NOËL LOHOUÉ

# Estimation des fonctions de Littlewood-Paley-Stein sur les variétés riemanniennes à courbure non positive

*Annales scientifiques de l'É.N.S. 4e série*, tome 20, nº 4 (1987), p. 505-544

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1987_4_20_4_505_0>

*Ann. scient. Éc. Norm. Sup.*,
4[e] série, t. 20, 1987, p. 505 à 544.

# ESTIMATION DES FONCTIONS DE LITTLEWOOD-PALEY-STEIN SUR LES VARIÉTÉS RIEMANNIENNES A COURBURE NON POSITIVE

PAR NOËL LOHOUE

Dans la monographie « Topics in Harmonic Analysis Related to Littlewood Paley Theory » E. M. Stein a introduit une classe de fonctions de Littlewood Paley qui dans le cas des groupes de Lie compacts et de certaines équations différentielles du second ordre permettent de prouver des inégalités $L^p$ pour certains opérateurs intégraux singuliers.

En analyse classique ces fonctions de Littlewood-Paley permettent aussi de prouver des théorèmes de convergence non-tangentielle de type Fatou.

Par exemple si M est un espace symétrique, de type non compact, $P_t(x, y)$ le noyau de Poisson de M; la fonction à laquelle on s'intéresse est définie par la formule :

$$g^2(f)(x)=\int_0^{+\infty} t\left\{\left|\frac{\partial}{\partial t} f(x, t)\right|^2+\|\nabla_x f(x, t)\|^2\right\} dt$$

où $f: M \rightarrow \mathbb{C}$ est une fonction $C^\infty$, à support compact, prolongée à $M \times \mathbb{R}_+$ par

$$f(x, t)=\int_M P_t(x, y) f(y) d\sigma(y)$$

$d\sigma$ étant la mesure riemannienne sur M, $\nabla_x$ le gradient riemannien de $f(x, t)$ en la variable $x$.

Dans l'ouvrage sus-cité, il a été prouvé que pour tout $1<p \leqq 2$ :

(i) $\|g(f)\|_p \simeq \|f\|_p$.

Si $2<p$ il existe une constante $c(p)$ telle que :

(ii) $\|f\|_p \leqq c(p)\|g(f)\|_p$.

P. A. Meyer donne des preuves probabilistes des inégalités ci-dessus dans un cadre un peu plus général dans [17], *voir* aussi N. Varopoulos [20].

Cependant l'équivalence $\|g(f)\|_p \simeq\|f\|_p$ n'a pas encore été établie, même pour les espaces symétriques de rang un.

L'objectif initial de ce travail était d'établir l'équivalence ci-dessus. On prouvera des résultats beaucoup plus profonds qui reflètent la nature géométrique des variétés de

Cartan-Hadamard dont la première valeur propre du laplacien est strictement positive, par exemple les espaces symétriques de type non compact, non euclidien.

La fonction $g$ définie ci-dessus ne rend pas compte de la situation géométrique spécifique des espaces symétriques non euclidiens; en particulier elle ne permet pas de lire la décroissance exponentielle de $P_t(x, x)$ quand $t$ tend vers l'infini.

D'autre part, si l'on veut l'utiliser pour estimer les fonctions d'aire, elle limite singulièrement l'ouverture des cônes qui définissent ces fonctions, car un changement de variable linéaire en $t$ grossit le volume des boules de façon exponentielle.

On va, par conséquent, définir une nouvelle classe de fonctions $g_\alpha$ sur les variétés riemanniennes à courbure non positive dont la première valeur propre du laplacien est strictement positive. On établira les équivalences $\|g_\alpha(f)\|_p \simeq \|f\|_p$ pour certaines valeurs de $p$ qui dépendent de $\alpha$, $g_0(f)$ sera précisément la fonction $g(f)$ de E. M. Stein dans le cas des espaces symétriques de type non compact, non euclidiens. L'équivalence $\|g_0(f)\|_p \simeq \|f\|_p$ ne sera alors qu'un cas particulier des équivalences $\|g_\alpha(f)\|_p \simeq \|f\|_p$.

A la fin de l'article, on utilisera ces inégalités pour estimer la fonction S de Lusin quand $p \geqq 2$.

Ce travail a été réalisé pendant le séjour de l'auteur à McGill University de Montréal et une visite à Cornell University.

L'auteur tient particulièrement à remercier le cher ami C. S. Herz; grâce à lui le séjour a été possible, R. Strichartz pour l'accueil qu'il lui a réservé à Cornell, ainsi que S. Drury pour de multiples raisons.

## I. Énoncé du théorème principal

Avant d'énoncer le théorème principal, nous allons fixer quelques notations.

NOTATIONS. — M est une variété de Cartan-Hadamard, c'est-à-dire simplement connexe à courbure non positive, complète. On note comme d'habitude $d\sigma$ la mesure induite par la structure riemannienne. Si $1 < p < \infty$, on note, pour toute fonction $f : M \to \mathbb{C}$, mesurable,

$$\|f\|_p^p = \int_M |f(x)|^p \, d\sigma(x)$$

$$\|f\|_\infty = \operatorname*{ess\,Sup}_{x \in M} |f(x)|$$

$L^p(M)$ est le complété de l'espace $\mathscr{D}(M)$ des fonctions $C^\infty$ à support compact pour la norme $\| \quad \|_p$ si $1 \leqq p < \infty$; $L^\infty$ est l'espace classique pour la norme $\| \quad \|_\infty$; si $1 \leqq p < \infty$, on note $p'$ l'exposant conjugué de $p$ $1/p + 1/p' = 1$.

$\Delta$ désigne le laplacien sur M et $\Delta_0 = -\Delta$, $\nabla$ est l'opérateur gradient qui transforme les fonctions $C^\infty$ en champs de vecteurs.

$\mathscr{P}_t$ désigne la solution fondamentale de l'équation de la chaleur sur M, $P_t$ le noyau de Poisson : c'est le semi-groupe subordonné à $\mathscr{P}_t$ par la formule :

$$P_t(x, y) = \int_0^{+\infty} \mathscr{P}_{\frac{t^2}{4u}}(x, y)\, e^{-u} u^{-1/2}\, du.$$

Par la suite, on suppose que la courbure de M est bornée, ainsi que ses deux premières dérivées covariantes; on suppose aussi que la première valeur propre de $\Delta_0$ est strictement positive et on désignera par $\mu$ la constante positive telle que :

$$\operatorname*{Inf}_{\substack{\| f \|_2 = 1 \\ f \in \mathscr{D}(M)}} (\Delta_0 f, f) = \mu.$$

Soit $x \in M$ et soit $0 < t < \infty$ un nombre réel, on note $B_t(x)$ la boule géodésique de centre $x$ et de rayon $t$, $|B_t(x)|$ le volume riemannien de $B_t(x)$.

On notera aussi $\mathbf{1}_t$ la fonction caractéristique de l'intervalle $[0, t]$ de la droite numérique.

Les expressions que l'on veut étudier sont les suivantes.

Soit $\alpha > 0$ et soit $f : M \to \mathbb{C}$ une fonction $C^\infty$ à support compact, on note :

$$f(x, t) = \int_M P_t(x, y)\, f(y)\, d\sigma(y).$$

$$g_\alpha^2(f)(x) = \int_0^\infty t e^{\alpha t} \left\{ \left| \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) \right|^2 + \| \nabla_x f(x, t) \|^2 \right\} dt$$

$$S_\alpha^2(f)(x) = \int_{\delta(x, y) < \alpha t} t\, |B_t(y)|^{-1} \left\{ \left| \frac{\partial f}{\partial t} \right|^2 (y, t) + \| \nabla_y f(y, t) \|^2 \right\} dt\, d\sigma(y).$$

où $\| \nabla_y f(y, t) \|$ est la norme riemannienne du champ de vecteur $\nabla_y f(y, t)$; $\delta(x, y)$ désigne la distance géodésique de $x$ à $y$.

On peut maintenant énoncer le principal résultat que l'on va prouver.

THÉORÈME I. — *Soit* M *une variété de Cartan-Hadamard, de dimension n. On suppose que :*

(i) *la première valeur propre de* $\Delta_0$ *est minorée par* $\mu > 0$;

(ii) *les deux premières dérivées covariantes du tenseur de courbure sont bornées.*

*Alors on a l'équivalence* $\| g_\alpha(f) \|_p \simeq \| f \|_p$ *dans les cas suivants :*

(*a*) $0 < \alpha < 2\sqrt{\mu}$ et $2 \leqq p < 4\sqrt{\mu}/\alpha$

(*b*) $0 < \alpha < 4\sqrt{\mu}$ et $1 < p < 2$, $p' < 4\sqrt{\mu}/\alpha$;

(*c*) $\alpha = 0$ et $1 < p < \infty$.

Dans le cas des espaces symétriques, on peut améliorer les bornes qui interviennent dans (*a*); les analogues pour l'équation de la chaleur des fonctions $g_\alpha$ sont étudiées aussi à la page (41) de ce travail.

## II. Démonstration du théorème 1

On utilisera successivement plusieurs lemmes dont le premier est le suivant :

LEMME 1. — *Pour tout* $\delta>0$, *il existe* $0<\beta<\delta$, *des points* $P_i \in M$ *tels que les boules géodésiques* $B_\beta(P_i)$ *de centre* $P_i$ *et de rayon* $\beta$ *forment un recouvrement de* M, *de sote que tout point de* M *n'appartienne qu'à* $l$ *boules au plus* ($l$ *arbitraire, dépendant éventuellement de* $\delta$, *mais le même pour tous les points de* M).

Ce lemme est prouvé dans [1].

Il s'ensuite que pour tout $i$ fixé, il existe au plus $l_1$ (indépendant de $i$) boules $B_\beta(P_j)$ qui rencontrent $B_{8\beta}(P_i)$. Soit $f: M \to \mathbb{C}$ une bonne fonction et soient :

$$f_i^{(1)}(x)=\mathbf{1}_{B_\beta(P_i)}(x)\, f(x);\quad f_i^{(2)}(x)=\mathbf{1}_{B_{8\beta}(P_i)}(x)\, f(x)$$

où $\mathbf{1}_{B_\beta(P_i)}$ est la fonction caractéristique de la boule $B_\beta(P_i)$ ; il découle du lemme 1 que pour tout $1\leqslant r<\infty$,

$$\| f \|_r^r \simeq \sum_{i=1}^{\infty} \| f_i^{(1)} \|_r^r \simeq \sum_{i=1}^{\infty} \| f_i^{(2)} \|_r^r.$$

Le signe $\varepsilon_1 \simeq \varepsilon_2$ entre deux expressions $\varepsilon_1$ et $\varepsilon_2$ veut dire qu'il existe une constante $c$ ne dépendant pas de $\varepsilon_1$ et $\varepsilon_2$ telle que :

$$c^{-1}\varepsilon_1<\varepsilon_3<c\,\varepsilon_1.$$

On aura besoin du second énoncé suivant :

LEMME 2. — *Soit* 0 *un point fixé sur* M *et soit* $B_{8\beta}(0)$ *la boule géodésique de centre* 0 *et de rayon* $8\beta$. *On note* $\mathscr{P}_t^B$ *la solution fondamentale de l'équation de la chaleur pour le laplacien dans* $B_{8\beta}(0)$ *avec la condition de Dirichlet au bord. Il existe, pour tout* $x\in B_{2\beta}(0)$, *une mesure* $\gamma_x$ *sur* $\mathbb{R}^+\times\partial B_{4\beta}(0)$ [*où* $\partial B_{4\beta}(0)$ *désigne le bord de* $B_{4\beta}(0)$] *telle que pour tout* $y\in B_{2\beta}(0)$

$$\mathscr{P}_t(x, y)=\mathscr{P}_t^B(x, y)+\int_{[0,\, t\,[\,\times\,\partial B_{4\beta}(0)} \mathscr{P}_{t-s}^B(y, z)\, d\gamma_x(s, z).$$

*De plus pour tout* $\varepsilon>0$ $\sup_{x\in B_{2\beta}(0)} \gamma_x\{[0, \varepsilon[\times\partial B_{4\beta}(0)\}\leqq c(\varepsilon, \beta)$ *où* $c(\varepsilon, \beta)$ *ne dépend que de* $\varepsilon$ *et* $\beta$.

Ce lemme est prouvé dans [2].

On passe maintenant au troisième lemme. On va supposer $\beta$ assez petit mais fixé de telle sorte que le laplacien soit uniformément elliptique sur toute boule de centre $x$ et de rayon $8\beta$, avec des constantes uniformes ne dépendant que de la géométrie de M d'après [7] et que les hypothèses du lemme 1 soient satisfaites.

Soit $\varphi_0: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, une fonction $C^\infty$, paire, à support compact, qui vaut 1 si $|x|\leqq\beta/3$, s'annule ainsi que toutes ses dérivées jusqu'à l'ordre 4 si $|x|\geqq\beta/2$.

On note $K_1$ le noyau défini par la formule :

$$K_1(m_1, m_2) = (n-2)\frac{\partial}{\partial r}\theta(m_1, m_2)\,\theta^{-1}(m_1, m_2)\,\delta^{1-n}(m_1, m_2) \qquad \text{si} \quad \delta(m_1, m_2) \leqq \beta/3$$

$$\begin{aligned} K_1(m_1, m_2) = &\left\{(n-2)\,\varphi_0 \circ \delta(m_1, m_2)\frac{\partial\theta}{\partial r}(m_1, m_2)\,\theta^{-1}(m_1, m_2) - 2\,\varphi_0' \circ \delta(m_1, m_2)\right\} \\ &\times \delta^{1-n}(m_1, m_2) \\ &- \left\{\varphi_0'' \circ \delta(m_1, m_2) + \frac{\partial}{\partial r}\theta(m_1, m_2)\,\theta^{-1}(m_1, m_2)\,\varphi_0' \circ \delta(m_1, m_2)\right\} \\ &\times \delta^{2-n}(m_1, m_2) \qquad \text{si} \quad \beta/3 \leqq \delta(m_1, m_2) \leqq \beta/2. \end{aligned}$$

Ici $\theta$ est donné par la relation :

$$\int_M f(x)\,d\sigma(x) = \int_0^\infty \int_{\Sigma_{n-1}} f(\operatorname{Exp}_x(t\,\omega))\,t^{n-1}\,\theta(x, \operatorname{Exp}_x t\,\omega)\,d\omega\,dt.$$

$\Sigma_{n-1}$ désigne la sphère-unité de $\mathbb{R}^n$ $d\omega$ la mesure uniforme sur $\Sigma_n$ et $\operatorname{Exp}_x$ est l'application exponentielle du plan tangent en $x$ $TM_x$ sur M. On a prouvé dans [14] le lemme suivant :

LEMME 3. — *Soit $f : M \to \mathbb{C}$ une fonction de classe $C^2$ ; pour tout $m \in M$*

$$f(m) = c_n \int_M \frac{\varphi_0 \circ \delta(m, m_1)\,\Delta f(m_1)\,d\sigma(m_1)}{\delta^{n-2}(m, m_1)} + \int_M K_1(m, m_1)\,f(m_1)\,d\sigma(m_1)$$

*$c_n$ est une constante qui ne dépend que de n.*

*De plus il existe une constante $c(\beta)$ telle que :*

$$\int_M |K_1(x, y)| + \|\nabla_x K_1(x, y)\|\,d\sigma(y) \leqq c(\beta)$$

$$\int_M |K_1(x, y)| + \|\nabla_y K_1(x, y)\|\,d\sigma(x) \leqq c(\beta)$$

$$\int_M \frac{\varphi_0 \circ \delta(x, y)}{\delta^{n-2}(x, y)} + \left\|\nabla_x\left(\frac{\varphi_0 \circ \delta(x, y)}{\delta^{n-2}(x, y)}\right)\right\| d\sigma(x) \leqq c(\beta)$$

$$\int_M \left\{\frac{\varphi_0 \circ \delta(x, y)}{\delta^{n-2}(x, y)} + \left\|\nabla_y\left(\frac{\varphi_0 \circ \delta(x, y)}{\delta^{n-2}(x, y)}\right)\right\|\right\}.\,d\sigma(y) \leqq c(\beta).$$

On se propose de prouver que $\|g_\alpha(f)\|_p \simeq \|f\|_p$ si $1 < p < \infty$. Pour cela on utilisera constamment la remarque suivante.

*Remarque.* — Pour prouver l'équivalence $\|g_\alpha(f)\|_p \simeq \|f\|_p$ il suffit de la prouver pour les fonctions $f$ positives.

En effet chacune des trois expressions indexées par $\alpha$, satisfait l'inégalité : $g_\alpha(f_1 + f_2) \leqq c\,[g_\alpha(f_1) + g_\alpha(f_2)]$. On supposera désormais $f \geqq 0$.

On va prouver le :

LEMME 4. — *Soit :*

$$g_\alpha^{(1)}(f)(x)=\left\{\int_1^\infty e^{\alpha t}t\left\{\left|\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{P}_t f\right|^2(x)+\|\nabla_x(\mathrm{P}_t f)(x)\|^2\right\}dt\right\}^{1/2}.$$

*Alors si* $p<4\sqrt{\mu}/\alpha$, $p\geqq 2$, *il existe une constante* $c(\alpha, p)$ *telle que*

$$\|g_\alpha^1(f)\|_p\leqq c(\alpha, p)\|f\|_p.$$

*Preuve du lemme.* — On pose $\mu=\mu_0^2$.

Soit $\mathrm{B}_1$ la boule dans $\mathrm{M}\times\mathbb{R}_+$ (pour la métrique produit) centrée en $(x, t)$ de rayon $\beta$; on choisit ce nombre assez petit de telle sorte que les conclusions des lemmes précédents où $\beta$ intervient soient satisfaites.

