ADOLPHE. MARTIN

Mémoire sur les méthodes employées pour la détermination des courbures des objectifs, accompagné de Tables propres à en abréger le calcul

Annales scientifiques de l'É.N.S. 2e série, tome 6 (1877), p. 3-61 (supplément)

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1877_2_6__S3_0>

MÉMOIRE

SUR LES MÉTHODES EMPLOYÉES

POUR LA

DÉTERMINATION DES COURBURES DES OBJECTIFS,

ACCOMPAGNÉ

DE TABLES PROPRES A EN ABRÉGER LE CALCUL,

PAR M. ADOLPHE MARTIN,

DOCTEUR ÈS SCIENCES.

Les progrès incessants de l'Astronomie physique ont fait sentir la nécessité de construire des instruments de plus en plus puissants et parfaits.

Les difficultés d'obtenir des disques de verre suffisamment grands et exempts de tous défauts, susceptibles d'être associés pour donner des objectifs convenablement achromatiques, ont été écartées; et les méthodes si ingénieuses et si sûres de notre regretté L. Foucault ont permis d'obtenir une telle perfection dans l'exécution, qu'on peut espérer satisfaire les exigences les plus grandes de la Science.

Les physiciens, lorsqu'ils ont à leur disposition les échantillons des verres à employer, sont en possession de procédés suffisants de mesure des indices des rayons lumineux de toutes réfrangibilités, et le manque d'indications des moyens de déterminer les courbures à donner aux objectifs est seul à regretter.

Le *Traité d'Astronomie physique* de Biot contient, il est vrai, les notions théoriques sur lesquelles on peut s'appuyer pour cette détermination; mais elles ne sont pas présentées sous une forme facilement accessible à la pratique. C'est cette lacune que je me suis efforcé de combler dans le Mémoire que j'ai l'honneur de présenter à l'Académie.

Il renferme un résumé historique des travaux des grands géomètres qui ont étudié le problème de l'objectif astronomique, des formes qu'ils ont successivement proposées de lui donner, soit pour rendre les calculs plus faciles, soit pour lui faire acquérir des qualités qu'ils regardaient comme importantes.

Deux méthodes ont été proposées par eux. Dans l'une on cherche la valeur de l'aberration des rayons homogènes pour un point situé à une certaine distance du centre de la lentille, et exprimant qu'elle doit être nulle : on a ainsi entre les courbures la relation nécessaire pour que l'aberration de sphéricité soit détruite; puis, annulant aussi l'expression de l'aberration chromatique des rayons centraux de diverses réfrangibilités, on en déduit une nouvelle relation qui, combinée à la première, permet de détruire à la fois les deux aberrations. C'est la méthode *directe* employée par Clairaut, Euler, d'Alembert, Lagrange, et, plus tard, par W. Herschel.

L'autre méthode, dite *indirecte*, est due au professeur Klügel, de Hall (1778); elle a été suivie par Bohnenberger, Littrow, etc. Elle consiste à supposer à la première lentille une forme qui réponde à certaines conditions, puis à donner à la seconde des courbures qui détruisent les aberrations de la première, et cela en suivant par la voie trigonométrique la marche d'un rayon lumineux dans ses réfractions successives par les surfaces des lentilles. La destruction des aberrations n'étant généralement pas atteinte par le premier essai, on procède, par approximations successives, jusqu'à ce que le point de convergence de ce rayon et de l'axe soit constant, quelles que soient sa réfrangibilité et la position du point où il a rencontré la première surface.

Moins avantageuse que la première au point de vue de la recherche des courbures, cette méthode est précieuse pour vérifier avec quelle précision un objectif remplit les conditions requises; et dans certaines circonstances elle est la seule qui puisse être employée. Je les donne toutes les deux, débarrassées de ce qui, se présentant sous une forme trop générale, deviendrait étranger au sujet.

Les équations données par la méthode directe renferment des coefficients dont le calcul est assez long pour laisser prise à des erreurs; j'ai pensé qu'il serait utile de publier les Tables de ces coefficients, que j'ai dressées pour mon usage personnel, et je montre, par quelques exemples, comment on peut les appliquer au calcul des diverses formes proposées par les différents géomètres et dont je discute la valeur relative.

1. Tous les travaux des géomètres qui se sont occupés du perfectionnement de la lunette astronomique n'ont pas la même tendance. Les uns traitent particulièrement de l'établissement des formules relatives à la formation des images par les lentilles, du lieu où elles se produisent, des distances focales, du champ et de l'éclairement des lunettes, et se rapportent peut-être plus encore au perfectionnement de l'oculaire qu'à celui de l'objectif. Ils sont nombreux et leurs auteurs ne sont pas les moins célèbres; ce sont : Descartes, Huyghens, Newton, Cotes, Euler, Boscowich, Lagrange, et, de nos jours, Möbius, Gauss, Biot et M. Airy.

Le sujet des autres est bien aussi la formation des images par les lentilles, mais plus spécialement au point de vue de la construction des objectifs de lunettes. Ils sont dus à Euler, Clairaut, Klingenstierna, d'Alembert, Jeaurat; puis, plus tard, à Klügel, Bohnenberger, Gauss, Herschel, Littrow, Biot et Stampfer.

Nous allons étudier ce que chacun de ces derniers peut nous offrir d'utile au but que nous nous proposons, soit par le progrès qu'il fait faire à la méthode, soit par les qualités qu'il tend à donner à l'objectif qu'il propose.

2. On sait que les lunettes à objectif simple ne pouvaient donner que des images dépourvues de netteté, parce que, d'une part, les rayons qui tombent au bord ou au milieu de l'objectif n'ont pas le même point de convergence, ce qui constitue ce qu'on appelle l'*aberration de sphéricité*, et que, d'autre part, les rayons de couleurs différentes qui forment la lumière venant de l'objet à observer, étant inégalement réfrangibles, forment leurs foyers en des points différents : c'est l'*aberration de réfrangibilité*. Par suite de ces deux circonstances, l'image d'une étoile donnée par une telle lunette était donc formée d'une série d'images de diverses couleurs, occupant des lieux différents. Cela pro-

duisait une confusion à laquelle on s'est proposé de remédier en associant à l'objectif simple une autre lentille d'une matière différente qui, exerçant sur chacun des rayons une action contraire à celle de la première, ramène définitivement en un même point de convergence aussi bien les rayons centraux ou marginaux de même réfrangibilité que les rayons de toute autre couleur (dans les limites où cette dernière condition est réalisable).

C'est en cela que consiste le double problème de l'achromatisme et de l'aplanétisme; et pour savoir exactement par qui il a été posé et à qui revient l'honneur de la réalisation, il faut consulter les volumes de l'*Histoire de l'Académie des Sciences de Paris* pour 1756 et 1765 d'une part, et de l'autre les additions au deuxième volume de la traduction française de l'*Optique* de Smith, par le P. Pézénas, où l'historique de cette découverte se trouve complétement détaillé. Nous allons le résumer brièvement.

3. Dans un travail inséré, en 1747, dans les *Mémoires de l'Académie de Berlin*, Euler, se fondant sur l'achromatisme de l'œil et en même temps sur sa nature composée de divers milieux, conclut que ces deux circonstances devaient avoir entre elles un rapport nécessaire, et que, par l'emploi de milieux convenables, on devait pouvoir réaliser aussi une lunette exempte de dispersion, et il indique la voie analytique qui devait conduire au résultat qu'il espérait. A ces conclusions, un savant opticien de Londres, J. Dollond, opposa la huitième expérience de la Proposition III, Livre I, IIe Partie de l'*Optique* de Newton, d'après laquelle, toute réfraction entraînant à une dispersion proportionnelle, l'une ne pouvait être détruite sans l'autre. Euler céda devant une pareille autorité; mais le grand nom de Newton n'arrêta pas Klingenstierna, célèbre professeur de l'Université d'Upsal, qui soumit ladite proposition à un examen approfondi et prouva mathématiquement qu'elle conduisait à des conséquences contradictoires. Il fit remettre, en 1755, un Mémoire sur ce sujet à J. Dollond, qui répéta les expériences de Newton, et, les trouvant inexactes, entreprit de réaliser l projet d'Euler avec des lentilles de verre et d'eau d'abord, puis avec du cristal anglais associé au verre à glaces. Le succès couronna son entreprise et la Science fut dotée d'une puissance nouvelle.

Les Mémoires scientifiques ne parlent pas de la légende de Hall et de ses deux ouvriers habitant deux faubourgs de Londres, etc. Le Parlement put bien lui accorder une consolation, mais la Société royale de Londres sanctionna les titres de Dollond en lui accordant la médaille de Copley.

4. Les données d'après lesquelles l'objectif achromatique doit être réalisé sont, on le sait, les suivantes :

1° La longueur focale qu'il doit avoir;

2° La relation qui exprime que les rayons centraux ou marginaux de la même réfrangibilité moyenne doivent converger en un même point;

3° La relation par laquelle les rayons centraux de diverses réfrangibilités convergeront également en ce même point.

Les inconnues, qui sont les quatre rayons de courbure des deux verres, étant en plus grand nombre que les relations données, le problème est indéterminé. Chacun des auteurs que nous avons cités a proposé, pour le déterminer, une quatrième condition, dans le but soit de donner de nouvelles qualités à la lunette, soit de rendre le travail plus facile, soit encore de simplifier les calculs qui sont, en général, assez prolixes.

5. Tout entier à ses recherches, Dollond n'ayant pas indiqué la route qu'il avait suivie dans le choix de ses verres et des courbes qu'il leur avait données, Clairaut entreprit de traiter le sujet qui nous occupe à l'aide d'une théorie complète, « pour n'avoir pas, dit-il, à copier servilement les lunettes de Dollond, ce qui eût peut-être été inutile, mais à coup sûr humiliant ». Cette théorie est contenue dans trois Mémoires insérés dans les volumes des années 1756, 1757, 1762 des *Mémoires de l'Académie des Sciences*. « Il y examine, avec le plus grand scrupule, la différence de réfrangibilité des différents verres ou cristaux qu'il emploie, la différente forme qu'on doit leur donner, les différentes combinaisons qu'on en peut faire, et le degré d'avantage ou de désavantage qui en résulte, et il tire de toutes ces discussions les différentes constructions des lunettes achromatiques ou sans couleurs; et l'expérience, souverain juge en cette matière, a suivi pas à pas toutes ses détermi-

nations. Il comptait parfaire son œuvre en donnant des Tables calculées pour les différents verres employés et un Précis de sa théorie à l'usage des opticiens, mais la mort ne lui en a pas laissé le temps. » (*Éloge de Clairaut*, 1765).

Il n'y a pas lieu, eu égard au but que nous nous proposons, de trop insister sur la méthode qu'il a suivie et qui s'est perfectionnée entre les mains des géomètres qui sont venus après lui; mais nous devons remarquer que, parmi les formes d'objectif qu'il indique comme les plus avantageuses, il s'en trouve une que l'expérience a sanctionnée et qui, bien qu'applicable même à de grands objectifs, est exclusivement employée pour les petits. C'est celle dans laquelle les surfaces en contact du crown et du flint, ayant même rayon de courbure, s'appliquent exactement l'une sur l'autre dans toute leur étendue. Cette condition, jointe aux trois autres que nous avons indiquées plus haut, détermine complétement le problème et permet d'obtenir les quatre rayons de courbure de l'objectif. Nous y reviendrons dans la suite.

6. Quelques années plus tard, d'Alembert, reprenant le même sujet avec de nouveaux développements, donne, dans les volumes de l'Académie pour 1764, 1765 et 1767, trois Mémoires qui portent le titre d'*Observations sur les lunettes astronomiques*. Il y passe en revue un certain nombre de conditions nouvelles qui peuvent être choisies pour limiter le problème. En particulier, il propose, comme Clairaut le faisait aussi, de donner à l'objectif une forme qui permettrait de détruire l'aberration de sphéricité, non pas seulement pour les rayons de réfrangibilité moyenne comme on le fait ordinairement, mais aussi pour les rayons de toutes couleurs (*Opuscules*, t. III, art. 742). Cette idée a encore été reprise en 1818 (*Zeitschrift für Astronomie*, Lindenau et Bohnenberger) par Gauss, qui paraît avoir ignoré la priorité de Clairaut et d'Alembert. J.-W. Herschel la taxe un peu à tort de puérile (1821). Nous reviendrons plus tard sur cette solution de notre problème.

Il propose encore de corriger l'objectif, non-seulement pour les rayons partis d'un point pris sur l'axe, mais aussi pour les rayons venant d'un point situé en dehors de cet axe; en d'autres termes, de rendre le champ tout entier également parfait autant que cela dépend de l'objectif.

Enfin il insiste avec quelque complaisance sur un moyen ingénieux, inventé par lui pour modifier dans certaines limites, mais aux dépens de l'aplanétisme, l'état d'achromatisme de son objectif, en faisant varier l'écartement entre les deux verres (deuxième Mémoire, 1765, p. 71 et suivantes). Ce procédé, encore employé dans la pratique à titre de renseignement sur les corrections à faire subir aux rayons de courbure de l'objectif, a été étudié d'une manière complète, sous la forme de problèmes, par J.-W. Herschel (*Traité de la lumière*, §§ 479 à 483), qui montre comment, par son emploi, on peut parvenir à mesurer avec assez d'exactitude la valeur des rapports des pouvoirs dispersifs des deux verres de l'objectif. Mais Littrow, d'une part (*Zeitschrift für Physik*, Baumgartner et Ettinghausen, t. IV, p. 257), et Biot, de l'autre, ont démontré combien serait défectueuse cette disposition si elle était définitive.

7. Dans la période comprise entre 1757 et 1767, Euler publia dans divers volumes de l'*Histoire de l'Académie de Berlin* une série de Mémoires qui contribuèrent à fixer la théorie des lunettes. Les *Mémoires de l'Académie de Paris* ont reçu de lui un précis d'une théorie générale de la Dioptrique, qui prépare le lecteur à l'étude de la *Dioptrique* qu'il a publiée à Saint-Pétersbourg en 1770.

L'ensemble de ces travaux renferme ce que la science théorique a pu produire alors de plus parfait sur le sujet qui nous occupe, et sa *Dioptrique* en particulier est restée pendant longtemps le seul ouvrage consulté par ceux qui voulaient étudier cette question.

8. La méthode suivie jusqu'alors par les géomètres était toujours à peu près la même. Ils cherchaient l'expression de l'aberration des rayons homogènes passant par un point situé à une certaine distance du centre de la lentille et, égalant cette expression à zéro, ils avaient ainsi la relation entre les courbures qui détruisait l'aberration de sphéricité; puis, cherchant la valeur de l'aberration chromatique des rayons centraux de diverses couleurs, ils l'égalaient aussi à zéro : on en déduisait une nouvelle relation qui, combinée avec la première, permettait de détruire à la fois les deux aberrations.

Cette manière de procéder eût été irréprochable si, dans les expressions des aberrations, on eût pu employer les valeurs exactes des sinus qui y entrent; mais, pour éviter une complication excessive, il a fallu se contenter des deux premiers termes de la série qui les représente. L'erreur qui en résulte n'est pas considérable, mais il était utile de trouver un moyen de contrôler les valeurs obtenues.

Le professeur Klügel, de Hall, donna dans le treizième volume des *Commentaires de Göttingen* (1778), sous le titre de *Dioptrique analytique*, un premier essai d'une méthode nouvelle, qui consiste à suivre trigonométriquement la marche des rayons à travers toutes les surfaces. Plus tard il revint sur le même sujet pour le perfectionner (vol. XXXIV des *Annales de Gibbert*, 1810). Mais si sa méthode convient parfaitement comme moyen de contrôle de résultats obtenus autrement, elle ne fournit qu'indirectement, et par voie d'approximations successives, les valeurs des rayons de courbure : elle est donc en cela inférieure à l'autre méthode, mais peut suppléer cependant à son impuissance dans certains cas où le calcul direct devient impossible. Elle a été surtout employée par son inventeur, par Bohnenberger, et enfin par Littrow.

Klügel avait proposé d'abord, comme condition définissant le problème, de rendre la lentille de crown équiconvexe; puis, dans une autre combinaison, il donna au rapport des rayons de la première et de la seconde surface de la lentille de crown la valeur de $2 - n$ à n environ $\frac{1}{3}$. Les angles d'entrée et de sortie du rayon lumineux sont alors égaux, et sa déviation est la moindre possible.

10. Bohnenberger (*Zeitschrift für Astronomie*, Lindenau et Bohnenberger, t. I, 1816) critique le rapport choisi en ce qu'il laisse subsister, pour les rayons pour lesquels le calcul n'a pas été fait, une trop forte aberration, et montre, sous ce point de vue et sous celui de la correction chromatique au centre et aux bords, que le rapport de 2 à 3 convient mieux que celui de 1 à 3.

11. La méthode de Klügel a été reprise de nouveau par J.-J. Littrow (*Zeitschrift für Physik und Mathematik*, Baumgartner et Ettinghausen, 1827), qui l'expose d'une manière très-nette, à l'aide d'une notation par laquelle l'application en devient plus symétrique et plus facile. Il la présente sous la forme de deux problèmes.

Le premier consiste à chercher si, dans un objectif déjà construit, ou seulement calculé d'après une règle donnée, le foyer des rayons centraux homogènes est le même que celui des rayons marginaux, et si les foyers des rayons centraux diversement colorés coïncident avec les premiers.

Dans le second, il se propose de déterminer les courbures d'un objectif de matières données, en prenant pour exemple le cas où la lentille de crown est équiconvexe, ainsi que l'avait fait primitivement Klügel. Mais, tandis que celui-ci, après avoir choisi les rayons de courbure de la lentille de crown, comme nous l'avons indiqué, cherchait à détruire l'aberration de sphéricité par la troisième surface, puis la dispersion chromatique par la quatrième, sans tenir compte de l'aberration que ramenait cette quatrième réfraction, parce qu'il la considérait comme négligeable, Littrow, au contraire, après avoir admis une valeur approchée de R_3, le premier rayon de la deuxième lentille, et en avoir déduit la valeur correspondante de R_4 par la considération de l'achromatisme, soumet l'objectif ainsi obtenu au contrôle indiqué au premier problème. Alors, si les foyers des diverses sortes de rayons coïncident, l'objectif est déterminé avec exactitude; mais, si cette coïncidence n'a pas lieu, il essaye une nouvelle valeur de R_3 et de R_4 correspondant, et de la variation que ce changement apporte dans la situation relative des foyers, il déduit suivant la méthode des approximations successives la valeur d'une nouvelle correction à faire subir à R_3 et à R_4, et ainsi de suite jusqu'à ce que la coïncidence des divers foyers soit suffisamment établie.

