

ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

JEAN-PIERRE DEMAILLY

CHRISTINE LAURENT-THIÉBAUT

**Formules intégrales pour les formes différentielles de type
(p, q) dans les variétés de Stein**

Annales scientifiques de l'É.N.S. 4^e série, tome 20, n° 4 (1987), p. 579-598

http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1987_4_20_4_579_0

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1987, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (<http://www.elsevier.com/locate/ansens>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

FORMULES INTÉGRALES POUR LES FORMES DIFFÉRENTIELLES DE TYPE (p, q) DANS LES VARIÉTÉS DE STEIN

PAR JEAN-PIERRE DEMAILLY ET CHRISTINE LAURENT-THIEBAUT

RÉSUMÉ. — On construit sur toute variété de Stein un noyau global permettant de démontrer des formules de Koppelman et Koppelman-Leray pour des formes différentielles de type (p, q) quelconque.

ABSTRACT. — We construct on every Stein manifold a global kernel which enables us to prove Koppelman and Koppelman-Leray formulas for differential forms of arbitrary type (p, q) .

Introduction

Henkin et Leiterer ont construit dans [2] et ([3], chap. 4) des noyaux globaux sur une variété de Stein grâce auxquels ils démontrent des formules intégrales pour les $(0, q)$ -formes différentielles. Dans cet article nous démontrons des formules intégrales du type Koppelman et Koppelman-Leray pour les formes différentielles de type (p, q) quelconque sur une variété de Stein. Celles-ci généralisent à la fois les formules démontrées par Henkin et Leiterer pour les $(0, q)$ -formes différentielles (*cf.* [2] et [3], chap. 4) et les formules de Koppelman et Koppelman-Leray pour les (p, q) -formes différentielles dans \mathbb{C}^n (*cf.* [8], [7] et [1]); elles permettent sous certaines conditions de résoudre des problèmes de $\bar{\partial}$ avec estimations de croissance ou de régularité.

Dans un premier paragraphe nous construisons des noyaux dont nous donnons une expression globale sur la variété de Stein M ; ce sont des formes différentielles continues sur $M \times M$ privé de sa diagonale. La nécessité d'avoir des formes différentielles invariantes par changement de coordonnées permettant d'obtenir des formules intégrales pour les (p, q) -formes différentielles nous a amenés dans le cas $p \geq 1$ à introduire la connexion de Chern du fibré tangent.

Aux paragraphes 2 et 3 nous nous intéressons principalement à un noyau du type précédent qui généralise le noyau de Bochner-Martinelli. Il en résulte une formule de Koppelman pour les (p, q) -formes différentielles sur une variété de Stein (théorème 2.2), et la transformée de Bochner-Martinelli se généralise également dans ce contexte (théorème 3.1).

Le paragraphe 4 est consacré à la démonstration de deux formules de Koppelman-Leray dont on peut déduire des formules de résolution du $\bar{\partial}$ pour les (p, q) -formes

différentielles dans un domaine strictement pseudoconvexe d'une variété de Stein. La première généralise la formule intégrale donnée par Lieb [7] et Øvrelid [8] dans \mathbb{C}^n et la seconde la formule de base de l'article [1] de Andersson et Berndtsson.

Le dernier paragraphe donne une méthode, différente de celle utilisée par Henkin et Leiterer ([3], § 4.12), pour obtenir des formules intégrales pour les formes différentielles à valeurs dans un fibré vectoriel holomorphe sur une variété de Stein.

1. Préliminaires

Soit X une variété analytique complexe; si u et v sont des n -uplets de fonctions \mathcal{C}^1 définies sur un ouvert de $X \times X$, on pose

$$\begin{aligned}\omega_{z, \zeta}(u) &= \bigwedge_{j=1}^n d_{z, \zeta} u_j \\ \bar{\omega}'_{z, \zeta}(v) &= \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} v_j \bigwedge_{k \neq j} \bar{\partial}_{z, \zeta} v_k \\ \langle u, v \rangle &= \sum_{j=1}^n u_j v_j\end{aligned}$$

$[(z, \zeta)$ désignent les variables dans $X \times X$].

Le noyau de Bochner-Martinelli dans $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$ est alors donné par les expressions suivantes :

$$\begin{aligned}K_{\text{BM}}(z, \zeta) &= \frac{(n-1)!}{(2i\pi)^n} \frac{\bar{\omega}'_{z, \zeta}(\bar{z}-\bar{\zeta}) \wedge \omega_{z, \zeta}(z-\zeta)}{|z-\zeta|^{2n}} \\ &= \frac{(-1)^{n-1}}{(2\pi)^n} \frac{\langle \bar{z}-\bar{\zeta}, d_{z, \zeta}(z-\zeta) \rangle \wedge (\langle \bar{\partial}_{z, \zeta}(\bar{z}-\bar{\zeta}), d_{z, \zeta}(z-\zeta) \rangle)^{n-1}}{|z-\zeta|^{2n}}.\end{aligned}$$

Il permet de démontrer des formules de représentation intégrale pour les formes différentielles de bidegré (p, q) quelconque dans \mathbb{C}^n .

Dans [2] et [3], chapitre 4, Henkin et Leiterer construisent des noyaux qui conduisent à la représentation des formes différentielles de bidegré $(0, q)$ dans une variété de Stein.

Précisons maintenant la méthode de construction utilisée par Henkin et Leiterer.

On considère une variété de Stein M de dimension n dont l'orientation est définie par la condition suivante : si (z_1, \dots, z_n) sont des coordonnées holomorphes locales, la forme différentielle

$$(-i)^n d\bar{z}_1 \wedge \dots \wedge d\bar{z}_n \wedge dz_1 \wedge \dots \wedge dz_n = (-1)^{n(n-1)/2} i^n dz_1 \wedge d\bar{z}_1 \wedge \dots \wedge dz_n \wedge d\bar{z}_n$$

est positive.

On notera $T(M)$ et $T^*(M)$ les fibrés tangent et cotangent de M et $\tilde{T}(M \times M)$, $\tilde{T}^*(M \times M)$ leurs images réciproques respectives par la projection de $M \times M$ sur M , $(z, \zeta) \mapsto z$.

Soit $s : M \times M \rightarrow \tilde{T}(M \times M)$ la section holomorphe de $\tilde{T}(M \times M)$ définie par Henkin et Leiterer ([2] et [3], lemme 4.2.4) qui vérifie :

- $s(z, z) = 0$ pour tout $z \in M$
- $s(z, \cdot) : M \rightarrow T_z(M)$ est une application biholomorphe d'un voisinage de z dans M sur un voisinage de 0 dans $T_z(M)$.

Rappelons brièvement la construction de s . Soit $f : M \hookrightarrow \mathbb{C}^N$ un plongement propre de M dans \mathbb{C}^N et soit

$$0 \rightarrow T(M) \rightarrow M \times \mathbb{C}^N \rightarrow N(M) \rightarrow 0$$

la suite exacte définissant le fibré normal à M , noté $N(M)$.

D'après le théorème B de Cartan on a $H^1(M, \text{Hom}(N(M), T(M))) = 0$, donc la suite exacte ci-dessus admet un scindage global $g : M \times \mathbb{C}^N \rightarrow T(M)$ tel que $g \circ df = \text{Id}_{T(M)}$. La section s est alors définie par

$$s(z, \zeta) = g(z, f(\zeta) - f(z)).$$

Grâce au théorème B appliqué sur $M \times M$, on peut d'autre part construire une fonction φ holomorphe sur $M \times M$, égale à 1 sur la diagonale $\Delta(M)$ de $M \times M$ et dont la restriction à $M \times M \setminus \Delta(M)$ appartient au sous-faisceau de $\mathcal{O}(M \times M)$ engendré par s . De plus il existe un entier $\chi \geq 0$ tel que la fonction $\varphi^\chi / |s|_0^2$ soit de classe \mathcal{C}^2 sur $M \times M \setminus \Delta(M)$ (cf. [2] et [3], lemme 4.2.4).

Si D est un ouvert relativement compact de M dont le bord ∂D est de classe \mathcal{C}^1 par morceaux, on appellera section de Leray pour (D, s, φ) (cf. [3], § 4.3.2) un couple (s^*, χ^*) où χ^* est un entier et s^* une section de $\tilde{T}^*(M \times M)$ définie sur $D \times V_{\partial D}$, $V_{\partial D}$ étant un voisinage de ∂D dans M , telle que

- $\langle s^*(z, \zeta), s(z, \zeta) \rangle \neq 0$ pour $z \in D$, $\zeta \in \partial D$ tels que $\varphi(z, \zeta) \neq 0$ ($\langle \cdot, \cdot \rangle$ désigne le crochet de dualité entre $\tilde{T}(M \times M)$ et $\tilde{T}^*(M \times M)$).
- $\varphi^\chi(z, \zeta) / \langle s^*(z, \zeta), s(z, \zeta) \rangle$ est de classe \mathcal{C}^1 sur un voisinage de $D \times \partial D$ dans $D \times M$.

Si U est un ouvert de carte de M et $(e_j)_{j=1}^n$ un repère trivialisant holomorphe de $\tilde{T}(M \times M)$, nous noterons respectivement u et u^* les expressions de s et s^* dans ce repère et son dual. Henkin et Leiterer posent alors

$$\tilde{\Omega}^0(\varphi^\chi, s^*, s) = \frac{(n-1)!}{(2i\pi)^n} \varphi^\chi \bar{\omega}'_{z, \zeta}(u^*) \wedge \omega_\zeta(u) / \langle u^*, u \rangle^n$$

ce qui définit une forme différentielle sur $D \times \partial D$.