Puisque $f\geqq 0$, que $(\partial^2/\partial t^2)+\Delta$ est uniformément elliptique sur $\mathrm{B}_1$ avec des constantes d'ellipticité contrôlables en termes de la courbure de M et de ses deux premières dérivées covariantes et que $\mathrm{P}_t f(x)=f(x, t)$ est harmonique sur $\mathrm{B}_1$ pour l'opérateur $(\partial^2/\partial t^2)+\Delta$, d'après l'inégalité de Harnack, il existe $c(\beta)>0$ ne dépendant que des invariants ci-dessus tels que pour tout $(y, s)\in\bar{\mathrm{B}}_1$

$$\mathrm{P}_s f(y)\leqq c(\beta)\mathrm{P}_t f(x).$$

Par ailleurs, si

$$(y, s)\in\mathrm{B}_1,\ \mathrm{P}_s f(y)=\int_{\partial\mathrm{B}_1}\mathrm{H}(y, s;\ z, u)\,\mathrm{P}_u f(z)\,d\sigma(z)\,du$$

où H est un noyau tel que :

$$\sup_{\delta(y, s;\, z, u)\geqq\beta/2}\left\{\left|\frac{\partial}{\partial s}\mathrm{H}(y, s;\ z, u)\right|+\|\nabla_y\mathrm{H}(y, s;\ z, u)\|\right\}\leqq\mathrm{C}(\beta)$$

$\mathrm{C}(\beta)$ étant une constante qui ne dépend que de $\beta$.

Il s'ensuit que :

$$\left|\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{P}_t f(x)\right|^2+\|\nabla_x\mathrm{P}_t f(x)\|^2\leqq\mathrm{C}\left[\int_{\partial\mathrm{B}_1}\mathrm{P}_u f(z)\,d\sigma(z)\right]^2\leqq\mathrm{C}[\mathrm{P}_t f(x)]^2.$$

Alors :

$$\left(\int_\mathrm{M}[g_\alpha^{(1)}f(x)]^p\,d\sigma(x)\right)^{2/p}\leqq\mathrm{C}\left(\int_\mathrm{M}\left[\int_1^\infty te^{\alpha t}[\mathrm{P}_t f(x)]^2\,dt\right]^{p/2}d\sigma(x)\right)^{2/p}.$$

D'après l'inégalité de Minskovski, si $p\geqq 2$

$$\left[\int_\mathrm{M}\left[\int_1^\infty te^{\alpha t}[\mathrm{P}_t f(x)]^2\,dt\right]^{p/2}d\sigma(x)\right]^{2/p}\leqq\int_1^\infty te^{\alpha t}\left[\int_\mathrm{M}[\mathrm{P}_t f(x)]^p\,d\sigma(x)\right]^{2/p}dt.$$

Mais la norme de $P_t$ opérant sur $L^2(M)$ vaut $e^{-\mu_0 t}$ où $\mu_0^2$ est, rappelons-le, la première valeur propre de $\Delta_0$; comme celle de $P_t$ opérant sur $L^\infty$ est exactement un, d'après l'inégalité de convexité de Riesz, la norme de $P_t$ opérant sur $L^p(M)$ ne dépasse pas $e^{-2\mu_0 t/p}$. Alors :

$$\int_M |P_t f(x)|^p d\sigma(x) \leqq C e^{-2\mu_0 t} \| f \|_p^p$$

et

$$\int_1^\infty te^{\alpha t}\left[\int_M |P_t f(x)|^p d\sigma(x)\right]^{2/p} dt \leqq C \| f \|_p^2 \int_1^\infty te^{\alpha t} e^{-4\mu_0/pt} dt \leqq C \| f \|_p^2 \quad \text{si} \quad \alpha < \frac{4\mu_0}{p},$$

ce qui revient à dire que $p\alpha < 4\mu_0$.

Ceci prouve le lemme.

*Remarques.* — Si M est un espace symétrique de type non compact, non euclidien, l'estimation du lemme précédent n'est pas la meilleure possible.

Dans ce cas on a le résultat suivant :

LEMME 4'. — *Soit* M *un espace symétrique de type non compact, non euclidien. On note* $\rho$ *la demi-somme des racines positives associées à une décomposition d'Iwasawa du groupe semi-simple correspondant.*

*Alors*

$$\| g_\alpha^{(1)}(f) \|_p \leqq C \| f \|_p \quad \text{si} \quad p < \frac{2}{\|\alpha\|^2}[\|\rho\|^2 + \|\rho\|\sqrt{\|\rho\|^2 - \alpha^2}].$$

*Preuve du lemme* 4'. — En effet, on sait d'après [12] que la norme de $\mathscr{P}_t$ opérant sur $L^p(M)$ vaut exactement $e^{-(4\|\rho\|^2/pp')t}$. Alors la norme de $P_t$ opérant sur $L^p(M)$ est :

$$\int_0^{+\infty} e^{-4\|\rho\|^2 t^2/4upp'} e^{-u} u^{-1/2} du = \int_0^\infty e^{-\|\rho\|^2 t^2/upp'} e^{-u} u^{-1/2} du \leqq C t^{1/2} e^{-\frac{2\|\rho\| t}{\sqrt{pp'}}}.$$

Si l'on reprend les arguments du lemme précédent, il suffit que :

$$\alpha^2 < \frac{4\|\rho\|^2}{pp'}.$$

Il revient au même de dire que $p^2\alpha^2 - 4\|\rho\|^2 p + 4\|\rho\|^2 < 0$; le trinôme de droite a deux racines (puisque $|\alpha| < \|\rho\|$) qui valent

$$p_1 = \frac{4\|\rho\|^2 \pm (\sqrt{\|\rho\|^2 - \alpha^2})4\|\rho\|}{2\alpha^2}.$$

Il faut donc que

$$2 \leqq p < \frac{2\|\rho\|^2}{\alpha^2} + \frac{2\|\rho\|}{\alpha^2}\sqrt{\|\rho\|^2 - \alpha^2} = p_1(\alpha).$$

Car

$$\frac{4\|\rho\|}{\alpha}<p_1.$$

Ceci termine la preuve du lemme 4′. Ce lemme donne une amélioration du théorème 1.

On va maintenant énoncer le lemme 5.

LEMME 5. — *Soit* $\varphi_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *une fonction paire,* $C^\infty$, *qui vaut* 1 *si* $|x| \leqq \beta^4/3$ *et s'annule pour* $|x \geqq \beta^4/2$. *On pose* $\varphi(x, y) = \varphi_1 \circ \delta^8(x, y)$, $\psi(x, y) = 1 - \varphi(x, y)$ *et*

$$h_1^2(x) = \int_0^1 t \left| \frac{\partial}{\partial t} \int_M P_t(x, y)\, \psi(x, y) f(y)\, d\sigma(y) \right|^2 dt + \int_0^1 t \left\| \nabla_x \int_M P_t(x, y)\, \psi(x, y) f(y)\, d\sigma(y) \right\|^2 dt.$$

*Alors : pour tout* $1 < p < \infty$, *il existe une constante* $c_p$ *telle que :*

$$\|h_1\|_p \leqq c_p \|f\|_p.$$

*Preuve du lemme.* — (A) On pose :

$$(\mathrm{A}_1) \quad \mathrm{L}^2(x) = \int_0^1 t \left| \frac{\partial}{\partial t} \int_M \mathrm{P}_t(x, y)\, \psi(x, y) f(y)\, d\sigma(y) \right|^2 dt + \int_0^1 t \left\| \nabla_x \int_M P_t(x, y)\, \psi(x, y) f(y)\, d\sigma(y) \right\|^2 dt.$$

Par définition $\mathrm{L}^2$ vaut :

$$\mathrm{L}^2(x) = \int_0^1 t \left| \frac{\partial}{\partial t} \int_M \int_0^\infty \mathscr{P}_{\frac{t^2}{4u}}(x, y)\, \psi(x, y) f(y)\, d\sigma(y)\, e^{-u} u^{-1/2}\, du \right|^2 dt + \int_0^1 t \left\| \nabla_x \int_M \int_0^{+\infty} \mathscr{P}_{\frac{t^2}{4u}}(x, y)\, \psi(x, y) f(y)\, d\sigma(y)\, e^{-u} u^{-1/2}\, du \right\|^2 dt.$$

Soit :

$$\mathrm{L}_1(x, t) = \int_M \int_0^{t^2/4} \mathscr{P}_{\frac{t^2}{4u}}(x, y)\, \psi(x, y) f(y)\, d\sigma(y)\, e^{-u} u^{-1/2}\, du.$$

Le changement de variable $u = t^2 v/4$ transforme $\mathrm{L}_1(x, t)$ en :

$$\mathrm{L}_1(x, t) = \frac{t}{2} \int_M \int_0^1 \mathscr{P}_{1/v}(x, y)\, e^{-\frac{t^2 v}{4}}\, \psi(x, y) f(y)\, d\sigma(y)\, v^{-1/2}\, dv = \frac{t}{2} \int_M \int_1^\infty \mathscr{P}_s(x, y)\, e^{-t^2/4s} s^{-3/2} f(y)\, \psi(x, y)\, d\sigma(y)\, ds.$$

Soit

$$K_0(x, y) = \frac{\varphi_0 \circ \delta(x, y)}{\delta^{n-2}(x, y)} C_n$$

alors d'après le lemme 3 on a :

$$\mathscr{P}_s(x, y)\psi(x, y) = \int_M K_0(x, z)\Delta_z \mathscr{P}_s(z, y)\, d\sigma(z)\psi(x, y) + \int_M K_1(x, z)\mathscr{P}_s(z, y)\, d\sigma(z)\psi(x, y).$$

et :

$$\begin{aligned} L_1(x, t) &= \frac{t}{2}\int_M \int_1^\infty \int_M K_0(x, z)\frac{\partial \mathscr{P}_s}{\partial s}(z, y)\psi(x, y) f(y) e^{-t^2/4s} s^{-3/2}\, d\sigma(z)\, d\sigma(y)\, ds \\ &+ \frac{t}{2}\int_M \int_M \int_1^\infty K_1(x, z)\mathscr{P}_s(z, y)\mathscr{P}_s(z, y)\psi(x, y) f(y) e^{-t^2/4s} s^{-3/2}\, d\sigma(z)\, d\sigma(y)\, ds \\ &= L_{11}(x, t) + L_{12}(x, t) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} L_{11}(x, t) = t^{-1} L_{11}(x, t) - \frac{t^2}{4}\int_M \int_M \int_1^\infty K_0(x, z)\frac{\partial \mathscr{P}_s}{\partial s}(z, y)\psi(x, y) f(y) \times e^{-t^2/4s} s^{-5/2}\, ds\, d\sigma(z)\, d\sigma(y).$$

$$\frac{\partial}{\partial t} L_{1,\,2}(x, t) = t^{-1} L_{1,\,2}(x, t) - \frac{t^2}{4}\int_1^\infty \int_M \int_M K_1(x, z)\mathscr{P}_s(z, y)\psi(x, y) f(y) \times e^{-t^2/4s} s^{-5/2}\, d\sigma(y)\, d\sigma(z)\, ds$$

$$\begin{aligned} \nabla_x L_1(x, t) &= \frac{t}{2}\int_M \int_M \int_1^\infty \nabla_x K_0(x, z)\frac{\partial \mathscr{P}_s}{\partial s}(z, y)\psi(x, y) f(y) \times e^{-t^2/4s} s^{-3/2}\, d\sigma(y)\, d\sigma(z)\, ds \\ &+ \frac{t}{2}\int_M \int_M \int_1^\infty K_0(x, z)\frac{\partial \mathscr{P}_s}{\partial s}(z, y)\nabla_x \psi(x, y) f(y) \times e^{-t^2/4s} s^{-3/2}\, d\sigma(y)\, d\sigma(z)\, ds \\ &+ \frac{t}{2}\int_M \int_M \int_1^\infty \nabla_x K_1(x, z)\mathscr{P}_s(z, y)\psi(x, y) f(y) \times e^{t^2/4s} s^{-3/2}\, d\sigma(y)\, d\sigma(z)\, ds \\ &+ \frac{1}{2}\int_M \int_M \int_1^\infty K_1(x, z)\mathscr{P}_s(z, y)\nabla_x \psi(x, y) f(y) e^{-t^2/4s} s^{-3/2}\, d\sigma(y)\, d\sigma(z)\, ds. \end{aligned}$$

Mais :

$$(1)\quad \left\|\frac{t}{2}\int_{\mathrm{M}}\int_{\mathrm{M}}\int_{1}^{\infty}\nabla_x \mathrm{K}_0(x, z)\frac{\partial \mathscr{P}_s}{\partial s}(z, y)\,\psi(x, y)\,e^{-t^2/4s}f(y)\,s^{-3/2}\,d\sigma(y)\,d\sigma(z)\,ds\right\|$$

$$\leqq \frac{t}{2}\int_{\mathrm{M}}\int_{\mathrm{M}}\|\nabla_x \mathrm{K}_0(x, z)\|\,|f(y)|\,\psi(x, y)\left|\int_{1}^{\infty}\frac{\partial \mathscr{P}_s}{\partial s}(y, z)\right.$$
$$\left.\times e^{-t^2/4s}s^{-3/2}\,ds\right|d\sigma(y)\,d\sigma(z)$$

$$\leqq \frac{t}{2}\int_{\mathrm{M}}\int_{\mathrm{M}}\|\nabla_x \mathrm{K}_0(x, z)\|\,\psi(x, y)\,\mathscr{P}_1(z, y)\,|f(y)|\,d\sigma(y)\,d\sigma(z)$$
$$+\frac{t^3}{8}\int_{\mathrm{M}}\int_{\mathrm{M}}\|\nabla_x \mathrm{K}_0(x, z)\|\,\psi(x, y)\,|f(y)\int_{1}^{\infty}\mathscr{P}_s(z, y)$$
$$\times e^{-t^2/4s}s^{-7/2}\,ds\,|\,d\sigma(y)\,d\sigma(z)$$
$$+\frac{3t}{4}\int_{\mathrm{M}}\int_{\mathrm{M}}\|\nabla_x \mathrm{K}_0(x, z)\|\,\psi(x, y)\,|f(y)|\int_{1}^{\infty}\mathscr{P}_s(z, y)$$
$$\times e^{-t^2/4s}s^{-5/2}\,ds\,d\sigma(y)\,d\sigma(z).$$

Le noyau :

$$\left|\frac{t}{2}\mathscr{P}_1(z, y)+\frac{t^3}{8}\int_{1}^{\infty}\mathscr{P}_s(z, y)\,e^{-t^2/4s}s^{-7/2}\,ds+\frac{3t}{4}\int_{1}^{\infty}\mathscr{P}_s(z, y)\,e^{-t^2/4s}s^{-5/2}\,ds\right|$$
$$\leqq \mathrm{C}\left(\mathscr{P}_1(z, y)+\int_{1}^{\infty}s^{-3/2}\,\mathscr{P}_s(z, y)\,ds\right)=c\,[\mathscr{P}_1(z, y)+\mathrm{R}(z, y)]=\mathrm{K}_2(z, y)$$

où $\mathrm{R}(x, y)=\displaystyle\int_{1}^{+\infty}\mathscr{P}_s(x, y)\,s^{-3/2}\,ds$

Mais puisque R est le noyau d'un opérateur borné sur $\mathrm{L}^p(\mathrm{M})$ si $1\leqq p\leqq\infty$, $\mathrm{K}_2$ est le noyau d'un opérateur borné sur $\mathrm{L}^p(\mathrm{M})$. Alors l'expression à estimer ne dépasse pas :

$$\int_{\mathrm{M}}\left(\int_{\mathrm{M}}\|\nabla_x \mathrm{K}_0(x, z)\|\,\mathrm{K}_2(z, y)\,d\sigma(z)\right)|f(y)\,d\sigma(y)=\int_{\mathrm{M}}K_3\,K_2(x, y)\,|f(y)|\,d\sigma(y).$$

D'après les propriétés du noyau $\mathrm{K}_3$ établies au lemme 3, c'est le noyau d'un opérateur borné sur tous les $\mathrm{L}^p$ $1\leqq p\leqq\infty$.

(2) La démarche ci-dessus conduit à la conclusion :

$$\left\|\frac{t}{2}\int_{\mathrm{M}}\int_{\mathrm{M}}\int_{1}^{\infty}\mathrm{K}_0(x, z)\frac{\partial \mathscr{P}_s(z, y)}{\partial s}\nabla_x\psi(x, y)f(y)\,e^{t^2/4s}s^{-3/2}\,d\sigma(y)\,d\sigma(z)\,ds\right\|$$
$$\leqq\int_{\mathrm{M}}K_0\circ K_2(x, y)\,|f|(y)\,d\sigma(y).$$

$$(3)\quad \frac{t}{2}\left\|\int_{\mathrm{M}}\int_{\mathrm{M}}\int_{1}^{\infty}\nabla_x \mathrm{K}_1(x, z)\,\mathscr{P}_s(z, y)\,f(y)\,e^{-t^2/4s}s^{-3/2}\,d\sigma(y)\,d\sigma(z)\,ds\right\|$$

$$\leqq C\int_M\int_M K_4(x, z) K_2(z, y)|f(y)|\,d\sigma(y)\,d\sigma(z).$$

$K_4$ provient du lemme 3.

