ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

ÉRIC LEICHTNAM

Construction de solutions singulières pour des équations aux dérivées partielles non linéaires

Annales scientifiques de l'É.N.S. 4e série, tome 20, nº 2 (1987), p. 137-170

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1987_4_20_2_137_0>

Ann. scient. Éc. Norm. Sup.,
4 série, t. 20, 1987, p. 137 à 170.

CONSTRUCTION DE SOLUTIONS SINGULIÈRES POUR DES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES NON LINÉAIRES

PAR ERIC LEICHTNAM

0. Introduction

Soit P un opérateur quasi linéaire d'ordre m :

$$u \to \mathrm{P}u = \sum_{|\alpha|=m} \mathrm{P}(x, u, \ldots, \partial_x^\beta u, \ldots)_{|\beta| \leqq m-1} \partial_x^\alpha u + \mathrm{R}(x, \partial^\beta u)$$

où les P_α, R sont holomorphes en leurs arguments pour x près de $0 \in \mathbb{C}^{n+1}$, $\partial_x^\beta u$ près de $u_0^{(\beta)} \in \mathbb{C}$, $\beta \in \mathbb{N}^{n+1}$; $|\beta| \leqq m-1$. Dans cet article, on construit des solutions locales $u(x)$ de l'équation $\mathrm{P}u=0$, la fonction $u(x)$ étant holomorphe ramifiée autour d'une hypersurface complexe lisse $\mathscr{S}$ passant par $0 \in \mathbb{C}^{n+1}$ d'équation $s(x)=0$, et de la forme :

$$(0) \qquad u(x) = a(x) + \sum_{k=0}^{+\infty} \mathrm{b}_k(x) s^{\gamma_k}(x)$$

où (γ_k) est une suite de R_+^* strictement croissante et tendant vers $+\infty$, les fonctions a et b_k sont holomorphes dans un voisinage Ω de 0, et la série de (0) converge sur le revêtement de $\Omega \setminus \mathscr{S}$. Nous travaillons toujours avec l'hypothèse suivante :

L'hypersurface $\mathscr{S}$ est simplement caractéristique pour l'équation linéarisée $\mathrm{P}_{\mathrm{lin}}$ de P en a, c'est-à-dire que le symbole principal p_m de $\mathrm{P}_{\mathrm{lin}}$:

$$p_m(x, \xi) = \sum_{|\alpha|=m} \mathrm{P}_\alpha(x, a(x), \partial_x^\beta a(x))_{|\beta| \leqq m-1} \xi^\alpha$$

vérifie les deux conditions suivantes :

$$p_m(x, ds(x))\big|_{\mathscr{S}} \equiv 0, \qquad \partial_\xi p_m(0, ds(0)) \neq 0.$$

On supposera toujours connues les données $\partial_t^p a\big|_{t=0} (p \leqq m-1)$, $b_{k\,|\,t=0} (k \geqq 0)$, $s\big|_{t=0}$ où $t=0$ est l'équation d'une hypersurface complexe lisse $\mathscr{T}$ transverse au champ de vecteurs $\partial_\xi p_m(x, ds(x))$. On utilisera le développement linéarisé de P près de $a(x)$:

$$\mathrm{P}(a+r) = \mathrm{P}(a) + \mathrm{P}_{\mathrm{lin}} . r - \mathrm{H}(x, \partial^{\alpha'} r)$$

$$\mathrm{P}_{\mathrm{lin}}\, r = \sum_{\alpha'} \frac{\partial \mathrm{P}}{\partial u_{\alpha'}}(x,\, \partial^{\beta'} a) \,.\, \partial^{\alpha'} r$$

$$\mathrm{H}(x,\, u_{\alpha'})_{|\alpha'| \leqq m} = \int_0^1 (v-1) \sum \mathrm{C}_{\alpha,\, \beta} \frac{\partial^2 \mathrm{P}}{\partial u_\alpha \partial u_\beta}(x,\, \partial^\delta a + v u_\delta)\, u_\alpha u_\beta \, dv$$

où $\mathrm{C}_{\alpha,\,\beta}$ vaut 1 si $\alpha=\beta$ et 2 sinon. Comme P est quasi linéaire on a $|\alpha|+|\beta| \leqq 2m-1$ (et $|\delta| \leqq m$), en outre si $|\alpha|+|\beta|=2m-1$ alors $|\delta| \leqq m-1$; ces deux faits sont essentiels.