Mais ce noyau ne contient que des termes de bidegré $(0, q)$ en z .

Pour passer à la représentation des formes différentielles de type (p, q) quelconque il convient donc de compléter ce noyau. La première expression du noyau de Bochner-Martinelli conduirait à remplacer $\omega_\zeta(u)$ par $\omega_{z, \zeta}(u)$ dans la définition de $\tilde{\Omega}^0(\varphi^\chi, s^*, s)$

mais cela ne permet plus de définir une forme différentielle invariante par changement de coordonnées car s est une section du fibré vectoriel $\tilde{T}(M \times M)$. Nous devons donc, pour obtenir un noyau défini globalement sur $D \times \partial D$, utiliser une connexion de $\tilde{T}(M \times M)$.

Soit θ une métrique hermitienne \mathcal{C}^∞ sur $T(M)$, elle induit une métrique hermitienne, notée encore θ sur $\tilde{T}(M \times M)$ et une application antilinéaire $\sigma : \tilde{T}(M \times M) \rightarrow \tilde{T}^*(M \times M)$, $\xi \mapsto \langle \cdot, \xi \rangle_\theta$. On appellera D la connexion de Chern de $\tilde{T}(M \times M)$ relative à θ et ∇ la connexion de Chern de $\tilde{T}^*(M \times M)$ associée à la métrique θ^* induite par θ sur $\tilde{T}^*(M \times M)$.

On notera \hat{s} la section \mathcal{C}^∞ , $M \times M \rightarrow \tilde{T}^*(M \times M)$ définie par $\hat{s} = \sigma \circ s$, il est facile de voir que (\hat{s}, χ) est une section de Leray pour (D, s, φ) , D étant n'importe quel ouvert relativement compact à bord \mathcal{C}^1 par morceaux de M . Remarquons que si θ est la métrique hermitienne construite par Henkin et Leiterer à l'aide d'une partition de l'unité subordonnée à un recouvrement trivialisant de $T(M)$, alors \hat{s} coïncide avec la section \bar{s} qu'ils ont définie dans [2] et [3], § 4. 3. 1. De plus \hat{s} et \bar{s} possèdent les mêmes propriétés.

On peut alors définir la forme différentielle $\tilde{\Omega}(\varphi^\vee, s^*, s)$ par

$$\tilde{\Omega}(\varphi^\vee, s^*, s) = \frac{(-1)^{n-1}}{(2\pi)^n} \varphi^{\vee n} \frac{\langle s^*, Ds \rangle \wedge (\langle \nabla'' s^*, Ds \rangle)^{n-1}}{\langle s^*, s \rangle^n}.$$

C'est une forme différentielle continue sur un voisinage de $D \times \partial D$ dans $D \times M$ si (s^*, χ^*) est une section de Leray associée à (D, s, φ) et $v \geq \chi^*$. Si de plus $s^* = \hat{s}$, la forme différentielle $\tilde{\Omega}(\varphi^\vee, \hat{s}, s)$ est de classe \mathcal{C}^1 sur $M \times M \setminus \Delta(M)$ si $v \geq \chi$ et admet une singularité d'ordre $2n-1$ en $z = \zeta$.

Étudions l'expression de la forme différentielle $\tilde{\Omega}(\varphi^\vee, s^*, s)$ dans des coordonnées locales.

Soient U un ouvert de carte de M et $(e_j)_{j=1}^n$ un repère trivialisant holomorphe de $\tilde{T}(M \times M)$. La métrique θ est donnée dans ce repère par une matrice hermitienne définie positive H , \mathcal{C}^∞ , ne dépendant que de la variable z et la métrique induite par θ sur $\tilde{T}^*(M \times M)$ est donnée dans le repère dual par la matrice \bar{H}^{-1} .

Soient u, u^*, \hat{u} les expressions respectives de s, s^* et \hat{s} dans les repères choisis; alors les expressions de $Ds, \nabla s^*$ et $\nabla \hat{s}$ dans ces repères sont données classiquement par $du + (H^{-1} \partial H) \wedge u$, $du^* + (\bar{H} \partial \bar{H}^{-1}) \wedge u^*$ et $d\hat{u} + (\bar{H} \partial \bar{H}^{-1}) \wedge \hat{u}$, et par définition de \hat{s} on a : $\hat{u} = \bar{H} \bar{u}$.

On en déduit que :

$$\langle \nabla'' s^*, Ds \rangle = \sum_{j=1}^n \bar{\partial} u_j^* \wedge (du_j + ((H^{-1} \partial H) \wedge u)_j)$$

$$\langle s^*, Ds \rangle = \sum_{j=1}^n u_j^* (du_j + ((H^{-1} \partial H) \wedge u)_j).$$

Un calcul analogue à celui du lemme 3 de [1] montre que

$$\langle s^*, Ds \rangle \wedge (\langle \nabla'' s^*, Ds \rangle)^{n-1} = (-1)^{n(n-1)/2} (n-1)! \left[\sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} u_j^* \wedge_{k \neq j} \bar{\partial} u_k^* \right] \\ \wedge_{p=1}^n (du_p + ((H^{-1} \partial H) \wedge u)_p).$$

On a donc pour z et ζ dans des compacts

$$\langle s^*, Ds \rangle \wedge (\langle \nabla'' s^*, Ds \rangle)^{n-1} = (-1)^{n(n-1)/2} (n-1)! [\bar{\omega}'_{z, \zeta}(u^*) \wedge \omega_{z, \zeta}(u) + O(|u|_\theta)].$$

Dans le cas particulier où l'on prend comme section s^* la section \bar{s} de [3] et pour θ la métrique intervenant dans la définition de \bar{s} on obtient sur $U \times V \setminus \Delta(U)$

$$\tilde{\Omega}(\varphi^v, \bar{s}, s) = \tilde{K} + O\left(\frac{1}{|u|_\theta^{2n-2}}\right)$$

(si z et ζ varient dans des compacts de M).

\tilde{K} étant le noyau défini localement dans [5] et qui est une solution fondamentale locale du $\bar{\partial}$ ([5], § 2).

Remarquons d'autre part que si $M = \mathbb{C}^n$ et si la métrique θ est la métrique habituelle de \mathbb{C}^n alors les connexions D et ∇ coïncident avec la différentielle ordinaire et si on prend :

$$\varphi(z, \zeta) = 1, \quad \forall (z, \zeta) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \\ s(z, \zeta) = z - \zeta \quad \text{et} \quad s^*(z, \zeta) = \bar{z} - \bar{\zeta}$$

le noyau $\tilde{\Omega}(\varphi^v, \bar{s}, s)$ n'est autre que le noyau de Bochner-Martinelli dans $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$.

2. Formule de Koppelman pour les (p, q) -formes différentielles

Dans ce paragraphe nous allons étendre au cas des (p, q) -formes différentielles, $0 \leq p, q \leq n$ la formule de Koppelman donnée dans les variétés de Stein par Henkin et Leiterer pour les $(0, q)$ -formes différentielles ([3], théorème 4.5.2).

Considérons le noyau $\tilde{\Omega}(\varphi^v, \hat{s}, s)$ défini au paragraphe précédent. Remarquons tout d'abord que s étant holomorphe on a $Ds = D' s$; les connexions D et ∇ sont d'autre part liées par la relation naturelle $\nabla \hat{s} = \nabla(\sigma \circ s) = \sigma \circ Ds$ où σ est antilinéaire; par suite $\nabla \hat{s} = \nabla'' \hat{s}$ et

$$\tilde{\Omega}(\varphi^v, \hat{s}, s) = \frac{(-1)^{n-1}}{(2\pi)^n} \varphi^{vn} \frac{\langle \hat{s}, Ds \rangle \wedge (\langle \nabla \hat{s}, Ds \rangle)^{n-1}}{|s|_\theta^{2n}}.$$

Le noyau $\tilde{\Omega}(\varphi^\vee, \hat{s}, s)$ admet la décomposition suivante :

$$\tilde{\Omega}(\varphi^\vee, \hat{s}, s) = \sum_{\substack{1 \leq p \leq n \\ 1 \leq q \leq n-1}} \Omega_q^p(\varphi^\vee, \hat{s}, s)$$

où $\Omega_q^p(\varphi^\vee, \hat{s}, s)$ est de type (p, q) en z et $(n-p, n-q-1)$ en ζ . On peut remarquer que si \hat{s} coïncide avec la section \bar{s} de Henkin et Leiterer, $\sum_{1 \leq q \leq n-1} \Omega_q^0(\varphi^\vee, \bar{s}, s)$ n'est autre que le

noyau $\tilde{\Omega}^0$ défini par Henkin et Leiterer ([2], § 2.4 et [3], § 4.5) pour démontrer la formule de Koppelman pour les $(0, q)$ -formes différentielles : ceci résulte du fait que la forme de connexion $H^{-1} \partial H$ qui intervient dans la définition de $\tilde{\Omega}(\varphi^\vee, \hat{s}, s)$ ne dépend que de la variable z . On pose $\Omega_{-1}^0 = \Omega_n^0 = 0$.

Pour simplifier les expressions ultérieures, nous noterons $\tilde{\Omega}$ et Ω_q^p les noyaux $\tilde{\Omega}(\varphi^\vee, \hat{s}, s)$ et $\Omega_q^p(\varphi^\vee, \hat{s}, s)$ lorsqu'il ne risque pas d'y avoir de confusion.