(4) $$\left\|\frac{t}{2}\int_M\int_M\int_1^\infty K_1(x, z)\mathscr{P}_s(z, y)\nabla_x\psi(x, y) f(y) e^{-t^2/4s} s^{-3/2}\,d\sigma(y)\,d\sigma(z)\,ds\right\|$$

$$\leqq\int_M K_1\circ K_5(x, y)|f|(y)\,d\sigma(y).$$

Le noyau $K_5$ est un bon noyau d'après le choix de $\psi$; les étapes 1, 2, 3 et 4 montrent que si $t\leqq 1$

$$\|\nabla_x L_{11}(x, t)\|\leqq\int_M K^0(x, y)|f(y)|\,d\sigma(y)$$

où $K^0$ est le noyau d'un opérateur borné sur $L^p(M)$ si $1\leqq p\leqq\infty$.

Des estimations analogues montrent que :

$$\left|\frac{\partial}{\partial t}L_{11}(x, t)\right|\leqq\int_M K^0(x, y)|f(y)|\,d\sigma(y)$$

$$\left|\frac{\partial}{\partial t}L_{1,\,2}(x, t)\right|\leqq\int_M K^0(x, y)|f(y)|\,d\sigma(y)$$

$$\|\nabla_x L_{1,\,2}(x, t)\|\leqq\int_M K^0(x, y)|f(y)|\,d\sigma(y).$$

Alors :

$$\left|\frac{\partial}{\partial t}L_1(x, t)\right|^2+\|\nabla_x L_1(x, t)\|^2\leqq\left[\int_M K^0(x, y)|f|(y)\,d\sigma(y)\right]^2$$

et

$$\left\|\left(\int_0^1 t\left|\frac{\partial}{\partial t}L_1(x, t)\right|^2+\|\nabla_x L_1(x, t)\|^2\,dt\right)^{1/2}\right\|_p\leqq c\|f\|_p.$$

($A_2$) Soit :

$$L_2(x, t)=\int_M\int_{t^2/4}^\infty\mathscr{P}_{t^2/4u}(x, y)\,\psi(x, y) f(y) e^{-u} u^{-1/2}\,du\,d\sigma(y).$$

Le changement de variable $u=t^2/4v$ donne :

$$L_2(x, t)=\frac{t}{2}\int_M\int_1^\infty\frac{e^{-\frac{t^2}{4u}}}{\sqrt{u}}\mathscr{P}_{1/u}(x, y)\,\psi(x, y) f(y)\,d\sigma(y)\,du$$

$$= \frac{t}{2} \int_{M} \int_{0}^{1} e^{-t^2/4s} \mathscr{P}_s(x, y) \psi(x, y) f(y) \frac{ds}{s^{3/2}} d\sigma(y)$$

(1) $$\frac{\partial L_2}{\partial t}(x, t) = \frac{1}{2} \int_{M} \int_{0}^{1} e^{-t^2/4s} \mathscr{P}_s(x, y) \psi(x, y) f(y) d\sigma(y) \frac{ds}{s^{3/2}}$$

$$+ \frac{t^3}{8} \int_{M} \int_{0}^{1} e^{-t^2/4s} \mathscr{P}_s(x, y) \psi(x, y) f(y) d\sigma(y) \frac{ds}{s^{7/2}}.$$

Mais puisque $\delta(x, y) \geqq \beta^2/4$ dans l'intégrale ci-dessus, on sait, d'après [5] que $\mathscr{P}_s(x, y) \leqq \frac{c}{s^{n/2}} e^{-\delta^2(x, y)/4s}$ et si $s < 1$, cette quantité ne dépasse pas

$$\mathscr{P}_s(x, y) \leqq c s^4 e^{-\delta^2(x, y)/8}.$$

Alors :

$$\left| \frac{\partial L_2}{\partial t}(x, t) \right| \leqq C \int_{M} e^{-\delta^2(x, y)/8} |f(y)| d\sigma(y) = \int_{M} K_6(x, y) |f|(y) d\sigma(y)$$

où $K_6$ est le noyau d'un opérateur borné sur tous les $L^p(M)$ (la courbure de M étant bornée), d'après les théorèmes de comparaison (*voir* [3]); en effet :

$$(\bigstar) \int_{M} K_6(x, y) d\sigma(y) + \int_{M} K_6(x, y) d\sigma(x) \leqq C$$

où C est une constante absolue. Comme il est élémentaire de prouver qu'un noyau qui satisfait ($\bigstar$) est borné sur tous les $L^p(M)$ on voit qu'il en est ainsi de $K_6$.

(2) Par ailleurs :

$$\| \nabla_x L_2(x, t) \| \leqq \frac{t}{2} \left\| \int_{M} \int_{0}^{1} e^{-t^2/4s} \nabla_x \mathscr{P}_s(x, y) \psi(x, y) f(y) d\sigma(y) \frac{ds}{s^{3/2}} \right\|$$

$$+ \frac{t}{2} \left\| \int_{M} \int_{0}^{1} e^{-t^2/4s} \mathscr{P}_s(x, y) \nabla_x \psi(x, y) f(y) d\sigma(y) \frac{ds}{s^{3/2}} \right\|.$$

Puisque $\| \nabla_x \mathscr{P}_s(x, y) \| \leqq C e^{-\delta^2(x, y)/8}$ dès que $0 < s < 1$ et $\delta(x, y) \geqq \beta^2/4$ d'après [5], que

$$\| \nabla_x \psi(x, y) \| \leqq C 1_\beta \circ \delta(x, y).$$

On voit immédiatement que :

$$\| \nabla_x L_2(x, t) \| \leqq \int_{M} K_7(x, y) |f(y)| d\sigma(y)$$

où $K_7(x, y)$ est le noyau d'un opérateur borné sur tous les $L^p(M)$.

($A_3$) $A_1$ et $A_2$ montrent alors que :

$$h_1^2(x)=\int_0^1 t\left|\frac{\partial L_1}{\partial t}(x, t)+\frac{\partial L_2}{\partial t}(x, t)\right|^2 dt+\int_0^1 t(\|\nabla_x L_1(x, t)+\nabla_x L_2(x, t)\|)^2\, dt$$

$$\leqq C\int_0^1\left[\int_M K^{(2)}(x, y)\,|f|(y)\,d\sigma(y)\right]^2 dt=[K^{(2)}|f|(x)]^2$$

où $K^{(2)}$ est le noyau d'un opérateur borné sur $L^p(M)$ si $1\leqq p\leqq\infty$; il s'en suit que :

$$\int_M h_1^p(x)\,d\sigma(x)\leqq C\,\|f\|_p^p.$$

Ce qui termine la preuve du lemme.

On va maintenant énoncer le lemme 6 qui constitue la dernière étape pour prouver le résultat énoncé au début du mémoire.

LEMME 6. — *Pour tout $1<p<\infty$, il existe une constante $c(p)$ telle que la fonction $h_2$ définie ci-dessous satisfasse l'estimée :* $\|h_2\|_p\leqq C(p)\,\|f\|_p$

$$h_2^2(x)=\int_0^1 t\left|\frac{\partial}{\partial t}\int_M P_t(x, y)\,\varphi(x, y)\,f(y)\,d\sigma(y)\right|^2 dt$$

$$+\int_0^1 t\left\|\nabla_x\int_M P_t(x, y)\,\varphi(x, y)\,f(y)\,d\sigma(y)\right\|^2 dt.$$

*Preuve du lemme.* — ($B_1$) Pour étudier $h_2$ on va la décomposer en plusieurs morceaux. Pour cela on pose :

$$Q_1(x, t)=\int_M P_t(x, y)\,\varphi(x, y)\,f(y)\,d\sigma(y)$$

$$=\int_M\left(\int_0^{+\infty}\frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}\mathscr{P}_{t^2/4u}(x, y)\,du\right)\varphi(x, y)\,f(y)\,d\sigma(y)$$

$$=\frac{t}{2}\int_M\left(\int_0^{+\infty}e^{-t^2 v/4}\,\mathscr{P}_{1/v}(x, y)\frac{dv}{\sqrt{v}}\right)\varphi(x, y)\,f(y)\,d\sigma(y).$$

$\partial Q_1/\partial t$ se majore facilement à partir des résultats connus. En effet considérons un recouvrement de M par des boules de centre $P_i$ qui satisfait les hypothèses du lemme [1] alors :

$$\int_M\left(\int_0^1 t\left|\frac{\partial Q_1(x, t)}{\partial t}\right|^2\right)^{p/2} d\sigma(x)\approx\sum_{i=1}^{\infty}\int_{B_{2\beta}(P_i)}\left[\int_0^1 t\left|\frac{\partial Q_1(x, t)}{\partial t}\right|^2 dt\right]^{p/2} d\sigma(x).$$

Mais :

$$\int_{B_{2\beta}(P_i)}\left[\int_0^1 t\left|\frac{\partial Q_1(x, t)}{\partial t}\right|^2 dt\right]^{p/2} d\sigma(x)$$

$$= \int_{B_{2\beta}(P_i)} \left\{ \int_0^1 t\,dt \left| \frac{\partial}{\partial t} \int_M P_t(x, y)\,\varphi(x, y) f(y)\, d\sigma(y) \right|^2 \right\}^{p/2} d\sigma(x)$$

$$\leqq C \int_{B_{2\beta}(P_i)} \left\{ \int_0^1 t\,dt \left| \frac{\partial}{\partial t} \int_M P_t(x, y)\,\mathbf{1}_{B_{3\beta}(P_i)}(y) f(y)\, d\sigma(y) \right|^2 \right\}^{p/2} d\sigma(x)$$

$$+ C \int_{B_{2\beta}(P_i)} d\sigma(x) \left\{ \int_0^1 t \left| \frac{\partial}{\partial t} \int_M P_t(x, y) \left[ \varphi(x, y)\,\mathbf{1}_{B_{3\beta}(P_i)}(y) \right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left. - \mathbf{1}_{B_{3\beta}(P_i)}(y) \right] f(y)\, d\sigma(y) \right|^2 dt \right\}^{p/2}.$$

Soit $x \in B_{2\beta}(P_i)$ alors,

$$\mathbf{1}_{B_{3\beta}(P_i)}(y) \left[ \varphi(x, y) - \mathbf{1}_{B_{3\beta}(P_i)}(y) \right] \neq 0$$

seulement si

$$\delta(x, y) \geqslant \frac{\beta^2}{3}.$$

Mais par définition :

$$P_t(x, y) = \frac{t}{2} \int_0^{+\infty} e^{-t^2 v/4}\, \mathscr{P}_{1/v}(x, y) \frac{dv}{v^{1/2}}$$

et :

$$\frac{\partial P_t}{\partial t}(x, y) = -\frac{t^2}{4} \int_0^{+\infty} e^{-t^2 v/4}\, \mathscr{P}_{1/v}(x, y)\, v^{1/2}\, dv + \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} e^{-t^2 v/4}\, \mathscr{P}_{1/v}(x, y) \frac{dv}{v^{1/2}}$$

$$= -\frac{t^2}{4} \int_0^{+\infty} e^{-t^2/4u}\, \mathscr{P}_u(x, y) \frac{du}{u^{5/2}} + \int_0^{+\infty} e^{-t^2/4u}\, \mathscr{P}_u(x, y) \frac{du}{u^{3/2}}.$$

D'une part

$$\left| \int_1^{\infty} e^{-t^2/4u}\, \mathscr{P}^u(x, y) \frac{du}{u^\alpha} \right| \leqq c\, R_1(x, y), \text{ si } \alpha\alpha > 1, \text{ où } R_1(x, y)$$

est le noyau d'un opérateur borné sur $L^p(M)$.

Comme $\mathscr{P}_u(x, y) \leqq c\, e^{-\delta^2(x, y)/8u}$, on voit que :

$$\int_0^1 \frac{\mathscr{P}_u(x, y)}{u^\alpha} du \leqq c(\alpha, \beta)\, e^{-\frac{\delta^2(x, y)}{16}} \qquad \text{si} \quad \delta(x, y) \geqq \frac{\beta^2}{4}.$$

il s'ensuit que si

$$x \in B_{2\beta}(P_i), \quad y \in B_{3\beta}(P_i) \qquad \text{et} \qquad \delta(x, y) \geqq \frac{\beta^2}{4}, \qquad 0 < s < 1$$

$$\left|\frac{\partial}{\partial s}\mathrm{P}_s(x, y)\left[\mathbf{1}_{\mathrm{B}_{3\beta}(\mathrm{P}_i)}(y)\,\varphi(x, y)-\mathbf{1}_{\mathrm{B}_{3\beta}(\mathrm{P}_i)}(y)\right]\right.$$
$$c\,e^{-\delta^2(x, y)/16}+\mathrm{R}_1(x, y)=\mathrm{R}_2(x, y).$$

Alors :

$$\mathbf{1}_{\mathrm{B}_{2\beta}(\mathrm{P}_i)}(x)\int_0^1 t\left|\frac{\partial}{\partial t}\int_{\mathrm{M}}\mathrm{P}_t(x, y)\left[\mathbf{1}_{\mathrm{B}_{3\beta}(\mathrm{P}_i)}(y)\,\varphi(x, y)-\mathbf{1}_{\mathrm{B}_{3\beta}(\mathrm{P}_i)}(y)\right]f(y)\,d\sigma(y)\right|^2 dt\leqq c\,\mathbf{1}_{\mathrm{B}_{2\beta}(\mathrm{P}_i)}(x)\left[\int_{\mathrm{M}}\mathrm{R}_2(x, y)(y)\,|f(y)|\,d\sigma(y)\right]^2$$

par conséquent :

$$\int_{\mathrm{B}_{2\beta}(\mathrm{P}_i)}d\sigma(x)\left\{\int_0^1 t\left|\int_{\mathrm{M}}\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{P}_t(x, y)\left[\varphi(x, y)\,\mathbf{1}_{\mathrm{B}_{3\beta}(\mathrm{P}_i)}(y)-\mathbf{1}_{\mathrm{B}_{3\beta}(\mathrm{P}_i)}(y)\right]f(y)\,d\sigma(y)\right|^2 dt\right\}^{p/2}\leqq c\int_{\mathrm{B}_{3\beta}(\mathrm{P}_i)}|f(y)|^p\,d\sigma(y).$$

Dans le décompte final on aura donc

$$\sum_{i=1}^{\infty}\int_{\mathrm{M}}d\sigma(x)\,.\,\mathbf{1}_{\mathrm{B}_{2\beta}(\mathrm{P}_i)}(x)\left\{\int_0^1 t\left|\int_{\mathrm{M}}\frac{\partial\mathrm{P}_t}{\partial t}(x, y)\left[\varphi(x, y)\,\mathbf{1}_{\mathrm{B}_{3\beta}(\mathrm{P}_i)}(y)-\mathbf{1}_{\mathrm{B}_{3\beta}(\mathrm{P}_i)}(y)\right]f(y)\,d\sigma(y)\right|^2 dt\right\}^{p/2}\leqq\sum_{i=1}^{\infty}\|\mathbf{1}_{\mathrm{B}_\beta(\mathrm{P}_i)}f\|_p^p\simeq\|f\|_p^p.$$

Par ailleurs d'après les résultats bien connus, *voir* [18] (ou bien on peut suivre la réduction que nous ferons ci-dessous)

$$\int_{\mathrm{B}_{2\beta}(\mathrm{P}_i)}\left\{\int_0^1 t\left|\frac{\partial}{\partial t}\int_{\mathrm{M}}\mathrm{P}_t(x, y)\,\mathbf{1}_{\mathrm{B}_{3\beta}(\mathrm{P}_i)}(y)\,f(y)\,d\sigma(y)\right|^2 dt\right\}^{p/2}d\sigma(x)$$
$$\leqq\int_{\mathrm{M}}\mathbf{1}_{\mathrm{B}_{3\beta}(\mathrm{P}_i)}(x)\,|f(x)|^p\,d\sigma(x).$$

De telle sorte que dans le décompte final,

$$\sum_{i=1}^{\infty}\int_{\mathrm{B}_{2\beta}(\mathrm{P}_i)}\left\{\int_0^1\left|\frac{\partial}{\partial t}\int_{\mathrm{M}}\mathrm{P}_t(x, y)\,.\,\mathbf{1}_{\mathrm{B}_{3\beta}(\mathrm{P}_i)}(y)\,f(y)\,d\sigma(y)\right|^2 dt\right\}^{p/2}d\sigma(x)$$
$$\leqq c(p)\sum_{i=1}^{\infty}\left(\int_{\mathrm{B}_{3\beta}(\mathrm{P}_i)}|f(y)|^p\,d\sigma(y)\approx\|f\|_p^p\right).$$

Il s'ensuit que

$$\int_{\mathrm{M}}\left[\int_0^1 t\left|\frac{\partial\mathrm{Q}_1}{\partial t}(x, t)\right|^2 dt\right]^{p/2}d\sigma(x)\leqq c\,\|f\|_p^p.$$

On pose :

$$\int_{\mathrm{M}} \mathrm{P}_t(x, y)\,\varphi(x, y)\, f(y)\, d\sigma(y) = \frac{t}{2}\int_{\mathrm{M}} \varphi(x, y)\, f(y) \int_1^{\infty} e^{-t^2 u/4}\, \mathscr{P}_{1/u}(x, y)\frac{du}{u^{1/2}}\, d\sigma(y)$$

$$+\frac{t}{2}\int_{\mathrm{M}} \varphi(x, y)\, f(y) \int_0^{1} e^{-t^2 u/4}\, \mathscr{P}_{1/u}(x, y)\frac{du}{u^{1/2}}\, d\sigma(y).$$

On veut estimer

$$\mathbf{1}_{\beta, \mathrm{P}_i}(x)\frac{t}{2}\nabla_x \int_{\mathrm{M}} \varphi(x, y) \int_1^{+\infty} e^{-t^2 u/4}\, \mathscr{P}_{1/u}(x, y)\, f(y)\, d\sigma(y)\frac{du}{\sqrt{u}}.$$

désormais on convient que $\mathbf{1}_{\beta, \mathrm{P}_i} = \mathbf{1}_{\mathrm{B}_\beta(\mathrm{P}_i)}$.

