élément s'identifie à un élément de E, non nul, de restriction nulle à $R(k_v) Q(k_v) P(k_v)$. *A fortiori* de restriction nulle à $Q(k_v) P(k_v)$. C'est ce que l'on voulait démontrer.

BIBLIOGRAPHIE

[CS] W. CASSELMAN et J. SHALIKA, *The Unramified Principal Series of p-adic Groups II. The Whittaker Function* (*Comp. math.*, vol. 41, 1980, p. 207-231).

[JPSS] H. JACQUET, I. PIATETSKI-SHAPIRO et J. SHALIKA, *Automorphic Forms on GL(3), II* (*Annals of Math.*, vol. 109, 1979, p. 213-258).

[JS] H. JACQUET et J. SHALIKA, *On Euler Products and the Classification of Automorphic Forms II* (*Amer. J. of Math.*, vol. 103, 1981, p. 777-815).

[S1] F. SHAHIDI, *On Certain L-functions* (*Amer. J. of Math.*, vol. 103, 1981, p. 297-355).

[S2] F. SHAHIDI, *Local Coefficients as Artin Factors for Real Groups* (*Duke Math. J.*, vol. 52, 1985, p. 973-1007).

[S3] F. SHAHIDI, *Local Coefficients and Normalization of Intertwining Operators for* GL(n) (*Comp. math.*, vol. 48, 1983, p. 271-295).

(Manuscrit reçu le 22 décembre 1988,
révisé le 27 avril 1989).

C. MŒGLIN,
Université Pierre-et-Marie-Curie,
L.M.F./U.E.R. n° 48, 75252 Paris Cedex 05;

J.-L. WALDSPURGER,
Université Paris-7,
U.F.R. de Mathématiques,
75251 Paris Cedex 05.