Désignons par $c(\tilde{T}(M \times M)) = D^2$ et $c(\tilde{T}^*(M \times M)) = \nabla^2$ les formes de courbure des fibrés $\tilde{T}(M \times M)$ et $\tilde{T}^*(M \times M)$ pour les connexions D et ∇ ; elles sont de bidegré $(1, 1)$ et ne dépendent que de la variable z .

LEMME 2. 1. — On a sur $M \times M \setminus \Delta(M)$.

$$\begin{aligned} \bar{\partial} \tilde{\Omega} = & \frac{(-1)^{n-1}}{(2\pi)^n} \frac{\varphi^{\vee n}}{\langle \hat{s}, s \rangle^n} [\langle \hat{s}, c(\tilde{T}(M \times M)) \wedge s \rangle \wedge (\langle \nabla \hat{s}, Ds \rangle)^{n-1} \\ & + (n-1) \langle \hat{s}, Ds \rangle \wedge \langle \nabla \hat{s}, c(\tilde{T}(M \times M)) \wedge s \rangle \wedge (\langle \nabla \hat{s}, Ds \rangle)^{n-2}]. \end{aligned}$$

et donc $\bar{\partial} \tilde{\Omega}$ a une singularité d'ordre $2n-2$ sur la diagonale.

Si de plus $c(\tilde{T}(M \times M)) = 0$ on a $\bar{\partial} \tilde{\Omega} = 0$.

Démonstration. — Calculons tout d'abord

$$d \left[\frac{\langle \hat{s}, Ds \rangle \wedge (\langle \nabla \hat{s}, Ds \rangle)^{n-1}}{\langle \hat{s}, s \rangle^n} \right].$$

On a

$$\begin{aligned} d \langle \hat{s}, s \rangle &= \langle \nabla \hat{s}, s \rangle + \langle \hat{s}, Ds \rangle \\ d \langle \hat{s}, Ds \rangle &= \langle \nabla \hat{s}, Ds \rangle + \langle \hat{s}, c(\tilde{T}(M \times M)) \wedge s \rangle \\ d \langle \nabla \hat{s}, Ds \rangle^{n-1} &= (n-1) [\langle c(\tilde{T}^*(M \times M)) \wedge \hat{s}, Ds \rangle \\ &\quad - \langle \nabla \hat{s}, c(\tilde{T}(M \times M)) \wedge s \rangle] \wedge (\langle \nabla \hat{s}, Ds \rangle)^{n-2}. \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} d \left[\frac{\langle \hat{s}, Ds \rangle \wedge (\langle \nabla \hat{s}, Ds \rangle)^{n-1}}{\langle \hat{s}, s \rangle^n} \right] &= \frac{1}{(\langle \hat{s}, s \rangle)^{n+1}} [\langle \hat{s}, s \rangle (\langle \nabla \hat{s}, Ds \rangle)^n \\ &\quad + \langle \hat{s}, s \rangle \langle \hat{s}, c(\tilde{T}(M \times M)) \wedge s \rangle \wedge (\langle \nabla \hat{s}, Ds \rangle)^{n-1} \\ &\quad - (n-1) \langle \hat{s}, s \rangle \langle \hat{s}, Ds \rangle \wedge (\langle c(\tilde{T}^*(M \times M)) \wedge \hat{s}, Ds \rangle \\ &\quad - \langle \nabla \hat{s}, c(\tilde{T}(M \times M)) \wedge s \rangle) \wedge (\langle \nabla \hat{s}, Ds \rangle)^{n-2} \\ &\quad - n (\langle \nabla \hat{s}, s \rangle + \langle \hat{s}, Ds \rangle) \wedge \langle \hat{s}, Ds \rangle \wedge (\langle \nabla \hat{s}, Ds \rangle)^{n-1}]. \end{aligned}$$

or

$$\langle \hat{s}, Ds \rangle \wedge \langle \hat{s}, Ds \rangle = 0$$

$$\langle \hat{s}, s \rangle (\langle \nabla \hat{s}, Ds \rangle)^n = n \langle \nabla \hat{s}, s \rangle \wedge \langle \hat{s}, Ds \rangle \wedge (\langle \nabla \hat{s}, Ds \rangle)^{n-1}$$

(il suffit de reprendre les calculs du lemme 3 de [1]).

Revenons au noyau $\tilde{\Omega}$, comme φ est holomorphe et $\nabla \hat{s} = \nabla'' \hat{s}$, on a pour des raisons de degré

$$\bar{\partial} \tilde{\Omega} = \frac{(-1)^{n-1}}{(2\pi)^n} \varphi^{vn}$$

$$\times \frac{\left\{ \begin{aligned} &\langle \hat{s}, c(\tilde{T}(M \times M)) \wedge s \rangle \wedge (\langle \nabla \hat{s}, Ds \rangle)^{n-1} \\ &+ (n-1) \langle \hat{s}, Ds \rangle \wedge \langle \nabla \hat{s}, c(\tilde{T}(M \times M)) \wedge s \rangle \wedge (\langle \nabla \hat{s}, Ds \rangle)^{n-2} \end{aligned} \right\}}{\langle \hat{s}, s \rangle^n},$$

Étudions maintenant la singularité de $\bar{\partial} \tilde{\Omega}$ en $z = \zeta$. Par définition de \hat{s} , on a $\langle \hat{s}, s \rangle = |s|_\theta$ et si z et ζ varient dans des compacts de M , les formes différentielles $c(\tilde{T}(M \times M))$, $\nabla \hat{s}$ et Ds sont bornées donc : $\bar{\partial} \tilde{\Omega} = O(|s|_\theta^{-2n+2})$ car $|\hat{s}| = |\sigma s| = O(|s|_\theta)$.

THÉORÈME 2.2. — Soient D un domaine relativement compact à bord \mathcal{C}^1 par morceaux de la variété de Stein M et $v \geq 2\chi$. Si f est une (p, q) -forme différentielle continue sur \bar{D} , telle que $\bar{\partial} f$ soit aussi continue sur \bar{D} , $0 \leq p, q \leq n$, on a pour $z \in D$

$$(2.1) \quad f(z) = (-1)^{p+q} \left[\int_{\zeta \in \partial D} f(\zeta) \wedge \Omega_q^p(z, \zeta) - \int_{\zeta \in D} \bar{\partial}_\zeta f(\zeta) \wedge \Omega_q^p(z, \zeta) \right. \\ \left. + \bar{\partial}_z \int_{\zeta \in D} f(\zeta) \wedge \Omega_{q-1}^p(z, \zeta) + (-1)^{p+q+1} \int_{\zeta \in D} f(\zeta) \wedge P_q^p(z, \zeta) \right]$$

où $\Omega_q^p(z, \zeta) = \Omega_q^p(\varphi^v, \hat{s}, s)(z, \zeta)$ et $P_q^p(z, \zeta)$ est la partie de bidegré (p, q) en z de $\bar{\partial} \tilde{\Omega}$.

Remarque 1. — Si $p = 0$, $P_q^p = 0$ car $c(\tilde{T}(M \times M))$ est de bidegré $(1, 1)$ en z , on retrouve donc la formule (2.4.6) de [2].

Remarque 2. — Si la métrique θ est telle que $c(\tilde{T}(M \times M)) = 0$, on obtient la formule de Koppelman classique pour les (p, q) -formes différentielles.

Démonstration. — La méthode utilisée ici est la même que celle de la démonstration du théorème 4.5.2 de [3]. Il nous a semblé plus clair d'en rappeler ici les principales étapes.

Il suffit de prouver pour toute forme différentielle g de bidegré $(n-p, n-q)$, \mathcal{C}^∞ à support compact dans D , que

$$\int_{z \in D} f(z) \wedge g(z) = (-1)^{p+q} \left[\int_{(z, \zeta) \in D \times \partial D} f(\zeta) \wedge \Omega_q^p(z, \zeta) \wedge g(z) \right. \\ \left. - \int_{(z, \zeta) \in D \times D} \bar{\partial}_\zeta f(\zeta) \wedge \Omega_q^p(z, \zeta) \wedge g(z) \right] \\ + \int_{(z, \zeta) \in D \times D} f(\zeta) \wedge \Omega_{q-1}^p(z, \zeta) \wedge \bar{\partial}_z g(z) - \int_{(z, \zeta) \in D \times D} f(\zeta) \wedge P_q^p(z, \zeta) \wedge g(z).$$

Par des considérations de bidegré on peut remplacer Ω_q^p et Ω_{q-1}^p par $\tilde{\Omega}$, P_q^p par $\bar{\partial}\tilde{\Omega}$ ainsi que $\bar{\partial}f$ et $\bar{\partial}g$ par df et dg . On doit donc démontrer l'égalité

$$(2.2) \quad \int_{z \in D} f(z) \wedge g(z) \\ = (-1)^{p+q} \left[\int_{(z, \zeta) \in D \times \partial D} f(\zeta) \wedge \tilde{\Omega}(z, \zeta) \wedge g(z) - \int_{(z, \zeta) \in D \times D} d_{\zeta} f(\zeta) \wedge \tilde{\Omega}(z, \zeta) \wedge g(z) \right] \\ + \int_{(z, \zeta) \in D \times D} f(\zeta) \wedge \tilde{\Omega}(z, \zeta) \wedge d_z g(z) - \int_{(z, \zeta) \in D \times D} f(\zeta) \wedge \bar{\partial}_{z, \zeta} \tilde{\Omega}(z, \zeta) \wedge g(z).$$

Grâce aux propriétés de s , on peut trouver un voisinage $U_{\Delta} \subset M \times M$ de la diagonale $\Delta = \{(z, z) \mid z \in M\}$ tel que pour tout z fixé dans M , $s(z, \zeta)$ soit biholomorphe pour tout $\zeta \in M$ tel que $(z, \zeta) \in U_{\Delta}$. On considère les ouverts

$$U_{\varepsilon} = \{(z, \zeta) \in U_{\Delta} \times U_{\Delta} \mid |s|_{\theta} < \varepsilon\}, \quad \varepsilon > 0.$$

Comme $D \subset\subset M$, pour ε assez petit, $\partial U_{\varepsilon} \cap (D \times D)$ est lisse.