Quelques applications numériques données par lui mettent cette méthode à la portée de tous ceux à qui le calcul trigonométrique le plus élémentaire n'est pas complétement étranger. Plus tard il a complété son travail en donnant des Tables qui, à l'aide d'un calcul arithmétique très-simple, permettent de déterminer assez exactement les dimensions d'un objectif dont les verres ont des indices de réfraction et des pouvoirs dispersifs connus.

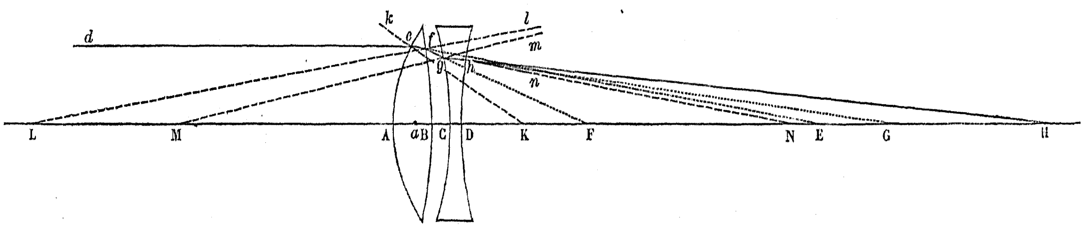
L'usage de ces Tables, qui ont été reproduites par Prechtl, est assez répandu dans la pratique en Allemagne.

12. Le problème de la vérification de l'aplanétisme et de l'achromatisme d'un objectif est assez important en lui-même et assez peu

connu en France pour qu'il me paraisse utile de donner ici l'exposé qu'en fait Littrow, d'après Klügel, en l'accompagnant de la figure donnée par ce dernier dans son Mémoire de 1810.

Nous appellerons, suivant la notation usuelle, n et n' les indices de réfraction des deux verres employés, dn et dn' leur dispersion ou différence des indices pour deux rayons donnés, et, pour abréger, nous poserons $\frac{dn}{dn'} = \pi$. Les rayons des deux surfaces de la première lentille comptées en venant de l'objet seront R_1 et R_2, ceux de la deuxième R_3 et R_4. Je considère comme positifs les rayons des surfaces qui sont convexes vers l'objet; les rayons des surfaces qui lui présentent leur concavité seront négatifs. Nous désignerons par a l'angle d'incidence que fait avec la première normale de la première surface réfringente le rayon parallèle à l'axe (le seul qu'il y ait lieu de considérer s'il ne s'agit que de la lunette astronomique); l'angle de réfraction correspondant à a sera α, b sera l'angle de deuxième incidence, β l'angle de réfraction correspondant. Pour la deuxième lentille, les angles analogues seront a', α', b', β.

Fig. 1.



Les prolongements successifs du rayon considéré après les diverses réfractions qu'il subit de la part des lentilles coupent l'axe en des points dont les distances aux première, deuxième, troisième et quatrième surfaces réfringentes sont appelées (dans leur ordre) A, B, A', B', et enfin les angles formés avec l'axe en ces points par le rayon réfracté sont désignés par (A), (B), (A'), (B'); soit enfin e l'épaisseur de la première lentille, e' celle de la deuxième, et E l'écartement des deux verres pour tenir compte de cette quantité, qui est généralement très-petite.

Cela posé, les diverses directions du rayon réfracté forment, avec les rayons des surfaces et avec l'axe, des triangles rectilignes dans lesquels les angles sont a, α, b, β; a', α', b', β' et (A), (B), (A'), (B'). La résolution de ces triangles s'obtient facilement par les expressions connues de la Trigonométrie rectiligne, et en tenant compte du signe des rayons des surfaces on a, pour la première réfraction du rayon,

$$
(\mathrm{I})\qquad
\left\{
\begin{aligned}
&\sin\alpha = \frac{1}{n}\sin a = \frac{y}{R_1},\\
&(A) = a - \alpha,\\
&A = \frac{R_1 \sin\alpha}{\sin(A)} + R_1;
\end{aligned}
\right.
$$

pour la deuxième réfraction,

$$
(\mathrm{II})\qquad
\left\{
\begin{aligned}
&\sin b = \frac{A + R_2 - e}{R_2}\sin(A),\\
&\sin\beta = n\sin b,\\
&(B) = (A) + \beta - b,\\
&B = R_2\frac{\sin\beta}{\sin(B)} - R_2;
\end{aligned}
\right.
$$

pour la troisième,

$$
(\mathrm{III})\qquad
\left\{
\begin{aligned}
&\sin a' = (R_3 - B + E)\frac{\sin(B)}{R_3},\\
&\sin\alpha' = \frac{1}{n'}\sin a',\\
&(A') = (B) + \alpha' - a'.\\
&A' = R_3 - R_3\frac{\sin\alpha'}{\sin(A')};
\end{aligned}
\right.
$$

et enfin, pour la quatrième,

$$
(\mathrm{IV})\qquad
\left\{
\begin{aligned}
&\sin b' = (R_4 - A' + e')\frac{\sin A'}{R_4},\\
&\sin\beta' = n'\sin b',\\
&(B') = A' + b' - \beta',\\
&B' = -R_4 - R_4\frac{\sin\beta'}{\sin(B')}.
\end{aligned}
\right.
$$

Ces expressions sont absolument exactes, quelque grand que soit l'angle d'incidence a du rayon.

Mais, pour trouver ces mêmes valeurs de A, B, A', B', dans l'hypothèse où le rayon rencontre la première surface réfringente à une distance très-petite de l'axe, nous n'avons, dans les équations précédentes, qu'à admettre que l'angle a est assez petit pour qu'on puisse faire $\sin a = a$, $\sin \alpha = \alpha$; alors les quatre groupes d'équations ci-dessus nous donnent

$$(\mathrm{V})\quad \left\{\begin{aligned} \frac{R_1}{A} &= \frac{n-1}{n}, \\ \frac{R_2}{B} &= \frac{nR_2}{A-e} + n - 1, \\ \frac{R_3}{A'} &= \frac{R_3}{n'(B-E)} + \frac{n'-1}{n'}, \\ \frac{R_4}{B'} &= \frac{n'R_4}{A'-e'} + n' - 1; \end{aligned}\right.$$

mais comme, des quatre grandeurs A, B, A', B', la dernière est de beaucoup la plus importante, comme donnant la distance du foyer des rayons après la quatrième réfraction, comptée à partir de la dernière surface réfringente, il sera convenable de chercher la valeur de B', considérée simplement comme fonction de n, n', e, e' et E, expression qu'on obtiendra en éliminant les trois quantités A, B, A' dans les équations (V).

Pour simplifier cette expression, nous négligerons les puissances deuxièmes et au-dessus des petites quantités e et e', qui, surtout dans les grandes lunettes, sont peu importantes, et, en outre, nous ferons $E = 0$, parce que, en réalité, les deux surfaces intérieures de l'objectif ne sont séparées que par de minces feuilles d'étain, et qu'elles seraient même amenées au contact s'il n'en devait résulter des compressions et des altérations de surfaces qu'il convient d'éviter.

Cela posé, les équations (V) donnent

$$(\mathrm{VI})\quad \left\{\begin{aligned} \frac{1}{B'} = (n-1)\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right) + (n'-1)\left(\frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_4}\right) + \frac{(n-1)^2 e}{nR_1^2} \\ + \left[(n-1)\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right) + \frac{n'-1}{R_3}\right]^2 \frac{e'}{n'}. \end{aligned}\right.$$

13. Ces expressions nous mettent à même de soumettre un objectif à un examen très-sévère sous tous les points de vue.

D'abord, si l'on connaît n, n', dn, dn', et les épaisseurs e et e' des deux lentilles, on peut, à l'aide de l'équation (VI), trouver la valeur B′ de la distance focale à partir de la quatrième surface.

Si l'on a pris pour n et n' leur valeur moyenne, on aura B′ pour les rayons jaunes. Si, dans la même équation, on met ensuite à la place de n et de n' leurs valeurs $n+dn$ et $n'+dn'$, on aura B′ pour les rayons violets; et, en mettant $n-dn$ et $n'-dn'$, on aura B′ pour les rayons rouges; et, si ces trois valeurs de B′ sont identiques, il est évident que, dans l'objectif double donné, l'aberration chromatique est détruite pour les rayons centraux.

Ensuite, pour s'assurer si l'aberration sphérique est détruite, on calcule B′, à l'aide des équations (I) à (IV), en se servant des valeurs moyennes de n et de n', et, si la valeur de B′, ainsi obtenue, coïncide avec celle que fournit l'équation (VI), il est évident que l'aberration de sphéricité est détruite ou, en d'autres termes, que tous les rayons d'indice moyen, aussi bien ceux qui tombent au centre que ceux qui tombent sur les bords de l'objectif sous un angle de a^0, viennent, après la quatrième réfraction, se réunir au même point de l'axe, ce qui est, pour la netteté de la vision, une qualité essentielle à toute bonne lunette.

Enfin, pour être sûr que les rayons marginaux donnent une image achromatique, on reprend la résolution des équations (I) à (IV), en mettant $n+dn$ et $n'+dn'$ à la place de n et de n' pour les rayons violets, et $n-dn$, $n'-dn'$ pour les rayons rouges; et, si les deux valeurs de B′, ainsi obtenues, s'accordent, l'aberration chromatique est aussi détruite pour les rayons marginaux, et l'objectif répond à toutes les conditions nécessaires à la netteté de la vision, en faisant abstraction des autres propriétés matérielles, telles que la limpidité et l'homogénéité de la matière, etc., qui ne peuvent entrer dans le calcul.

L'exposé qui précède suffit pour guider le lecteur dans la vérification d'un objectif quelconque pour lequel n, n', dn, dn', R_1, R_2, R_3, R_4 sont connus. Littrow en fait l'application à deux exemples, l'un d'après d'Alembert, l'autre d'Herschel; mais, dans les deux, il commet des erreurs graves sur la détermination du rapport $\frac{dn}{dn'}$ et sur le choix de l'angle d'incidence du rayon sur la première surface, qu'il prend beaucoup plus grand qu'on ne peut l'admettre, ce qui le conduit à rejeter, comme mauvais, des objectifs qui remplissent très-bien, au contraire, les conditions du problème. Nous aurons, plus tard, à vérifier un objectif d'Herschel d'après cette méthode, et nous pourrons reconnaître que, loin de présenter les imperfections que lui attribue Littrow, il offre, au contraire, toutes les qualités désirables.

14. La méthode suivie par les géomètres qui avaient précédé Klügel a été reprise et perfectionnée par J.-F.-W. Herschel, dans son Mémoire *Sur les aberrations des lentilles composées et sur les objectifs* (*Philosophical Transactions,* vol. CXI; 1821). Il y donne une théorie complète de ces systèmes optiques, dans laquelle il établit les relations qui expriment la valeur des aberrations des surfaces et des lentilles; il étudie ensuite les moyens qui permettent de rendre nulles ces aberrations, et arrive ainsi à des équations facilement résolubles, qui fournissent avec exactitude les courbures qu'il convient de donner à un objectif pour lui faire acquérir les qualités requises.

Dans les formules qu'il donne, il emploie les inverses des quantités qu'on fait ordinairement entrer dans ce genre de calcul. A la longueur focale, il substitue le *pouvoir* de la lentille; au rayon, la *courbure;* à la distance du point lumineux, sa *proximité,* etc. Les propositions de l'optique géométrique et ses notations prennent ainsi une forme plus simple et plus claire, qu'il y aurait tout avantage à conserver.

Quelques années plus tard, le professeur Simon Stampfer, de l'Institut impérial et royal polytechnique de Vienne, a, dans le volume XIII de l'*Annuaire* de cet Institut (1828), reproduit, avec quelques modifications, le travail d'Herschel, en employant la même notation que lui; mais il se proposait surtout de retrouver les bases sur lesquelles s'était appuyé Fraunhofer pour arriver à construire les objectifs si parfaits dont il a doté la Science.

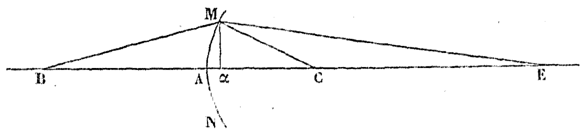
Pour atteindre ce but, Stampfer commença par déterminer, à l'aide d'une méthode indirecte, les indices, les rapports de dispersion et les courbures de sept objectifs de Fraunhofer, et, comparant les résultats de son analyse avec ceux de la théorie d'Herschel, il arrive à trouver entre eux une concordance parfaite, par suite de l'introduction d'une hypothèse nouvelle sur la quatrième relation, qui permet de définir le problème des objectifs.

La théorie donnée par Herschel peut non-seulement s'appliquer aux solutions particulières proposées par lui et conformes à celles qui paraissent avoir guidé Fraunhofer, mais elle permet encore de réaliser les conceptions de tous les géomètres dont nous avons parlé jusqu'ici. Il est donc à propos de la développer avec quelque soin, sans entrer cependant dans trop de généralités, nous bornant strictement à ce qui concerne spécialement l'objectif astronomique, auquel elle convient seulement, puisqu'elle suppose que le rapport de la demi-ouverture au foyer est assez petit pour qu'on puisse toujours en négliger les puissances quatrièmes et supérieures.

Foyer et aberration d'une surface sphérique réfringente.

15. Soient (*fig.* 2) MAN la coupe d'une surface sphérique réfrin-

Fig. 2.



gente, C son centre. Un rayon partant du point B, situé sur l'axe, vient, après réfraction, couper celui-ci en E.

Appelons

$D = \frac{1}{d} =$ AB la distance de B à la surface;

$F = \frac{1}{f} =$ AE la distance de E à la surface;

$R = \frac{1}{r} =$ AC le rayon de la surface réfringente;

$\mu = \frac{1}{m}$ l'indice de réfraction.

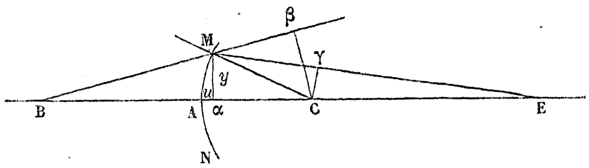
Ces quantités sont positives dans la position qu'elles occupent dans la figure et négatives dans le cas contraire.

Dans la notation proposée par Herschel, d est la *proximité* du point lumineux, f celle de son foyer conjugué, r la *courbure* de la surface.

La *fig.* 3 nous donne

$$\frac{BC}{BM} = \frac{C\beta}{M\alpha} \quad \text{et} \quad \frac{CE}{EM} = \frac{C\gamma}{M\alpha};$$

Fig. 3.



d'où

(1) $$\frac{BC}{CE} = \frac{BM}{EM}\frac{C\beta}{C\gamma},$$

$$\overline{BM}^2 = \overline{B\alpha}^2 + \overline{M\alpha}^2 = (D+u)^2 + y^2 \quad \text{et} \quad y^2 = 2Ru - u^2;$$

d'où

$$\overline{BM}^2 = D^2 + 2u(D+R),$$

$$BM = D + u\frac{D+R}{D} - \frac{1}{2}u^2\frac{(D+R)^2}{D^3} + \frac{1}{2}u^3\frac{(D+R)^3}{D^5} - \ldots;$$

de même

$$EM = F - u\frac{F-R}{F} + \frac{1}{2}u^2\frac{(F-R)^2}{F^3} - \frac{1}{2}u^3\frac{(F-R)^3}{D^5} + \ldots$$

et

$$u = \frac{1}{2}\frac{y^2}{R} + \frac{1}{8}\frac{y^4}{R^3} + \frac{1}{16}\frac{y^6}{R^5} + \ldots;$$

mais, y et u étant toujours très-petits par rapport à D, R, F, ..., on néglige les puissances de y supérieures à la deuxième, et l'on se contente de prendre

$$u = \frac{y^2}{2R}, \quad BM = D + \frac{y^2}{2}\frac{D+R}{RD}, \quad EM = F - \frac{y^2}{2}\frac{F-R}{RF},$$
$$= \frac{1}{d} + \frac{y^2}{2}(r+d), \qquad = \frac{1}{f} - \frac{y^2}{2}(r-f),$$

et, comme $\frac{C\beta}{C\gamma} = \mu = \frac{1}{m}$, l'équation (1) devient

$$m\frac{r+d}{r-f} = \frac{1 + d(r+d)\frac{y^2}{2}}{1 - f(r-f)\frac{y^2}{2}} \quad \text{ou} \quad r - f = m(r+d)\frac{1 - f(r-f)\frac{y^2}{2}}{1 + d(r+d)\frac{y^2}{2}}.$$

Multipliant les deux termes de la fraction par $1 - d(r+d)\frac{y^2}{2}$ et négligeant les termes en y^4,

$$r - f = m(r+d)\left[1 - \frac{y^2}{2} f(r-f) + d(r+d)\right];$$

d'où

$$f = (1-m)r - md + m(r+d)\frac{y^2}{2}[f(r-f) + d(r+d)].$$

La dernière parenthèse étant multipliée par $\frac{y^2}{2}$, le produit $f(r-f)$ doit être débarrassé des termes qui contiennent y et se réduire à $[(1-m)r - md]m(r+d)$; la valeur de f devient alors

$$f = (1-m)r - md + m(r+d)^2[(1-m)mr - m^2 d + d]\frac{y^2}{2}$$

ou

$$(2) \qquad f = (1-m)r - md + m(1-m)(r+d)^2[mr + (1+m)d]\frac{y^2}{2}.$$

La partie dépendante de y répond à ce qu'on appelle l'*aberration de sphéricité*.