L'article comprend deux parties. Dans la première on se donne a et $\mathscr{S}$ vérifiant les conditions précédentes, on suppose $\mathrm{P}(a)\equiv 0$, et on construit des solutions du type (0) peu singulières : on choisit $\gamma_k = m+(k+1)\mu$ où $\mu \in]0,\, 1[$ de sorte que la solution u admette m dérivées bornées. Le résultat est énoncé dans le théorème 1.1.3 où sont introduites des algèbres A^m. Dans la seconde partie (plus délicate), on s'intéresse à des solutions du type (0) avec $\gamma_k = m-1/2+k/2$. L'étude des solutions de l'équation de Burger $\partial_t^2 u - u \partial_y^2 u = 0$ (pour laquelle on vérifie qu'il n'existe pas de solutions du type $a+s^\gamma$ avec $0<\gamma<1$ et $\gamma \neq 1/2$) laisse penser que ce cas est le seul raisonnable. Contrairement à la situation précédente, a ne sera plus nécessairement solution de $\mathrm{P}a=0$ si b_0 est non nul [*cf.* équation (10) dans II]; a et $\mathscr{S}$ seront ici des *inconnues* au même titre que les $b_k\,(k \geqq 0)$. Le théorème 1.1.6 assure l'existence de solutions de ce type.

Rappelons que pour les équations aux dérivées partielles *linéaires* à caractéristiques simples, le problème de la construction de solutions holomorphes ramifiées [d'un type plus général que (0) a été étudié dans [6]. Dans [2] et pour des équations *semi-linéaires* avec R polynomial en ses arguments, les auteurs ont construit des solutions d'un type analogue à (0) mais dans le cas où $\mathscr{S}$ est non caractéristique $(p_m(0,\, ds(0)) \neq 0)$].

Il m'est agréable de remercier G. Lebeau qui m'a proposé le sujet de travail, et le rapporteur dont les nombreuses suggestions ont permis de clarifier le texte.

1. Énoncé des résultats

Dans la partie I la fonction holomorphe a et $\mathscr{S}$ [d'équation $s(x)=0$] sont données et on suppose que $\mathrm{P}a \equiv 0$. Un changement de coordonnées permet de supposer que $\mathscr{S}$ est définie par l'équation $s=y_1=0$. Posons $x=(t,\, y)$ et

$$1-y/\mathrm{R} = \prod_{j=1}^{n} (1-y_j/\mathrm{R}) \qquad (\mathrm{R}>0).$$

Si $u=\sum_\alpha u_\alpha y^\alpha$ et $v=\sum v_\alpha y^\alpha$ sont deux séries formelles à coefficients complexes nous écrivons $u \ll v$ pour exprimer que $\forall \alpha,\ |u_\alpha| \leqq v_\alpha$.

DÉFINITION 1.1.1. — Soit Y_1 une indéterminée. Étant donné $\mathrm{R}>0$, $\varepsilon>0$, $p \in \mathbb{N}$ et $d \in \mathbb{N}$, $\mathrm{A}^d(\mathrm{R},\, \varepsilon,\, p)$ désigne l'ensemble des séries formelles du type

$$u=u(x,\, \mathrm{Y}_1) = \sum_{j \geqq 0} \sum_{k \geqq 1} u_{k,\, j}(t,\, y)\, \mathrm{Y}_1^{k\mu+j+d} \qquad (0<\mu<1)$$

où les fonctions $u_{k,j}$, holomorphes au voisinage de $0 \in \mathbb{C}^{n+1}$, vérifient :

$$u_{k,j} \ll \sum_{l=0}^{+\infty} \frac{t^l}{(1-y/\mathrm{R})^{k+j+l}} \frac{(k+j+l)!}{l!(k+j+p)!} \mathrm{C}_{kjl}^p$$

$$\mathrm{N}^{p,d}(u) = \sum_{k,j,l} \mathrm{C}_{kjl}^p \varepsilon^{k+2j+l} < +\infty.$$

Plus précisément nous définissons $\mathrm{N}^{p,d}$ en supposant que les $\mathrm{C}_{kjl}^p(u)$ sont les plus petits réels $\geqq 0$ permettant de majorer u_{kj}.

On pose

$$\mathrm{A}^d(\mathrm{R}) = \bigcup_{\varepsilon > 0} \mathrm{A}^d(\mathrm{R}, \varepsilon, p), \qquad \mathrm{A}^d = \bigcup_{\mathrm{R} > 0} \mathrm{A}^d(\mathrm{R}).$$

Dans la suite de la partie I on peut supposer $0 < \varepsilon < 1$, $0 < \mathrm{R} < 1$.