Nous allons appliquer la formule de Stokes à la forme différentielle $f(\zeta) \wedge \tilde{\Omega}(z, \zeta) \wedge g(z)$ sur l'ouvert $D_{\varepsilon} = D \times D \setminus U_{\varepsilon}$.

Nous choisissons ε pour que

$$\partial D_{\varepsilon} \cap (\text{supp } g \times M) = (D \times \partial D \cup \partial U_{\varepsilon}) \cap (\text{supp } g \times M),$$

alors

$$\int_{(z, \zeta) \in D \times \partial D} f(\zeta) \wedge \tilde{\Omega}(z, \zeta) \wedge g(z) - \int_{(z, \zeta) \in \partial U_{\varepsilon}} f(\zeta) \wedge \tilde{\Omega}(z, \zeta) \wedge g(z) \\ = \int_{(z, \zeta) \in D_{\varepsilon}} d_{z, \zeta} (f(\zeta) \wedge \tilde{\Omega}(z, \zeta) \wedge g(z)).$$

Or

$$d_{z, \zeta} (f(\zeta) \wedge \tilde{\Omega}(z, \zeta) \wedge g(z)) = d_{\zeta} f(\zeta) \wedge \tilde{\Omega}(z, \zeta) \wedge g(z) \\ + (-1)^{p+q} f(\zeta) \wedge d_{z, \zeta} \tilde{\Omega}(z, \zeta) \wedge g(z) + (-1)^{p+q+1} f(\zeta) \wedge \tilde{\Omega}(z, \zeta) \wedge d_z g(z)$$

et pour des raisons de bidegré on peut remplacer $d_{z, \zeta} \tilde{\Omega}$ par $\bar{\partial}_{z, \zeta} \tilde{\Omega}$, on en déduit donc que

$$(2.3) \quad \int_{(z, \zeta) \in D \times \partial D} f(\zeta) \wedge \tilde{\Omega}(z, \zeta) \wedge g(z) - \int_{(z, \zeta) \in \partial U_{\varepsilon}} f(\zeta) \wedge \tilde{\Omega}(z, \zeta) \wedge g(z) \\ = \int_{(z, \zeta) \in D_{\varepsilon}} d_{\zeta} f(\zeta) \wedge \tilde{\Omega}(z, \zeta) \wedge g(z) + (-1)^{p+q} \int_{(z, \zeta) \in D_{\varepsilon}} f(\zeta) \wedge \bar{\partial}_{z, \zeta} \tilde{\Omega}(z, \zeta) \wedge g(z) \\ + (-1)^{p+q+1} \int_{(z, \zeta) \in D_{\varepsilon}} f(\zeta) \wedge \tilde{\Omega}(z, \zeta) \wedge d_z g(z).$$

Il est clair que $\tilde{\Omega}$ ayant une singularité d'ordre $2n-1$ au voisinage de la diagonale et $\bar{\partial}_{z, \zeta} \tilde{\Omega}$ une singularité d'ordre $2n-2$, ces deux formes différentielles sont localement intégrables sur $D \times \bar{D}$ et par conséquent les intégrales du second membre de (2.3) tendent vers les intégrales correspondantes de (2.2) quand $\varepsilon \rightarrow 0$. Il reste donc à montrer que

$$(2.4) \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{(z, \zeta) \in \partial U_\varepsilon} f(\zeta) \wedge \tilde{\Omega}(z, \zeta) \wedge g(z) = (-1)^{p+q} \int_{z \in D} f(z) \wedge g(z).$$

Après usage d'une partition de l'unité sur le support de g , on peut supposer que le support de g est contenu dans un ouvert de carte U de M . Soit V un ouvert tel que $\text{supp } g \subset V \subset \subset U$.

Si ε est assez petit, les conditions $z \in V$ et $(z, \zeta) \in U_\varepsilon$ impliquent $\zeta \in U$. Avec les notations du paragraphe 1, le noyau $\tilde{\Omega}(\varphi^\vee, s^*, s)$ admet pour $(z, \zeta) \in V \times U$ l'expression en coordonnées locales

$$\tilde{\Omega}(z, \zeta) = \frac{(n-1)!}{(2i\pi)^n} \varphi^{vn} \frac{\bar{\omega}'_{z, \zeta}(\hat{u}) \wedge \omega_{z, \zeta}(u)}{|u|_0^{2n}} + O(|u|_0^{-2n+2}).$$

En particulier sur $\partial U_\varepsilon \cap (V \times (U \cap \bar{D}))$

$$\tilde{\Omega}(z, \zeta) = \frac{(n-1)!}{(2i\pi)^n} \varphi^{vn} \frac{\bar{\omega}'_{z, \zeta}(\hat{u}) \wedge \omega_{z, \zeta}(u)}{\varepsilon^{2n}} + O(\varepsilon^{-2n+2}).$$

Or la mesure de l'ensemble $\partial U_\varepsilon \cap (V \times U)$ est un $O(\varepsilon^{2n-1})$, il en résulte que (2.4) se déduira de

$$(2.5) \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{(z, \zeta) \in \partial U_\varepsilon \cap (V \times U)} f(\zeta) \wedge K(z, \zeta) \wedge g(z) = (-1)^{p+q} \int_{z \in V} f(z) \wedge g(z)$$

où

$$K(z, \zeta) = \frac{(n-1)!}{(2i\pi)^n} \varphi^{vn} \frac{\bar{\omega}'_{z, \zeta}(\hat{u}) \wedge \omega_{z, \zeta}(u)}{\varepsilon^{2n}}.$$

Or ce résultat est démontré dans ([3], p. 176-177) pour la section \bar{s} et donc pour \hat{s} car ces deux sections ont les mêmes propriétés (cf. [3], § 4.3.1).

Le théorème est ainsi démontré.

COROLLAIRE 2.3. — *Le noyau $\tilde{\Omega}(\varphi^\vee, \hat{s}, s)$ définit un courant sur $M \times M$ qui vérifie*

$$\bar{\partial} \tilde{\Omega}(\varphi^\vee, \hat{s}, s) = [\Delta] + P$$

où $[\Delta]$ est le courant d'intégration sur la diagonale Δ de $M \times M$ et P la forme différentielle localement intégrable qui coïncide avec $\bar{\partial} \tilde{\Omega}$ sur $M \times M \setminus \Delta(M)$. En particulier si $c(\tilde{T}(M \times M)) = 0$, alors $\bar{\partial} \tilde{\Omega}(\varphi^\vee, \hat{s}, s) = [\Delta]$.

Ce résultat n'est autre que l'interprétation en terme de courants de la formule (2.1); il montre que le courant d'intégration $[\Delta]$ n'est autre que le résidu au sens de Griffiths et Harris ([10], p. 369) de la forme différentielle $\tilde{\Omega}(\varphi^\vee, \hat{s}, s)$.

3. Transformée de Bochner-Martinelli

On considère une hypersurface réelle V fermée, orientée de classe $\mathcal{C}^{1+\alpha}$, $\alpha > 0$, dans un ouvert U de la variété de Stein M , telle que $U \setminus V$ ait exactement deux composantes connexes U^+ et U^- .

On suppose que l'orientation sur V est celle obtenue lorsque l'on considère que V est la frontière de U^+ .

Si f est une (p, q) -forme différentielle de classe \mathcal{C}^1 sur V , à support compact on appelle transformée de Bochner-Martinelli de f la forme différentielle F définie sur $U \setminus V$ par

$$F(z) = \int_{\zeta \in V} f(\zeta) \wedge \Omega_q^p(\varphi^v, \hat{s}, s)(z, \zeta).$$

Dans [6] nous avons déjà étudié les propriétés de F , lorsque f est une $(0, q)$ -forme différentielle, les résultats obtenus s'étendent au cas des (p, q) -formes différentielles.

Les notations sont celles de [6], § 3. On suppose que

$$V = \{z \in M / \rho(z) = 0\}, \quad \rho \in \mathcal{C}^{1+\alpha}(M).$$

Si $f \in \mathcal{C}_{p, q}(V)$ on notera f_t sa projection sur l'espace quotient de $\mathcal{C}_{p, q}(V)$ par les formes différentielles normales complexes. Si F est une (p, q) -forme différentielle continue sur U^+ ou U^- nous dirons qu'elle se prolonge continûment à $U^\pm \cup V$ modulo $\bar{\partial}\rho$ s'il existe une (p, q) -forme différentielle \tilde{F} continue sur $U^\pm \cup V$ telle que $\tilde{F} - F = \bar{\partial}\rho \wedge G$ sur U^\pm , G étant une forme différentielle continue sur U^\pm de bidegré $(p, q-1)$.