Si $x$ est dans $\mathrm{B}_\beta(\mathrm{P}_i)$ les $y$ qui interviennent dans l'intégrale ci-dessus doivent appartenir à $\mathrm{B}_{2\beta}(\mathrm{P}_i)$. On va par conséquent considérer la solution fondamentale de l'équation de la chaleur $\mathscr{P}_t^i$ pour le problème de Dirichlet de la boule $\mathrm{B}_{8\beta}(\mathrm{P}_i)$, d'après le lemme 2,

$$\mathscr{P}_t(x, y) = \mathscr{P}_t^i(x, y) + \int_{[0, t[\, \times \partial \mathrm{B}_{4\beta}(\mathrm{P}_i)} \mathscr{P}_{t-s}^i(x, z)\, d\gamma_y(z, s).$$

Alors l'expression à étudier devient :

$$\frac{t}{2}\mathbf{1}_{\beta, \mathrm{P}_i}(x)\nabla_x \int_{\mathrm{M}}\int_1^{\infty} \varphi(x, y)\, f(y)\, \mathscr{P}_{1/u}(x, y)\, e^{-t^2 u/4}\frac{du}{\sqrt{u}}\, d\sigma(y)$$

$$= \frac{t}{2}\mathbf{1}_{\beta, \mathrm{P}_i}(x)\nabla_x \left\{ \int_{\mathrm{M}} \varphi(x, y)\, f(y) \int_1^{\infty} \mathscr{P}_{1/u}^i(x, y)\, e^{-t^2 u/4}\frac{du}{u^{1/2}}\, d\sigma(y) \right\}$$

$$+\frac{1}{2}\mathbf{1}_{\beta, \mathrm{P}_i}(x)\nabla_x \Bigg[ \int_{\mathrm{M}} \varphi(x, y)\, f(y) \Bigg\{ \int_1^{\infty} \frac{e^{-t^2 u/4}}{\sqrt{u}}$$

$$\times \int_{\partial \mathrm{B}_{4\beta}(\mathrm{P}_i) \times [\,0,\, 1/u[} \mathscr{P}_{(1/u)-s}^i(x, z)\, d\gamma_y(z, s)\, du \Bigg\} d\sigma(y) \Bigg].$$

Mais d'après [5]

$$\| \nabla_x \mathscr{P}_{(1/u)-s}^i(x, z) \| \leqq c e^{-\delta^2 (x, z)/(1/u)-s} \left(\frac{1}{u} - s\right)^{-(n-1)/2}.$$

Puisque $\delta(x, z) > \beta$ on voit que :

$$\| \nabla_x \mathscr{P}_{(1/u)-s}^i(x, z) \| \leqq c(\beta).$$

Par ailleurs comme $\| \nabla_x \varphi(x, y) \| \leqq \mathrm{C}$, on a l'estimation suivante :

$$\frac{t}{2}\mathbf{1}_{\beta, \mathrm{P}_i}(x) \| \nabla_x \int_{\mathrm{M}} \varphi(x, y)\, f(y) \int_1^{\infty} e^{-t^2 u/4} u^{-1/2}$$

$$\times \int_{\partial B_{4\beta}(P_i)\times ]0,\,1/u[} \mathscr{P}^i_{(1/u)-s}(x, z)\, d\gamma_y(z, s)\, d\sigma(y)\, du \,\|$$

$$\leqq C\,\mathbf{1}_{\beta, P_i}(x)\left[\int_M [\varphi(x, y)+\mathbf{1}_{2\beta, P_i}\circ\delta(x, y)]\int_1^\infty te^{-t^2u/4}u^{1/2}\,du\,|f(y)|\,d\sigma(y)\right]$$

$$\leqq C\,\mathbf{1}_{\beta, P_i}(x)\int_M |\varphi(x, y)+\mathbf{1}_{3\beta, P_i}\circ\delta(x, y)|\,|f(y)|\,d\sigma(y)=\mathbf{1}_{\beta, P_i}(x)\,K_8\,|f|(x)$$

où $K_8$ est un noyau qui donne lieu à un opérateur borné sur tous les $L^p(M)$.

Dans le décompte final, la contribution de ce terme sera majorée par :

$$\sum_{i=1}^{\infty}\int_{B_{2\beta}(P_i)}\left\{\int_0^1 t\left\|\nabla_x\left\{\int_M \varphi(x, y)\, f(y)\int_1^\infty u^{-1/2}e^{-t^2u/4}\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.\times\int_{\partial B_{4\beta}\times ]0,\,1/u[}\mathscr{P}^i_{(1/u)-s}(x, z)\, d\gamma_y(z, s)\, d\sigma(y)\right\}du\right\|^2 dt\right\}^{p/2} d\sigma(x)$$

$$\leqq c\sum_{i=1}^{\infty}\|\mathbf{1}_{3\beta, P_i}f\|_p^p\simeq\|f\|_p.$$

($B_2$) Il reste l'expression :

$$\frac{t}{2}\mathbf{1}_{\beta, P_i}(x)\,\nabla_x\left\{\int_M \varphi(x, y)\, f(y)\left(\int_1^\infty e^{-t^2u/4}\mathscr{P}^i_{1/u}(x, y)\frac{du}{\sqrt{u}}\right)d\sigma(y)\right\}$$

$$=\mathbf{1}_{\beta, P_i}(x)\int_M \nabla_x\varphi(x, y)\, f(y)\left\{\int_{t^2/4}^\infty e^{-u}\mathscr{P}^i_{t^2/4u}(x, y)\frac{du}{\sqrt{u}}\right\}d\sigma(y)$$

$$+\mathbf{1}_{\beta, P_i}(x)\int_M \varphi(x, y)\left\{\int_{t^2/4}^\infty \nabla_x\mathscr{P}^i_{t^2/4u}(x, y)\frac{du}{\sqrt{u}}\right\}d\sigma(y).$$

Mais puisque $\|\nabla_x\varphi(x, y)\|\leqq c\,\mathbf{1}_\beta\circ\delta(x, y)$ la première expression ne dépasse pas :

$$C\,\mathbf{1}_{\beta, P_i}(x)\int_M \mathbf{1}_\beta\circ\delta(x, y)\,|f|(y)\,P^i_t(x, y)\,d\sigma(y)\qquad \text{où}\quad P^i_t(x, y)=\int_0^\infty e^{-u}\mathscr{P}^i_{t^2/4u}(x, y)\frac{du}{\sqrt{u}}$$

et :

$$\sum_{i=1}^{\infty}\int_M \mathbf{1}_{\beta, P_i}(x)\left\{\int_0^1 t\left\|\int_M \nabla_x\varphi(x, y)\, f(y)\right.\right.$$

$$\left.\left.\times\left\{\int_{t^2/4}^\infty e^{-u}\mathscr{P}^i_{t^2/4u}(x, y)\frac{du}{\sqrt{u}}\right\}d\sigma(y)\right\|^{p/2} d\sigma(x)\leqq c\sum_{i=1}^{\infty}\|\mathbf{1}_{3\beta, P_i}f\|_p^p\simeq\|f\|_p.$$

Car :

$$\int_M \mathbf{1}_{\beta,\,\mathrm{P}_i}(x)\left\{\int_0^1 \left|\int_M \mathbf{1}_\beta \circ \delta(x,\, y)\,\mathrm{P}_t^i(x,\, y)\,|\,f(y)\,d\sigma(y)\right|^2 t\,dt\right\}^{p/2} d\sigma(x)$$

$$\leqq \int_M \mathbf{1}_{\beta,\,\mathrm{P}_i}(x)\left\{\int_0^1 t\int_M \mathrm{P}_t^i(x,\, y)\,\mathbf{1}_{3\beta,\,\mathrm{P}_i}(y)\,|\,f(y)\,|\,d\sigma(y)\right]^2 dy\right\}^{p/2} d\sigma(x)$$

$$\leqq \int_M \mathbf{1}_{\beta,\,\mathrm{P}_i}(x)\left\{\sup_{0<t<1}\int_M \mathrm{P}_t^i(x,\, y)\,\mathbf{1}_{3\beta,\,\mathrm{P}_i}(y)\,|\,f(y)\,|\,d\sigma(y)\right\}^p d\sigma(x) \leqq \mathrm{C}\,\|\,\mathbf{1}_{3\beta,\,\mathrm{P}_i}f\,\|_p^p.$$

d'après le théorème maximal [19].

($\mathrm{B}_3$) Il faut maintenant étudier l'expression :

$$\mathbf{1}_{\beta,\,\mathrm{P}_i}(x)\int_M \varphi(x,\, y)\,f(y)\left(\int_{t^2/4}^{\infty} \nabla_x \mathscr{P}^i_{t^2/4u}(x,\, y)\,e^{-u}\frac{du}{\sqrt{u}}\right)d\sigma(y)$$

$$=\mathbf{1}_{\beta,\,\mathrm{P}_i}(x)\int_M \mathbf{1}_{2\beta,\,\mathrm{P}_i}(y)\,f(y)\int_{t^2/4}^{\infty} \nabla_x \mathscr{P}^i_{t^2/4u}(x,\, y)\,e^{-u}\frac{du}{\sqrt{u}}\,d\sigma(y)$$

$$+\mathbf{1}_{\beta,\,\mathrm{P}_i}(x)\int_M \mathbf{1}_{2\beta,\,\mathrm{P}_i}(y)\,[\varphi(x,\, y)-\mathbf{1}_{2\beta,\,\mathrm{P}_i}(y)]\,f(y)\left\{\int_{t^2/4}^{+\infty} \nabla_x \mathscr{P}^i_{t^2/4u}(x,\, y)\frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}du\right\}d\sigma(y).$$

Mais : $\mathbf{1}_{2\beta,\,\mathrm{P}_i}(y)\,[\varphi(x,\, y)-\mathbf{1}_{2\beta,\,\mathrm{P}_i}(y)]\,\mathbf{1}_{\beta,\,\mathrm{P}_i}(x)$ n'est non nul que si $\delta(x,\, y) \geqq \beta^2/3$.

Puisque $t^2/4u \leqq 1$, $\nabla_x \mathscr{P}^i_{t^2/4u}(x,\, y) \leqq \mathrm{C}$ d'après [5]. Ce qui prouve que :

$$\mathbf{1}_{\beta,\,\mathrm{P}_i}(x)\left\|\int_M \mathbf{1}_{2\beta,\,\mathrm{P}_i}(y)\,[\varphi(x,\, y)-\mathbf{1}_{2\beta,\,\mathrm{P}_i}(y)]\,f(y)\int_{t^2/4}^{+\infty} \nabla_x \mathscr{P}^i_{t^2/4u}(x,\, y)\,e^{-u}\frac{du}{\sqrt{u}}\,d\sigma(y)\right\|$$

$$\leqq \mathrm{C}\,\mathbf{1}_{\beta,\,\mathrm{P}_i}(x)\int_M \mathbf{1}_{3\beta}\circ\delta(x,\, y)\,\mathbf{1}_{2\beta,\,\mathrm{P}_i}(y)\,|\,f(y)\,|\,d\sigma(y).$$

Alors :

$$\sum_{i=1}^{\infty}\int_M d\sigma(x)\,\mathbf{1}_{\beta,\,\mathrm{P}_i}(x)\left\{\int_0^1 t\left\|\int_M \mathbf{1}_{2\beta,\,\mathrm{P}_i}(y)\,[\varphi(x,\, y)-\mathbf{1}_{2\beta,\,\mathrm{P}_i}(y)]\,f(y)\right.\right.$$

$$\left.\left.\times\left\{\int_{t^2/4}^{+\infty} \nabla_x \mathscr{P}^i_{t^2/4u}(x,\, y)\frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}du\right\}d\sigma(y)\right\|^2 dt\right\}^{p/2} \leqq c\sum_{i=1}^{\infty}\|\,\mathbf{1}_{2\beta,\,\mathrm{P}_i}f\,\|_p^p \simeq \|\,f\,\|_p^p.$$

On va examiner le champ de vecteurs :

$$(\mathrm{B}_{31})\quad \mathbf{1}_{\beta,\,\mathrm{P}_i}(x)\int_M \mathbf{1}_{2\beta,\,\mathrm{P}_i}(y)\,f(y)\left(\nabla_x \int_{t^2/4}^{+\infty} \mathscr{P}^i_{t^2/4u}(x,\, y)\frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}du\right)d\sigma(y).$$

On sait, d'après [8], que si $s \leqq 1$

$$\mathscr{P}^i_s(x,\, y)=\theta^{-1/2}(x,\, y)\,e^{-\delta^2(x,\, y)/4s}\,s^{-(n/2)}+\mathrm{H}(s,\, x,\, y)\,e^{-\delta^2(x,\, y)/4s}\,s^{-(n/2)+1}$$

où H est une fonction qui satisfait les inégalités :

$$\|\nabla_x \mathrm{H}\| \leqq c, \quad |\mathrm{H}(s, x, y)| \leqq c \quad \text{si} \quad \delta(x, y) \leqq 1.$$

Alors :

$$(\mathrm{B}_{32}) \quad \nabla_x \mathscr{P}_s^i(x, y) = \nabla_x \theta^{-1/2}(x, y)\, e^{-\delta^2(x, y)/4s} s^{-n/2} + \theta^{-1/2}(x, y)\, \nabla_x e^{-\delta^2(x, y)/4s} s^{-n/2} + \nabla_x \mathrm{H}(s, x, y)\, e^{-\delta^2(x, y)/4s} s^{-(n/2)+1} + \mathrm{H}(s, x, y)\, \nabla_x e^{-\delta^2(x, y)/4s} s^{-(n/2)+1}.$$

Puisque $\|\nabla_x \theta^{-1/2}(x, y)\| \leqq c$ dans le domaine en considération, on voit que :

$$\|[\nabla_x \theta^{-1/2}(x, y) + s\nabla_x \mathrm{H}(s, x, y)]\, e^{-\delta^2(x, y)/4s}\| \leqq c e^{-\delta^2(x, y)/4s}.$$

On remplace $\nabla_x \mathscr{P}^i_{t^2/4u}$ par l'expression $\mathrm{B}_{32}$, dans la formule $\mathrm{B}_{31}$; on trouve :

$$\begin{aligned}
&\mathbf{1}_{\beta, \mathrm{P}_i}(x) \int_{\mathrm{M}} \mathbf{1}_{2\beta, \mathrm{P}_i}(y)\, f(y)\, \nabla_x \int_{t^2/4}^{+\infty} \mathscr{P}^i_{t^2/4u}(x, y) \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}\, du\, d\sigma(y) \\
&= \mathbf{1}_{\beta, \mathrm{P}_i}(x) \int_{\mathrm{M}} f(y)\, \mathbf{1}_{2\beta, \mathrm{P}_i}(y) \left\{ \int_{t^2/4}^{+\infty} \left[ \nabla_x \theta^{-1/2}(x, y) + \frac{t^2}{4u} \nabla_x \mathrm{H}\left(\frac{t^2}{4u}, x, y\right)\right] \right. \\
&\qquad \left. \times e^{-u\delta^2(x, y)/t^2} \frac{(4u)^{n/2}}{t^n} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}\, du \right\} d\sigma(y) \\
&\quad + \mathbf{1}_{\beta, \mathrm{P}_i}(x) \int_{\mathrm{M}} f(y)\, \mathbf{1}_{2\beta, \mathrm{P}_i}(y) \left\{ \int_{t^2/4}^{+\infty} \theta^{-1/2}(x, y)\, \nabla_x \right. \\
&\qquad \left. \times e^{-u\delta^2(x, y)/t^2} \frac{(4u)^{n/2}}{t^n} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}\, du \right\} d\sigma(y) \\
&\quad + \mathbf{1}_{\beta, \mathrm{P}_i}(x) \int_{\mathrm{M}} f(y) . \mathbf{1}_{2\beta, \mathrm{P}_i}(y) \left\{ \int_{t^2/4}^{+\infty} \mathrm{H}\left(\frac{t^2}{4u}, x, y\right) \nabla_x \right. \\
&\qquad \left. \times e^{-u\delta^2(x, y)/t^2} \left(\frac{4u}{t^2}\right)^{+(n/2)-1} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}\, du \right\} d\sigma(y) = \mathrm{I}_1^t(x) + \mathrm{I}_2^t(x) + \mathrm{I}_3^t(x).
\end{aligned}$$

D'après la remarque précédente,

$$\begin{aligned}
\|\mathrm{I}_1^t(x)\| &\leqq \mathrm{C}\, \mathbf{1}_{\beta, \mathrm{P}_i}(x) \int_{\mathrm{M}} \mathbf{1}_{2\beta, \mathrm{P}_i}(y)\, f(y) \\
&\qquad \times \int_{t^2/4}^{+\infty} e^{-u\delta^2(x, y)/t^2} \frac{(4u)^{n/2}}{t^n} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}\, du\, d\sigma(y) \\
&\leqq \mathrm{C}\, \mathbf{1}_{\beta, \mathrm{P}_i}(x) \int_{\mathrm{M}} \mathbf{1}_{2\beta, \mathrm{P}_i}(y)\, f(y) \int_0^{+\infty} e^{-\delta^2(x, y)v}\, v^{(n-1)/2} e^{-t^2 v}\, dv\, d\sigma(y)
\end{aligned}$$

$$\leqq C\,\mathbf{1}_{\beta,\,P_i}(x)\int_M \mathbf{1}_{2\beta,\,P_i}(y)\,f(y)\,t\,(\delta^2(x,\,y)+t^2)^{-(n-1)/2}\,d\sigma(y).$$