Pour les rayons incidents infiniment voisins de l'axe,

$$y = 0 \quad \text{et} \quad f_1 = (1-m)r - md.$$

16. Soit maintenant une seconde surface, de courbure ρ et d'indice m_1, en contact avec la première, le rayon qui allait couper l'axe en E ira le couper en un autre point E', dont la proximité par rapport à la surface sera

$$f_2 = (1 - m_1)\rho - m_1 d_1,$$

et, comme ici $d_1 = -f_1$, on aura

$$f_2 = (1-m_1)\rho + m_1 f_1 = (1-m_1)\rho + m_1(1-m)r - m_1 m d.$$

Si l'ensemble de ces deux surfaces forme une lentille dont les deux faces sont plongées dans le même milieu, $mm_1 = 1$, d'où $m_1 = \mu$, et la valeur de f_2 devient

$$f_2 = (\mu - 1)(r - \rho) - d;$$

si le rayon incident est parallèle à l'axe de la lentille, $d = 0$, et la valeur particulière que prend alors f_2, et qui est la distance focale principale inverse de la lentille ou ce que nous appellerons son *pouvoir principal*, et que nous désignerons par l, est

$$l = (\mu - 1)(r - \rho);$$

de même

$$l' = (\mu' - 1)(r' - \rho'), \quad \dots .$$

Dans le cas où la proximité d n'est pas nulle, le pouvoir f de la lentille est

$$f = l - d;$$

de même, pour une seconde lentille,

$$f' = l' - d',$$

et, si cette seconde lentille est en contact avec la première, $d' = -f$; d'où il résulte que le pouvoir du système de ces deux lentilles est égal à

$$f = l + l' - d;$$

pour trois lentilles,

$$f = l + l' + l'' - d, \quad \dots .$$

17. L'équation (2) nous a donné, pour la variation de f due à l'aberration de sphéricité,

$$\Delta f = m(1 - m)(r + d)^2 [mr + (1 + m)d] \frac{y^2}{2};$$

pour une seconde surface, la variation de f se compose d'abord de celle qui est due à ce que f_1 est devenu $f_1 + \delta f_1$, ce qui fait que

$$f_2 = (1 - m)\rho + m(f_1 + \delta f_1);$$

puis, secondement, de la nouvelle aberration due à la seconde surface. Il en résulte que la variation, pour une lentille, est

$$\Delta f = \mu \delta f_1 + \delta f_2.$$

Or, d'après l'équation (2),

$$\delta f_2 = \mu(1 - \mu)(\rho - f_1)^2 [\rho\mu - (1 + \mu) f_1] \frac{y^2}{2}.$$

Si donc on met à la place de f_1 sa valeur $(1 - m)r - md = \frac{1}{\mu}[(\mu - 1)r - d]$

et se rappelant que $l = (\mu - 1)(r - \rho)$, après calculs faits, et posant

$$\begin{aligned}
\mu^3 A &= (2 - 2\mu^2 + \mu^3) r^2 + (\mu + 2\mu^2 - 2\mu^3) r\rho + \mu^3\rho^2,\\
\mu^3 B &= (4 + 3\mu - 3\mu^2) r + (\mu + 3\mu^2)\rho,\\
\mu^3 C &= 2 + 3\mu,
\end{aligned}$$

il vient pour la variation de f due à l'aberration de sphéricité pour une lentille

$$\Delta f = \frac{y^2}{2}\mu^2 l (A + Bd + Cd^2).$$

Si les rayons reçus par la lentille sont parallèles à l'axe, $d = 0$ et alors

$$\Delta f = \frac{y^2}{2}\mu^2 l A.$$

Dans le cas de plusieurs lentilles et en se rappelant que

$$\begin{aligned}
d' &= -(l - d),\\
d'' &= -(l + l' - d)\ldots,
\end{aligned}$$

$$\Delta f = \frac{y^2}{2}[\mu^2 l (A + Bd + Cd^2) + \mu'^2 l'(A' + B'd' + C'd'^2) + \ldots].$$

18. Les notions qui précèdent nous permettent de résoudre le problème de l'objectif double. Nous chercherons d'abord à trouver la relation entre les pouvoirs des deux lentilles qui le composent, d'après laquelle les rayons de diverse réfrangibilité qui tombent parallèlement dans le voisinage du centre seront amenés à converger en un même point. Les indices et pouvoirs μ, f, l devraient se rapporter au rayon le plus brillant du spectre; aujourd'hui il est plus commode de les rapporter à la raie du sodium et les mêmes quantités pour les rayons d'autre réfrangibilité seront $\mu + \delta\mu$ et $f + \delta f$. Les épaisseurs et écartements des verres continueront à être considérés comme nuls.

Dans le cas que nous étudions,

$$f = (\mu - 1)(r - \rho) + (\mu' - 1)(r' - \rho').$$

Pour les rayons dont la réfrangibilité est $\mu + \delta\mu$ dans le premier verre, elle sera $\mu' + \delta\mu'$ dans le second, et en mettant ces deux valeurs dans la relation précédente et retranchant, il vient

$$\delta f = \delta\mu(r - \rho) + \delta\mu'(r' - \rho').$$

Cette valeur doit être nulle pour que l'objectif soit achromatique.

Or, puisque

$$l = (\mu - 1)(r - \rho) \quad \text{et} \quad l' = \mu' - 1(r' - \rho')$$

ou

$$r - \rho = \frac{l}{\mu - 1} \quad \text{et} \quad r' - \rho' = \frac{l'}{\mu' - 1},$$

la condition d'achromatisme pourra s'exprimer par

$$0 = \frac{l}{\mu - 1}\delta\mu + \frac{l'}{\mu' - 1}\delta\mu'$$

ou

$$0 = l\omega + l' \quad \text{ou} \quad \omega = -\frac{l'}{l},$$

en posant

$$\omega = \frac{\delta\mu}{\mu - 1} : \frac{\delta\mu'}{\mu' - 1}$$

ou encore

$$\omega = \frac{\delta\mu}{\delta\mu'} \times \frac{\mu' - 1}{\mu - 1}.$$

$\frac{\delta\mu}{\mu - 1}$ est ce qu'on appelle le *pouvoir dispersif*, ω est donc le *rapport des pouvoirs dispersifs*, et les pouvoirs des lentilles sont entre eux comme les termes de ce rapport.

On voit facilement d'ailleurs, d'après les relations qui précèdent, que dans l'objectif achromatique on a

$$\frac{r' - \rho'}{r - \rho} = -\frac{\delta\mu}{\delta\mu'},$$

$\delta\mu$ étant ce qu'on appelle la *dispersion*.

Le rapport $\frac{\delta\mu}{\delta\mu'}$ est le *rapport de dispersion;* on le désigne souvent par π: il ne faut pas, comme l'a fait Littrow dans son étude sur un objectif d'Herschel, le confondre avec le rapport précédent ω.

19. On peut chercher à détruire l'aberration chromatique pour les rayons parallèles qui passent à une distance y de l'axe.

Les rayons d'indices μ et μ' qui sont dans ce cas coupent l'axe à une proximité marquée par

$$f=(\mu-1)(r-\rho)+(\mu'-1)(r'-\rho')+\frac{y^2}{2}[\mu^2 l\mathrm{A}+\mu'^2 l'(\mathrm{A}'-\mathrm{B}'l+\mathrm{C}'l^2)]$$

(en remarquant que la valeur, que précédemment nous avions marquée par d, est ici égale à $-l$).

Si l'on change μ en $\mu+\delta\mu$ et μ' en la valeur correspondante $\mu'+\delta\mu'$, f ne doit pas changer, c'est-à-dire que l'on doit avoir

$$0=l\omega+l'+\frac{y^2}{2}(l\omega\mathrm{X}+l'\mathrm{X}'),$$

en posant

$$\mathrm{X}=\frac{\mu^2+2}{\mu^2}r^2-\frac{4\mu-1}{\mu-1}lr-\frac{4\mu'+4}{\mu'}l'r'+\frac{3\mu^2-2\mu}{(\mu-1)^2}l^2+\frac{3\mu'+1}{\mu'-1}l'^2+\frac{6\mu'+4}{\mu'}ll',$$

$$\mathrm{X}'=\frac{\mu'^2+2}{\mu'^2}r'^2-\left(\frac{4\mu'+4}{\mu'}l+\frac{4\mu'-1}{\mu'-1}l\right)r'$$
$$+\frac{3\mu'^2+2}{\mu'^2}l^2+\frac{3\mu'^2-2\mu'}{(\mu'-1)^2}l'^2+\frac{6\mu'-2}{\mu'-1}ll'.$$

Le calcul de r et de r' serait extrêmement long; on profite de ce que le terme en y^2 est très-petit par rapport à $l\omega$ et à l', et on le néglige pour calculer les valeurs approchées de ces courbures et on les introduit dans le calcul de X et de X'.

On met alors l'équation précédente sous la forme

$$\frac{l'}{l}=-\omega\frac{1+\frac{y^2}{2}\mathrm{X}}{1+\frac{y^2}{2}\mathrm{X}'}.$$

Multipliant les deux termes de la fraction par $1-\frac{y^2}{2}\mathrm{X}'$ et négligeant les puissances de X qui sont très-petites,

$$\frac{l'}{l}=-\omega+\omega(\mathrm{X}'-\mathrm{X})\frac{y^2}{2}.$$

A l'aide de la valeur de $\frac{l'}{l}$ ainsi corrigée, on calcule les courbures r et r'.

Lorsqu'on veut achromatiser l'objectif en tous ses points, l'équation

$$o = l\omega + l' + \frac{y^2}{2}(l\omega X + l'X')$$

doit être satisfaite pour toute valeur de y, et, par suite, on doit avoir séparément

$$o = l\omega + l',$$
$$o = X - X'.$$

Ces équations sont celles qui répondent au problème posé par Clairaut, repris par d'Alembert et par Gauss ensuite.

20. Nous chercherons maintenant comment peut se corriger l'aberration de sphéricité dans l'objectif double. L'équation qui donne la variation Δf dépendant de l'aberration de sphéricité est

$$\Delta f = \frac{y^2}{2}\{\mu^2 l(A + Bd + Cd^2) + \mu'^2 l'[A' + B'(l-d) + C'(l-d)^2]\}$$

ou

$$\Delta f = \frac{y^2}{2}(M + Nd + Pd^2),$$

en posant

$$M = \mu^2 lA + \mu'^2 l'(A' - B'l + C'l^2),$$
$$N = \mu^2 lB + \mu'^2 l'(B' - 2C'l),$$
$$P = \mu^2 lC + \mu'^2 l'C',$$

ou, en remplaçant A, B, C, A', B', C' par leurs valeurs données plus haut,

$$M = \frac{\mu+2}{\mu} lr^2 - \frac{2\mu+1}{\mu-1} l^2 r + \frac{\mu'+2}{\mu'} l'r'^2 - \left(\frac{4\mu'+4}{\mu'} ll' + \frac{2\mu'+1}{\mu'-1} l'^2\right) r'$$
$$+ \frac{\mu^2}{(\mu-1)^2} l^3 + \frac{3\mu'+2}{\mu'} l^2 l' + \frac{\mu'^2}{(\mu'-1)^2} l'^3 + \frac{3\mu'+1}{\mu'-1} ll'^2,$$

$$N = \frac{4\mu+4}{\mu} lr + \frac{4\mu'+4}{\mu'} l'r' - \left(\frac{3\mu+1}{\mu-1} l^2 + \frac{3\mu'+1}{\mu'-1} l'^2 + \frac{6\mu'+4}{\mu'} ll'\right),$$

$$P = \frac{3\mu+2}{\mu} l + \frac{3\mu'+2}{\mu'} l'.$$

Pour que l'objectif soit aplanétique pour des rayons venant d'un point de proximité d, il faut que

$$M + Nd + Pd^2 = 0.$$

S'il ne doit servir que pour les rayons parallèles, il suffira de faire $M = 0$, d étant nul, et s'il doit servir dans les deux cas, la condition $M = 0$ réduira la précédente à $d(N + Pd) = 0$; les deux équations à satisfaire seront donc, dans ce cas,

$$M = 0, \quad N + Pd = 0.$$

21. Les relations qui précèdent conviennent à tout couple de lentilles, mais elles n'impliquent pas la condition d'achromatisme. Pour satisfaire à cette condition, il n'y a qu'à faire $l' = -\omega l$ dans l'équation $f = l + l'$ et il en résulte pour les pouvoirs des deux lentilles

$$l = \frac{f}{1-\omega}, \quad l' = -\frac{f\omega}{1-\omega}.$$

Les équations se simplifieront quand on substituera à l' sa valeur $= -\omega l$; on aura alors:

1° Pour donner les courbures de l'objectif aplanétique et achromatique (rayons parallèles)

$$M = 0,$$

$$(\mathrm{I}) \left\{ \begin{aligned} 0 = {} & \frac{\mu+2}{\mu} r^2 - \frac{2\mu+1}{\mu-1} lr - \frac{\mu'+2}{\mu'} \omega r'^2 + \left(\frac{4\mu'+4}{\mu'}\omega - \frac{2\mu'+1}{\mu'-1}\omega^2\right) lr' \\ & + \left[\frac{\mu^2}{(\mu-1)^2} - \frac{3\mu'+2}{\mu'}\omega + \frac{3\mu'+1}{\mu'-1}\omega^2 - \frac{\mu'^2}{(\mu'-1)^2}\omega^3\right] l^2; \end{aligned} \right.$$

2° Pour donner les courbures pour les rayons parallèles et ceux qui émanent d'un point de proximité $d = \frac{f}{n} = \frac{l+l'}{n}$

$$N + Pd = 0,$$

$$(\mathrm{II}) \left\{ \begin{aligned} 0 = (\mathrm{I}) \text{ et } 0 = {} & \frac{4\mu+4}{\mu} r - \frac{4\mu'+4}{\mu'}\omega r' - \left(\frac{3\mu+1}{\mu-1} - \frac{6\mu'+4}{\mu'}\omega + \frac{3\mu'+1}{\mu'-1}\omega^2\right) l \\ & + \left(\frac{3\mu+2}{\mu} - \frac{3\mu'+2}{\mu'}\omega\right) \frac{l(1-\omega)}{n}. \end{aligned} \right.$$

Si l'objectif ne devait servir que pour les rayons de proximité d, il faudrait, à la suite des termes de l'équation (I), ajouter le second membre de l'équation (II), après l'avoir de nouveau multiplié tout entier par $\frac{l(1-\omega)}{n}$,

$$\mathrm{M} + d(\mathrm{N} + \mathrm{P}d) = 0.$$

3° Équation à joindre à l'une des précédentes pour corriger la dispersion sur toute la surface de l'objectif :

$$(\mathrm{III}) \quad \left\{ \begin{aligned} 0 = {} & \frac{\mu^2+2}{\mu^2} r^2 - \frac{4\mu-1}{\mu-1} lr - \frac{\mu'^2+2}{\mu'^2} r'^2 + \left[\frac{\mu'^2+4}{\mu'^2} + \frac{\mu'-4}{\mu'(\mu'-1)}\omega\right] lr' \\ & + \left[\frac{3\mu'-2\mu}{(\mu-1)^2} - \frac{3\mu'^2+2}{\mu'^2} + \frac{4}{\mu'(\mu'-1)}\omega - \frac{\omega^2}{(\mu'-1)^2}\right] l^2. \end{aligned} \right.$$

Ces trois équations renferment pour inconnues les courbures r et r'; on aura les deux autres courbures ρ, ρ' en les tirant des valeurs de l et de l'

$$l = (\mu - 1)(r - \rho) \quad \text{et} \quad l' = -\omega l = (\mu' - 1)(r' - \rho'),$$

qui donnent

$$\rho = r - \frac{l}{\mu - 1}, \quad \rho' = r' + \frac{\omega l}{\mu' - 1}.$$

Leur calcul se simplifie encore si l'on prend l pour unité ; dans ce cas, le pouvoir de l'objectif achromatique est $f = (1 - \omega)$: il faut donc, pour avoir les courbures répondant à un pouvoir donné f_1, multiplier les nombres fournis par l'équation par le rapport $\frac{f_1}{1-\omega}$.

22. Dans ce résumé de la méthode d'Herschel, j'ai dû laisser de côté toutes les considérations sur l'action d'un nombre quelconque de surfaces ou de lentilles, comme étrangères au sujet restreint qui nous occupe Elles ont, du reste, été étudiées de la manière la plus complète par Euler, Lagrange, Möbius, etc.

J'ai négligé l'influence de l'épaisseur des verres, parce que les travaux de Gauss sont un meilleur guide pour traiter cette question que les méthodes jusqu'alors employées, et Stampfer, §§ 17 à 20, a montré par une analyse détaillée que, soit au point de vue de l'achromatisme, soit à celui de l'aplanétisme, dans l'objectif astronomique construit sur les données d'Herschel ou sur celles de Fraunhofer, il n'y a pas lieu de tenir compte de l'épaisseur des verres.

Il y avait d'ailleurs une autre raison pour agir ainsi; les quantités négligées dans les diverses phases du calcul ne sont pas les seules causes d'imperfection : le travail des verres ne saurait être absolument parfait et la sphéricité des surfaces qu'on admet en théorie n'est jamais complétement obtenue; les aberrations qui en résultent se combinent avec celles qui peuvent provenir des quantités négligées, de manière à faire échapper la perfection à tout calcul.

Les méthodes de L. Foucault peuvent heureusement remédier à tous ces défauts, fussent-ils même beaucoup plus graves que ceux que laissent subsister un calcul et une exécution convenables. Il ne faut donc demander à la théorie que de fournir une approximation suffisante pour que les défauts soient modérés, et les méthodes dont nous parlons permettront d'obtenir toute la perfection possible.