THÉORÈME 3.1. — *Soit f une (p, q) -forme différentielle, \mathcal{C}^1 sur V , à support compact. La transformée de Bochner-Martinelli de f*

$$F(z) = \int_{\zeta \in V} f(\zeta) \wedge \Omega_q^p(\varphi^v, \hat{s}, s)(z, \zeta)$$

admet, modulo $\bar{\partial}\rho$, des prolongements continus à $U^+ \cup V$ et $U^- \cup V$ notés F^+ et F^- et on a

$$F_t^+ - F_t^- = (-1)^{p+q} f_t.$$

Démonstration. — Il s'agit d'un problème local, on peut donc supposer que U est un domaine de carte de M .

Choisissons des coordonnées et un repère trivialisant de $\tilde{T}(M \times M)$ sur cet ouvert, on a alors d'après le paragraphe 1

$$(3.1) \quad \tilde{\Omega}(\varphi^v, \hat{s}, s) = \frac{(n-1)!}{(2i\pi)^n} \varphi^{vn} \frac{\bar{\omega}'_{z, \zeta}(\hat{u}) \wedge \omega_{z, \zeta}(u)}{|u|_\theta^{2n}} + O(|u|_\theta^{-2n+2})$$

si $(z, \zeta) \in U \times U \setminus \Delta(U)$, z et ζ variant dans des compacts de M .

Pour des raisons de degré

$$F(z) = \int_{\zeta \in V} f(\zeta) \wedge \tilde{\Omega}(\varphi^v, \hat{s}, s)$$

et par conséquent grâce à (3.1) la forme F est somme d'un terme continu au voisinage de V et de la forme

$$F_0(z) = \frac{(n-1)!}{(2i\pi)^n} \int_{\zeta \in V} f(\zeta) \wedge \varphi^{vn}(z, \zeta) \frac{\bar{\omega}'_{z, \zeta}(\hat{u}) \wedge \omega_{z, \zeta}(u)}{|u|_{\theta}^{2n}}.$$

Le théorème résulte donc du théorème analogue montré pour F_0 dans [6] (prop. 2.3.1).

Remarque. — Dans [6] nous avons étudié lorsque f est une $(n, n-q-1)$ -forme différentielle

$$G(\zeta) = \int_{z \in V} f(z) \wedge \Omega_q^0(\varphi^v, \bar{s}, s)(z, \zeta) = \int_{z \in V} f(z) \wedge \tilde{\Omega}^0(\varphi^v, \bar{s}, s)(z, \zeta)$$

où $\tilde{\Omega}^0 = \sum_{0 \leq q \leq n-1} \Omega_q^0$.

Il n'est pas surprenant que F et G possèdent les mêmes propriétés au voisinage de V . En effet d'après (3.1) et le lemme 2.3.5 de [6], si $\tilde{\Omega}^n = \sum_{0 \leq q \leq n-1} \Omega_q^n$,

$$\tilde{\Omega}^n(\varphi^v, \bar{s}, s)(z, \zeta) - \tilde{\Omega}^0(\varphi^v, \bar{s}, s)(\zeta, z)$$

possède une singularité d'ordre $2n-2$ en $z = \zeta$.

4. Formule de Koppelman-Leray

Sur $M \times M \times [0, 1]$ on désigne par $\bar{T}^*(M \times M \times [0, 1])$ le fibré vectoriel image réciproque de $T^*(M)$ par l'application $(z, \zeta, \lambda) \mapsto z$.

On notera $\bar{\theta}^*$ la métrique induite par la métrique θ de $T(M)$ sur ce fibré.

Soit Δ la connexion hermitienne sur $\bar{T}^*(M \times M \times [0, 1])$ relative à la métrique $\bar{\theta}^*$, holomorphe en les variables (z, ζ) et invariante par translation dans la direction λ .

Si $\mathcal{C}_k^\infty(M \times M \times [0, 1], \bar{E}^*)$ désigne l'espace des formes différentielles \mathcal{C}^∞ de degré k sur $M \times M \times [0, 1]$ à valeurs dans $\bar{E}^* = \bar{T}^*(M \times M \times [0, 1])$, on a la décomposition suivante

$$\mathcal{C}_k^\infty(M \times M \times [0, 1], \bar{E}^*) = \bigoplus_{p+q+r=k} \mathcal{C}_{p,q,r}^\infty(M \times M \times [0, 1], \bar{E}^*)$$

où $\mathcal{C}_{p,q,r}^\infty(M \times M \times [0, 1], \bar{E}^*)$ désigne l'espace des formes différentielles de bidegré (p, q) en (z, ζ) et de degré r en λ .

La connexion Δ se décompose en $\Delta' + \Delta''$ où

$$\Delta': \mathcal{C}_{p,q,r}^\infty(M \times M \times [0, 1], \bar{E}^*) \rightarrow \mathcal{C}_{p+1,q,r}^\infty(M \times M \times [0, 1], \bar{E}^*)$$

$$\begin{aligned} \Delta'' : \mathcal{C}_{p,q,r}^\infty(M \times M \times [0, 1], \bar{E}^*) \\ \rightarrow \mathcal{C}_{p,q+1,r}^\infty(M \times M \times [0, 1], \bar{E}^*) \oplus \mathcal{C}_{p,q,r+1}^\infty(M \times M \times [0, 1], \bar{E}^*). \end{aligned}$$

Étudions l'expression de Δ en coordonnées locales. Choisissons une trivialisations de $\bar{T}^*(M \times M \times [0, 1])$ et notons v^* l'expression d'une section t^* de $\bar{T}^*(M \times M \times [0, 1])$ alors

$$\Delta' t^* = \bar{H}(\partial_{z,\zeta}(\bar{H}^{-1} v^*))$$

où H est la matrice de la métrique θ dans la trivialisations correspondante de $T(M)$

$$\Delta'' t^* = (\bar{\partial}_{z,\zeta} + d_\lambda) v^*.$$

Soit D un ouvert relativement compact, à bord \mathcal{C}^1 par morceau de M et (s^*, χ^*) une section de Leray pour (D, s, φ) (cf. § 1).

Comme Henkin et Leiterer ([3], § 4.5), on pose pour tout $\lambda \in [0, 1]$, $z \in D$ et $\zeta \in V'_{\partial D}$ tel que $\langle s^*(z, \zeta), s(z, \zeta) \rangle \neq 0$

$$(4.1) \quad t^*(z, \zeta, \lambda) = (1-\lambda) \frac{s^*(z, \zeta)}{\langle s^*(z, \zeta), s(z, \zeta) \rangle} + \lambda \frac{\hat{s}(z, \zeta)}{|s(z, \zeta)|_\theta^2}.$$

D'après les propriétés de φ , s et s^* l'application

$$(z, \zeta, \lambda) \mapsto \varphi^{\max(x, x^*)}(z, \zeta) t^*(z, \zeta, \lambda)$$

définit une section \mathcal{C}^1 de $\bar{T}^*(M \times M \times [0, 1])$ sur un voisinage de $D \times \partial D \times [0, 1]$ dans $D \times M \times [0, 1]$. On en déduit que pour tout entier $v \geq \max(\chi, \chi^*)$ la forme différentielle $\bar{\Omega}(\varphi^v, s^*, \hat{s}, s) = (-1)^{n-1} / (2\pi)^n \varphi^v \langle t^*, Ds \rangle \wedge (\langle \Delta' t^*, Ds \rangle)^{n-1}$ est continue sur un voisinage de $D \times \partial D \times [0, 1]$ dans $D \times M \times [0, 1]$.

LEMME 4.1. — On a les égalités suivantes

$$\begin{aligned} \bar{\Omega}(\varphi^v, s^*, \hat{s}, s)|_{\lambda=0} &= \bar{\Omega}(\varphi^v, s^*, s) \\ \bar{\Omega}(\varphi^v, s^*, \hat{s}, s)|_{\lambda=1} &= \bar{\Omega}(\varphi^v, \hat{s}, s). \end{aligned}$$

Démonstration. — D'après l'expression (4.1) de t^* il suffit de montrer que pour toute fonction μ de classe \mathcal{C}^1 , définie sur un ouvert de $M \times M$ contenant le domaine de définition d'une section s^* de $\bar{T}^*(M \times M)$ on a

$$\langle \mu s^*, Ds \rangle \wedge (\langle \Delta''(\mu s^*), Ds \rangle)^{n-1} = \mu^n \langle s^*, Ds \rangle \wedge (\langle \Delta'' s^*, Ds \rangle)^{n-1};$$

on appliquera cette formule successivement avec $\mu = \langle s^*, s \rangle^{-1}$ pour $\lambda=0$ et $\mu = \langle \hat{s}, s \rangle^{-1} = |s|_\theta^{-2}$, $s^* = \hat{s}$ pour $\lambda=1$.

La formule résulte elle-même immédiatement du fait que

$$\langle \mu s^*, Ds \rangle \wedge \langle d'' \mu \wedge s^*, Ds \rangle = -\mu d'' \mu \wedge \langle s^*, Ds \rangle \wedge \langle s^*, Ds \rangle = 0.$$

LEMME 4.2. — Soit $W \times [0, 1]$ le domaine de définition de $\bar{\Omega}(\varphi^v, s^*, \hat{s}, s)$, $W \subset D \times M$. Pour tout $(z, \zeta, \lambda) \in W \times [0, 1]$, on a

$$\begin{aligned} (\bar{\partial}_{z, \zeta} + d_\lambda) \bar{\Omega}(\varphi^v, s^*, \hat{s}, s) &= \frac{(-1)^{n-1}}{(2\pi)^n} \varphi^v{}^n [\langle t^*, c(\tilde{T}(M \times M)) \wedge s \rangle \wedge (\langle \Delta'' t^*, Ds \rangle)^{n-1} \\ &\quad + (n-1) \langle t^*, Ds \rangle \wedge \langle \Delta'' t^*, c(\tilde{T}(M \times M)) \wedge s \rangle \wedge (\langle \Delta'' t^*, Ds \rangle)^{n-2}]. \end{aligned}$$

Si de plus $c(\tilde{T}(M \times M)) = 0$, on a $(\bar{\partial}_{z, \zeta} + d_\lambda) \bar{\Omega}(\varphi^v, s^*, \hat{s}, s) = 0$.