Par conséquent :

$$\int_0^1 \| I_1^t(x)\|^2\,tdt \leqq C\,\mathbf{1}_{\beta,\,P_i}(x)\int_0^1 dt\left\{\int_M \mathbf{1}_{2\beta,\,P_i}(y)\,t^{3/2}(\delta^2(x,\,y)+t^2)^{-(n-1)/2}\,f(y)\,d\sigma(y)\right\}^2.$$

Puisque $t \leqq 1$, $\delta(x,\,y) \leqq 3\,\beta$

$$\left(\int_0^1 \| I_1^t(x)\|^2\,tdt\right)^{1/2} \leqq \operatorname*{Sup}_{1\geqq t>0}\left\{\int_M \mathbf{1}_{2\beta,\,P_i}\,f(y)\,t\,(\delta^2(x,\,y)+t^2)^{-(n+1)/2}\,d\sigma(y)\right\}.$$

Le lemme maximal montre encore que

$$\int_M\left(\int_0^1 \| I_1^t(x)\|_1^2\,tdt\right)^{p/2} d\sigma(x) \leqq C\int_M \mathbf{1}_{2\beta,\,P_i}\,|f(y)|^p\,d\sigma(y)$$

$B_{33}$ *Estimation de* $I_3^t$

$$\|\nabla_x e^{-u\delta^2(x,\,y)/t^2}\| = 2\frac{u}{t^2}\,\delta(x,\,y)\,\|\nabla_x \delta(x,\,y)\|\,e^{-u\delta^2(x,\,y)/t^2} \leqq \frac{2u}{t^2}\,\delta(x,\,y)\,e^{-u\delta^2(x,\,y)/t2}.$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned}\| I_3^t(x)\| \leqq C\,\mathbf{1}_{\beta,\,P_i}(x)&\int_M f(y)\,\mathbf{1}_{2\beta,\,P_i}(y)\\ &\times\left\{\int_{t^2/4}^{+\infty} e^{-u\delta^2(x,\,y)/t^2}\,\delta(x,\,y)\left(\frac{u}{t^2}\right)^{n/2}\frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}\,du\right\}d\sigma(y)\\ &\leqq C\,\mathbf{1}_{\beta,\,P_i}(x)\int_M f(y)\,\mathbf{1}_{2\beta,\,P_i}(y)\,t\,\delta(x,\,y)\,(\delta^2(x,\,y)+t^2)^{-(n-1)/2}\,d\sigma(y).\end{aligned}$$

Puisque $\delta(x,\,y) \leqq 3\,\beta$, la contribution de $I_3^t$ dans le résultat final est du même ordre que celle de $I_1^t$.

$B_{34}$ *Estimation de* $I_2^t$. — On sait que

$$\theta^{-1/2}(x,\,y) = 1 + O\,[\delta^2(x,\,y)].$$

Soient

$$I_{2,1}^s(x,\,y) = s^{-n/2}\,\nabla_x e^{-\delta^2(x,\,y)/4s}$$

$$I_{2,2}^s(x,\,y) = O\,(\delta^2(x,\,y))\,\frac{\delta(x,\,y)}{2\,s^{(n+2)/2}}\,e^{-\delta^2(x,\,y)/4s}\,\nabla_x\,\delta(x,\,y)$$

$$s^{-n/2}\,\theta^{-1/2}(x,\,y)\,\nabla_x e^{-\delta^2(x,\,y)/4s} = I_{2,1}^s(x,\,y) - I_{2,2}^s(x,\,y).$$

on voit facilement [si $\delta(x, y) \leqq 3\beta$] que :

$$\| \mathrm{I}^s_{2,2}(x, y) \| \leqq \mathrm{C}\,\delta^3(x, y)\, e^{-\delta^2(x, y)/4s}\, s^{-(n/2)-1}$$

$$\mathrm{I}^t_2(x) = \mathbf{1}_{\beta, \mathrm{P}_i}(x) \int_{\mathrm{M}} f(y)\, \mathbf{1}_{2\beta, \mathrm{P}_i}(y) \left\{ \int_{t^2/4}^{+\infty} \mathrm{I}^{t^2/4u}_{2,1}(x, y) \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}\, du \right\} d\sigma(y)$$
$$- \mathbf{1}_{\beta, \mathrm{P}_i}(x) \int_{\mathrm{M}} f(y)\, \mathbf{1}_{2\beta, \mathrm{P}_i}(y) \left\{ \int_{t^2/4}^{+\infty} \mathrm{I}^{t^2/4u}_{2,2}(x, y) \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}\, du \right\} d\sigma(y).$$

La norme du dernier terme ne dépasse pas :

$$\mathrm{C}\,\mathbf{1}_{\beta, \mathrm{P}_i}(x) \int_{\mathrm{M}} f(y)\, \mathbf{1}_{2\beta, \mathrm{P}_i}(y)\, \delta^3(x, y)\, t\, (\delta^2(x, y) + t^2)^{-(n+3)/2}\, d\sigma(y)$$
$$\leqq \mathrm{C}\,\mathbf{1}_{\beta, \mathrm{P}_i}(x) \int_{\mathrm{M}} f(y)\, \mathbf{1}_{2\beta, \mathrm{P}_i}(y)\, t\, (\delta^2(x, y) + r^2)^{-(n-1)/2}\, d\sigma(y).$$

L'estimation du terme contenant $\mathrm{I}^t_{2,2}$ est donc analogue à celle de $\mathrm{I}^t_l$.

Il reste le terme contenant $\mathrm{I}^t_{2,1}$ que l'on note $\mathrm{I}^t_4$ :

$\mathrm{B}_{341}$ *Estimation de* $\mathrm{I}^t_4$. — On va étudier l'expression :

$$\int_{t^2/4}^{+\infty} \nabla_x e^{-\delta^2(x, y)\, u/t^2} \left( \frac{4u}{t^2} \right)^{n/2} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}\, du = \mathrm{G}(x, y, t).$$

Soit $\{x_k\}_{k=1}^n$ un système de coordonnées exponentielles au point $\mathrm{P}_i$; soient $x = \mathrm{Exp}_{\mathrm{P}_i}(\mathrm{X})$ et $y = \mathrm{Exp}_{\mathrm{P}_i}(\mathrm{Y})$.

On pose : $\| x - y \| = \| \mathrm{X} - \mathrm{Y} \|$ où $\| \quad \|$ désigne la norme du vecteur $\mathrm{X} - \mathrm{Y}$ dans le plan tangent $\mathrm{TM}_{\mathrm{P}_i}$ au point $\mathrm{P}_i$ induite par la métrique.

On remarque que $\delta^2(x, y) = \| x - y \|^2 + O(\| x - y \|^3)$.

Si $O < s < 1$

$$s^{-n/2}\, \nabla_x e^{-\delta^2(x, y)/4s} = -2^{-1}\, \delta(x, y)\, \nabla_x \delta(x, y)\, s^{-(n+2)/2}\, e^{-\delta^2(x, y)/4s}$$
$$= -2^{-1}\, \delta(x, y)\, s^{-(n+2)/2}\, \nabla_x \delta(x, y)\, e^{-\| x - y \|^2/4s}$$
$$-2^{-1}\, \delta(x, y)\, s^{-(n+2)/2}\, \nabla_x \delta(x, y)\, [e^{-\delta^2(x, y)/4s} - e^{-\| x - y \|^2/4s}]$$
$$= -2^{-1/2}\, \delta(x, y)\, s^{-(n+2)/2}\, \nabla_x \delta(x, y)\, e^{-\| x - y \|^2/4s}$$
$$-2^{-1}\, \delta(x, y)\, s^{-(n+2)/2}\, \nabla_x \delta(x, y)\, [e^{-O(\| x - y \|^3)/4s} - 1]\, e^{-\| x - y \|^2/4s}.$$

Comme la courbure de M est non positive $O(\| x - y \|^3)$ est positive ou nulle, et

$$| e^{-O(\| x - y \|^3)/4s} - 1 | \leqq \mathrm{C} \frac{\| x - y \|^3}{4s}$$

on voit que

$$\| \delta(x, y)\, s^{-(n+2)/2}\, \nabla_x \delta(x, y)\, (e^{-O(\| x - y \|^3/4s)} - 1) \| \leqq \mathrm{C}\, \delta^4(x, y)\, s^{-(n+4)/2}.$$

Alors

$$G(x, y, t)=G_1(x, y, t)+G_2(x, y, t)$$

où :

$$G_1(x, y, t)=\int_{t^2/4}^{+\infty} -2^{-1}\delta(x, y)\left(\frac{t^2}{4u}\right)^{-(n+2)/2} \nabla_x \delta(x, y)\, e^{-u\|x-y\|^2/t^2} \frac{e^{-u}\, du}{\sqrt{u}}$$

$$G_2(x, y, t)=\int_{t^2/4}^{+\infty} -2^{-1}\delta(x, y)\left(\frac{t^2}{4u}\right)^{-(n+2)/2} \nabla_x \delta(x, y)$$

$$\times\{e^{-O(\|x-y\|^3)u/t^2}-1\}\, e^{-u\|x-y\|^2/t^2} \frac{e^{-u}\, du}{\sqrt{u}}$$

et

$$I_4^t(x)=\mathbf{1}_{\beta, P_i}(x)\int_M \mathbf{1}_{2\beta, P_i}(y) f(y)\, G_1(x, y, t)\, d\sigma(y)$$

$$+\mathbf{1}_{\beta, P_i}(x)\int_M \mathbf{1}_{2\beta, P_i}(y) f(y)\, G_2(x, y, t)\, d\sigma(y).$$

La remarque précédente montre que

$$\mathbf{1}_{\beta, P_i}(x)\left\|\int_M \mathbf{1}_{2\beta, P_i}(y) f(y)\, G_2(x, y, t)\, d\sigma(y)\right\| \leqq C\, \mathbf{1}_{\beta, P_i}(x)\int_M \delta^4(x, y) f(y)$$

$$\times\left(\int_{t^2/4}^{+\infty}\left(\frac{t^2}{4u}\right)^{-(n+4)/2} e^{-u\|x-y\|^2/t^2}\, e^{-u}\frac{du}{\sqrt{u}}\right)\mathbf{1}_{2\beta, P_i}(y)\, d\sigma(y)$$

$$\leqq C\, \mathbf{1}_{\beta, P_i}(x)\int_M f(y)\, t\, (\delta^2(x, y)+t^2)^{-(n-1)/2}\, \mathbf{1}_{2\beta, P_i}(y)\, d\sigma(y).$$

La contribution de $G_2$ dans l'estimation finale s'évalue comme celle de $I_1^t$.

Puisque

$$\delta(x, y)\nabla_x[\delta(x, y)]=(\|x-y\|+O(\|x-y\|^2))\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{x_k-y_k}{\|x-y\|}+O(\|x-y\|)\right\}\frac{\partial}{\partial x_k}$$

$$\mathbf{1}_{\beta, P_i}(x)\int_M \mathbf{1}_{2\beta, P_i}(y) f(y)\, G_1(x, y, t)\, d\sigma(y)$$

$$=\mathbf{1}_{\beta, P_i}(x)\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\int_M \mathbf{1}_{2\beta, P_i}(y) f(y)\right.$$

$$\left.\times\int_{t^2/4}^{+\infty}\left(\frac{t^2}{4u}\right)^{-n/2} e^{-u\|x-y\|^2/t^2}\frac{e^{-u}\, du}{\sqrt{u}}\, d\sigma(y)\right)\frac{\partial}{\partial x_k}$$

$$+\mathbf{1}_{\beta, P_i}(x)\sum_{k=1}^{n}\left\{\int_M \mathbf{1}_{1\beta, P_i}(y)f(y)\left[O(\|x-y\|^2)\left(\frac{x_k-y_k}{\|x-y\|}+O(\|x-y\|)\right)\right]\right.$$

$$\left.\int_{t^2/4}^{+\infty}\left(\frac{t^2}{4u}\right)^{-(n+2)/2} e^{-u\|x-y\|^2/t^2}\frac{e^{-u}du}{\sqrt{u}}d\sigma(y)\right\}\frac{\partial}{\partial x_k}.$$

La norme du second terme ne dépasse pas :

$$C\,\mathbf{1}_{\beta, P_i}(x)\int_M \mathbf{1}_{2\beta, P_i}(y)f(y)\|x-y\|^2\int_{t^2/4}^{+\infty}\left(\frac{t^2}{4u}\right)^{-(n+2)/2} e^{-u\|x-y\|^2/t^2}e^{-u}\frac{du}{\sqrt{u}}d\sigma(y)$$

$$\leqq C\,\mathbf{1}_{\beta, P_i}(x)\int_M \mathbf{1}_{2\beta, P_i}(y)f(y)\,t\,(\|x-y\|^2+t^2)^{-n/2}\,d\sigma(y)$$

$$\leqq C\,\mathbf{1}_{\beta, P_i}(x)\sup_{0\leqq t<1}\int_M \mathbf{1}_{2\beta, P_i}(y)f(y)\,t\,(\|x-y\|^2+t^2)^{-(n+1)/2}\,d\sigma(y).$$

La contribution de ce terme dans le résultat final se traite comme celle de $I_1^t$.

Mais

$$\int_M\left(\frac{t^2}{4u}\right)^{-n/2} e^{-u(\|x-y\|^2)/t^2}e^{-u}\frac{du}{\sqrt{u}}=\int_0^{+\infty}\left(\frac{t^2}{4u}\right)^{-n/2} e^{-u\|x-y\|^2/t^2}e^{-u}\frac{du}{\sqrt{u}}$$

$$-\int_0^{t^2/4}\left(\frac{t^2}{4u}\right)^{-n/2} e^{-u\|x-y\|^2/t^2}\frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}du$$

et

$$\frac{\partial}{\partial x_k}\int_M \mathbf{1}_{2\beta, P_i}(y)f(y)\int_{t^2/4}^{+\infty}\left(\frac{t^2}{4u}\right)^{-n/2} e^{-u\|x-y\|^2/t^2}e^{-u}\frac{du}{\sqrt{u}}d\sigma(y)$$

($B_{342}$)

$$=\frac{\partial}{\partial x_k}\int_M \mathbf{1}_{2\beta, P_i}(y)f(y)\int_0^{+\infty}\left(\frac{t^2}{4u}\right)^{-n/2} e^{-u\|x-y\|^2/t^2}e^{-u}\frac{du}{\sqrt{u}}d\sigma(y)$$

$$\frac{-\partial}{\partial x_k}\int_M \mathbf{1}_{2\beta, P_i}(y)f(y)\int_0^{t^2/4}\left(\frac{t^2}{4u}\right)^{-n/2} e^{-u\|x-y\|^2/t^2}\frac{e^{-u}du}{\sqrt{u}}d\sigma(y).$$

$$\left|\frac{\partial}{\partial x_k}\int_M \mathbf{1}_{2\beta, P_i}(y)f(y)\int_0^{t^2/4}\left(\frac{t^2}{4u}\right)^{-n/2} e^{-u\|x-y\|^2/t^2}\right.$$

$$\left.\frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}du\,d\sigma(y)\right|\mathbf{1}_{\beta, P_i}(x)\leqq \mathbf{1}_{\beta, P_i}(x)\int_M \mathbf{1}_{2\beta, P_i}(y)f(y)\int_0^{t^2/4}\left(\frac{t^2}{4u}\right)^{-(n/2)+1}|x_k-y_k|$$

$$\times e^{-u\|x-y\|^2/t^2}\frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}du\,d\sigma(y)\leqq C\int_M \mathbf{1}_{2\beta, P_i}(y)f(y)\,d\sigma(y)\,\mathbf{1}_{\beta, P_i}(x).$$

Il est facile d'estimer la contribution du second terme de $B_{342}$, dans le résultat final, grâce à l'inégalité ci-dessus.

$$\frac{\partial}{\partial x_k}\int_M \mathbf{1}_{2\beta, P_i}(y) f(y) \int_0^{+\infty} \left(\frac{t^2}{4u}\right)^{-n/2} e^{-u\|x-y\|^2/t^2} e^{-u} \frac{du}{\sqrt{u}} d\sigma(y)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x_k}\int_{TM_{P_i}} \mathbf{1}_{2\beta, P_i}[\mathrm{Exp}_{P_i}(Y)] f[\mathrm{Exp}_{P_i}(Y)]\, \bar{P}_t(X-Y)\, \theta(P_i, Y)\, dY$$

$$= \frac{\partial}{\partial x_k}[(\bar{P}_t(\mathbf{1}_{2\beta, P_i} f) \circ \mathrm{Exp}_{P_i}])(X)$$

où

$$\bar{P}_t(X) = \frac{t}{(\|X\|^2 + t^2)^{(n+1)/2}} \quad \text{et} \quad \theta(P_i, Y)$$

est la densité de volume sur $TM_{P_i}$.