23. Les trois équations que nous venons d'établir n'ont pas toutes la même importance. Il est parfaitement évident que la première exprime à elle seule toutes les conditions que doit remplir l'objectif de la lunette astronomique; mais, comme elle renferme deux inconnues, elle ne peut déterminer le problème qu'avec l'aide d'une autre relation entre les mêmes inconnues. C'est le choix de cette relation auxiliaire qui a divisé les géomètres, chacun d'eux en apportant une nouvelle à l'exclusion de toutes les autres. Nous allons les passer en revue, chercher ce que chacune d'elles peut avoir d'avantageux et comment on peut l'introduire dans le calcul de l'objectif astronomique.

24. Parmi les solutions proposées par Euler, il en est une qui paraît, au premier abord, présenter des avantages : c'est celle qui consiste à rendre minimum l'aberration due à la lentille de crown. Ce résultat est atteint, comme on le sait, en faisant $\frac{r}{\rho} = -\frac{\mu(2\mu+1)}{4+\mu-2\mu^2}$ (pour $\mu = 1,524$, $\rho = 0,1366\,r$). Mais, dans les tentatives qui ont été faites dans cette voie, il résulte, d'après les calculs de Gauss, que l'aberration de sphéricité n'est détruite dans l'objectif entier que jusqu'à une distance de l'axe assez petite et qu'au delà elle est proportionnelle à y^4; on ne peut alors donner à l'objectif qu'une ouverture assez restreinte, ce qui est le contraire du but qu'on se proposait.

Si, en conservant le même rapport de $\frac{r}{\rho}$, on s'arrange de manière à détruire l'aberration au centre et vers les bords, la méthode de calcul de Klügel montre qu'il en reparaît une quantité encore trop considérable vers les $\frac{7}{10}$ de la distance du centre aux bords.

Cette forme a été abandonnée.

25. Clairaut a proposé plusieurs formes qui présentent certains avantages.

La première, sur laquelle il insiste le plus et que la pratique a sanctionnée en effet, est celle dans laquelle les surfaces des deux verres qui se regardent ont même courbure et s'appliquent exactement l'une sur l'autre. Elle offre de grandes facilités d'exécution et le centrage des verres, qui est très-important pour la beauté des images, est rendu par là plus facile et plus stable.

On lui a objecté que, pour certaines variétés de verres, le calcul donne des valeurs imaginaires pour les courbures. Cela arrive, en effet, lorsque, les indices des verres étant peu différents, le rapport des pouvoirs dispersifs n'est guère plus grand que $\frac{1}{2}$; mais cette circonstance se présente assez rarement pour qu'on ne doive pas à cause d'elle rejeter une méthode qui est la seule praticable dans le cas des petits objectifs : il vaut mieux alors changer l'un des verres.

Pour introduire cette condition dans notre calcul, il faut écrire que

$$r' = \rho = r - \frac{1}{\mu - 1} \quad \text{ou} \quad r = r' + \frac{1}{\mu - 1}$$

dans le cas où nous avons fait $l = 1$; alors on substitue cette valeur de r dans l'équation (I), qui peut être mise sous la forme

$$A r^2 - B r - C r'^2 + D r + E - F = 0,$$

et ayant posé $\frac{1}{\mu - 1} = \alpha$, on trouve, après réductions,

$$(A - C) r'^2 + (D + 2A\alpha - B) r' + A\alpha^2 + E - B\alpha - F = 0,$$

d'où

$$r' = \frac{-(D + 2A\alpha - B) \pm \sqrt{(D + 2A\alpha - B)^2 - 4(A - C)(A\alpha^2 + E - B\alpha - F)}}{2(A - C)}.$$

On trouve toutes ces quantités A, B, $A\alpha$, ... dans les Tables que j'ai dressées pour abréger le calcul des objectifs.

Le même auteur propose encore de détruire l'aberration de sphéricité pour les rayons de différentes couleurs, question que d'Alembert a étudiée aussi quelques années plus tard avec plus de détails, et que Gauss a reprise encore, ainsi que cela est dit plus haut.

Pour résoudre ce problème, il faut combiner ensemble les équations (I) et (III).

L'équation qui en résulte est du quatrième degré et a deux racines réelles. On en obtient une valeur approchée par une construction graphique et l'on corrige successivement les racines trouvées. La forme de cet objectif est désavantageuse, et M. Steinheil seul l'a réalisée une fois sur les nombres fournis par Gauss.

26. D'Alembert, outre le système dont nous venons de parler, en avait proposé d'autres. En particulier, il voulait rendre l'objectif aplanétique pour les axes obliques, de manière à donner une égale netteté à tous les points du champ admis par l'oculaire. Cette condition, peu importante dans la plupart des cas, rendrait au contraire de grands services pour les instruments méridiens qui doivent avoir un champ étendu. Elle mériterait d'être reprise.

27. Klügel avait d'abord, ainsi qu'il est dit plus haut, donné à sa lentille de crown des courbures égales; Clairaut l'avait proposé aussi, et Littrow y est revenu plus tard. Le mérite de cette disposition est de donner le maximum de pouvoir à un crown d'épaisseur limitée et, par suite, à la lunette la plus grande ouverture par rapport à sa longueur.

Le calcul de cet objectif est facile. Ayant fait $l=1$, on a

$$r=\rho=\frac{1}{2(\mu-1)}.$$

Cette valeur de r étant portée dans l'équation (I), celle-ci n'a plus que r' pour inconnue et se résout facilement. J'ai d'ailleurs dressé une Table renfermant la valeur des termes en r; elle simplifie le calcul, qui donne par cette méthode des résultats plus exacts que ceux qui sont fournis par les Tables de Littrow.

L'autre choix fait par Klügel pour les courbures du crown, c'est-à-dire

$\frac{r}{\rho} = \frac{\mu}{2-\mu}$, et celui de Bohnenberger $\frac{r}{\rho} = \frac{3}{2}$, n'offrent aucun avantage sérieux et n'ont pas été adoptés par la pratique.

28. Nous avons vu plus haut que les équations (I) et (II) donnent les courbures d'un objectif devant servir à la fois pour les rayons parallèles et pour ceux qui divergent d'un point de proximité $d = \frac{f}{n}$. D'après l'analyse qu'en a faite Stampfer, les objectifs de Fraunhofer sont construits sur cette donnée, n ayant été pris par lui égal à 40, c'est-à-dire le point lumineux étant à 40 fois la distance focale principale. Cette seconde condition paraît au premier abord ne pas avoir d'importance pour l'objectif astronomique; cependant on peut remarquer que, par suite de la réalisation de l'aplanétisme pour deux valeurs de d très-voisines l'une de l'autre, l'aberration ne saurait croître que très-lentement dans leur voisinage et pour de très-faibles variations dans les courbures. Ce résultat est d'ailleurs vérifié par une analyse directe.

Herschel a été guidé par les mêmes considérations, et il a pris d assez petit pour que, tenant compte de d, on pût négliger d^2; il n'y a alors qu'à satisfaire à l'équation (I) et à l'équation (II), dans laquelle on aura supprimé le terme en $\frac{l(1-\omega)}{n}$.

Les deux méthodes d'Herschel et de Fraunhofer donnent des résultats peu différents l'un de l'autre. Ainsi, en les appliquant à deux verres pour lesquels

$$\pi = 1,5308, \quad \mu' = 1,6165, \quad \omega = -\frac{l'}{l} = 0,631724$$

et pour une distance focale F = 60,880, Stampfer a trouvé :

	Selon Herschel.	D'après Fraunhofer, objectif du cercle méridien de Kasan.	Équation (I) et (II).
R_1...........	41,2973	41,800	41,768
R_2...........	— 16,7188	— 16,638	— 16,643
R_3...........	— 17,0497	— 16,972	— 16,970
R_4...........	— 77,2266	— 75,653	— 75,609

Ces différences sont, on le voit, assez faibles et les qualités des objectifs sont sensiblement les mêmes. L'ouverture de ces objectifs étant $2y = 4$, l'influence de l'épaisseur négligée a été calculée et a donné une variation du foyer $\Delta F = 0,00025$, quantité absolument négligeable.

Enfin, ces deux objectifs ont été soumis aux vérifications que nous donne la méthode de Klügel. On a suivi la marche d'un rayon arrivant sur la première surface sous un angle de $2^\circ 44'$, ce qui correspond à $y = 1,9694$; par suite, très-voisin des bords, puisque la demi-ouverture $= 2$.

	Objectifs	
	Fraunhofer.	Herschel.
a	2°.44′. 0″	2°.44′. 0″
α	1.47. 6,614	1.47. 6,614
(A)	0.56.53,386	0.56.53,386
A	120,39830	119,04155
b	7.48.47,412	7.42.15,112
β	12. 0.40,141	11.50.31,972
(B)	5. 8.46,115	5. 5.10,246
B	21,96992	21,98212
a'	11.52.39,100	11.42.35,295
α'	7.18.54,030	7.12.45,487
(A′)	0.35. 1,045	0.35.20,438
A′	195,1550	191,1829
b'	2. 5.18,851	2. 2.44,580
β'	3.22.38,571	3.18.28,930
(β')	1.52.20,765	1.51. 4,788
B′ foyer des rayons marginaux	60,7151	60,7126
Foyer des rayons centraux	60,7154	60,7131
Diff.	0,0003	0,0005

Ces différences devraient encore être diminuées de 0,0002, à cause de l'influence de l'épaisseur des verres. Les objectifs peuvent donc être considérés comme parfaits. Au point de vue de l'exécution, ils présentent encore cet avantage que les petits défauts inévitables de fabrication ont peut-être moins d'influence fâcheuse qu'avec toute autre forme.

Avec des verres convenablement choisis, on peut arriver à trouver, pour les surfaces en regard, ρ et r' les mêmes courbures, et alors l'objectif jouit, à la fois, des avantages que nous venons d'énumérer et de ceux que donne la méthode de Clairaut.

L'expérience a, du reste, prononcé en leur faveur et les lunettes construites par Fraunhofer ont été surpassées en dimensions, mais non en perfection.

29. Herschel a donné une Table qui renferme les rayons des quatre surfaces d'objectifs construits avec un crown d'indice 1,524 et un flint de 1,585 avec diverses valeurs du rapport ω des pouvoirs dispersifs; il y a joint les moyens d'interpolations nécessaires pour obtenir les résultats qui correspondent à d'autres indices. Les résultats de ces interpolations ont été donnés par P. Barlow; ils sont contenus dans le n° 28 du *Journal d'Édimbourg*, et Prechtl les a reproduits, mais ils ne donnent qu'une approximation insuffisante. C'est pourquoi j'ai dressé des Tables qui renferment les coefficients des équations (I) et (II), afin qu'on puisse faire facilement le calcul direct des courbures. Elles conviennent également à toute forme dans laquelle on tient compte de l'équation (I) qui renferme les conditions les plus essentielles pour un objectif astronomique. Les solutions proposées par Clairaut, Littrow seront ainsi facilement réalisées.

30. Il y a cependant telles formes avantageuses qui ne peuvent être calculées par la méthode d'Herschel. Ce sont, en particulier, celles qui conviennent aux objectifs pour lesquels l'influence de l'épaisseur peut être considérable, ou celles dont les conditions ne peuvent être représentées par des expressions algébriques. Comme exemple de ces dernières, je citerai la disposition qui a été proposée par M. Prazmowski et dans laquelle les rayons traversent l'objectif tout entier sous le minimum de déviation. Cette condition, qui en sa qualité de limite paraît présenter des avantages au point de vue de la stabilité, est remplie lorsque le produit des cosinus des angles d'incidence du rayon à chaque surface est égal au produit des cosinus des angles de réfraction correspondants, ou d'après la notation que nous avons employée dans l'exposé de la méthode de Klügel quand on a

$$\cos a \cos b \cos a' \cos b' = \cos\alpha \cos\beta \cos\alpha' \cos\beta'.$$

(*Voir* la condition analogue pour les prismes, éq. (i), § 216, *Traité de la lumière*, par Herschel, en remarquant qu'ici $\mu\mu' = \mu''\mu''' \ldots = 1$.)

Cette méthode se trouve alors en quelque sorte imposée, et l'on a, pour se guider dans les essais successifs qu'on doit faire pour arriver à satisfaire à la condition énoncée, la constance du rapport de la somme des courbures des deux verres $\frac{r-\rho}{r'-\rho'}$, qui doit rester égal à $\frac{\delta\mu'}{\delta\mu}$.

M. Prazmowski a bien voulu me communiquer les éléments d'un objectif qu'il a réalisé sur ces données.

$$\mu = 1,502, \quad \mu' = 1,6303;$$

$$\pi = \frac{\delta\mu}{\delta\mu'} = 0,45951 \quad \text{pour les rayons centraux;}$$

$$0,46236 \quad \text{pour les marginaux;}$$

$$\omega = \frac{\delta\mu}{\delta\mu'}\,\frac{\mu'-1}{\mu-1} = 0,57696;$$

$$R_1 = -R_4 = 540, \quad R_2 = R_3 = -202.$$

$$\text{Distance focale} = 685.$$

Le rayon, faisant un premier angle d'incidence $= 3°,30$, rencontre les surfaces :

	Sous les angles			
	d'incidence.		de réfraction.	
Première surface...	a	$3°.30'$	α	$2°.20'$
Deuxième » ...	b	10.39	β	9.48
Troisième » ...	a'		α'	
Quatrième » ...	b'	3.49	β'	6.14

Cet objectif, employé avec une ouverture considérable, a montré de grandes qualités.

31. On peut se demander quelles sont, en fin de compte, celles de ces solutions d'un problème indéterminé qui conviennent le mieux au sujet qui nous occupe, à la construction des grands instruments d'Astronomie. On peut répondre, d'une manière générale, que ce sont celles pour lesquelles de légères variations dans la valeur des courbures font naître les moindres défauts, celles pour lesquelles l'achromatisme et l'aplanétisme sont le plus stables. Mais les conditions pratiques se sont singulièrement modifiées depuis un certain nombre d'années. La fabrication des verres d'optique a fait de grands progrès, non-seulement au point de vue de la pureté et des dimensions des pièces qu'on peut obtenir, mais aussi à celui de la variété de leur nature chimique et physique, de telle sorte qu'on peut arriver, par cette voie, non plus seulement à adapter la forme à la nature du verre, mais à choisir une nature de verre qui convienne à la forme qu'on veut employer : c'est ce qu'on fait, en particulier, pour les objectifs de Photographie et pour ceux du microscope.

Les objectifs astronomiques peuvent aussi profiter de cette latitude, qui permettra d'employer la solution que je crois des meilleures, c'est-à-dire celle qui répond à la fois à la méthode de Clairaut ($\rho = r'$) et à celles d'Herschel et Fraunhofer. On réunit ainsi les conditions de stabilité et les avantages des deux formes, ce qui me paraît surtout désirable, parce que les défauts de travail, les résidus d'aberrations, peuvent être alors combattus sans crainte par la méthode des retouches, qui est sans doute très-puissante et permettrait de combattre même de très-graves défauts dus à l'aberration de sphéricité; mais il est infiniment plus sage de rendre les défauts les plus faibles possible d'abord, afin de pouvoir rendre ensuite les retouches plus légères et exécutables avec des outils de dimension suffisante pour assurer la continuité de la surface : c'est, du reste, de cette manière que L. Foucault entendait faire l'emploi de ses méthodes.

32. C'est dans le but de rappeler les nombreuses solutions qui ont été mises en avant pour le problème de l'objectif, et pour en faciliter le calcul, que j'ai entrepris ce Mémoire et que j'ai dressé les Tables qui suivent. Je ne me suis pas proposé, comme Herschel et Littrow, de donner des calculs tout faits, dans lesquels les opticiens n'eussent qu'à relever directement les courbures à donner à leurs verres, attendu que, comme je l'ai déjà dit, ces Tables ne conviennent pas seulement à une forme déterminée, mais aussi à toutes celles pour lesquelles le calcul direct peut être employé. Quelques mots suffiront pour faire comprendre leur disposition.

Les équations (I) et (II), dans lesquelles on a fait $l = 1$, étant mises sous la forme

$$0 = \mathrm{A}r^2 - \mathrm{B}r - \mathrm{C}r'^2 + \mathrm{D}r' + \mathrm{E} - \mathrm{F},$$

$$0 = \mathrm{G}r - \mathrm{H}r' - \mathrm{J} + \mathrm{K} + \frac{1-\omega}{n}(\mathrm{L} - \mathrm{M}),$$

la Table I donne les valeurs des coefficients

$$A = \frac{\mu + 2}{\mu}, \quad B = \frac{2\mu + 1}{\mu - 1}, \quad E = \left(\frac{\mu}{\mu - 1}\right)^2, \quad G = \frac{4\mu + 4}{\mu},$$

$$J = \frac{3\mu + 1}{\mu - 1}, \quad L = \frac{3\mu + 2}{\mu}, \quad \alpha = \frac{1}{\mu - 1},$$

qui se rapportent à l'indice μ du crown.

Les Tables réunies sous le titre II contiennent les coefficients relatifs à la fois à l'indice μ' du flint (variant par 0,005) [1] et au rapport ω des pouvoirs dispersifs $= \frac{\delta\mu}{\mu - 1} : \frac{\delta\mu'}{\mu' - 1}$; ce sont

$$C = \frac{\mu' + 2}{\mu'}\omega, \quad D = \frac{4\mu' + 4}{\mu'}\omega - \frac{2\mu' + 1}{\mu' - 1}\omega^2, \quad F = \frac{3\mu' + 2}{\mu'}\omega - \frac{3\mu' + 1}{\mu' - 1}\omega^2 + \left(\frac{\mu'}{\mu' - 1}\right)^2\omega^3,$$

$$H = \frac{4\mu' + 4}{\mu'}\omega, \quad K = \frac{6\mu' + 4}{\mu'}\omega - \frac{3\mu' + 1}{\mu' - 1}\omega^2, \quad M = \frac{3\mu' + 2}{\mu'}\omega, \quad \alpha' = \frac{\omega}{\mu' - 1}.$$

La Table III donne les coefficients réunis des équations qui conviennent aux solutions proposées, l'une par Clairaut et l'autre par Klügel, Littrow, etc. ;

Enfin le Tableau IV donne les puissances de ω qui entrent dans le calcul de C, D, ..., et, en outre, les valeurs de $\frac{1}{1 - \omega}$ ou de la longueur focale de l'objectif pour lequel $l = 1$. C'est le nombre par lequel il faut multiplier r, ρ, r', ρ' pour avoir les valeurs de ces courbures qui correspondent à $f = 1$.