Démonstration :

$$\begin{aligned} (\bar{\partial}_{z, \zeta} + d_\lambda) \bar{\Omega}(\varphi^v, s^*, \hat{s}, s) &= \frac{(-1)^n}{(2\pi)^n} \varphi^v{}^n [(\langle \Delta'' t^*, Ds \rangle)^n + \langle t^*, D^2 s \rangle \wedge (\langle \Delta'' t^*, Ds \rangle)^{n-1} \\ &\quad - (n-1) \langle t^*, Ds \rangle \wedge (\langle \Delta'' t^*, Ds \rangle - \langle \Delta'' t^*, D^2 s \rangle) \\ &\quad \wedge (\langle \Delta'' t^*, Ds \rangle)^{n-2}] \end{aligned}$$

or $\Delta''^2 = 0$, $D^2 s = c(\tilde{T}(M \times M)) \wedge s$.

Considérons une trivialisatıon de $\tilde{T}^*(M \times M \times [0, 1])$, soit v^* l'expression de t^* dans cette trivialisatıon et u l'expression de s dans la trivialisatıon correspondante de $\tilde{T}(M \times M)$

$$\begin{aligned} \varphi^v{}^n (\langle \Delta'' t^*, Ds \rangle)^n &= (-1)^{n(n-1)/2} n! \left(\bigwedge_{j=1}^n (\bar{\partial}_{z, \zeta} + d_\lambda) (\varphi^v v_j^*) \right) \wedge \left(\bigwedge_{k=1}^n du_k + ((H^{-1} \partial H) \wedge u)_k \right). \end{aligned}$$

On reprend alors la démonstration du lemme 4.5.4 de [3] : on a $\sum_{k=1}^n \varphi^v v_k^* u_k = \varphi^v$ par définition de t^* les fonctions φ et u_k étant holomorphes en (z, ζ) et indépendantes de λ , on en déduit

$$\sum_{k=1}^n u_k (\bar{\partial}_{z, \zeta} + d_\lambda) (\varphi^v v_k^*) = 0$$

d'où $\bigwedge_{k=1}^n (\bar{\partial}_{z, \zeta} + d_\lambda) (\varphi^v v_k^*) = 0$ car le membre de gauche est continu d'après les propriétés des sections de Leray et l'ensemble $\{(z, \zeta, \lambda) \in W \times [0, 1] \mid s(z, \zeta) \neq 0\}$ est dense dans $W \times [0, 1]$. On a donc : $\varphi^v{}^n (\langle \Delta'' t^*, Ds \rangle)^n = 0$ et le lemme est démontré.

Nous allons maintenant pouvoir généraliser au cas des (p, q) -formes différentielles la formule de Koppelman-Leray donnée par Henkin et Leiterer ([3], théorème 4.5.3).

THÉORÈME 4.3. — Soient D un domaine relativement compact à bord \mathcal{C}^1 par morceaux de la variété de Stein M , (s^*, χ^*) une section de Leray pour (D, s, φ) et v un entier plus grand que $\max(2\chi, \chi^*)$. On suppose de plus que toutes les dérivées de $(\varphi^v s^* / \langle s^*, s \rangle)(z, \zeta)$ qui sont d'ordre ≤ 2 en z et d'ordre ≤ 1 en ζ sont continues pour tout (z, ζ) dans un voisinage W de $D \times \partial D$ dans $D \times M$. Alors pour toute (p, q) -forme différentielle f continue

sur \bar{D} telle que $\bar{\partial}f$ soit aussi continue sur \bar{D} , $0 \leq p, q \leq n$, on a

$$\begin{aligned} (-1)^{p+q} f(z) = & \int_{\zeta \in \partial D} f(\zeta) \wedge \Omega_q^p(\varphi^\vee, s^*, s)(z, \zeta) - \int_{\zeta \in D} \bar{\partial}_\zeta f(\zeta) \wedge \Omega_q^p(\varphi^\vee, \hat{s}, s)(z, \zeta) \\ & - \int_{(\zeta, \lambda) \in \partial D \times [0, 1]} \bar{\partial}_\zeta f(\zeta) \wedge \bar{\Omega}_q^p(\varphi^\vee, s^*, \hat{s}, s)(z, \zeta, \lambda) \\ & + \bar{\partial}_z \left(\int_{\zeta \in D} f(\zeta) \wedge \Omega_{q-1}^p(\varphi^\vee, \hat{s}, s)(z, \zeta) \right. \\ & \left. + \int_{(\zeta, \lambda) \in \partial D \times [0, 1]} f(\zeta) \wedge \bar{\Omega}_{q-1}^p(\varphi^\vee, s^*, \hat{s}, s)(z, \zeta, \lambda) \right) \\ & + (-1)^{p+q+1} \left[\int_{\zeta \in D} f(\zeta) \wedge P_q^p(z, \zeta) - \int_{(\zeta, \lambda) \in \partial D \times [0, 1]} f(\zeta) \wedge Q_q^p(z, \zeta, \lambda) \right], \quad z \in D, \end{aligned}$$

où $\Omega_q^p(\varphi^\vee, s^*, s)$, $\Omega_q^p(\varphi^\vee, \hat{s}, s)$, $\bar{\Omega}_q^p(\varphi^\vee, s^*, \hat{s}, s)$, P_q^p et Q_q^p désignent respectivement les parties de type (p, q) en z de $\tilde{\Omega}(\varphi^\vee, s^*, s)$, $\tilde{\Omega}(\varphi^\vee, \hat{s}, s)$, $\bar{\Omega}(\varphi^\vee, s^*, \hat{s}, s)$, $\bar{\partial}_{z, \zeta} \tilde{\Omega}(\varphi^\vee, \hat{s}, s)$, $(\bar{\partial}_{z, \zeta} + d_\lambda) \bar{\Omega}(\varphi^\vee, s^*, \hat{s}, s)$.

Remarque 1. — Si $p=0$, $P_q^p=Q_q^p=0$ car $c(\tilde{T}(M \times M))$ est de bidegré $(1, 1)$ en z , on retrouve donc la formule (4.5.32) de [3].

Remarque 2. — Si la métrique θ est telle que $c(\tilde{T}(M \times M))=0$ alors $P_q^p=Q_q^p=0$ et on obtient la généralisation aux variétés de Stein de la formule de Koppelman-Leray pour les (p, q) -formes différentielles de \mathbb{C}^n .

En suivant la méthode utilisée par Henkin et Leiterer dans la démonstration du théorème 4.5.3 de [3], il suffit, pour prouver le théorème 4.3, d'appliquer la formule de Stokes à la forme différentielle $f(\zeta) \wedge \bar{\Omega}(\varphi^\vee, s^*, \hat{s}, s)$.

COROLLAIRE 4.4. — *Sous les hypothèses du théorème 4.3, si de plus $s^*(z, \zeta)$ dépend holomorphiquement de $z \in D$, $q \geq 1$ et $c(\tilde{T}(M \times M))=0$, alors*

$$\begin{aligned} f(z) = & (-1)^{p+q} \left[\bar{\partial}_z \left(\int_{\zeta \in D} f(\zeta) \wedge \Omega_{q-1}^p(\varphi^\vee, \hat{s}, s)(z, \zeta) \right. \right. \\ & \left. \left. + \int_{(\zeta, \lambda) \in \partial D \times [0, 1]} f(\zeta) \wedge \bar{\Omega}_{q-1}^p(\varphi^\vee, s^*, \hat{s}, s)(z, \zeta, \lambda) \right) - \left(\int_{\zeta \in D} \bar{\partial}_\zeta f(\zeta) \wedge \Omega_q^p(\varphi^\vee, \hat{s}, s)(z, \zeta) \right. \right. \\ & \left. \left. + \int_{(\zeta, \lambda) \in \partial D \times [0, 1]} \bar{\partial}_\zeta f(\zeta) \wedge \bar{\Omega}_q^p(\varphi^\vee, s^*, \hat{s}, s)(z, \zeta, \lambda) \right) \right]. \end{aligned}$$

En particulier pour toute (p, q) -forme différentielle continue sur \bar{D} telle que $\bar{\partial}f=0$ sur D

$$\begin{aligned} g(z) = & (-1)^{p+q} \left(\int_{\zeta \in D} f(\zeta) \wedge \Omega_{q-1}^p(\varphi^\vee, \hat{s}, s)(z, \zeta) \right. \\ & \left. + \int_{(\zeta, \lambda) \in \partial D \times [0, 1]} f(\zeta) \wedge \bar{\Omega}_q^p(\varphi^\vee, s^*, \hat{s}, s)(z, \zeta, \lambda) \right) \end{aligned}$$

est une solution continue de l'équation $\bar{\partial}g=f$ dans D .

Démonstration. — Cela se déduit immédiatement du théorème 4.3 car si $s^*(z, \zeta)$ est holomorphe en z , $\Omega_q^p(\varphi^\vee, s^*, s)=0$ dès que $q \geq 1$ et comme $c(\tilde{T}(M \times M))=0$ $P_q^p=Q_q^p=0$ d'après les lemmes 2.1 et 4.2.