La théorie classique montre que

$$\int_{TM_{P_i}} \left\{ \int_0^{+\infty} t \sum_{k=1}^{n} \left| \frac{\partial}{\partial x_k} \bar{P}_t[(\mathbf{1}_{2\beta, P_i} f) \circ \mathrm{Exp}_{P_i}] \right|^2 (X)\, dt \right\}^{p/2} dX$$

$$\leqq C \int_{TM_{P_i}} |(\mathbf{1}_{2\beta, P_i} f)|^p (\mathrm{Exp}_{P_i}(Y))\, dY.$$

Il s'ensuit que :

$$\int_M \mathbf{1}_{\beta, P_i}(x) \left( \int_0^1 t \sum_{k=1}^{n} \left| \frac{\partial}{\partial x_k} \int_M \mathbf{1}_{2\beta, P_i}(y)\, \bar{P}_t(x-y) f(y)\, d\sigma(y) \right|^2 dt \right)^{p/2} d\sigma(x) \leqq C \|\mathbf{1}_{2\beta, P_i} f\|_p^p.$$

La sommation suivant $i$ donne l'estimation souhaitée.

($B_4$) Il reste à étudier le champ de vecteurs :

$$\frac{t}{2}\nabla_x \int_M \varphi(x, y) \int_0^1 e^{-\frac{t^2 u}{4}} \mathscr{P}_{1/u}(x, y) f(y)\, d\sigma(y) \frac{du}{\sqrt{u}}$$

$$= \frac{t}{2}\int_M \nabla_x \varphi(x, y) \int_0^1 e^{-t^2 u/4} \mathscr{P}_{1/u}(x, y) f(y)\, d\sigma(y) \frac{du}{\sqrt{u}}$$

$$+ \frac{t}{2}\int_M \varphi(x, y)\, \nabla_x \int_0^1 e^{-t^2 u/4} \mathscr{P}_{1/u}(x, y) f(y)\, d\sigma(y) \frac{du}{\sqrt{u}}.$$

Comme

$$\frac{t}{2}\left| \int_M \nabla_x \varphi(x, y) \int_0^1 e^{-t^2 u/4} \mathscr{P}_{1/u}(x, y) f(y) \frac{du}{\sqrt{u}} d\sigma(y) \right| \leqq C \int_M P_t(x, y) f(y)\, d\sigma(y)$$

le premier terme de l'égalité ci-dessus s'estime facilement car sa norme ne dépasse pas $\operatorname{Sup}_{t \geqq 0} \mathrm{P}_t f(x) = f^*(x)$ et

$$\|f^*\|_p \leqq c_p \|f\|_p \quad \text{d'après (18).}$$

Il faut donc examiner

$$\begin{aligned}
&\frac{t}{2}\int_{\mathrm{M}} \varphi(x, y)\nabla_x \int_0^1 e^{-t^2 u/4} \mathscr{P}_{1/u}(x, y) f(y)\, d\sigma(y) \frac{du}{\sqrt{u}} \\
&\qquad = \frac{t}{2}\int_{\mathrm{M}} \varphi(x, y)\nabla_x \int_1^\infty e^{-t^2/4v} \mathscr{P}_v(x, y) f(y)\, d\sigma(y) \frac{dv}{v^{3/2}} \\
&\qquad = \frac{t}{2}\int_{\mathrm{M}} \varphi(x, y)\nabla_x \int_1^\infty e^{-t^2/4v} \int_{\mathrm{M}} \mathrm{K}_0(x, z) \frac{\partial \mathscr{P}_v}{\partial v}(z, y) f(y)\, d\sigma(y) \frac{dv}{v^{3/2}}\, d\sigma(z) \\
&\qquad\quad + \frac{t}{2}\int_{\mathrm{M}} \varphi(x, y)\nabla_x \int_1^{+\infty} e^{-t^2/4v} \int_{\mathrm{M}} \mathrm{K}_1(x, z) \mathscr{P}_v(x, y) f(y)\, d\sigma(y) \frac{dv}{v^{3/2}}\, d\sigma(z)
\end{aligned}$$

d'après le lemme 3.

Examinons le terme

$$\begin{aligned}
&\frac{t}{2}\int_{\mathrm{M}}\int_{\mathrm{M}} \varphi(x, y)\nabla_x \int_1^\infty e^{-\frac{t^2}{4v}} \int_{\mathrm{M}} \mathrm{K}_0(x, z) \frac{\partial \mathscr{P}_v}{\partial v}(z, y) f(y)\, d\sigma(y) \frac{dv}{v^{3/2}}\, d\sigma(z) \\
&\qquad = \frac{t}{2}\int_{\mathrm{M}}\int_{\mathrm{M}} \varphi(x, y)\nabla_x \mathrm{K}_0(x, z) \left(\int_1^\infty e^{-t^2/4v} \frac{\partial \mathscr{P}_v}{\partial v}(z, y) \frac{dv}{v^{3/2}}\right) f(y)\, d\sigma(z)\, d\sigma(y) \\
&\qquad = \frac{t}{2}\int_{\mathrm{M}}\int_{\mathrm{M}} \varphi(x, y)\nabla_x \mathrm{K}_0(x, z) \mathscr{P}_1(z, y) e^{-\frac{t^2}{4}} f(y)\, d\sigma(y)\, d\sigma(z) \\
&\qquad\quad + \frac{t}{2}\int_{\mathrm{M}}\int_{\mathrm{M}} \varphi(x, y)\nabla_x \mathrm{K}_0(x, z) \frac{t^2}{4}\int_1^\infty \mathscr{P}_v(z, y) e^{-t^2/4v} \frac{dv}{v^{7/2}} f(y)\, d\sigma(y)\, d\sigma(z).
\end{aligned}$$

La norme de cette expression ne dépasse donc pas :

$$\begin{aligned}
&\frac{t}{2}\int_{\mathrm{M}} \left(\int_{\mathrm{M}} \|\nabla_x \mathrm{K}_0(x, z)\| \mathscr{P}_1(z, y)\, d\sigma(z)\right) f(y)\, d\sigma(y) \\
&\qquad + \frac{t^3}{8}\int_{\mathrm{M}}\int_{\mathrm{M}} \|\nabla_x \mathrm{K}_0(x, z)\| \left(\int_1^{+\infty} \mathscr{P}_v(z, y) \frac{dv}{v^{7/2}}\right) d\sigma(z) f(y)\, d\sigma(y) \\
&\qquad \leqq \mathrm{C}\int_{\mathrm{M}}\int_{\mathrm{M}} \|\nabla_x \mathrm{K}_0(x, z)\| \left\{\mathscr{P}_1(z, y) + \int_1^\infty \mathscr{P}_v(z, y) \frac{dv}{v^{7/2}}\right\} d\sigma(z) f(y)\, d\sigma(y).
\end{aligned}$$

Comme

$$\int_{\mathrm{M}} \left\{\mathscr{P}_1(z, y) + \int_1^\infty \mathscr{P}_v(z, y) \frac{dv}{v^{7/3}}\right\} \|\nabla_x \mathrm{K}_0(x, z)\|\, d\sigma(z)$$

est le noyau d'un opérateur borné sur $L^p(M)$ pour tout $1 \leqq p \leqq \infty$, la contribution de ce terme est complètement contrôlable.

Il reste le terme :

$$\frac{t}{2}\int_M\int_M \varphi(x, y)\nabla_x \int_1^\infty e^{-t^2/4v} K_1(x, z)\mathscr{P}_v(z, y) f(y)\, d\sigma(y) \frac{dv}{v^{3/2}}\, d\sigma(z)$$

$$= \frac{t}{2}\int_M\int_M \varphi(x, y)\nabla_x K_1(x, z)\left\{\int_1^\infty e^{-t^2/4v}\mathscr{P}_v(z, y)\frac{dv}{v^{3/2}}\right\} f(y)\, d\sigma(z)\, d\sigma(y)$$

sa norme ne dépasse pas :

$$\frac{t}{2}\int_M\int_M \|\nabla_x K_1(x, z)\|\left\{\int_1^\infty \mathscr{P}_v(z, y)\frac{dv}{v^{3/2}}\right\} f(y)\, d\sigma(y)\, d\sigma(z).$$

La remarque précédente vaut pour ce terme à cause du lemme 3.

*Démonstration de (a) et (c) du théorème 1 :*

$$g_\alpha(f)[x] \leqq c\,(g_\alpha^1(f)(x) + h_1(x) + h_2(x))$$

où l'on a utilisé les notations du lemme 4 et du lemme 5; rappelons que $\mu = \mu_0^2$.

D'après le lemme 4, $\|g_\alpha^1(f)\|_p \leqq c\|f\|_p$ si $2 \leqq p < 4\mu_0/\alpha$.

Les lemmes 5 et 6 disent que $\|h_2\|_p + \|h_1\|_p \leqq c\|f\|_p$ pour tout $1 < p < \infty$.

Les deux résultats combinés montrent que $\|g_\alpha(f)\|_p \leqq c\|f\|_p$. Pour voir qu'il existe une constante $c(p)$ telle que pour tout $2 \leqq p$, $\|g_0(f)\|_p \leqq c(p)\|f\|_p$, il suffit de remarquer que pour tout $2 \leqq p$, il existe $\alpha > 0$ tel que $2 \leqq p < 4\mu_0/\alpha$ et l'on applique le résultat ci-dessus puisque pour tout $\alpha > 0$, $\forall x \in M$, $g_0(f)(x) \leqq g_\alpha(f)(x)$.

Par ailleurs il est prouvé dans [18] que :

$$\|f\|_p \leqq c\left\|\left(\int_0^{+\infty} t\left|\frac{\partial f}{\partial t}(x, t)\right|^2 dt\right)^{1/2}\right\|_p \leqq c\left\|\left(\int_0^{+\infty} te^{\alpha t}\left|\frac{\partial f}{\partial t}(x, t)\right|^2 dt\right)^{1/2}\right\|_p \leqq \|g_\alpha(f)\|_p.$$

Ceci prouve la partie (*a*) et (*c*) du théorème, puisque l'inégalité pour $1 < p < 2$ est traitée dans (18). Soit à prouver (*b*) pour $1 \leqq p \leqq 2$.

Comme $p' < 4\mu_0/\alpha$, $2\mu_0/p' > \alpha/2$ et il existe $\gamma > 0$ aussi petit que l'on veut tel que :

$$\frac{2\mu_0}{p'} > \frac{\alpha}{2} + (2\mu_0 - \alpha)\gamma.$$

On pose $p_\gamma = (1-\gamma)^{-1}$ et quitte à choisir $\gamma$ petit on peut supposer que $1 < p_\gamma < p < 2$ et :

$$\frac{1}{p} = (1-\theta)(1-\gamma) + \frac{\theta}{2} \qquad \text{avec} \quad \theta = \left(\frac{1}{p'} - \gamma\right)\left(\frac{1}{2} - \gamma\right)^{-1}.$$

Il s'ensuit que $\alpha\theta^{-1} < 2\mu_0$. On pose $\omega = \alpha\theta^{-1}$.

Soit X un champ de vecteurs unitaires sur M : $\|X_x\| = 1$, $\forall x \in M$. On considère la famille analytique d'opérateurs :

$$(\bigstar) \qquad T_z f(x, t) = e^{\omega t z/2} X_x f(x, t) \qquad \text{où} \quad 0 \leqq \operatorname{Rel} z \leqq 1.$$

$$\text{Si } \operatorname{Rel} z = 1 \int_M \left\{ \int_0^{+\infty} t \,|T_z f(x, t)|^2 \, dt \right\} d\sigma(x) \leqq \|f\|_2^2$$

d'après la première partie

($\bigstar\bigstar$) Si $\operatorname{Rel} z = 0$

$$\int_M \left| \int_0^{+\infty} t \,|T_z f(x, t)|^2 \, dt \right|^{p_\gamma/2} d\sigma(x) \leqq \|f\|_{p_\gamma}^{p_\gamma}.$$

Autrement dit :

Si $\operatorname{Rel} z = 0$, $T_z$ est un opérateur borné de $L^{p_\gamma}(M)$ dans $L^{p_\gamma}[L^2(t\,dt)]$.

Ceci découle de [18]

($\bigstar$) et ($\bigstar\bigstar$) prouvent avec le théorème d'interpolation d'une famille analytique de [18] que

$$\int_M \left| \int_0^{\infty} t \,|T_\theta f(x, t)|^2 \, dt \right|^{p/2} d\sigma(x) \leqq c(p) \|f\|_p^p.$$

ou encore que :

$$\text{(i)} \qquad \int_M \left\{ \int_0^{+\infty} t e^{\alpha t} |X_x f(x, t)|^2 \, dt \right\}^{p/2} d\sigma(x) \leqq c(p) \|f\|_p^p$$

on montre de la même façon que :

$$\text{(ii)} \qquad \int_M \left\{ \int_0^{+\infty} t e^{\alpha t} \left| \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) \, dt \right.\right\}^{p/2} d\sigma(x) \leqq c(p) \|f\|_p^p$$

(i) et (ii) montrent que :

$$\|g_\alpha(f)\|_p \leqq c(p) \|f\|_p.$$

On se propose maintenant d'indiquer une proposition sur le comportement des fonctions $S_\alpha$. Pour cela on considère une fonction $f : M \to \mathbb{C}$ et l'on pose, pour tout $\alpha > 0$.

$$S_\alpha^2(f)(x) = \int_{\delta(x, y) \leqq \alpha t} t \,\|\nabla_y P_t f\|^2 \,|B_t(y)|^{-1} \, d\sigma(y) \, dt,$$

L'étude de cette fonction est compliquée parce que d'une part la fonction maximale de Hardy-Littlewood n'est pas toujours bornée sur $L^p$ *voir* [13]. Cette fonction maximale, dans le cas des espaces symétriques est bornée sur $L^p$, elle permet alors de copier la démonstration classique dans l'étude de $S_1(f)$. Mais si $\alpha > 1$ il y a des sérieux problèmes dus à la croissance exponentielle du volume des boules. Si la fonction maximale n'est pas bornée sur les $L^p$ la situation va empirer.

On va quand même prouver la proposition suivante :

PROPOSITION. — *On suppose* $2 \leqq p$; *on suppose aussi que la courbure de* M *est comprise entre* $-K$ *et* $-k$ *avec* $0 < k < K$. *Alors il existe une constante* $c(p)$ *telle que*

$$\|S_\alpha(f)\|_p \leqq C(p)\|f\|_p$$

*dans les cas suivants :*

$$0 \leqq \alpha \leqq \frac{k}{K} \qquad et \qquad p \geqq 2.$$

$$\frac{k}{K} < \alpha, \quad k \leqq K < 2k \qquad et \qquad 4 \leqq p \leqq k\alpha^2[k+K\alpha]^{-1}$$

$$\frac{k}{K} < \alpha, \quad k\alpha^2 > 8(K\alpha+k) \qquad et \qquad 1/4 < p^{-1} < \frac{1}{2} - 4\alpha^{-1}[K+k\alpha^{-1}]k^{-1}.$$

*Démonstration de la proposition :*

$$S_\alpha^2(f)(x) = \int_M \int_0^\infty \|\nabla_y P_t f\|^2(y)\, t\, \mathbf{1}_{\alpha t} \circ \delta(x, y) |B_t(y)|^{-1} d\sigma(y)\, dt$$

$$= \int_M \int_0^1 \|\nabla_y P_t f\|^2(y)\, t\, \mathbf{1}_{\alpha t} \circ \delta(x, y) |B_t(y)|^{-1} d\sigma(y)\, dt$$

$$+ \int_M \int_1^\infty \|\nabla_y P_t f\|^2(y)\, t\, \mathbf{1}_{\alpha t} \circ \delta(x, y) |B_t(y)|^{-1} d\sigma(y)\, dt = Q_1(x) + Q_2(x).$$

Soit $\varphi$ une fonction $C^\infty$ à support compact, alors :

$$\int_M S_\alpha^2(f)(x)\varphi(x)\, d\sigma(x) = \int_M Q_1(x)\varphi(x)\, d\sigma(x) + \int_M Q_2(x)\varphi(x)\, d\sigma(x)$$

on va traiter chacun des termes séparément.

$$\int_M Q_2(x)\varphi(x)\, d\sigma(x) = \int_M \left[\int_1^\infty e^{\beta t} t \|\nabla_y P_t f\|^2(y) e^{-\beta t} \times \int_M |B_t(y)|^{-1} \varphi(x) \mathbf{1}_{\alpha t} \circ \delta(x, y)\, d\sigma(x)\, dt\right] d\sigma(y)$$

où β est un nombre arbitrairement petit

$$e^{-\beta t}\int_M |B_t(y)|^{-1}\varphi(x)\mathbf{1}_{\alpha t}\circ\delta(x,y)\,d\sigma(x)=e^{-\beta t}\int_{\delta(x,y)\leqq\alpha t}\varphi(x)\,d\sigma(x)\,|B_t(y)|^{-1}$$
$$\leqq c\int_M e^{-\beta/\alpha\,\delta(x,y)}\operatorname{Inf}\{\alpha^{-n},\ |B_{\delta(x,y)/\alpha}(y)|^{-1}\}\,\varphi(x)\,d\sigma(x).$$

On pose :

$$K^0_{\alpha,\beta}(x,y)=c\,.\,\alpha^n \qquad \text{si}\quad \delta(x,y)\leqq\alpha$$
$$K^0_{\alpha,\beta}(x,y)=|B_{\delta(x,y)/\alpha}(y)|^{-1}e^{-\frac{\beta}{\alpha}\delta(x,y)} \qquad \text{si}\quad \delta(x,y)>\alpha.$$

Alors :

$$e^{-\beta t}\int_M |B_t(y)|^{-1}\varphi(x)\mathbf{1}_{\alpha t}\circ\delta(x,y)\,d\sigma(x)\leqq c\int_M K^0_{\alpha,\beta}(x,y)\,\varphi(x)\,d\sigma(x).$$

Mais puisque la courbure de M est inférieure à $-k^2$, d'après [3],

$$|B_{\delta(x,y)/\alpha}(y)|^{-1}\leqq c e^{-(n-1)/\alpha\,k\,\delta(x,y)}$$

et

$$K^0_{\alpha,\beta}(x,y)\leqq K_{\alpha,\beta}(x,y)=c\,\alpha^n \qquad \text{si}\quad \delta(x,y)\leqq\alpha$$
$$=c e^{-1/\alpha\,[(n-1)k+\beta]\,\delta(x,y)} \qquad \text{si}\quad \delta(x,y)>\alpha$$

et l'expression à estimer ne dépasse pas $C\int_M g^2_\beta(f)(y)\int_M K_{\alpha,\beta}(x,y)\,\varphi(x)\,d\sigma(x)$.