33. Pour mieux faire comprendre l'usage de ces Tables, nous allons calculer les courbures d'un objectif, et nous mettrons en présence les formes qu'il prend, selon qu'on admet la solution de Clairaut, celle d'Herschel ou enfin celle de Littrow.

Nous prendrons pour nos exemples les sortes de verres que W. Herschel a choisies lui-même comme types. Le crown aura pour indice $\mu = 1,524$, le flint $\mu' = 1,585$, et ω sera égal à 0,60.

---

[1] Pour avoir ceux qui se rapportent à des variations par 0,001, on peut procéder soit par interpolation très-simple d'ailleurs, puisque dans ce cas les différences secondes au plus sont constantes, soit par calcul direct, en prenant les facteurs en μ' dans la Table I et ceux en ω dans la Table IV.

1° Clairaut, faisant coïncider, dans toute leur étendue, une surface du crown et une surface du flint, on a $r' = \rho$; cette condition nous donne, ainsi qu'on l'a vu plus haut,

$$r' = \frac{-(D + 2A\alpha - B) \pm \sqrt{(D + 2A\alpha - B)^2 - 4(A - C)(A\alpha^2 + E - B\alpha - F)}}{2(A - C)}.$$

La Table I donne, pour $\mu = 1{,}524$,

$$B = 7{,}72519, \quad A = 2{,}31234, \quad E = 8{,}45877, \quad \alpha = 1{,}90840.$$

Dans la Table II, on trouve

$$C = 1{,}35710, \quad D = 1{,}34804, \quad F = 0{,}60119, \quad \alpha' = 1{,}02564,$$

et enfin les valeurs de

$$2A\alpha = 8{,}82571, \quad A\alpha^2 = 8{,}42148, \quad B\alpha = 14{,}74273$$

se trouvent dans la Table III.

En effectuant la substitution de ces valeurs dans l'équation ci-dessus, il vient

$$D + 2A\alpha - B = 2{,}44856, \quad A - C = 0{,}95524, \quad A\alpha + E - B\alpha - F = 1{,}53633,$$

d'où

$$r' = \frac{-2{,}44856 \pm \sqrt{(2{,}44856)^2 - 4 \times 0{,}95524 \times 1{,}53633}}{1{,}91048},$$

$$r' = \frac{-2{,}44856 \pm 0{,}353823}{1{,}91048};$$

avec le signe $+$,

$$r' = -1{,}09644, \quad r = r' + \alpha = 1{,}90840 - 1{,}09644 = 0{,}81196;$$

avec le signe $-$,

$$r' = -1{,}46684, \quad r' = r' + \alpha = 1{,}90840 - 1{,}46684 = 0{,}44156.$$

On a donc pour les quatre courbures, avec le signe $+$,

$$r = 0{,}81196,$$
$$\rho = r' = -1{,}09644,$$
$$\rho' = r' - \alpha' = 1{,}02564 - 1{,}09644 = -0{,}0708,$$

d'où

$$R_1 = \frac{1}{r} = 1,23159,$$

$$R_2 = R_3 = -0,912043,$$

$$R_4 = -14,124 \text{ (convexe)};$$

avec le signe $-$,

$$r = 0,44156,$$

$$\rho = r' = -1,46684,$$

$$\rho' = 1,02564 - 1.46684 = -0,44120,$$

d'où

$$R_1 = 2,26470,$$

$$R_2 = R_3 = -0,68175,$$

$$R_4 = -2,26655 \text{ (convexe)}.$$

Pour avoir les rayons de courbure dans le cas où c'est la longueur focale de l'objectif que l'on prend pour unité, il faut multiplier les valeurs de R_1, ..., ci-dessus par $1 - \omega = 0,4$, ce qui donne, avec le signe $+$,

$$R_1 = 0,492636,$$

$$R_2 = R_3 = 0,364817,$$

$$R_4 = 5,6496,$$

avec le signe $-$,

$$R_1 = 0,90588,$$

$$R_2 = R_3 = 0,27270,$$

$$R_4 = 0,90661.$$

2° Herschel, ainsi qu'on l'a vu plus haut, détermine les courbures de l'objectif à l'aide de l'équation (I) et de l'équation (II), dans laquelle il ne tient pas compte des termes L et M.

Si dans les termes qui restent nous mettons, à la place de GHJK, leurs valeurs, nous obtenons

$$r = \frac{\mathrm{H}r' + \mathrm{J} - \mathrm{K}}{\mathrm{G}} = \frac{3,91419\,r' + 9,06093}{6,62467};$$

reportant cette valeur de r dans l'équation (I), où A, B, C, ... auront été remplacés par les nombres donnés par les Tables I et II, on trouve d'abord

$$
\begin{aligned}
A r^2 &= 0,807248\, r'^2 + 3,73738\, r' + 4,32582,\\
-B r &= -4,56443\, r' - 10,56617,\\
-C r'^2 &= -1,357100\, r'^2,\\
+D r' + E - F &= 1,34804\, r' + 8,45877 - 0,60119,
\end{aligned}
$$

et, réductions faites,

$$0,54985\, r'^2 - 0,521\, r' - 1,61723 = 0;$$

d'où

$$r' = \frac{0,521 - 1,9566}{1,0997}$$

(le signe $+$ donnerait une forme inadmissible en pratique), ou

	Pour $l = 1$.	Pour F $= 1$.	Les Tables d'Herschel donnent pour F $= 10$.
$r' = -1,30546$	$-R_3 = 0,766$	0,30640	3,0640
$r = \dfrac{-5,109831 + 9,06093}{6,62467} = 0,59642.$	$R_1 = 1,67677$	0,670687	6,7069
$\rho = 0,59642 - 1,9084 = -1,31198$ ...	$-R_2 = 0,76219$	0,304876	3,0488
$\rho' = 1,02564 - 1,30546 = -0,27982$ (convexe)	$R_4 = 3,5737$	1,42948	14,2937

3° Si enfin on fait le crown équiconvexe, r et ρ sont déterminés; car alors, l étant 1, on a

$$r = \rho = \frac{1}{2(\mu - 1)}.$$

Les termes en r^2 et r peuvent donc être calculés d'avance : la Table III nous les donne en effet. L'équation (I) se trouve alors transformée en la suivante :

$$C r'^2 - D r' + F - (A r^2 - B r + E) = 0,$$

ou, dans l'exemple actuel,

$$1,35710\, r^2 - 1,34804\, r' + 0,60119 - 3,19278 = 0,$$

$$r' = \frac{1,34804 - 3,98565}{2,7142} = \frac{-2,63761}{2,7142} = -0,97178;$$

d'où les valeurs suivantes pour les courbures et les rayons :

		$l = 1.$	$F = 1.$
$r = -\rho = 0,954198$..............	$R_1 = -R_2 =$	1,048	0,4192
$r' = -0,97178$....................	$R_3 = -$	1,02905	0,41162
$\rho' =\ 1,02564 - 0,97178 = 0,05386.$	$R_4 =$	18,5666 concave	7,42666

Les Tables de Littrow, qui sont construites pour obtenir, non pas l'aplanétisme pour une ouverture modérée, mais la concordance du foyer des rayons centraux avec celui des rayons qui rencontrent la première surface sous une incidence de 10 degrés, donnent, pour $l = 1$ et $\pi = 0,60 \times \frac{1,524}{1,585}$,

$$R_1 = -R_2 = 1,048, \quad R_3 = -1,03636, \quad R_4 = 16,480.$$

La différence des rayons R_2 et R_3 est un peu moins grande que dans le résultat du calcul direct.

Si enfin nous rangeons ces objectifs d'après la courbure de la première surface, nous trouvons pour la longueur focale L, prise pour unité :

D'après Littrow.	Clairaut avec le signe +.	Herschel.	Clairaut avec le signe —.
$R_1 = 0,4192$	0,4926	0,6707	0,9059
$R_2 = 0,4192$	0,3648	0,3048	0,2727
$R_3 = 0,41162$	0,3648	0,3064	0,2727
$R_4 = 7,4266$ concave	5,6496 convexe	1,4294	0,9066

TABLES POUR LE CALCUL DES OBJECTIFS.

I. — ÉQUATION DONNANT LES COURBURES DE L'OBJECTIF APLANÉTIQUE ET ACHROMATIQUE POUR LES RAYONS PARALLÈLES (l ÉTANT ÉGAL A 1).

$$o = \frac{\mu+2}{\mu} r^2 - \frac{2\mu+1}{\mu-1} r - \frac{\mu'+2}{\mu'} \omega r'^2 + \left[\frac{4\mu'+4}{\mu'}\omega - \frac{2\mu'+1}{\mu'-1}\omega^2\right] r'$$
$$+ \frac{\mu^2}{(\mu-1)^2} - \frac{3\mu'+2}{\mu'}\omega + \frac{3\mu'+1}{\mu'-1}\omega^2 - \frac{\mu^2}{(\mu'-1)}\omega^3;$$

ou

$$o = A r^2 - B r - C r'^2 + D r' + E - F.$$

II. — ÉQUATION DONNANT EES COURBURES POUR LES RAYONS PARALLÈLES ET POUR CEUX UI ÉMANENT D'UN POINT DE PROXIMITÉ $d = \frac{f}{n} = \frac{1-\omega}{n}$.

$$o = (\mathrm{I}) \quad \text{et} \quad o = \frac{4\mu+4}{\mu} r - \frac{4\mu'+4}{\mu'}\omega r' - \frac{3\mu+1}{\mu-1} + \frac{6\mu'+4}{\mu'}\omega - \frac{3\mu'+1}{\mu'-1}\omega^2$$
$$+ \frac{1-\omega}{n}\left[\frac{3\mu+2}{\mu} - \frac{3\mu'+2}{\mu'}\omega\right],$$

ou

$$o = G r - H r' - J + K + \frac{1-\omega}{n}[L - M].$$

TABLE I.

μ	A $\frac{\mu+2}{\mu}$	B $\frac{2\mu+1}{\mu-1}$	E $\frac{\mu^2}{(\mu-1)^2}$	G $\frac{4\mu+4}{\mu}$	J $\frac{3\mu+1}{\mu-1}$	L $\frac{3\mu+2}{\mu}$	α $\frac{1}{\mu-1}$
1,500	2,33333	8,00000	9,00000	6,66666	11,00000	4,33333	2,00000
1,501	2,33244	7,98802	8,97607	6,66489	10,98403	4,33245	1,99601
1,502	2,33156	7,97610	8,95225	6,66311	10,96813	4,33156	1,99223
1,503	2,33067	7,96421	8,92857	6,66134	10,95229	4,33067	1,98807
1,504	2,32979	7,95238	8,90501	6,65957	10,93651	4,32978	1,98413
1,505	2,32890	7,94060	8,88158	6,65781	10,92079	4,32890	1,98020
1,506	2,32802	7,92885	8,85829	6,65604	10,90514	4,32802	1,97628
1,507	2,32714	7,91716	8,83508	6,65428	10,88945	4,32714	1,97239
1,508	2,32626	7,90551	8,81201	6,65252	10,87402	4,32626	1,96850
1,509	2,32538	7,89391	8,78907	6,65076	10,85856	4,32538	1,96464
1,510	2,32450	7,88235	8,76624	6,64900	10,84312	4,32450	1,96078
1,511	2,32363	7,87084	8,74354	6,64725	10,82780	4,32362	1,95695
1,512	2,32275	7,85938	8,72095	6,64550	10,81251	4,32275	1,95313
1,513	2,32188	7,84795	8,69848	6,64375	10,79726	4,32188	1,94932
1,514	2,32100	7,83658	8,67612	6,64201	10,78210	4,32100	1,94553
1,515	2,32013	7,82524	8,65388	6,64025	10,76700	4,32013	1,94175
1,516	2,31926	7,81395	8,63175	6,63852	10,75294	4,31926	1,93798
1,517	2,31839	7,80271	8,60974	6,63678	10,73694	4,31839	1,93423
1,518	2,31752	7,79150	8,58784	6,63505	10,72200	4,31752	1,93050
1,519	2,31666	7,78035	8,56605	6,63336	10,70713	4,31665	1,92678
1,520	2,31579	7,76923	8,54438	6,63158	10,69230	4,31579	1,92308
1,521	2,31492	7,75816	8,52281	6,62985	10,67754	4,31492	1,91939
1,522	2,31406	7,74713	8,50136	6,62812	10,66284	4,31406	1,91571
1,523	2,31320	7,73614	8,48001	6,62640	10,64818	4,31320	1,91205
1,524	2,31234	7,72519	8,45877	6,62467	10,63359	4,31234	1,90840
1,525	2,31147	7,71429	8,43764	6,62295	10,61905	4,31148	1,90476
1,526	2,31062	7,70342	8,41662	6,62123	10,60456	4,31062	1,90114
1,527	2,30976	7,69260	8,39570	6,61951	10,59013	4,30976	1,89753
1,528	2,30890	7,68182	8,37489	6,61780	10,57576	4,30890	1,89394
1,529	2,30804	7,67108	8,35418	6,61609	10,56144	4,30804	1,89036
1,530	2,30719	7,66038	8,33357	6,61438	10,54717	4,30719	1,88679

TABLE I. (Suite.)

	A	B	E	G	J	L	α
μ	$\frac{\mu+2}{\mu}$	$\frac{2\mu+1}{\mu-1}$	$\frac{\mu^2}{(\mu-1)^2}$	$\frac{4\mu+4}{\mu}$	$\frac{3\mu+1}{\mu-1}$	$\frac{3\mu+2}{\mu}$	$\frac{1}{\mu-1}$
1,530	2.30719	7,66038	8,33357	6,61438	10,54717	4,30719	1,88679
1,531	2,30634	7,64972	8,31307	6,61267	10,53296	4,30634	1,88324
1,532	2,30548	7,63910	8,29267	6,61097	10,51880	4,30548	1,87970
1,533	2,30463	7,62852	8,27237	6,60926	10,50470	4,30463	1,87617
1,534	2,30378	7,61797	8,25217	6,60756	10,49064	4,30378	1,87266
1,535	2,30293	7,60748	8,23207	6.60586	10,47664	4,30293	1,86916
1,536	2,30208	7,59701	8,21207	6,60417	10,46269	4,30208	1,86567
1,537	2,30124	7,58659	8,19218	6,60247	10,44879	4,30124	1,86220
1,538	2,30039	7,57621	8,17237	6,60078	10,43494	4,30039	1,85874
1,539	2,29955	7,56586	8,15267	6,59909	10,42115	4,29954	1,85529
1,540	2,29870	7,55555	8,13306	6,59740	10,40741	4,29870	1,85185
1,541	2,29786	7,54528	8,11354	6,59572	10,39371	4,29786	1,84843
1,542	2,29702	7,53505	8,09413	6,59403	10,38007	4,29702	1,84502
1,543	2,29618	7,52486	8,07481	6,59235	10,36648	4,29618	1,84162
1,544	2,29534	7,51471	8,05558	6,59067	10,35294	4,29534	1,83824
1,545	2,29450	7,50459	8,03645	6,58900	10,33945	4,29450	1,83486
1,546	2,29366	7,49450	8,01740	6,58732	10,32601	4,29366	1,83150
1,547	2,29282	7,48446	7,99845	6,58565	10,31261	4,29282	1,82815
1,548	2,29199	7,47445	7,97960	6,58398	10,29927	4,29199	1,82482
1,549	2,29115	7,46448	7,96083	6,58231	10,28597	4,29116	1,82149
1,550	2,29032	7,45454	7,94215	6,58065	10,27272	4,29032	1,81818
1,551	2,28949	7,44465	7,92356	6,57898	10,25953	4,28949	1,81488
1,552	2,28866	7,43478	7,90506	6,57732	10,24638	4,28866	1,81160
1,553	2,28783	7,42495	7,88665	6,57566	10,23327	4,28783	1,80832
1,554	2,28700	7,41516	7,86833	6,57400	10,22022	4,28700	1,80505
1,555	2,28617	7.40540	7,85009	6,57235	10,20721	4,28617	1,80180
1,556	2,28525	7,39568	7,83195	6,57069	10,19425	4,28535	1,79856
1,557	2,28452	7,38600	7,81388	6,56904	10,18133	4,28452	1,79533
1,558	2.28370	7,37634	7,79590	6,56739	10,16846	4,28370	1,79211
1,559	2,28287	7,36673	7,77801	6,56575	10,15563	4,28287	1,78891
1,560	2,28205	7,35714	7,76021	6,56410	10,14286	4,28205	1,78572

TABLE I. (Suite.)