Nous allons maintenant prouver une autre formule de Leray-Koppelman, analogue à celle du théorème 1 de [1]. Une telle formule pourrait permettre d'aborder des problèmes de division dans les ouverts des variétés de Stein comme l'a fait Berndtsson [9] pour les ouverts de \mathbb{C}^n .

Dans toute la suite du paragraphe, on considèrera un domaine D relativement compact à bord \mathcal{C}^1 par morceaux de la variété de Stein M , (s^*, χ^*) une section de Leray pour (D, s, φ) vérifiant :

- s^* est une section de classe \mathcal{C}^2 de $\tilde{T}^*(M \times M)$ définie sur $\bar{D} \times \bar{D}$.
- Pour tout compact L de D , il existe des constantes positives $c_1(L)$, $c_2(L)$ et $\eta(L)$ telles que si $d(z, \zeta)$ désigne la distance entre z, ζ on ait

$$\begin{aligned} |s^*(z, \zeta)|_{0^*} &\leq c_1(L) d(z, \zeta) \\ |\langle s^*(z, \zeta), s(z, \zeta) \rangle| &\geq c_2(L) (d(z, \zeta))^2 \end{aligned}$$

si $d(z, \zeta) < \eta(L)$ pour $\zeta \in \bar{D}$ et $z \in L$.

Remarquons que de telles sections existent : par exemple \hat{s} .

On désignera par K une forme différentielle de classe \mathcal{C}^1 sur $\bar{D} \times \bar{D} \setminus \Delta(\bar{D})$ de degré $2n-1$ telle que :

1. $dK=R$ sur $\bar{D} \times \bar{D} \setminus \Delta(\bar{D})$, où R est une forme différentielle localement intégrable sur $\bar{D} \times \bar{D}$.
2. Pour tout compact L de D il existe une constante $c_3(L)$ telle que

$$|K - \tilde{\Omega}(\varphi^\vee, s^*, s)| \leq c_3(L) (d(z, \zeta))^{-2n+2} \quad \text{si } \zeta \in \bar{D} \text{ et } z \in L.$$

3. K est de bidegré $(n, n-1)$.

THÉORÈME 4.5. — *Sous les hypothèses ci-dessus, si f est une (p, q) -forme différentielle continue sur \bar{D} telle que $\bar{\partial}f$ soit aussi continue sur \bar{D} , $0 \leq p, q \leq n$, on a pour tout $z \in D$*

$$\begin{aligned} (-1)^{p+q} f(z) &= \int_{\zeta \in \partial D} f(\zeta) \wedge K_q^p(z, \zeta) - \int_{\zeta \in D} \bar{\partial}_\zeta f(\zeta) \wedge K_q^p(z, \zeta) \\ &\quad + \bar{\partial}_z \left[\int_{\zeta \in D} f(\zeta) \wedge K_{q-1}^p(z, \zeta) \right] + (-1)^{p+q-1} \int_{\zeta \in D} f(\zeta) \wedge R_q^p(z, \zeta). \end{aligned}$$

K_q^p, R_q^p désignant les composantes de bidegré (p, q) en z et $(n-p, n-q-1)$ en ζ de K et R , avec la convention $K_{p, -1}=0$.

Démonstration. — La démonstration est analogue à celle de la formule de Koppelman (théorème 2.2) (voir aussi [1] démonstration du théorème 1).

Grâce aux propriétés 1 et 3 du noyau K en appliquant la méthode utilisée au début de la démonstration du théorème 2.2 on se ramène à démontrer la formule 2.4 où

$\tilde{\Omega}(\varphi^v, \hat{s}, s)$ est remplacé par K , soit en gardant les mêmes notations

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{(z, \zeta) \in \partial U_\varepsilon \cap (V \times U)} f(\zeta) \wedge K(z, \zeta) \wedge g(z) = (-1)^{p+q} \int_{z \in V} f(z) \wedge g(z).$$

De plus d'après la propriété 2 de K , il suffit de démontrer ce résultat pour $\tilde{\Omega}(\varphi^v, s^*, s)$. Puisque nous l'avons déjà démontré lorsque $s^* = \hat{s}$ il suffit de prouver que si

$$I_\varepsilon = \int_{(z, \zeta) \in \partial U_\varepsilon \cap (V \times U)} f(\zeta) \wedge \tilde{\Omega}(\varphi^v, s^*, s)(z, \zeta) \wedge g(z) - \int_{(z, \zeta) \in \partial U_\varepsilon \cap (V \times U)} f(\zeta) \wedge \tilde{\Omega}(\varphi^v, \hat{s}, s)(z, \zeta) \wedge g(z)$$

on a $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} I_\varepsilon = 0$.

Dans $V \times U \times [0, 1]$ on considère la variété à bord

$$X_\varepsilon = \{(z, \zeta) \in V \times U \mid d(z, \zeta) = \varepsilon\} \times [0, 1]$$

on a

$$\partial X_\varepsilon = \{d(z, \zeta) = \varepsilon\} \times \{1\} \cup \{d(z, \zeta) = \varepsilon\} \times \{0\}.$$

On va appliquer la formule de Stokes à la forme différentielle

$$f(\zeta) \wedge \tilde{\Omega}(\varphi^v, s^*, \hat{s}, s) \wedge g(z)$$

et à la variété à bord X_ε :

$$\int_{\partial X_\varepsilon} f(\zeta) \wedge \tilde{\Omega}(\varphi^v, s^*, \hat{s}, s)(z, \zeta) \wedge g(z) = \int_{X_\varepsilon} d_{z, \zeta, \lambda} (f(\zeta) \wedge \tilde{\Omega}(\varphi^v, s^*, \hat{s}, s)(z, \zeta) \wedge g(z)).$$

Grâce au lemme 4.1 on a par définition de ∂X_ε

$$I_\varepsilon = - \int_{\partial X_\varepsilon} f(\zeta) \wedge \tilde{\Omega}(\varphi^v, s^*, \hat{s}, s)(z, \zeta) \wedge g(z).$$

Par des considérations de degré on voit que

$$\begin{aligned} & d_{z, \zeta, \lambda} (f(\zeta) \wedge \tilde{\Omega}(\varphi^v, s^*, \hat{s}, s)(z, \zeta) \wedge g(z)) \\ &= (\bar{\partial}_{z, \zeta} + d_\lambda) (f(\zeta) \wedge \tilde{\Omega}(\varphi^v, s^*, \hat{s}, s)(z, \zeta) \wedge g(z)) \\ &= \bar{\partial}_\zeta f(\zeta) \wedge \tilde{\Omega}(\varphi^v, s^*, \hat{s}, s) \wedge g(z) + (-1)^{p+q+1} f(\zeta) \wedge \tilde{\Omega}(\varphi^v, s^*, \hat{s}, s) \wedge \bar{\partial}_z g(z) \\ &\quad + (-1)^{p+q} f(\zeta) \wedge (\bar{\partial}_{z, \zeta} + d_\lambda) \tilde{\Omega}(\varphi^v, s^*, \hat{s}, s) \wedge g(z). \end{aligned}$$

Évaluons $\tilde{\Omega}(\varphi^v, s^*, \hat{s}, s)$ et $(\bar{\partial}_{z, \zeta} + d_\lambda) \tilde{\Omega}(\varphi^v, s^*, \hat{s}, s)$ sur X_ε .

Puisque nous sommes sur $V \times U$ nous pouvons exprimer $\tilde{\Omega}(\varphi^v, s^*, \hat{s}, s)$ en coordonnées locales; si u, v, \hat{u}, u^* sont les expressions de s, t^*, \hat{s}, s^* dans les coordonnées choisies

on a

$$\Omega(\varphi^\nu, s^*, \hat{s}, s) = \frac{(n-1)!}{(2i\pi)^n} \varphi^{\nu n} \left(\sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} v_j \wedge_{k \neq j} (\bar{\partial}_{z,\zeta} + d_\lambda) v_k \right) \wedge \left(\bigwedge_{l=1}^n du_l + ((H^{-1} \partial H) \wedge u)_l \right)$$

En fait seule intervient la composante α de $\bar{\Omega}(\varphi^\nu, s^*, \hat{s}, s)$ de degré 1 en $d\lambda$.

Puisque

$$v_k = (1-\lambda) \frac{u_k^*}{\langle u^*, u \rangle} + \lambda \frac{\hat{u}_k}{\langle \hat{u}, u \rangle},$$

car t^* est définie par (4.1)

$$(\bar{\partial}_{z,\zeta} + d_\lambda) v_k = d\lambda \left(\frac{\hat{u}_k}{\langle \hat{u}, u \rangle} - \frac{u_k^*}{\langle u^*, u \rangle} \right) + (1-\lambda) \bar{\partial}_{z,\zeta} \left(\frac{u_k^*}{\langle u^*, u \rangle} \right) + \lambda \bar{\partial}_{z,\zeta} \left(\frac{\hat{u}_k}{\langle \hat{u}, u \rangle} \right)$$

α vérifie alors d'après les estimations (4.2) et la définition de \hat{s}

$$|\alpha| < C |v| \left| \frac{\hat{u}_k}{\langle \hat{u}, u \rangle} - \frac{u_k^*}{\langle u^*, u \rangle} \right| (d(z, \zeta))^{-2n+4} \leq C' (d(z, \zeta))^{-2n+2}$$

pour $\zeta \in U$ et $z \in V$ compact de D .