Remarque 1.1.2. — La non-linéarité de P entraîne la présence des exposants $k\mu$, celle des j résulte de la méthode d'optique géométrique que nous utiliserons, d assure une régularité minimale. A un élément $u \in \mathrm{A}^d(\mathrm{R}, \varepsilon, p)$ on associe *de manière non injective* une fonction $u(x) = \sum u_{k,j} y^{k\mu+j+d}$.

Si $r_1 \in \mathrm{A}^{d_1}$ et $r_2 \in \mathrm{A}^{d_2}$ alors $r_1 r_2$ appartient à $\mathrm{A}^{d_1+d_2}$. Si α est un multi-indice de $\mathbb{N}^{n+1}$ de longueur $\leqq d$ alors on fait opérer ∂^α de A^d dans $\mathrm{A}^{d-|\alpha|}$ de manière évidente. Comme $\mathscr{S}$ est caractéristique, on vérifie alors que $\mathrm{P}_{\mathrm{lin}}$ envoie A^d dans A^{d-m+1}. La partie I est alors consacrée à la preuve du théorème suivant.

Théorème 1.1.3. — *Soient* $u_0 \in \mathrm{A}^m(\mathbb{C}^n)$ *et* $\mathscr{T}$ *une hypersurface analytique passant par* $0 \in \mathbb{C}^{n+1}$, *d'équation* $t=0$, *et transverse au champ* $\partial_\xi p_m(x, dy_1)$ *(et donc à* $\mathscr{S}$*). Alors il existe* $r \in \mathrm{A}^m(\mathbb{C}^{n+1})$ *telle que* $\mathrm{P}(a(x)+r(x)) \equiv 0$ *et* $r|_{t=0} = u_0$.

La preuve consiste à établir, par le théorème du point fixe, l'existence de $r \in \mathrm{A}^m$ vérifiant $r|_{t=0} = u_0$ et $\mathrm{P}_{\mathrm{lin}}(r) = \mathrm{H}(x, \partial^\alpha r)$. Dans la section 3 nous établissons des résultats d'opération permettant de contrôler $\mathrm{H}(x, \partial^\alpha r)$, dans la section 4 nous résolvons dans A^m (par l'optique géométrique) l'équation $\mathrm{P}_{\mathrm{lin}} u = v \in \mathrm{A}^1$. Dans la section 5 nous prouvons le théorème 1.1.3. Dans la partie II nous travaillerons avec les algèbres définies ci-après :

Définition 1.1.4. — $\mathrm{B}^{m-1}(\mathbb{C}^{n+1})$ désigne l'algèbre des séries formelles du type :

$$r(x, \mathrm{S}) = \sum_{k=0}^{+\infty} b_k(x) \mathrm{S}^{(k+2m-1)/2}$$

où on suppose que les b_k sont holomorphes sur un même voisinage U de $0 \in \mathbb{C}^{n+1}$ et qu'il existe une constante $\mathrm{C} > 0$ telle que pour tout k de $\mathbb{N}$ et x de U on ait $|b_k(x)| \leqq \mathrm{C}^{k+1}$.

Plus loin nous substituerons à l'indéterminée S une fonction holomorphe $s(x)$ s'annulant en l'origine et définissant l'équation d'une hypersurface caractéristique pour $\mathrm{P}_{\mathrm{lin}}$.

Pour $|\alpha|=1$ nous définirons alors l'action de ∂^α sur B^{m-1} en convenant que :

$$\partial^\alpha(S^{(k+2m-1)/2})=\frac{k+2m-1}{2}S^{(k+2m-3)/2}\,\partial^\alpha s(x),$$

et nous définirons l'action de ∂^α, pour $|\alpha|\leqq m$, par récurrence. A un élément $r(x, S)$ de $B^{m-1}(\mathbb{C}^{n+1})$ nous associerons de manière non injective une fonction multiforme $x\to r(x, s(x))$ définie près de l'origine. La partie II sera consacrée à la preuve du théorème 1.1.6; avant de l'énoncer nous définissons quelques notations.