μ	A $\frac{\mu+2}{\mu}$	B $\frac{2\mu+1}{\mu-1}$	E $\frac{\mu^2}{(\mu-1)^2}$	G $\frac{4\mu+4}{\mu}$	J $\frac{3\mu+1}{\mu-1}$	L $\frac{3\mu+2}{\mu}$	α $\frac{1}{\mu-1}$
1,560	2,28205	7,35714	7,76021	6,56410	10,14286	4,28205	1,78572
1,561	2,28123	7,34760	7,74248	6,56246	10,13012	4,28123	1,78253
1,562	2,28041	7,33808	7,72484	6,56082	10,11744	4,28041	1,77936
1,563	2,27959	7,32860	7,70728	6,55918	10,10479	4,28959	1,77620
1,564	2,27877	7,31915	7,68980	6,55754	10,09220	4,27877	1,77305
1,565	2,27795	7,30973	7,67241	6,55591	10,07965	4,27796	1,76991
1,566	2,27714	7,30035	7,65510	6,55428	10,06714	4,27714	1,76678
1,567	2,27632	7,29100	7,63786	6,55265	10,05467	4,27632	1,76367
1,568	2,27551	7,28169	7,62071	6,55102	10,04225	4,27551	1,76056
1,569	2,27470	7,27241	7,60363	6,54940	10,02988	4,27470	1,75747
1,570	2,27388	7,26316	7,58664	6,54777	10,01754	4,27388	1,75439
1,571	2,27307	7,25394	7,56973	6,54615	10,00525	4,27307	1,75131
1,572	2,27226	7,24476	7,55289	6,54453	9,99300	4,27227	1,74825
1,573	2,27145	7,23560	7,53612	6,54291	9,98080	4,27146	1,74520
1,574	2,27065	7,22648	7,51944	6,54130	9,96864	4,27065	1,74216
1,575	2,26984	7,21739	7,50284	6,53968	9,95652	4,26984	1,73913
1,576	2,26904	7,20833	7,48630	6,53807	9,94444	4,26904	1,73611
1,577	2,26823	7,19931	7,46985	6,53646	9,93241	4,26823	1,73310
1,578	2,26743	7,19031	7,45347	6,53485	9,92042	4,26743	1,73010
1,579	2,26662	7,18135	7,43716	6,53325	9,90846	4,26662	1,72712
1,580	2,26582	7,17241	7,42093	6,53165	9,89655	4,26582	1,72414
1,581	2,26502	7,16351	7,40477	6,53004	9,88468	4,26502	1,72117
1,582	2,26422	7,15464	7,38868	6,52844	9,87285	4,26422	1,71821
1,583	2,26342	7,14580	7,37267	6,52685	9,86106	4,26342	1,71526
1,584	2,26263	7,13699	7,35673	6,52525	9,84932	4,26262	1,71233
1,585	2,26183	7,12820	7,34086	6,52366	9,83760	4,26183	1,70940
1,586	2,26103	7,11945	7,32506	6,52207	9,82594	4,26103	1,70649
1,587	2,26024	7,11073	7,30933	6,52048	9,81431	4,26024	1,70358
1,588	2,25944	7,10204	7,29368	6,51889	9,80272	4,25944	1,70068
1,589	2,25865	7,09338	7,27809	6,51731	9,79117	4,25865	1,69779
1,590	2,25786	7,08475	7,26257	6,51572	9,77966	4,25786	1,69491

TABLE I. (Suite.)

μ	A $\frac{\mu+2}{\mu}$	B $\frac{2\mu+1}{\mu-1}$	E $\frac{\mu^2}{(\mu-1)^2}$	G $\frac{4\mu+4}{\mu}$	J $\frac{3\mu+1}{\mu-1}$	L $\frac{3\mu+2}{\mu}$	α $\frac{1}{\mu-1}$
1,590	2,25786	7,08475	7,26257	6,51572	9,77966	4,25786	1,69491
1,591	2,25707	7,07614	7,24712	6,51414	9,76819	4,25707	1,69205
1,592	2,25628	7,06757	7,23174	6,51256	9,75675	4,25628	1,68919
1,593	2,25549	7,05902	7,21643	6,51098	9,74536	4,25549	1,68634
1,594	2,25470	7,05051	7,20118	6,50941	9,73401	4,25470	1,68350
1,595	2,25392	7,04202	7,18600	6,50784	9.72269	4,25392	1,68067
1,596	2,25313	7,03356	7,17089	6,50627	9,71141	4,25313	1,67785
1,597	2,25235	7,02513	7,15585	6,50470	9,70017	4,25235	1,67504
1,598	2,25156	7,01672	7,14087	6,50313	9,68896	4,25156	1,67224
1,599	2,25078	7,00835	7,12596	6,50156	9,67780	4,25078	1,66945
1,600	2,25000	7,00000	7,11111	6,50000	9,66666	4,25000	1,66666
1,601	2,24922	6,99168	7,09633	6,49844	9,65557	4,24922	1,66389
1,602	2,24844	6,98339	7,08161	6,49688	9,64452	4,24844	1,66113
1,603	2,24766	6,97513	7,06696	6,49532	9,63350	4,24766	1,65837
1,604	2,24688	6,96689	7,05237	6,49377	9,62252	4,24688	1,65563
1,605	2,24611	6,95868	7,03784	6,49221	9,61157	4,24610	1,65289
1,606	2,24533	6,95050	7,02337	6,49066	9,60066	4,24533	1,65016
1,607	2,24455	6,94234	7,00897	6,48911	9,58979	4,24455	1,64745
1,608	2,24378	6,93421	6,99463	6,48756	9,57895	4,24378	1,64474
1,609	2,24301	6,92611	6,98035	6,48602	9,56814	4,24301	1,64204
1,610	2,24224	6,91803	6,96614	6,48447	9,55738	4,24224	1,63935
1,611	2,24147	6,90998	6,95198	6,48293	9,54665	4,24147	1,63666
1,612	2,24070	6,90196	6,93789	6,48139	9,53595	4,24069	1,63399
1,613	2,23993	6,89397	6,92385	6,47985	9,52529	4,23993	1,63132
1,614	2,23916	6,88599	6,90987	6,47832	9,51466	4,23916	1,62866
1,615	2,23839	6,87805	6,89596	6,47678	9,50406	4,23839	1,62602
1,616	2,23762	6,87013	6,88211	6,47525	9,49350	4,23762	1,62338
1,617	2,23686	6,86224	6,86830	6,47372	9,48298	4,23686	1,62075
1,618	2,23610	6,85437	6,85457	6,47219	9,47249	4,23094	1,61812
1,619	2,23533	6,84653	6,84090	6,47066	9,46204	4,23533	1,61551
1,620	2,23457	6,83871	6,82726	6,46914	9,45161	4,23457	1,61290

TABLE I. (Suite.)

μ	A $\frac{\mu+2}{\mu}$	B $\frac{2\mu+1}{\mu-1}$	E $\frac{\mu^2}{(\mu-1)^2}$	G $\frac{4\mu+4}{\mu}$	J $\frac{3\mu+1}{\mu-1}$	L $\frac{3\mu+2}{\mu}$	α $\frac{1}{\mu-1}$
1,620	2,23457	6,83871	6,82726	6,46914	9,45161	4,23457	1,61290
1,621	2,23381	6,83092	6,81370	6,46761	9,44121	4,23380	1,61031
1,622	2,23305	6,82315	6,80019	6,46609	9,43087	4,23305	1,60772
1,623	2,23229	6,81541	6,78674	6,46457	9,42054	4,23228	1,60514
1,624	2,23153	6,80769	6,77334	6,46305	9,41025	4,23153	1,60256
1,625	2,23077	6,80000	6,76000	6,46154	9,40000	4,23077	1,60000
1,626	2,23001	6,79233	6,74672	6,46002	9,38978	4,23001	1,59744
1,627	2,22926	6,78469	6,73349	6,45851	9,37959	4,22926	1,59490
1,628	2,22850	6,77707	6,72031	6,45700	9,36943	4,22850	1,59236
1,629	2,22775	6,76948	6,70720	6,45549	9,35930	4,22775	1,58983
1,630	2,22699	6,76191	6,69413	6,45399	9,34920	4,22699	1,58730
1,631	2,22624	6,75436	6,68112	6,45248	9,33914	4,22624	1,58469
1,632	2,22549	6,74684	6,66816	6,45098	9,32911	4,22549	1,58228
1,633	2,22474	6,73934	6,65526	6,44948	9,31911	4,22474	1,57978
1,634	2,22399	6,73186	6,64241	6,44798	9,30914	4,22399	1,57739
1,635	2,22324	6,72441	6,62961	6,44648	9,29921	4,22324	1,57480
1,636	2,22249	6,71698	6,61687	6,44499	9,28931	4,22249	1,57232
1,637	2,22175	6,70957	6,60418	6,44349	9,27944	4,22175	1,56986
1,638	2,22100	6,70219	6.59153	6,44200	9,26959	4,22100	1,56740
1,639	2,22025	6,69484	6,57894	6,44051	9,25978	4,22026	1,56494
1,640	2,21951	6,68750	6,56640	6,43903	9,25000	4,21951	1,56250
1,641	2,21877	6,68019	6,55392	6,43754	9,24025	4,21877	1,56006
1,642	2,21803	6,67290	6,54148	6,43605	9,23053	4,21803	1,55763
1,643	2,21729	6,66563	6,52910	6,43457	9,22084	4,21728	1,55521
1,644	2,21655	6,65838	6,51676	6,43309	9,21117	4,21655	1,55280
1,645	2,21581	6,65116	6,50448	6,43161	9,20155	4,21580	1,55039
1,646	2,21507	6,64396	6,49224	6,43013	9,19195	4,21507	1,54799
1,657	2,21433	6,63678	6,48005	6,42866	9,18238	4,21433	1,54560
1,648	2,21359	6,62963	6,46792	6,42719	9,17073	4,21359	1,54321
1,649	2,21285	6,62250	6,45583	6,42571	9,16333	4,21286	1,54083
1,650	2,21212	6,61538	6,44378	6,42424	9,15384	4,21212	1,53846

TABLE II.

$$C=\frac{\mu'+2}{\mu'}\omega,\quad D=\frac{4\mu'+4}{\mu'}\omega-\frac{2\mu'+1}{\mu'-1}\omega^2,\quad F=\frac{3\mu'+2}{\mu'}\omega-\frac{3\mu'+1}{\mu'-1}\omega^2+\frac{\mu'^2}{(\mu'-1)^2}\omega^3,$$

$$H=\frac{4\mu'+4}{\mu'}\omega,\quad K=\frac{6\mu'+4}{\mu'}\omega-\frac{3\mu'+1}{\mu'-1}\omega^2,\quad M=\frac{3\mu'+1}{\mu'}\omega,\quad \alpha'=\frac{\omega}{\mu'-1},$$

$$\mu'=1,580.$$

ω	C	D	F	H	K	M	α'
0,55	1,24620	1,42275	0,58715	3,59240	1,69869	2,34620	0,94827
0,56	1,26881	1,40845	0,58853	3,65771	1,67416	2,38886	0,96552
0,57	1,29151	1,39272	0,59043	3,72303	1,64765	2,43152	0,98272
0,58	1,31412	1,37555	0,59289	3,78835	1,61915	2,47417	1,00000
0,59	1,33683	1,35695	0,59595	3,85367	1,58868	2,51683	1,01724
0,60	1,35949	1,33691	0,59965	3,91898	1,55622	2,55949	1,03448
0,61	1,38215	1,31544	0,60405	3,98430	1,52180	2,60215	1,05172
0,62	1,40480	1,29254	0,60919	4,04962	1,48539	2,64481	1,06896
0,63	1,42746	1,26820	0,61510	4,11493	1,44699	2,68746	1,08621
0,64	1,45012	1,24243	0,62185	4,18025	1,40662	2,73012	1,10345
0,65	1,47278	1,21522	0,62946	4,24557	1,36427	2,77278	1,12069
0,66	1,49544	1,18658	0,63799	4,31088	1,31995	2,81544	1,13793
0,67	1,51809	1,15651	0,64747	4,37620	1,27364	2,85810	1,15517
0,68	1,54075	1,12499	0,65797	4,44152	1,22536	2,90076	1,17241
0,69	1,56341	1,09205	0,66951	4,50684	1,17509	2,94341	1,18965
0,70	1,58607	1,05767	0,68214	4,57215	1,12284	2,98607	1,20690
0,71	1,60873	1,02186	0,69591	4,63747	1,06861	3,02873	1,22414
0,72	1,63139	0,98461	0,71086	4,70279	1,01241	3,07139	1,24138
0,73	1,65405	0,94593	0,72703	4,76810	1,95423	3,11405	1,25862
0,74	1,67671	0,90581	0,74448	4,83342	1,89406	3,15671	1,27586
0,75	1,69937	0,86426	0,76325	4,89874	1,83192	3,19937	1,29310

TABLE II. (Suite.)

$$C = \frac{\mu'+2}{\mu'}\,\omega, \quad D = \frac{4\mu'+4}{\mu'}\,\omega - \frac{2\mu'+1}{\mu'-1}\,\omega^2, \quad F = \frac{3\mu'+2}{\mu'}\,\omega - \frac{3\mu'+1}{\mu'-1}\,\omega^2 + \frac{\mu'^2}{(\mu'-1)^3}\,\omega^3,$$

$$H = \frac{4\mu'+4}{\mu'}\,\omega, \quad K = \frac{6\mu'+4}{\mu'}\,\omega - \frac{3\mu'+1}{\mu'-1}\,\omega^2, \quad M = \frac{3\mu'+2}{\mu'}\,\omega, \quad \alpha' = \frac{\omega}{\mu'-1}.$$

$$\mu' = 1{,}585.$$

ω	C	D	F	H	K	M	α′
0,55	1,24400	1,43173	0,58946	3,58801	1,71215	2,34401	0,94017
0,56	1,26663	1,41784	0,59072	3,65324	1,68819	2,38663	0,95726
0,57	1,28924	1,40253	0,59248	3,71848	1,66226	2,42924	0,97436
0,58	1,31186	1,38579	0,59478	3,78372	1,63436	2,47186	0,99145
0,59	1,33448	1,36763	0,59767	3,84895	1,60449	2,51448	1,00855
0,60	1,35710	1,34804	0,60119	3,91419	1,57266	2,55710	1,02564
0,61	1,37972	1,32703	0,60538	3,97943	1,53886	2,59972	1,04273
0,62	1,40233	1,30458	0,61029	4,04466	1,50310	2,64233	1,05983
0,63	1,42495	1,28071	0,61597	4,10990	1,46537	2,68495	1,07692
0,64	1,44757	1,25542	0,62245	4,17514	1,42567	2,72757	1,09402
0,65	1,47019	1,22871	0,62979	4,24038	1,38400	2,77019	1,11111
0,66	1,49281	1,20057	0,63802	4,30561	1,34036	2,81281	1,12820
0,67	1,51542	1,17100	0,64719	4,37085	1,29475	2.85542	1,14530
0,68	1,53804	1,14001	0,65734	4,43609	1,24718	2,89804	1,16239
0,69	1,56066	1,10758	0,66852	4,50132	1,19764	2,94066	1,17949
0,70	1,58328	1,07374	0,68077	4,56656	1,14614	2,98328	1,19658
0,71	1,60590	1,03847	0,69414	4,63180	1,09267	3,02590	1,21367
0,72	1,62851	1,00177	0,70866	4,69703	1,03723	3,06851	1,23077
0,73	1,65113	0,96365	0,72439	4,76227	0,97982	3,11113	1,24786
0,74	1,67375	0,92410	0,74137	4,82751	0,92044	3,15375	1,26496
0,75	1,69637	0,88312	0,76964	4,89274	0,85909	3,19637	1,28205

TABLE II. (Suite.)

$$C=\frac{\mu'+2}{\mu'}\omega,\quad D=\frac{4\mu'+4}{\mu'}\omega-\frac{2\mu'+1}{\mu'-1}\omega^2,\quad F=\frac{3\mu'+2}{\mu'}\omega-\frac{3\mu'+1}{\mu'}\omega^2+\frac{\mu'^2}{(\mu'-1)^2}\omega^3,$$

$$H=\frac{4\mu'+4}{\mu'}\omega,\quad K=\frac{6\mu'+4}{\mu'}\omega-\frac{3\mu'+1}{\mu'-1}\omega^2,\quad M=\frac{3\mu'+2}{\mu'}\omega,\quad \alpha'=\frac{\omega}{\mu'-1},$$

$\mu' = 1,590.$

ω	C	D	F	H	K	M	α'
0,55	1,24182	1,44051	0,59178	3,58365	1,72530	2,34182	0,93220
0,56	1,26440	1,42703	0,59292	3,64880	1,70190	2,38440	0,94915
0,57	1,28698	1,41213	0,59454	3,71396	1,67655	2,42698	0,96610
0,58	1,30955	1,39581	0,59669	3,77912	1,64924	2,46956	0,98305
0,59	1,33213	1,37808	0,59942	3,84428	1,61998	2,51214	1,00000
0,60	1,35471	1,35893	0,60275	3,90943	1,58876	2,55471	1,01695
0,61	1,37729	1,33835	0,60675	3,97459	1,55559	2,59730	1,03390
0,62	1,39987	1,31637	0,61144	4,03975	1,52046	2,53988	1,05085
0,63	1,42245	1,29297	0,61689	4,10490	1,48337	2,68246	1,06779
0,64	1,44503	1,26815	0,62312	4,17006	1,44432	2,72503	1,08474
0,65	1,46761	1,24191	0,63018	4,23522	1,40332	2,76761	1,10169
0,66	1,49019	1,21426	0,63813	4,30037	1,36037	2,81019	1,11864
0,67	1,51277	1,18519	0,64699	4,36553	1,31545	2,85277	1,13559
0,68	1,53534	1,15470	0,65681	4,43069	1,26858	2,89535	1,15254
0,69	1,55792	1,12280	0,66764	4,49585	1,21975	2,93792	1,16949
0,70	1,58050	1,08948	0,67952	4,56100	1,16897	2,98050	1,18644
0,71	1,60308	1,05474	0,69250	4,62616	1,51624	3,02308	1,20339
0,72	1,62566	1,01859	0,70662	4,69132	1,06155	3,06566	1,22034
0.73	1,64824	0,98101	0,72192	4,75647	1,00490	3,10824	1,23729
0,74	1,67082	0,94203	0,73844	4,82163	1,94630	3,15082	1,25423
0,75	1,69340	0,90162	0,75623	4,88679	1,88574	3,19340	1,27118

TABLE II. (Suite.)