On va comparer $K_{\alpha,\beta}$ aux résolvantes du laplacien :

(1) Si $K\alpha<k$, on peut écrire

$$\frac{k}{\alpha}=\frac{K}{2}+\frac{\sqrt{K^2+\gamma_0^2}}{2}$$

avec $\gamma_0>0$.

(i) Soit $\mathscr{P}_t^{-K^2}$ la solution fondamentale de l'équation de la chaleur sur la variété hyperbolique, simplement connexe, de dimension $n$, à courbure constante égale à $-K^2$. On sait d'après [12] que

$$\int_0^{+\infty}\mathscr{P}_t^{-K^2}(\xi)\,e^{-(n-1)^2/4\,\gamma_0^2 t}\,dt\leqq e^{-\{(n-1)/2\,[K+\sqrt{K^2+\gamma_0^2}]\}\,\xi}$$

quand $\xi\to\infty$.

Il s'ensuit d'après le théorème de comparaison [12] qu'il existe une constante positive $c$ telle que pour $\delta(x, y)$ assez grand

$$e^{-(n-1)k/\alpha\,\delta(x, y)} \leqq \int_0^\infty e^{-(n-1)^2/4\gamma_0^2 t}\,\mathscr{P}^{-K_t^2}[\delta(x, y)]\,dt$$

$$\leqq \int_0^\infty e^{-(n-1)^2/4\gamma_0^2 t}\,\mathscr{P}_t(x, y)\,dt = R_{\gamma_0}(x, y).$$

Alors à l'infini :

$$K^0_{\alpha, \beta}(x, y) \leqq K_{\alpha, \beta}(x, y) \leqq CR_{\gamma_0}(x, y).$$

Puisque $R_{\gamma_0}$ est le noyau d'un opérateur borné sur $L^p(M)$ pour tout $p \geqq 1$, on en conclut que $\| K_{\alpha, \beta}(\varphi)\|_r \leqq C \|\varphi\|_r$, pour tout $r \geqq 1$.

(ii) Si $k/\alpha = K$, l'étude ci-dessous montre que $K^0_{\alpha, \beta}(x, y) \leqq K_{\alpha, \beta}(x, y)$ et comme $K_{\alpha, \beta}(x, y) \leqq c \int_0^\infty \mathscr{P}_t(x, y)\,dt$ et que la fonction de Green de M donne lieu à un opérateur borné sur tous les $L^r(M)$, $r > 1$, on en conclut que :

$$\| K_{\alpha, \beta} f \|_r \leqq c(p) \| f \|_r$$

pour tout $r > 1$.

Dans les deux cas (i) et (ii), on conclut que :

$$\int_M Q_2(x)\,\varphi(x)\,d\sigma(x) \leqq \int_M g_\beta^2(f)(x)\,K_{\alpha, \beta}|\varphi|(x)\,d\sigma(x) \leqq C(p)\|f\|_p^2\,\|\varphi\|_r$$

d'après le théorème 1 où $(2/p)+(1/r)=1$.

Ce qui prouve que $\| Q_2 \|_p \leqq c(p) \| f \|_p$.

Maintenant :

$$\left|\int_M Q_1(x)\,\varphi(x)\,d\sigma(x)\right| = \left|\int_M \int_0^1 \|\nabla_y P_t f(y)\|^2\,t\,dt\,\frac{1}{|B_t(y)|}\int_{\delta(x, y) \leqq \alpha t} \varphi(x)\,d\sigma(x)\,d\sigma(y)\right|$$

$$\leqq C \int_M \int_0^1 \|\nabla_y P_t f(y)\|^2\,t\,dt\,\frac{1}{t^n}\int_{\delta(x, y) \leqq \alpha t} |\varphi(x)|\,d\sigma(x)\,d\sigma(y)$$

$$\leqq C(\alpha)\int_M g_0^2(f)(y)\,M[\varphi](y)\,d\sigma(y)$$

où

$$M(\varphi)(y) = \sup_{0 \leqq t \leqq \alpha} \frac{1}{|B(y, t)|}\int_{\delta(x, y) \leqq t} \varphi(x)\,d\sigma(x).$$

Mais il est facile de voir qu'il existe, pour tout $r > 1$, une constante $C(r)$ telle que $\| M(\varphi) \|_r \leqq C(r) \| \varphi \|_r$; comme précédemment,

$$\left| \int_M Q_1(x)\, \varphi(x)\, d\sigma(x) \right| \leqq \| g_0(f) \|_p^2 \| \varphi \|_r, \qquad \frac{1}{r} + \frac{2}{p} = 1 \leqq C \| f \|_p^2 \| \varphi \|_r.$$

Ce qui prouve [avec (i) et (ii)] que

$$\| S_\alpha(f) \|_p \leqq c(p) \| f \|_p.$$

(2) $k < K\alpha$ et $2k > K\alpha$.

On pose $\beta = (n-1)\beta_0$

$$2(k+\beta_0)\alpha^{-1} = K + \sqrt{K^2 - \gamma_0^2}$$

et l'on voit immédiatement d'après les calculs antérieurs, qu'à l'infini :

$$K_{\alpha,\beta}(x, y) \leqq e^{-(n-1)/\alpha [k+\beta_0] \times \delta(x, y)} \leqq C \int_0^\infty e^{\gamma_0^2 (n-1)^2 t/4} \mathscr{P}_t(x, y)\, dt = R_{\gamma_0}(x, y)$$

on choisit $\beta_0$ arbitrairement petit.

On voudrait que $R_{\gamma_0}$ soit le noyau d'un opérateur borné sur $L^r(M)$ où $(1/r)+(2/p)=1$. On peut distinguer deux cas :

(i) $p \geqq 4$.

Pour que le noyau $R_{\gamma_0}$ soit borné sur $L^r(M)$ il suffirait que (d'après [14])

$$(a_1) \qquad \gamma_0^2 \frac{(n-1)^2}{4} < 4 \frac{(n-1)^2 k^2}{4p}$$

donc $\gamma_0^2 < 4k^2/p$.

Pour que $g_\beta$ soit borné sur $L^p(M)$ il suffit que, d'après le théorème [1]

$$(a_2) \qquad p < 2k/\beta_0.$$

Mais $\gamma_0^2 = K^2 - [K - 2(k+\beta_0)\alpha^{-1}]^2$.
on doit donc avoir l'inégalité :

$$(a_3) \qquad K^2 - [K - 2(k+\beta_0)\alpha^{-1}]^2 < \frac{4k^2}{p}.$$

Par ailleurs si $K^2 - [K - 2k\alpha^{-1}]^2 < 4k^2/p$, on peut toujours trouver un $\beta_0$ tel que l'inégalité $a_3$ ait lieu et que $a_2$ ait lieu aussi. Par conséquent la condition $k < K\alpha < 2k$ et $4 \leqq p < k\alpha^2 [k + K\alpha]^{-1}$ permet de choisir $\beta_0$ assez petit pour que $a_1$, $a_2$, $a_3$ aient lieu, l'estimation de $S_\alpha(f)$ se fait comme en 1.

(ii) $2 \leqq p < 4$.

Pour que $R_{\gamma_0}$ soit borné sur $L^p$ il suffirait cette fois que :

$$\gamma_0^2 < \frac{k^2}{2r} = \frac{k^2}{2}\left[1-\frac{2}{p}\right].$$

par conséquent que :

$$\frac{1}{p} < \frac{1}{2} - 4\alpha^{-1}[K+k\alpha^{-1}]k^{-1}.$$

Mais puisque $k\alpha^2 > 8(K\alpha+k)$ on a le résultat souhaité.

*Remarques.* — 1° Si M est un espace symétrique de type non compact les résultats peuvent être plus précis. En effet on sait que la première valeur propre du laplacien est exactement $\|\rho\|^2$. De plus la norme de $\mathscr{P}_t$ opérant sur $L^p(M)$ est exactement $e^{-4|\rho|^2/pp' t}$. Ces deux situations permettent avec un calcul précis du comportement du volume de la boule $B_t(y)$ quand $t$ tend vers l'infini d'obtenir des résultats beaucoup plus fins.

2° On peut prouver des majorations de $S_\alpha(f)$ pour $p<2$, mais l'équivalence $\|S_\alpha(f)\|_p \simeq \|f\|_p$ est plus délicate. On reviendra sur ces deux questions plus tard.

## III. Fonctions de Littlewood-Paley associées à la solution fondamentale de l'équation de la chaleur

Dans cette partie on va définir une famille de fonctions de Littlewood Paley au moyen de la solution fondamentale de l'équation de la chaleur sur M.

DÉFINITION. — Soit $\alpha > 0$ et soit $f: M \to \mathbb{C}$ une fonction $C^\infty$ à support compact.

On pose :

$$G_\alpha^2(f)(x) = \int_0^{+\infty} e^{\alpha t}\left\{\left|\frac{\partial \mathscr{P}_t f(x)}{\partial t}\right|^2 t + \|\nabla_x \mathscr{P}_t f(x,\ )\|^2\right\} dt.$$

On se propose de prouver le résultat suivant :

THÉORÈME 2. — *Soit* $\alpha \geqq 0$ *et soit* $2 \leqq p < 4\mu/\alpha$. *Alors*

$$\|G_\alpha(f)\|_p \simeq \|f\|_p.$$

*Démonstration du théorème.* — On aura besoin d'une succession de lemmes qui sont les analogues des lemmes précédents. On peut remarquer toute suite que la seule inégalité à prouver est :

$$\|G_\alpha(f)\|_p \leqq c(p)\|f\|_p.$$

Car

$$\int_0^{+\infty} \left|\frac{\partial \mathscr{P}_t f(x)}{\partial t}\right|^2 t^2\, dt \leqq G_\alpha^2(f)(x)$$

et l'on sait, d'après [18] que :

$$\| f \|_p \leqq c(p) \left\| \left\{ \int_0^{+\infty} t \left|\frac{\partial \mathscr{P}_t f(x)}{\partial t}\right|^2 dt \right\}^{1/2} \right\|_p.$$

Le premier lemme dont on aura besoin est le suivant :

LEMME 4. — *Soit*

$$G_{\alpha,1}^2(x) = \int_1^{\infty} e^{\alpha t} \left\{ \left|\frac{\partial \mathscr{P}_t f(x)}{\partial t}\right|^2 t\, dt + \| \nabla_x \mathscr{P}_t f(x) \|^2 \right\} dt.$$

*Si* $2 \leqq p \leqq 4\mu_0^2/\alpha$, *il existe une constante* $C(p) > 0$ *telle que :*

$$\| G_{\alpha,1} \|_p \leqq C(p) \| f \|_p.$$

*Preuve du lemme.* — Le cas $\alpha = 0$ se ramène facilement au cas $\alpha \neq 0$, puisque si $\alpha_1 \leqq \alpha_2\, G_{\alpha_1}(f)(x) \leqq G_{\alpha_2}(f)(x)$.

On veut encore utiliser l'inégalité de Minkowski, mais on ne peut plus utiliser l'inégalité de Harnack.

$$\| G_{\alpha,1}^0 \|_p^2 \leqq 2 \left( \int_1^{\infty} e^{\alpha t}\, t \left( \int_M \left|\frac{\partial \mathscr{P}_t f(x)}{\partial t}\right|^p d\sigma(x) \right)^{2/p} dt \right.$$
$$\left. + \int_1^{\infty} e^{\alpha t} \left[ \int_M \| \nabla \mathscr{P}_t f(x) \|^p d\sigma(x) \right]^{2/p} dt. \right.$$

D'une part, d'après [14], il existe $c(p) > 0$ telle que :

$$\| \nabla \mathscr{P}_t f \|_p \leqq c(p) \| \mathscr{P}_t f \|_p + \| \Delta \mathscr{P}_t f \|_p.$$

Comme la norme de $\mathscr{P}_t$ opérant sur $L^p(M)$ ne dépasse pas $e^{-2\mu_0^2 t/p}$. $\| \mathscr{P}_t f \|_p \leqq e^{-2\mu_0^2 t/p} \| f \|_p$.

Par ailleurs puisque $\| \partial \mathscr{P}_t f / \partial t \|_p = \| \Delta \mathscr{P}_t f \|_p$, il suffira d'estimer $\| \Delta \mathscr{P}_t f \|_p$ qui est égale à $\| \mathscr{P}_{t-\frac{1}{2}} (\Delta \mathscr{P}_{1/2} f)(x) \|_p \leqq c e^{-2\mu_0^2 t/p} \| \Delta \mathscr{P}_{1/2} f \|_p$.

Mais d'après [5] $\| \Delta \mathscr{P}_{\frac{1}{2}} f \|_p \leqq c(p) \| f \|_p$ où $c(p)$ est une constante qui ne dépend que de $p$.

Alors :

$$\| \nabla \mathscr{P}_t f \|_p \leqq \left\| \frac{\partial \mathscr{P}_t f}{\partial t} \right\|_p \leqq e^{-2\mu_0^2 t/p} c(p) \| f \|_p.$$

et

$$\| G_{\alpha, 1}(f) \|_p^2 \leqq C(p) \int_1^{\infty} t e^{\alpha t - 4 \mu_0^2 t/p} dt \| f \|_p^2 \leqq C(p, \alpha) \| f \|_p^2 \qquad \text{si} \quad 2 \leqq p < \frac{4\mu_0^2}{\alpha}.$$

LEMME 5′ *Soient* $\varphi$ *et* $\psi$ *comme au lemme* 5 *on note* $H_1$ *la fonction :*

$$H_1^2(x) = \int_0^1 t \frac{|\partial \mathscr{P}_t^1 f(x)|^2}{\partial t} + \| \nabla_x \mathscr{P}_t^1 f(x) \|^2 dt$$

*où*

$$\mathscr{P}_t^1 f(x) = \int_M \mathscr{P}_t(x, y) \psi(x, y) f(y) d\sigma(y).$$

*Alors pour tout* $1 < p < \infty$ *il existe* $C(p)$ *telle que :*

$$\| H_1 \|_p \leqq C(p) \| f \|_p.$$

*Preuve du lemme.* — Puisque $\psi(x, y) = 0$ seulement si $\delta(x, y) \geqq \beta^2/4$, d'après [5], il existe $C > 0$ telle que :

$$\left| \frac{\partial \mathscr{P}_t}{\partial t}(x, y) \right| \leqq c e^{-\delta^2(x, y)/4t} t^{-(n/2)+2}.$$

Comme $\delta(x, y)$ doit dépasser $\beta^2/4$,

$$\left| \frac{\partial \mathscr{P}_t(x, y)}{\partial t} \right| \leqq c e^{-\delta^2(x, y)/8} = K_9(x, y).$$

La même inégalité est vraie pour $\nabla_x \mathscr{P}_t(x, y)$ :

$\| \nabla_x \mathscr{P}_t(x, y) \| \leqq K_9(x, y)$ d'après la même référence, dès que $0 < t < 1$. Alors :

$$H_1^2(x) \leqq c [K_9 | f | (x)]^2.$$

Puisque la courbure de M est bornée, $K_9$ est le noyau d'un opérateur borné sur tous les $L^p(M)$ $1 \leqq p \leqq \infty$ et :

$$\| H_1 \|_p \leqq c(p) \| f \|_p$$

Ce qui termine la preuve du lemme 5′.

L'analogue du lemme 6 est le suivant.

LEMME 6′. — *Soit :*

$$H_2^2(x) = \int_0^1 t \left| \frac{\partial \mathscr{P}_t^2}{\partial t} f \right|^2 (x) + \| \nabla_x \mathscr{P}_t^2 f(x) \|^2 dt.$$

*où*

$$\mathscr{P}_t^2 f(x) = \int_M \mathscr{P}_t(x, y) \varphi(x, y) f(y) d\sigma(y).$$

*Alors pour tout* $1<p<\infty$,

$$\| H_2 \|_p \leqq c(p) \| f \|_p;$$

*Preuve du lemme :*

$$\mathscr{P}_t^2 f(x) = \int_M \mathscr{P}_t(x, y) f(y) \, d\sigma(y) + \int_M \mathscr{P}_t(x, y) \, O[\delta(x, y)]^8 f(y) \, d\sigma(y).$$

Si $\delta(x, y) \geqq \beta$, comme précédemment

$$O(\delta(x, y))^8 \left| \frac{\partial \mathscr{P}_t(x, y)}{\partial t} \right| \leqq c e^{-\delta^2(x, y)/8} \, O[\delta(x, y)] = K_{10}(x, y).$$

Ainsi on peut facilement estimer le terme qui le contient.