De même en utilisant l'expression de $(\bar{\partial}_{z,\zeta} + d_\lambda) \bar{\Omega}(\varphi^\nu, s^*, \hat{s}, s)$ donnée dans le lemme 4.2 ainsi que la définition de \hat{s} et les estimations (4.2) vérifiées par s^* , on voit que la composante β de $(\bar{\partial}_{z,\zeta} + d_\lambda) \bar{\Omega}(\varphi^\nu, s^*, \hat{s}, s)$ de degré 1 en $d\lambda$ vérifie $|\beta| = 0 (d(z, \zeta))^{-2n+3}$ sur $V \times U$ au voisinage de la diagonale. Par conséquent

$$d_{z,\zeta,\lambda} (f(\zeta) \wedge \bar{\Omega}(\varphi^\nu, s^*, \hat{s}, s)(z, \zeta) \wedge g(z))$$

est un $O(d(z, \zeta))^{-2n+2}$ et comme la mesure de X_ε est un $O(\varepsilon^{2n-1})$, on obtient

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} I_\varepsilon = 0.$$

On peut également déduire du théorème 4.5 le corollaire suivant relatif à la résolution du $\bar{\partial}$.

COROLLAIRE 4.6. — *Sous les hypothèses du théorème 4.5, si de plus $s^*(z, \zeta)$ dépend holomorphiquement de $z \in D$ et si $dK=0$, pour toute (p, q) -forme différentielle f continue sur \bar{D} telle que $\bar{\partial}f=0$ sur D , $0 \leq p \leq n$, $1 \leq q \leq n$,*

$$g(z) = (-1)^{p+q} \left(\int_{\zeta \in D} f(\zeta) \wedge K_{q-1}^p(z, \zeta) \right)$$

est une solution continue de $\bar{\partial}g=f$ dans D .

Remarque 3. — Pour obtenir un noyau K vérifiant $dK=0$, il suffit de prendre $K = \bar{\Omega}(\varphi^\nu, s^*, s)$ dans un cas où la métrique θ peut-être choisie telle que $c(\tilde{T}(M \times M)) = 0$.

Remarque 4. — Henkin et Leiterer ont construit dans [3] une section s^* vérifiant les hypothèses du corollaire 4.4 lorsque le domaine D est supposé strictement pseudoconvexe de classe \mathcal{C}^2 .

On peut en déduire par des méthodes analogues à celles de Kerzman [4] dans \mathbb{C}^n une section s^* vérifiant les hypothèses du corollaire 4.6 et une solution du $\bar{\partial}$ vérifiant les estimées L^p .

Remarque 5. — Lorsque f est une p -forme différentielle holomorphe le théorème 4.5 nous donne si $dK=0$ la représentation de Cauchy-Leray suivante de f

$$f(z) = (-1)^p \int_{\partial D} f(\zeta) \wedge K_0^p(z, \zeta).$$

5. Noyaux pour les formes différentielles à valeurs dans un fibré vectoriel holomorphe

On considère un fibré vectoriel holomorphe F sur M , et si Π_1 et Π_2 désignent les projections de $M \times M$ sur M , $(z, \zeta) \mapsto z$ et $(z, \zeta) \mapsto \zeta$, on notera $G = \text{Hom}(\Pi_2^* F, \Pi_1^* F)$; c'est un fibré vectoriel holomorphe sur $M \times M$ dont les fibres sont données par $G_{(z, \zeta)} = \text{Hom}(F_z, F_\zeta)$.

Nous allons construire un noyau Λ , c'est-à-dire une forme différentielle \mathcal{C}^1 sur $M \times M \setminus \Delta(M)$ à valeurs dans le fibré vectoriel G , qui nous permettra d'obtenir une formule de Koppelman pour les formes différentielles à valeurs dans le fibré F .

LEMME 5.1. — *Il existe une section holomorphe ψ de G vérifiant*

$$(i) \quad \psi(z, z) = \text{Id}_{F_z} \text{ pour tout } z \in M.$$

Démonstration. — Appliquons le théorème B de Cartan au faisceau $G \otimes \mathcal{I}_\Delta$ dans la suite exacte

$$0 \rightarrow G \otimes \mathcal{I}_\Delta \rightarrow G \rightarrow G|_\Delta \rightarrow 0,$$

où \mathcal{I}_Δ désigne l'idéal de la diagonale. Il en résulte que le morphisme de restriction

$$H^0(M \times M, G) \rightarrow H^0(\Delta, G|_\Delta) \simeq H^0(M, \text{Hom}(F, F))$$

est surjectif, d'où le lemme.

PROPOSITION 5.2. — *La forme différentielle $\Lambda(z, \zeta) = \psi(z, \zeta) \bar{\Omega}(\varphi^v, \hat{s}, s)(z, \zeta)$ est de classe \mathcal{C}^1 sur $M \times M \setminus \Delta(M)$ et à valeur dans G , elle vérifie*

$$\bar{\partial}\Lambda = [\Delta]. \text{Id}_F + P. \psi$$

où $[\Delta]$ est le courant d'intégration sur la diagonale Δ de $M \times M$ et P une forme différentielle localement intégrable sur $M \times M$ proportionnelle à $c(\tilde{T}(M \times M))$. En particulier si $c(\tilde{T}(M \times M)) = 0$ on a $\bar{\partial}\Lambda = [\Delta] \cdot \text{Id}_F$.

Démonstration. — Il suffit d'appliquer le lemme 5.1 et le corollaire 2.3 pour obtenir la proposition.

Le courant d'intégration sur la diagonale $[\Delta]$, apparaît donc ici également comme le résidu de la forme différentielle Λ .

On en déduit alors immédiatement la formule de Koppelman suivante pour les formes différentielles à valeurs dans le fibré vectoriel F .

COROLLAIRE 5.3. — Soient D un domaine relativement compact à bord \mathcal{C}^1 par morceaux de la variété de Stein M et $v \geq 2\chi$. Si f est une (p, q) -forme différentielle continue sur \bar{D} , à valeurs dans F telle que $\bar{\partial}f$ soit aussi continue sur \bar{D} , $0 \leq p, q \leq n$, on a pour $z \in D$

$$f(z) = \left[\int_{\zeta \in \partial D} \Lambda(z, \zeta) \wedge f(\zeta) - \int_{\zeta \in D} \Lambda(z, \zeta) \wedge \bar{\partial}_\zeta f(\zeta) + \bar{\partial}_z \int_{\zeta \in D} \Lambda(z, \zeta) \wedge f(\zeta) + (-1)^{p+q+1} \int_{\zeta \in D} P(z, \zeta) \Psi(z, \zeta) \wedge f(\zeta) \right].$$

Remarque. — Le noyau que nous venons de construire pour les formes différentielles à valeurs dans un fibré vectoriel permet de ramener le cas des (p, q) -formes différentielles à celui des $(0, q)$ -formes différentielles; en effet

$$\mathcal{C}_{p, q}^\infty(M, F) \simeq \mathcal{C}_{0, q}^\infty(M, \Lambda^p T^* M \otimes F).$$

Ceci permet de faire disparaître le terme en courbure P_q^p dans toutes les formules de Koppelman.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] M. ANDERSSON et B. BERNDTSSON, *Henkin-Ramirez Formulas with Weight Factors* (*Ann. de l'Inst. Fourier*, vol. 32, 1982, p. 91-110).
- [2] G. HENKIN et J. LEITERER, *Global Integral Formulas for Solving the $\bar{\partial}$ -Equation on Stein Manifolds* (*Ann. Pol. Math.*, vol. 39, 1981, p. 93-116).
- [3] G. HENKIN et J. LEITERER, *Theory of Functions on Complex Manifolds*, Birkhäuser, Verlag, 1984.
- [4] N. KERZMAN, *Hölder and L^p Estimates for Solution of $\bar{\partial}u=f$ in Strongly Pseudoconvex Domains* (*Comm. Pure Appl. Math.*, vol. 24, 1971, p. 301-379).
- [5] Ch. LAURENT-THIEBAUT, *Formules intégrales de Koppelman sur une variété de Stein* (*Proc. Amer. Math. Soc.*, vol. 90, 1984, p. 221-225).
- [6] Ch. LAURENT-THIEBAUT, *Transformation de Bochner-Martinelli dans une variété de Stein*.
- [7] I. LIEB, *Die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen auf streng pseudokonvexen Gebieten* (*Math. Ann.*, vol. 190, 1971, p. 6-44 et 199, 1972, p. 241-256).

- [8] N. ØVRELID, *Integral Representation Formulas and L^p Estimates for the $\bar{\partial}$ -Equation* (*Math. Scand.*, vol. 29, 1971, p. 137-160).
- [9] B. BERNDTSSON, *A Formula for Interpolation and Division in \mathbb{C}^n* (*Math. Ann.*, vol. 263, 1983, p. 393-418).
- [10] P. GRIFFITHS et J. HARRIS, *Principles of Algebraic Geometry*, Wiley-interscience, New York, 1978.

(Manuscrit reçu le 12 décembre 1986,
révisé le 1^{er} juin 1987).

J.-P. Demailly
Université de Grenoble I,
Institut Fourier, B.P. 74,
L.A. au C.N.R.S. n° 188,
38400 Saint-Martin d'Hères

C. Laurent-Thiebaud
Université Paris-VI,
Analyse complexe et géométrie,
L.A. au C.N.R.S. n° 213,
4, place Jussieu,
75252 Paris Cedex 05.