$$C = \frac{\mu'+2}{\mu'}\omega, \quad D = \frac{4\mu'+4}{\mu'}\omega - \frac{2\mu'+1}{\mu'-1}\omega^2, \quad F = \frac{3\mu'+2}{\mu'}\omega - \frac{3\mu'+1}{\mu'-1}\omega^2 + \frac{\mu'^2}{(\mu'-1)^2}\omega^3,$$

$$H = \frac{4\mu'+4}{\mu'}\omega, \quad K = \frac{6\mu'+4}{\mu'}\omega - \frac{3\mu'+1}{\mu'}\omega^2, \quad M = \frac{3\mu'+2}{\mu'}\omega, \quad \alpha' = \frac{\omega}{\mu'-1},$$

$$\mu' = 1,595.$$

ω	C	D	F	H	K	M	α'
0,55	1,23965	1,44910	0,59411	3,57931	1,73820	2,33965	0,92437
0,56	1,26219	1,43601	0,59513	3,64439	1,71536	2,38219	0,94117
0,57	1,28473	1,42151	0,59663	3,70946	1,69057	2,42473	0,95798
0,58	1,30727	1,40561	0,59863	3,77454	1,66383	2,46727	0,97479
0,59	1,32981	1,38830	0,60120	3,83962	1,63515	2,50981	0,99160
0,60	1,35235	1,36957	0,60436	3,90470	1,60453	2,55235	1,00840
0,61	1,37489	1,34944	0,60816	3,96978	1,57197	2,59489	1,02521
0,62	1,39743	1,32791	0,61265	4,03486	1,53746	2,63743	1,04202
0,63	1,41997	1,30496	0,61787	4,09993	1,50100	2,67997	1,05882
0,64	1,44250	1,28060	0,62386	4,16501	1,46260	2,72250	1,07563
0,65	1,46505	1,25484	0,63067	4,23009	1,42226	2,76505	1,09244
0,66	1,48758	1,22767	0,63833	4,29517	1,37997	2,80758	1,10924
0,67	1,51013	1,19909	0,64690	4,36025	1,33574	2,85012	1,12605
0,68	1,53266	1,16910	0,65641	4,42533	1,28956	2,89266	1,14286
0,69	1,55521	1,13770	0,66690	4,49041	1,24144	2,93520	1,15966
0,70	1,57774	1,10489	0,67843	4,55548	1,19136	2,97774	1,17647
0,71	1,60028	1,07068	0,69103	4,62056	1,13935	3,02028	1,19328
0,72	1,62282	1,03506	0,70474	4,68564	1,08540	3,06282	1,21008
0,73	1,64536	1,99803	0,71962	4,75072	1,02950	3,10536	1,22689
0,74	1,66789	1,95959	0,73569	4,81580	0,97166	3,14790	1,24370
0,75	1,69044	1,91974	0,74301	4,88088	0,91187	3,19044	1,26050

TABLE II. (Suite.)

$$C = \frac{\mu'+2}{\mu'}\omega,\quad D = \frac{4\mu'+4}{\mu'}\omega - \frac{2\mu'+1}{\mu'-1}\omega^2,\quad F = \frac{3\mu'+2}{\mu'}\omega - \frac{3\mu'+1}{\mu'-1}\omega^2 + \frac{\mu'^2}{(\mu'-1)^2}\omega^3,$$

$$H = \frac{4\mu'+4}{\mu'}\omega,\quad K = \frac{6\mu'+4}{\mu'}\omega - \frac{3\mu'+1}{\mu'-1}\omega^2,\quad M = \frac{3\mu'+2}{\mu'}\omega,\quad \alpha' = \frac{\omega}{\mu'-1},$$

$$\mu' = 1{,}600.$$

ω	C	D	F	H	K	M	α'
0,55	1,23750	1,45750	0,59644	3,57500	1,75084	2,33750	0,91666
0,56	1,26000	1,44480	0,59735	3,64000	1,72854	2,38000	0,93333
0,57	1,28250	1,43070	0,59872	3,70500	1,70430	2,42250	0,95000
0,58	1,30500	1,41520	0,60059	3,77000	1,67814	2,46500	0,96666
0,59	1,32750	1,39830	0,60300	3,83500	1,65004	2,50750	0,98333
0,60	1,35000	1,38000	0,60600	3,90000	1,62000	2,55000	1,00000
0,61	1,37250	1,36030	0,60962	3,96500	1,58804	2,59250	1,01666
0,62	1,39500	1,33920	0,61391	4,03000	1,55414	2,63500	1,03333
0,63	1,41750	1,31670	0,61892	4,09500	1,51830	2,67750	1,05000
0,64	1,44000	1,29280	0,62467	4,16000	1,48054	2,72000	1,06666
0,65	1,46250	1,26750	0,63122	4,22500	1,44084	2,76250	1,08333
0,66	1,48500	1,24080	0,63861	4,29000	1,39920	2,80500	1,10000
0,67	1,50750	1,21270	0,64689	4,35500	1,35564	2,84750	1,11666
0,68	1,53000	1,18320	0,65619	4,42000	1,31014	2,89000	1,13333
0,69	1,55250	1,15230	0,66626	4,48500	1,26270	2,93250	1,15000
0,70	1,57500	1,12000	0,67744	4,55000	1,21334	2,97500	1,16666
0,71	1,59750	1,08630	0,68967	4,61500	1,16204	3,01750	1,18333
0,72	1,62000	1,05120	0,70300	4,68000	1,10880	3,06000	1,20000
0,73	1,64250	1,01470	0,71747	4,74500	1,05364	3,10250	1,21666
0,74	1,66500	0,97680	0,73312	4,81000	0,99654	3,14500	1,23333
0,75	1,68750	0,93750	0,75000	4,87500	0,93750	3,18750	1,25000

TABLE II. (Suite.)

$$C=\frac{\mu'+2}{\mu'}\omega,\quad D=\frac{4\mu'+4}{\mu'}\omega-\frac{2\mu'+1}{\mu'-1}\omega^2,\quad F=\frac{3\mu'+2}{\mu'}\omega-\frac{3\mu'+1}{\mu'-1}\omega^2+\frac{\mu'^2}{(\mu'-1)^2}\omega^3,$$

$$H=\frac{4\mu'+4}{\mu'}\omega,\quad K=\frac{6\mu'+4}{\mu'}\omega-\frac{3\mu'+1}{\mu'-1}\omega^2,\quad M=\frac{3\mu'+2}{\mu'}\omega,\quad \alpha'=\frac{\omega}{\mu'-1},$$

$\mu'=1{,}605.$

ω	C	D	F	H	K	M	α
0,55	1,23536	1,46572	0,59878	3,57072	1,76322	2,33536	0,90909
0,56	1,25782	1,45340	0,59959	3,63564	1,74145	2,37782	0,92562
0,57	1,28028	1,43969	0,60084	3,70056	1,71776	2,42028	0,94215
0,58	1,30274	1,42458	0,60257	3,76548	1,69215	2,46274	0,95868
0,59	1,32520	1,40809	0,60484	3,83041	1,66462	2,50520	0,97520
0,60	1,34766	1,39020	0,60767	3,89533	1,63517	2,54766	0,99173
0,61	1,37012	1,37092	0,61111	3,96025	1,60379	2,59012	1,00826
0,62	1,39258	1,35026	0,61521	4,02517	1,57049	2,63258	1,02479
0,63	1,41505	1,32819	0,62000	4,09009	1,53527	2,67505	1,04132
0,64	1,43751	1,30474	0,62553	4,15502	1,49812	2,71751	1,05785
0,65	1,45997	1,27990	0,63185	4,21994	1,45905	2,75997	1,07438
0,66	1,48243	1,25366	0,63898	4,28486	1,41806	2,80243	1,09091
0,67	1,50489	1,22603	0,64697	4,34978	1,37515	2,84489	1,10744
0,68	1,52735	1,19701	0,65588	4,41470	1,33031	2,88735	1,12396
0,69	1,54981	1,16660	0,66573	4,47963	1,28356	2,92981	1,14049
0,70	1,57227	1,13480	0,67658	4,54455	1,23488	2,97227	1,15702
0,71	1,59473	1,10160	0,68846	4,60947	1,18428	3,01473	1,17355
0,72	1,61719	1,06701	0,70141	4,67439	1,13175	3,05719	1,19008
0,73	1,63966	1,03103	0,71549	4,73931	1,07731	3,09966	1,20661
0,74	1.66212	0,99367	0,73072	4,80424	1,02094	3,14212	1,22314
0,75	1,68458	0,95490	0,74716	4,86916	1,96265	3,18458	1,23967

TABLE II. (Suite.)

$$C = \frac{\mu'+2}{\mu'}\omega,\quad D = \frac{4\mu'+4}{\mu'}\omega - \frac{2\mu'+1}{\mu'-1}\omega^2,\quad F = \frac{3\mu'+2}{\mu'}\omega - \frac{3\mu'+1}{\mu'-1}\omega^2 + \frac{\mu'^2}{(\mu'-1)^2}\omega^2,$$

$$H = \frac{4\mu'+4}{\mu'}\omega,\quad K = \frac{6\mu'+4}{\mu'}\omega - \frac{3\mu'+1}{\mu'-1}\omega^2,\quad M = \frac{3\mu'+2}{\mu'}\omega,\quad \alpha' = \frac{\omega}{\mu'-1},$$

$$\mu' = 1,610.$$

ω	C	D	F	H	K	M	α'
0,55	1,23323	1,47375	0,60111	3,56646	1,77536	2,33323	0,90164
0,56	1,25565	1,46181	0,60182	3,63130	1,75411	2,37565	0,91803
0,57	1,27807	1,44848	0,60296	3,69615	1,73096	2,41807	0,93442
0,58	1,30050	1,43377	0,60457	3,76099	1,70589	2,46049	0,95082
0,59	1,32292	1,41767	0,60669	3,82584	1,67892	2,50292	0,96721
0,60	1,34534	1,40019	0,60937	3,89068	1,65003	2,54534	0,98361
0,61	1,36776	1,38132	0,61264	3,95552	1,61922	2,58776	1,00000
0,62	1,39019	1,36108	0,61655	4,02037	1,58651	2,63018	1,01639
0,63	1,41261	1,33945	0,62115	4,08521	1,55189	2,67260	1,03279
0,64	1,43503	1,31643	0,62646	4,15006	1,51536	2,71503	1,04918
0,65	1,45745	1,29203	0,63253	4,21490	1,47691	2,75745	1,06557
0,66	1,47987	1,26625	0,63942	4,27975	1,43655	2,79987	1,08197
0,67	1,50230	1,23909	0,64714	4,34459	1,39428	2,84229	1,09836
0,68	1,52472	1,21054	0,65576	4,40944	1,35010	2,88471	1,11475
0,69	1,54714	1,18061	0,66531	4,47428	1,30401	2,92714	1,13115
0,70	1,56957	1,14929	0,67583	4,53912	1,25601	2,96956	1,14754
0,71	1,59199	1,11659	0,68736	4,60397	1,20610	3,01198	1,16393
0,72	1,61441	1,08250	0,69996	4,66881	1,15427	3,05440	1,18033
0,73	1,63683	1,04704	0,71364	4,73366	1,10053	3,09682	1,19672
0,74	1,65926	1,01019	0,72847	4,79850	1,04488	3,13925	1,21311
0,75	1,68168	0,97195	0,74448	4,86335	1,98732	3,18167	1,22951

TABLE II. (SUITE.)

$$C = \frac{\mu'+2}{\mu'}\omega, \quad D = \frac{4\mu'+4}{\mu'}\omega - \frac{2\mu'+1}{\mu'-1}\omega^2, \quad F = \frac{3\mu'+2}{\mu'}\omega - \frac{3\mu'+1}{\mu'-1}\omega^2 + \frac{\mu'^2}{(\mu'-1)^2}\omega^3,$$

$$H = \frac{4\mu'+4}{\mu'}\omega, \quad K = \frac{6\mu'+4}{\mu'}\omega - \frac{3\mu'+1}{\mu'-1}\omega^2, \quad M = \frac{3\mu'+2}{\mu'}\omega, \quad \alpha' = \frac{\omega}{\mu'-1},$$

$$\mu' = 1{,}615.$$

ω	C	D	F	H	K	M	α'
0,55	1,23111	1,48162	0,60345	3,56223	1,78725	2,33111	0,89431
0,56	1,25350	1,47004	0,60406	3,62699	1,76653	2,37350	0,91057
0,57	1,27588	1,45708	0,60509	3,69176	1,74390	2,41588	0,92683
0,58	1,29826	1,44276	0,60658	3,75653	1,71937	2,45826	0,94309
0,59	1,32065	1,42705	0,60857	3,82130	1,69294	2,50065	0,95935
0,60	1,34303	1,40997	0,61110	3,88607	1,66461	2,54303	0,97561
0,61	1,36541	1,39151	0,61421	3,95083	1,63438	2,58542	0,99187
0,62	1,38780	1,37168	0,61794	4,01560	1,60225	2,62780	1,00813
0,63	1,41018	1,35047	0,62233	4,08037	1,56821	2,67018	1,02439
0,64	1,43256	1,32788	0,62744	4,14513	1,53228	2,71257	1,04065
0,65	1,45495	1,30393	0,63329	4,20990	1,49444	2,75495	1,05691
0,66	1,47733	1,27859	0,63993	4,27467	1,45471	2,79734	1,07317
0,67	1,49971	1,25188	0,64739	4,33944	1,41307	2,83972	1,08943
0,68	1,52210	1,22379	0,65573	4,40420	1,36953	2,88210	1,10569
0,69	1,54448	1,19433	0,66499	4,46897	1,32409	2,92449	1,12195
0,70	1,56686	1,16349	0,67519	4,53374	1,27675	2,96687	1,13821
0,71	1,58925	1,13128	0,68640	4,59851	1,22752	3,00926	1,15447
0,72	1,61163	1,09769	0,69864	4,66327	1,17638	3,05164	1,17073
0,73	1,63401	1,06273	0,71195	4,72804	1,12334	3,09402	1,18699
0,74	1,65640	1,02639	0,72639	4,79281	1,06840	3,23641	1,20325
0,75	1,67878	0,98868	0,74199	4,85758	1,01155	3,17879	1,21951

TABLE II. (Suite.)

$$C = \frac{\mu'+2}{\mu'}\omega, \quad D = \frac{4\mu'+4}{\mu'}\omega - \frac{2\mu'+1}{\mu'-1}\omega^2, \quad F = \frac{3\mu'+2}{\mu'}\omega - \frac{3\mu'+1}{\mu'-1}\omega^2 + \frac{\mu'^2}{(\mu'-1)^2}\omega^2,$$

$$H = \frac{4\mu'+4}{\mu'}\omega, \quad K = \frac{6\mu'+4}{\mu'}\omega - \frac{3\mu'+1}{\mu'-1}\omega^2, \quad M = \frac{3\mu'+2}{\mu'}\omega, \quad \alpha' = \frac{\omega}{\mu'-1},$$

$$\mu' = 1{,}620.$$

ω	C	D	F	H	K	M	α'
0,55	1,22901	1,48931	0,60578	3,55802	1,79891	2,32901	0,88710
0,56	1,25135	1,47809	0,60631	3,62271	1,77869	2,37135	0,90323
0,57	1,27370	1,46551	0,60723	3,68741	1,75658	2,41370	0,91936
0,58	1,29605	1,45156	0,60860	3,75210	1,73258	2,45605	0,93548
0,59	1,31839	1,43623	0,61046	3,81679	1,70669	2,49839	0,95161
0,60	1,34074	1,41954	0,61285	3,88148	1,67891	2,54074	0,96774
0,61	1,36308	1,40149	0,61580	3,94617	1,64924	2,58308	0,98387
0,62	1,38543	1,38206	0,61936	4,01086	1,61767	2,62543	1,00000
0,63	1,40778	1,36127	0,62357	4,07555	1,58422	2,66778	1,01613
0,64	1,43012	1,33911	0,62847	4,14250	1,54887	2,71012	1,03226
0,65	1,45247	1,31558	0,63410	4,20494	1,51164	2,75247	1,04839
0,66	1,47481	1,29069	0,64050	4,26963	1,47251	2,79481	1,06451
0,67	1,49716	1,26442	0,64772	4,33432	1,43150	2,83716	1,08064
0,68	1,51950	1,23679	0,65579	4,39901	1,38860	2,87951	1,09677
0,69	1,54185	1,20779	0,66476	4,46370	1,34380	2,92185	1,11290
0,70	1,56419	1,17742	0,67466	4,52839	1,29711	2,96420	1,12903
0,71	1,58654	1,14569	0,68554	4,59308	1,24854	3,00654	1,14516
0,72	1,60888	1,11259	0,69743	4,65778	1,19807	3,04889	1,16129
0,73	1,63122	1,07812	0,71039	4,72247	1,14572	3,09124	1,17742
0,74	1,65357	1,04228	0,72445	4,78716	1,09147	3,13358	1,19355
0,75	1,67592	1,00507	0,73964	4,85185	1,03533	3,17593	1,20968

TABLE II. (Suite.)

$$C = \frac{\mu'+2}{\mu'}\omega,\quad D = \frac{4\mu'+4}{\mu'}\omega - \frac{2\mu'+1}{\mu-1}\omega^2,\quad F = \frac{3\mu'+2}{\mu'}\omega - \frac{3\mu'+1}{\mu'-1}\omega^2 + \frac{\mu'^2}{(\mu'-1)^2}\omega^3,$$

$$H = \frac{4\mu'+4}{\mu'}\omega,\quad K = \frac{6\mu'+4}{\mu'}\omega - \frac{3\mu'+1}{\mu'-1}\omega^2,\quad M = \frac{3\mu'+2}{\mu'}\omega,\quad \alpha' = \frac{\omega}{\mu'-1},$$

$$\mu' = 1,625.$$

ω	C	D	F	H	K	M	α'
0,55	1,22692	1,49684	0,60812	3,55384	1,81034	2,32692	0,88000
0,56	1,24923	1,48598	0,60855	3,61846	1,79062	2,36923	0,89600
0,57	1,27153	1,47375	0,60938	3,68307	1,76901	2,41153	0,91200
0,58	1,29384	1,46017	0,61064	3,74769	1,74553	2,45384	0,92800
0,59	1,31615	1,44522	0,61237	3,81230	1,72016	2,49615	0,94400
0,60	1,33846	1,42892	0,61462	3,87692	1,69292	2,53846	0,96000
0,61	1,36077	1,41126	0,61742	3,94154	1,66380	2,58077	0,97600
0,62	1,38307	1,39223	0,62081	4,00615	1,63279	2,62307	0,99200
0,63	1,40538	1,37185	0,62484	4,07077	1,59991	2,66538	1,00800
0,64	1,42769	1,35010	0,62954	4,13538	1,56514	2,70769	1,02400
0,65	1,45000	1,32700	0,63496	4,20000	1,52850	2,75000	1,04000
0,66	1,47231	1,30253	0,64114	4,26461	1,48998	2,79231	1,05600
0,67	1,49461	1,27671	0,64811	4,32923	1,44957	2,83461	1,07200
0,68	1,51692	1,24952	0,65592	4,39384	1,40729	2,87692	1,08800
0,69	1,53923	1,22098	0,66461	4,45846	1,36312	2,91923	1,10400
0,70	1,56154	1,19107	0,67422	4,52307	1,31708	2,96154	1,12000
0,71	1,58385	1,15981	0,68478	4,58769	1,26916	3,00385	1,13600
0,72	1,60615	1,12718	0,69635	4,65231	1,21935	3,04615	1,15200
0,73	1,62846	1,09320	0,70896	4,71692	1,16767	3,08846	1,16800
0,74	1,65077	1,05785	0,72264	4,78154	1,11410	3,13077	1,18400
0,75	1,67308	1,02115	0,73745	4,84615	1,05866	3,17308	1,20000