Si

$$\delta(x, y) \leqq \beta, \qquad \left| \frac{\partial \mathscr{P}_t(x, y)}{\partial t} \right| \leqq c e^{-\delta^2(x, y)/4t} \, t^{-(n/2)-2}$$

et :

$$O[\delta(x, y)]^8 \left| \frac{\partial \mathscr{P}_t(x, y)}{\partial t} \right| \leqq c [\delta(x, y)]^{-n+4}.$$

Puisque $\mathbf{1}_\beta \circ \delta(x, y) \, \delta^{-n+4}(x, y)$ est le noyau d'un opérateur borné sur $L^p(M)$ il est facile de prouver que :

$$\left\| \left( \int_0^1 t \left| \int_M \frac{\partial \mathscr{P}_t(x, y)}{\partial t} O[\delta(x, y)]^8 f(y) \, d\sigma y) \right|^2 \right)^{1/2} \right\|_p \leqq c(p) \| f \|_p.$$

Par ailleurs il est prouvé dans [18] que :

$$\left\| \left( \int_0^1 t \left| \frac{\partial \mathscr{P}_t f(x)}{\partial t} \right|^2 dt \right)^{1/2} \right\|_p \leqq c(p) \| f \|_p.$$

Il reste à examiner :

$$H_{2,1}^2(x) = \int_0^1 \| \nabla_x \mathscr{P}_t^2 f(x) \|^2 \, dt.$$

Mais :

$$\nabla_x \mathscr{P}_t^2 f(x) = \int_M \nabla_x \mathscr{P}_t(x, y) \, \varphi(x, y) f(y) \, d(y) + \int_M \mathscr{P}_t(x, y) \nabla_x \varphi(x, y) f(y) \, d\sigma(y).$$

Comme $\|\nabla_x \varphi(x, y)\| = O[\delta(x, y)]^9$ l'estimation du terme avec $\int_M \mathscr{P}_t(x, y) \nabla_x \varphi(x, y) f(y) \, d\sigma(y)$ est analogue au précédent. Il suffit donc d'étudier :

$$\int_0^1 \left\| \int_M \nabla_x \mathscr{P}_t(x, y) \varphi(x, y) f(y) \, d\sigma(y) \right\|^2 dt = \Phi^2(x).$$

On considère une famille de boules $B_p(P_i)$ comme précédemment et :

$$\|\Phi\|_p^p \simeq \sum_{i=1}^{\infty} \|\mathbf{1}_{\beta, P_i} \Phi\|_p^p.$$

on va examiner

$$\int_M |\mathbf{1}_{\beta, P_i} \varphi(x)|^p \, d\sigma(x) = \int_M d\sigma(x) \mathbf{1}_{\beta, P_i}(x)$$
$$\times \left( \int_0^1 dt \left\| \int_M \nabla_x \mathscr{P}_t(x, y) \varphi(x, y) \mathbf{1}_{2\beta, P_i}(y) f(y) \, d\sigma(y) \right\|^2 \right)^{p/2}.$$

Mais puisque les $x$ et $y$ qui interviennent doivent appartenir à $B_{2\beta}(P_i)$ que

$$\delta(x, y) \leqq 2\beta \quad \text{et} \quad \varphi(x, y) = 1 + O[\delta(x, y)]^9,$$

$$\mathbf{1}_{\beta, P_i}(x) \int_M \nabla_x \mathscr{P}_t(x, y) \mathbf{1}_{2\beta, P_i}(y) f(y) \varphi(x, y) \, d\sigma(y)$$
$$= \int_M \nabla_x \mathscr{P}_t(x, y) \mathbf{1}_{2\beta, P_i}(y) f(y) \, d\sigma(y) + \int_M \nabla_x \mathscr{P}_t(x, y) 0 (\delta(x, y))^9 \mathbf{1}_{2\beta, P_i}(y) f(y) \, d\sigma(y).$$

Par ailleurs

$$\|\nabla_x \mathscr{P}_t(x, y) \delta^9(x, y)\| \leqq c e^{-\delta^2(x, y)/4t} t^{-(n/2)-1} \delta^{10}(x, y) \leqq \delta^{-n+9}(x, y).$$

La contribution de ce terme dans l'évaluation de la norme $\Phi$ ne dépassera pas $c(p) \|\mathbf{1}_{2\beta, P_i} f\|_p^p$ et par sommation, $c(p) \|f\|_p$.

Il ne reste plus que le terme :

$$\mathbf{1}_{\beta, P_i}(x) \int_M \nabla_x \mathscr{P}_t(x, y) \mathbf{1}_{2\beta, P_i}(y) f(y) \, d\sigma(y).$$

On écrira alors :

$$\mathscr{P}_t(x, y) = \theta^{-1/2}(x, y) \, e^{-\delta^2(x, y)/4t} t^{-n/2} + H(t, x, y) e^{-\delta^2(x, y)/4t} t^{-(n/2)+1}.$$

Comme dans [8]

Le premier terme qui semble poser des problèmes est :

$$\nabla_x (H e^{-\delta^2/4t}) t^{-(n/2)+1} \|\nabla_x H(t, x, y) e^{-\delta^2(x, y)/4t} t^{(n/2)+1}\| \leqq c e^{-\delta^2(x, y)/4t} t^{-(n/2)+1}$$

Mais :

$$\left| t\,\mathbf{1}_{\beta,\,P_i}(x) \int_M e^{-\delta^2(x,\,y)/4t}\, t^{-n/2}\, \mathbf{1}_{2\beta,\,P_i}(y)\, f(y)\, d\sigma(y) \right|$$
$$\leqq \mathbf{1}_{\beta,\,P_i}(x) \sup_{0\leqq t\leqq 1} \int_M e^{-\delta^2(x,\,y)/4t}\, t^{-n/2}\, \mathbf{1}_{2\beta,\,P_i}(y)\, |f(y)|\, d\sigma(y).$$

D'une part il existe $c(p)<\infty$ telle que :

$$\left\| \mathbf{1}_{\beta,\,P_i}(x) \operatorname*{Sup}_{t\leqq 1} \int_M e^{-\delta^2(x,\,y)/4t}\, t^{-n/2}\, \mathbf{1}_{2\beta,\,P_i}(y)\, |f(y)|\, d\sigma(y) \right\|_p \leqq C(p) \left\| \mathbf{1}_{2\beta,\,P_i} f \right\|_p.$$

on peut donc contrôler le terme où figure

$$(\nabla_x H(t,\, x,\, y)\, e^{-\delta^2(x,\,y)/4t}\, t^{-(n/2)+1}.$$

Par ailleurs :

$$\left\| H(t,\, x,\, y)\, \delta(x,\, y)\, \nabla_x \delta(x,\, y)\, e^{-\delta^2(x,\,y)/4t}\, t^{-n/2} \right\|$$
$$\leqq C \left| H(t,\, x,\, y)\, \delta(x,\, y)\, e^{-\delta^2(x,\,y)/4t}\, t^{-n/2} \right| \leqq C\, \delta^{-n+1}(x,\, y).$$

Puisque $\mathbf{1}_\beta \circ \delta(x,\, y)\, \delta^{-n+1}(x,\, y)$ est un bon noyau, on peut complètement contrôler le terme qui fait intervenir $H(t,\, x,\, y)\,(e^{-\delta^2(x,\,y)/4t}\, t^{-(n/2)+1})$.

D'une part $\| \nabla_x \theta^{-1/2}(x,\, y) \| \leqq C\, \delta(x,\, y)$ dans le domaine en considération par conséquent

$$\| \nabla_x [\theta^{-1/2}(x,\, y)] \|\, e^{-\delta^2(x,\,y)/4t}\, t^{-n/2} \leqq C\, \delta^{-n+1}(x,\, y).$$

d'où la bonne estimation.

On pose :

$$\theta^{-1/2}(x,\, y) = 1 + O(\delta(x,\, y))$$

et

$$\theta^{-1/2}(x,\, y)\, e^{-\delta^2(x,\,y)/4t}\, t^{-n/2} = e^{-\delta^2(x,\,y)/4t}\, t^{-n/2} + e^{-\delta^2(x,\,y)/4t}\, t^{-n/2}\, O[\delta(x,\, y)]$$

Alors :

$$t^{-n/2}\, \nabla_x e^{-\delta^2(x,\,y)/4t}\, \theta^{-1/2}(x,\, y) = -\frac{\delta(x,\, y)\, \nabla_x \delta(x,\, y)\, t^{-(n/2)-1}}{2}\, e^{-\delta^2(x,\,y)/4t}$$
$$-\frac{\delta(x,\, y)}{2}\, \nabla_x \delta(x,\, y)\, t^{-(n/2)-1}\, O[\delta(x,\, y)]\, e^{-\delta^2(x,\,y)/4t}$$

Le dernier terme est majoré par : $c\, \delta^2(x,\, y)\, e^{-\delta^2(x,\,y)/4t}\, t^{-(n/2)-1}$.

Mais

$$\mathbf{1}_{\beta,\, P_i}(x)\int_0^1 t\left|\int_M \delta^2(x, y)\, e^{-\delta^2(x, y)/4t}\, t^{-(n/2)-1}\, 1_{2\beta,\, P_i}(y)\,|f(y)|\, d\sigma(y)\right|^2 dt$$

$$\leqq \mathbf{1}_{\beta,\, P_i}(x)\left[\int_M \delta^2(x, y)\,\mathbf{1}_{2\beta,\, P_i}(y)\,|f(y)|\left[\int_0^1 e^{-2\delta^2(x, y)/4t}\, t^{-n-2}\, dt\right]^{1/2} d\sigma y)\right]^2$$

$$(\bigstar) \qquad \leqq \mathbf{1}_{\beta,\, P_i}(x)\left[\int_M \delta^2(x, y)\,\mathbf{1}_{2\beta,\, P_i}(y)\,|f(y)|\,\delta^{-n-1}(x, y)\right.$$

$$\left.\times\left[\int_0^{1/\delta^2(x, y)} e^{-1/u}\, u^{-n-2}\, du\right]^{1/2}\right]^2 \leqq C\,\mathbf{1}_{\beta,\, P_i}(x)\left[\int_M \mathbf{1}_{2\beta,\, P_i}(y)\,|f(y)|\,\delta^{-n+1}(x, y)\, d\sigma(y)\right]^2.$$

On peut donc contrôler ce terme.

$$\delta(x, y) = \|x-y| + O(\|x-y\|^2)$$

$$\delta(x, y)\,\nabla_x\delta(x, y)\, t^{-(n/2)-1} = \|x-y\|\,\nabla_x\delta(x, y)\, t^{-(n/2)-1} + O(\|x-y\|^2)\,\nabla_x\delta(x, y)\, t^{-(n/2)-1}.$$

Mais :

$$\|O(\|x-y\|^2)\,\nabla_x\delta(x, y)\, t^{-(n/2)-1}\| \leqq c\,\|x-y\|^2\, t^{-(n/2)-1}.$$

Par conséquent on peut évaluer

$$\|O(\|x-y\|^2)\,\nabla_x\delta(x, y)\, t^{-(n/2)-1}\, e^{-\delta^2(x, y)/4t}\| \leqq c\,\delta^2(x, y)\, t^{-(n/2)-1}\, e^{-\delta^2(x, y)/4t}$$

On a déjà estimé ce terme.

$$\|x-y\|\,\nabla_x\delta(x, y)\, e^{-\delta^2(x, y)/4t}\, t^{-(n/2)-1}$$

$$= \|x-y\|\,\nabla_x\delta(x, y)\, e^{-\|x-y\|^2/4t} + \nabla_x\delta(x, y)\,\|x-y\|\,\{e^{-\delta^2(x, y)/4t} - e^{-\|x-y\|^2/4t}\}\, t^{-(n/2)-1}.$$

Comme au lemme 6, l'expression :

$$|e^{-\delta^2(x, y)/4t} - e^{-\|x-y\|^2/4t}|$$

ne dépasse pas :

$$C\, e^{-\|x-y\|^2/4t}\,\frac{O\,\|x-y\|^3}{t}.$$

Par conséquent :

$$(\bigstar\bigstar) \qquad \|\,\|x-y\|\,\nabla_x\delta(x, y)\, t^{-(n/2)-1}\,[e^{-\delta^2(x, y)/4t} - e^{-\|x-y\|^2/4t}]\,\|$$

$$\leqq C\,\|x-y\|^4\, t^{-(n/2)-2}\, e^{-\|x-y\|^2/4t}.$$

L'utilisation de l'inégalité de Hölder comme en (★) prouve que la contribution de (★★) est contrôlable.

Les composantes de $\| x-y \| \nabla_x \delta(x, y)$ par rapport à la base $\partial/\partial x_j$ sont :

$$x_j - y_j + O(\| x-y \|^2)$$

et l'on trouve que :

$$\| x-y \| \nabla_x \delta(x, y) e^{-\| x-y \|^2/4t} t^{-(n/2)-1}$$
$$= \left( \sum_{j=1}^{n} (x_j - y_j) \frac{\partial}{\partial x_j} \right) \left( e^{-\| x-y \|^2/4t} t^{-(n/2)-1} + O(\| x-y \|)^2 e^{-\delta^2(x, y)/4t} t^{-(n/2)-1} \right).$$

On a déjà vu comment estimer des termes semblables, on se retrouve face à :

$$\mathbf{1}_{\beta,\, P_i}(x) \int_0^1 \| \bar{\nabla}_x \int_M \bar{\mathscr{P}}_t(x-y) [\mathbf{1}_{2\beta,\, P_i} f](y) \, d\sigma(y) \|^2 \, dt.$$

D'après [4]

$$\int_M \mathbf{1}_{\beta,\, P_i}(x) \left[ \int_0^1 \left\| \nabla_x \int_M \bar{\mathscr{P}}_t(x-y) \mathbf{1}_{2\beta,\, P_i}(y) f(y) \, d\sigma(y) \right\|^2 dt \right]^{p/2} d\sigma(y)$$
$$\leqq C(p) \int_M \mathbf{1}_{2\beta,\, P_i}(y) | f(y) |^p \, d\sigma(y)$$

où

$$\bar{\mathscr{P}}_t(x-y) = e^{-\| \mathrm{Exp}_{P_i}^{-1}(x) - \mathrm{Exp}_{P_i}(y) \|^2/4t} t^{-n/2}$$

ce qui termine la preuve du théorème.

## BIBLIOGRAPHIE


[1] Th. AUBIN, *Espaces de Sobolev sur les variétés riemanniennes* (*Bull. Soc. Math.*, vol. 100, 1976, p. 149-173).

[2] R. AZENCOTT, *Géodésiques et diffusion en temps petit* (*Astérisque*, 1984-1985, p. 19-31).

[3] R. L. BISHOP et R. J. CRITTENDEN, *Geometry of Manifolds*, New York, Academic Press, 1964.

[4] A. P. CALDERON et A. TORCHINSKY, *Parabolic maximal functions Associated with Distribution* (*Advances in Math.* vol. 16, 1975, p. 1-64).

[5] S. Y. CHENG, P. LI et Sh. YAU, *On the Upper Estimate of the heat Kernel of a Complete Riemannian Manifold* (*Amer. J. Math.* vol. 103, 1981, p. 1021-1063).

[6] A. DEBIARD, B. GABEAU et E. MAZET, Publications R.I.M.S., vol. 12, vol. 12, 1976-1977, p. 391-425.

[7] M. DOMINIQUE, *Estimées des coefficients du laplacien d'une variété riemannienne* (*Bull. Soc. Math. Fr.* vol. 102, 1978, p. 401-414).

[8] H. DONNELLY, *Asymptotics Expansions for the Compact Quotient of Properly Discontinuous Groups. Ill* (*J. Math.*, vol. 23, 1979, p. 485-496).

[9] R. GANGOLI, *Asymptotic behavior of Spectra of Compact Quotient of Certain Symetric Spaces* (*Acta Math.*, vol. 121, 1968, p. 151-192).

[10] C. HERZ, *Sur le phénomène de Kunze et Stein* (*C. R. Acad. Sci., Paris*, vol. 271, 1970, p. 491-493).

[11] N. LOHOUE et Ph. ANKER, *Multiplicateurs sur certains espaces symétriques*, Preprint Orsay, 1984.

[12] N. LOHOUE et Th. RYCHNER, *Die Resolvente von Δ auf symmetrischen Raeumen vom nichtkompakten Typ.* (*Comment. Nath. Helv.*, vol. 57, 1982, p. 445-468).

[13] N. LOHOUE, *Fonction maximale sur les variétés de Cartan-Hadamard* (*C.R. Acad. Sci. Paris*, 300, 1985).

[14] N. LOHOUE, *Comparaison des champs de vecteurs et du Laplacien sur une variété riemannienne à courbure non positive*, Prépublication d'Orsay, 1982.

[15] F. MAGNUS et R. P. SONI, *Formulas and Theorems for Special Functions of Math. Physics*, Frundlehren, 52, Springer, 1966.

[16] H. P. MCKEAN, *An upper bound of the spectrum of manifold of negative curvature* (*J. Diff. Geom.*, vol. 4, 1970, p. 359-366).

[17] P. A. MEYER, *Démonstration probabiliste de certaines inégalités de Littlewood-Paley* (*Séminaire de Probabilités*, Univ. de Strasbourg; *Lecture Notes*, n° 511, p. 125-175).

[18] E. M. STEIN, *Topics in Harmonic Analysis Related to Littlewood-Paley Theory*. (*Ann. Math. Studies*, Princeton Univ. Press, 1972).

[19] E. M. STEIN, *Singular Integrals and Infferentiability Properties of Functions*, Princeton Univ. Press, 1970.

[20] N. VAROPOULOS, *Aspects of probabilistic Littlewood-Paley theory* (*J. Funct. Anal.*, vol. 38, 1980, p. 25-61).

(Manuscrit reçu le 17 septembre 1985,
révisé le 19 août 1987).

Noël LOHOUE,
Université de Paris-Sud,
Unité associée n° 757,
Analyse harmonique
Mathématique,
Bâtiment n° 425,
91405 Orsay Cedex.