TABLE II. (Suite.)

$$C = \frac{\mu' + 2}{\mu'}\omega, \quad D = \frac{4\mu' + 4}{\mu'}\omega - \frac{2\mu' + 1}{\mu' - 1}\omega^2, \quad F = \frac{3\mu' + 2}{\mu'}\omega - \frac{3\mu' + 1}{\mu' - 1}\omega^2 + \frac{\mu'^2}{(\mu' - 1)^2}\omega^3,$$

$$H = \frac{4\mu' + 4}{\mu'}\omega, \quad F = \frac{6\mu' + 4}{\mu'}\omega - \frac{3\mu' + 1}{\mu' - 1}\omega^2, \quad M = \frac{3\mu' + 2}{\mu'}\omega, \quad \alpha' = \frac{\omega}{\mu' - 1},$$

$\mu' = 1,630.$

ω	C	D	F	H	K	M	α'
0,55	1,22485	1,50422	0,61044	3,54969	1,82156	2,32484	0,87301
0,56	1,24712	1,49369	0,61080	3,61423	1,80232	2,36711	0,88889
0,57	1,27939	1,48182	0,61153	3,67877	1,78122	2,40938	0,90476
0,58	1,29166	1,46860	0,61269	3,74331	1,75824	2,45165	0,92063
0,59	1,31393	1,45403	0,61430	3,80785	1,73339	2,49392	0,93641
0,60	1,33620	1,43810	0,61641	3,87239	1,70668	2,53619	0,95238
0,61	1,35847	1,42082	0,61906	3,93693	1,67809	2,57846	0,96825
0,62	1,38074	1,40219	0,62230	4,00147	1,64764	2,62073	0,98413
0,63	1,40301	1,38221	0,62615	4,06601	1,61531	2,66300	1,00000
0,64	1,42528	1,36087	0,63066	4,13055	1,58112	2,70527	1,01587
0,65	1,44755	1,33818	0,63588	4,19509	1,54505	2,74754	1,03174
0,66	1,46982	1,31414	0,64183	4,25963	1,50712	2,78981	1,04762
0,67	1,49208	1,28875	0,64857	4,32417	1,46731	2,83208	1,06349
0,68	1,51435	1,26200	0,65613	4,38871	1,42564	2,87435	1,07936
0,69	1,53662	1,23390	0,66455	4,45325	1,38209	2,91662	1,09524
0,70	1,55889	1,20445	0,67387	4,51779	1,33668	2,95889	1,11111
0,71	1,58116	1,17365	0,68413	4,58233	1,28940	3,00116	1,12698
0,72	1,60343	1,14150	0,69537	4,64687	1,24024	3,04343	1,14286
0,73	1,62570	1,10799	0,70764	4,71141	1,18922	3,08570	1,15873
0,74	1,64797	1,07313	0,72097	4,77595	1,13633	3,12797	1,17460
0,75	1,67024	1,03692	0,73540	4,84049	1,08156	3,17024	1,19047

TABLE II. (Suite.)

$$C = \frac{\mu'+2}{\mu'}\omega,\quad D = \frac{4\mu'+4}{\mu'}\omega - \frac{2\mu'+1}{\mu'-1}\omega^2,\quad F = \frac{3\mu'+2}{\mu'}\omega - \frac{3\mu'+1}{\mu'-1}\omega^2 + \frac{\mu'^2}{(\mu'-1)^2}\omega^2,$$

$$H = \frac{4\mu'+4}{\mu'}\omega,\quad K = \frac{6\mu'+4}{\mu'}\omega - \frac{3\mu'+1}{\mu'-1}\omega^2,\quad M = \frac{3\mu'+2}{\mu'}\omega,\quad \alpha' = \frac{\omega}{\mu'-1},$$

$$\mu' = 1,635.$$

ω	C	D	F	H	K	M	α'
0,55	1,22278	1,51143	0,61277	3,54556	1,83255	2,32278	0,86614
0,56	1,24501	1,50125	0,61305	3,61003	1,81379	2,36501	0,88189
0,57	1,26724	1,48973	0,61369	3,67449	1,79318	2,40724	0,89764
0,58	1,28948	1,47687	0,61474	3,73896	1,77070	2,44947	0,91338
0,59	1,31171	1,46265	0,61624	3,80342	1,74637	2,49171	0,92913
0,60	1,33394	1,44710	0,61822	3,86789	1,72017	2,53394	0,94488
0,61	1,35617	1,43020	0,62073	3,93235	1,69212	2,57617	0,96063
0,62	1,37841	1,41195	0,62381	3,99682	1,66221	2,61841	0,97638
0,63	1,40064	1,39236	0,62750	4,06128	1,63043	2,66064	0,99212
0,64	1,42287	1,37142	0,63183	4,12574	1,59680	2,70287	1,00787
0,65	1,44510	1,34914	0,63685	4,19021	1,56130	2,74510	1,02362
0,66	1,46734	1,32552	0,64259	4,25467	1,52395	2,78734	1,03937
0,67	1,48957	1,30055	0,64910	4,31914	1,48473	2,82957	1,05512
0,68	1,51180	1,27424	0,65641	4,38360	1,44366	2,87180	1,07086
0,69	1,53403	1,24658	0,66457	4,44807	1,40072	2,91403	1,08661
0,70	1,55627	1,21757	0,67361	4,51253	1,35593	2,95627	1,10236
0,71	1,57850	1,18722	0,68358	4,57700	1,30927	2,99850	1,11811
0,72	1,60073	1,15553	0,69451	4,64146	1,16076	3,04073	1,13386
0,73	1,62296	1,12249	0,70645	4,70593	1,21038	3,08296	1,14960
0,74	1,64520	1,08811	0,71943	4,77039	1,15815	3,12520	1,16535
0,75	1,66743	1,05238	0,73349	4,83486	1,10406	3,16743	1,18110

TABLE II. (Suite.)

$$C = \frac{\mu'+2}{\mu'}\omega;\quad D = \frac{4\mu'+4}{\mu'}\omega - \frac{2\mu'+1}{\mu'-1}\omega^2;\quad F = \frac{3\mu''+2}{\mu'}\omega - \frac{3\mu'+1}{\mu'-1}\omega^2 + \frac{\mu'^2}{(\mu'-1)^2}\omega^3,$$

$$H = \frac{4\mu'+4}{\mu'}\omega,\quad K = \frac{6\mu'+4}{\mu'_1}\omega - \frac{3\mu'+1}{\mu'-1}\omega^2,\quad M = \frac{3\mu'+2}{\mu'}\omega,\quad \alpha' = \frac{\omega}{\mu'-1},$$

$\mu' = 1,640.$

ω	C	D	F	H	K	M	α'
0,55	1,22073	1,51849	0,61509	3,54146	1,84334	2,32073	0,85937
0,56	1,24292	1,50865	0,61529	3,60585	1,82505	2,36292	0,87500
0,57	1,26512	1,49747	0,61585	3,67024	1,80492	2,40512	0,89062
0,58	1,28731	1,48496	0,61680	3,73463	1,78293	2,44731	0,90625
0,59	1,30951	1,47110	0,61819	3,79902	1,75910	2,48951	0,92187
0,60	1,33170	1,45591	0,62005	3,86341	1,73342	2,53171	0,93750
0,61	1,35390	1,43939	0,62242	3,92780	1,70589	2,57390	0,95312
0,62	1,37609	1,42152	0,62535	3,99220	1,67650	2,61610	0,96875
0,63	1,39829	1,40232	0,62887	4,05659	1,64527	2,65829	0,98437
0,64	1,42048	1,38178	0,63303	4,12098	1,61218	2,70049	1,00000
0,65	1,44268	1,35990	0,63786	4,18537	1,57725	2,74268	1,01562
0,66	1,46487	1,33668	0,64339	4,24976	1,54046	2,78488	1,03125
0,67	1,48707	1,31213	0,64968	4,31415	1,50183	2,82707	1,04687
0,68	1,50926	1,28624	0,65676	4,37854	1,46134	2,86927	1,06250
0,69	1,53146	1,25901	0,66466	4,44293	1,41901	2,91146	1,07812
0,70	1,55366	1,23044	0,67343	4,50732	1,37481	2,95366	1,09375
0,71	1,57585	1,20054	0,68311	4,57171	1,32879	2,99585	1,10937
0,72	1,59805	1,16930	0,69374	4,63610	1,28090	3,03805	1,12500
0,73	1,62024	1,13672	0,70536	4,70049	1,23117	3,08024	1,14062
0,74	1,64244	1,10280	0,71800	4,76488	1,17958	3,12244	1,15625
0,75	1,66463	1,06755	0,73171	4,82927	1,12615	3,16463	1,17187

TABLE II. (Suite.)

$$C = \frac{\mu'+2}{\mu'}\omega,\quad D = \frac{4\mu'+4}{\mu'}\omega - \frac{2\mu'+1}{\mu'-1}\omega^2,\quad F = \frac{3\mu'+2}{\mu'}\omega - \frac{3\mu'+1}{\mu'-1}\omega^2 + \frac{\mu'^2}{(\mu'-1)^2}\omega^3,$$

$$H = \frac{4\mu'+4}{\mu'}\omega,\quad K = \frac{6\mu'+4}{\mu'}\omega - \frac{3\mu'+1}{\mu'-1}\omega^2,\quad M = \frac{3\mu'+2}{\mu'}\omega,\quad \alpha' = \frac{\omega}{\mu'-1},$$

$$\mu' = 1,650.$$

ω	C	D	F	H	K	M	α'
0,55	1,21667	1,53218	0,61971	3,53333	1,86429	2,31666	0,84615
0,56	1,23879	1,52299	0,61977	3,59757	1,84693	2,35878	0,86154
0,57	1,26091	1,51248	0,62017	3,66182	1,82773	2,40090	0,87692
0,58	1,28303	1,50064	0,62093	3,72606	1,80671	2,44303	0,89231
0,59	1,30515	1,48748	0,62211	3,79030	1,78385	2,48515	0,90769
0,60	1,32727	1,47300	0,62375	3,85454	1,75916	2,52727	0,92307
0,61	1,34939	1,45720	0,62586	3,91878	1,73264	2,56939	0,93846
0,62	1,37151	1,44007	0,62851	3,98303	1,70429	2,61151	0,95384
0,63	1,39364	1,42161	0,63172	4,04727	1,67411	2,65363	0,96923
0,64	1,41576	1,40184	0,63554	4,11151	1,64210	2,69575	0,98461
0,65	1,43788	1,38075	0,64000	4,17575	1,60826	2,73788	1,00000
0,66	1,46000	1,35834	0,64514	4,24000	1,57259	2,78000	1,01538
0,67	1,48212	1,33459	0,65101	4,30424	1,53508	2,82212	1,03077
0,68	1,50424	1,30953	0,65763	4,36848	1,49575	2,86424	1,04615
0,69	1,52636	1,28314	0,66506	4,43272	1,45459	2,90636	1,06154
0,70	1,54848	1,25543	0,67332	4,49697	1,41159	2,94848	1,07692
0,71	1,57060	1,22639	0,68245	4,56121	1,36676	2,99060	1,09231
0,72	1,59272	1,19604	0,69250	4,62545	1,32011	3,03273	1,10769
0,73	1,61484	1,16436	0,70350	4,68970	1,27162	3,07485	1,12308
0,74	1,63697	1,12135	0,71550	4,75394	1,22130	3,11697	1,13846
0,75	1,65909	1,09703	0,72852	4,81818	1,16914	3,15909	1,15384

TABLE III.

$\rho = r'$, système de Clairaut. $r = \rho$, Klügel et Littrow.

μ	$2A\alpha$	$A\alpha^2$	$B\alpha$	$\frac{\alpha}{2} = r = \rho$	$Ar^2 - Br + E$
	$\frac{2(\mu+2)}{\mu}\frac{1}{\mu-1}$	$\frac{\mu+2}{\mu}\frac{1}{(\mu-1)^2}$	$\frac{2\mu+1}{\mu-1}\frac{1}{\mu-1}$	$\frac{1}{2(\mu-1)}$	$\frac{\mu+2}{\mu}r^2 - \frac{2\mu+1}{\mu-1}r + \left(\frac{\mu}{\mu-1}\right)^2$
1,500	9,33333	9,33333	16,00000	1,000000	3,33333
1,501	9,31116	9,29257	15,94416	0,998004	3,32713
1,502	9,28907	9,25206	15,88864	0,996016	3,32095
1,503	9,26708	9,21181	15,83343	0,994036	3,31480
1,504	9,24519	9,17181	15,77854	0,992064	3,30870
1,505	9,22338	9,13206	15,72395	0,990099	3,30263
1,506	9,20166	9,09255	15,66967	0,988143	3,29658
1,507	9,18004	9,05329	15,61570	0,986194	3,29055
1,508	9,15851	9,01428	15,56203	0,984252	3,28456
1,509	9,13706	8,97550	15,50866	0,982318	3,27861
1,510	9,11570	8,93696	15,45559	0,980392	3,27268
1,511	9,09443	8,89866	15,40282	0,978474	3,26680
1,512	9,07325	8,86060	15,35034	0,976563	3,26093
1,513	9,05215	8,82276	15,29816	0,974659	3,25509
1,514	9,03114	8,78516	15,24626	0,972763	3,24928
1,515	9,01022	8,74779	15,19465	0,970874	3,24350
1,516	8,98939	8,71064	15,14332	0,968992	3,23775
1,517	8,96863	8,67373	15,09228	0,967118	3,23203
1,518	8,94796	8,63703	15,04151	0,965251	3,22634
1,519	8,92738	8,60056	14,99103	0,963391	3,22068
1,520	8,90688	8,56431	14,94083	0,961538	3,21505
1,521	8,88646	8,52828	14,89090	0,959693	3,20944
1,522	8,86613	8,49246	14,84124	0,957854	3,20386
1,523	8,84588	8,45686	14,79185	0,956023	3,19830
1,524	8,82571	8,42148	14,74273	0,954198	3,19278
1,525	8,80562	8,38630	14,69388	0,952381	3,18728
1,526	8,78561	8,35134	14,64529	0,950570	3,18182
1,527	8,76568	8,31659	14,59696	0,948767	3,17637
1,528	8,74584	8,28204	14,54890	0,946970	3,17095
1,529	8,72607	8,24770	14,50109	0,945180	3,16556
1,530	8,70638	8,21356	14,45354	0,943396	3,16019
1,531	8,68676	8,17963	14,40625	0,941620	3,15485
1,532	8,66723	8,14589	14,35921	0,939850	3,14954
1,533	8,64777	8,11236	14,31242	0,938086	3,14425
1,534	8,62839	8,07902	14,26587	0,936330	3,13899
1,535	8,60908	8,04587	14,21958	0,934579	3,13375
1,536	8,58986	8,01293	14,17353	0,932836	3,12853
1,537	8,57071	7,98018	14,12773	0,931099	3,12335
1,538	8,55163	7,94762	14,08217	0,929368	3,11819
1,539	8,53263	7,91525	14,03685	0,927644	3,11305
1,540	8,51371	7,88306	13,99177	0,925926	3,10795

TABLE IV.

ω	ω^2	ω^3	$\frac{1}{1-\omega}$
0,550	0,302500	0,166375000	2,22222
0,555	0,308025	0,170953875	2,24719
0,560	0,313600	0,175616000	2,27272
0,565	0,319225	0,180362125	2,29885
0,570	0,324900	0,185193000	2,32558
0,575	0,330625	0,190109375	2,35294
0,580	0,336400	0,195112000	2,38095
0,585	0,342225	0,200201625	2,40964
0,590	0,348100	0,205379000	2,43902
0,595	0,354025	0,210644875	2,46913
0,600	0,360000	0,216000000	2,50000
0,605	0,366025	0,221445125	2,53164
0,610	0,372100	0,226981000	2,56410
0,615	0,378225	0,232608375	2,59740
0,620	0,384400	0,238328000	2,63158
0,625	0,390625	0,244140625	2,66666
0,630	0,396900	0,250047000	2,70270
0,635	0,403225	0,256047875	2,73973
0,640	0,409600	0,262144000	2,77777
0,645	0,416025	0,268336125	2,81691
0,650	0,422500	0,274625000	2,85714
0,655	0,429025	0,281011375	2,89855
0,660	0,435600	0,287496000	2,94117
0,665	0,442225	0,294079625	2,98507
0,670	0,448900	0,300763000	3,03030
0,675	0,455625	0,307546875	3,07692
0,680	0,462400	0,314432000	3,12500
0,685	0,469225	0,321419125	3,17460
0,690	0,476100	0,328509000	3,22580
0,695	0,483025	0,335702375	3,27869
0,700	0,490000	0,343000000	3,33333
0,705	0,497025	0,350402625	3,38982
0,710	0,504100	0,357911000	3,44832
0,715	0,511225	0,365525875	3,50877
0,720	0,518400	0,373248000	3,57143
0,725	0,525625	0,381078125	3,63636
0,730	0,532900	0,389017000	3,70370
0,735	0,540225	0,397065375	3,77358
0,740	0,547600	0,405224000	3,84615
0,745	0,555025	0,413493625	3,92157
0,750	0,562500	0,421875000	4,00000