NOTATIONS 1.1.5. — $x=(t, y)\in\mathbb{C}\times\mathbb{C}^n$. Supposons que l'opérateur quasi linéaire P de l'introduction soit de la forme $P=\partial_t^m+Q'(t, y, \partial^\alpha)$ où $|\alpha|\leqq m$, $\alpha\neq(m, 0, \ldots, 0)$. Le symbole principal de l'opérateur linéarisé $P_{\text{lin}}(a)$ de P en a est de la forme $p_m(t, y, \partial^\beta a, \tau, \xi)$ où $|\beta|\leqq m-1$ (P est quasi linéaire). Considérons alors des données de Cauchy $a_p(y)\, 0\leqq p\leqq m-1$ holomorphes près de $0\in\mathbb{C}^n$ et un point (τ^0, ξ^0) de $(\mathbb{C}\times\mathbb{C}^n)\setminus 0$. Supposons que :

$$p_m(0, \partial^{\beta'} a_p(0), \tau^0, \xi^0)=0, \qquad \partial_\tau p_m(0, \partial^{\beta'} a_p(0), \tau^0, \xi^0)\neq 0$$

où $p+|\beta'|\leqq m-1$. On choisit alors la racine $\tau_1(x, u_\beta, \xi)$ de l'équation (en τ) $p_m(x, u, \tau, \xi)=0$, holomorphe près du point $(0, \partial^{\beta'} a_p(0), \xi^0)$ et y prenant la valeur τ^0. Enfin soit s_1 holomorphe près de $0\in\mathbb{C}^n$ telle que $s_1(0)=0$ et $ds_1(0)=\xi^0$.

THÉORÈME 1.1.6. (avec ces notations). — *Soit* $\sum b_k^1(y)\, S^{(k+2m-1)/2}$ *appartenant à* $B^{m-1}(\mathbb{C}^n)$ (voir *déf.* 1.1.4). *Alors il existe un voisinage de* $0\in\mathbb{C}^{n+1}$ *sur lequel il existe des fonctions holomorphes* s, a, $b_k(k\in\mathbb{N})$ telles que : $b_k(0, y)=b_k^1$, $\partial_t^p a(0, y)=a_p(p\leqq m-1)$, $\partial_t s(0)=\tau^0$, $s(0, y)=s_1$, *s est caractéristique pour* P_{lin} *et :*

$$r(x, S)=\sum_{k=0}^{+\infty} b_k(x)\, S^{(k+2m-1)/2}\in B^{m-1}(\mathbb{C}^{n+1})$$

et $x\to a(x)+r(x, s(x))$ *est solution de* $P=0$.

Dans la preuve nous commencerons par définir des normes formelles relatives à B^{m-1} et permettant d'obtenir de très bonnes majorations. Nous devrons redémontrer le théorème de Cauchy-Kovaleska. Nous utiliserons la linéarisation de P en a écrite dans l'introduction, nous montrerons qu'on peut appliquer le théorème du point fixe dans un Banach où l'inconnue est la suite infinie $(b_0, b_1, \ldots,)$. Pour cela nous établirons des identités algébriques permettant d'écrire un système infini d'équations de sorte que la donnée de b_0 permette de déterminer a et s à chaque itération.

2. Propriétés des espaces A^d

La proposition suivante précise les domaines géométriques de convergence associés aux normes $N^{p,d}$ définies en 1.1.1.

PROPOSITION 1.2.1. — 1° *Soit* $u \in A^d(R, \varepsilon, p)$, *alors* $u_{k,j}$ *est holomorphe dans*

$$\Omega = \left\{ (t, y) \in \mathbb{C}^{n+1};\ |y_j| < R \text{ et } |t| < \varepsilon \prod_{j=1}^{n} \left(1 - \frac{|y_j|}{R} \right) \right\}$$

et, pour tout compact $K \subset \Omega$, *il existe* $C_K > 0$ *tel que*

$$\sup_K |u_{kj}| \leqq C_K^{k+j+1}.$$

2° *Réciproquement, soit* (u_{kj}) *une suite de fonctions holomorphes sur un voisinage ouvert* V *de* $0 \in \mathbb{C}^{n+1}$ *telles que* $\sup_V |u_{kj}| \leqq C^{k+j+1}$, *alors* $\sum u_{k;j} Y_1^{k\mu+j+d} \in A^d$.

Preuve. — Comme $N^{p,d}(u)$ est fini (notations de la définition 1.1.1) il existe $M > 0$ tel que :

$$C_{kjl}^p(u) \leqq M\, \varepsilon^{-(k+2j+l)}.$$

On peut alors écrire :

$$u_{kj} \ll \frac{M\, \varepsilon^{-k-2j}}{(1-y/R)^{k+j}} \sum_{l=0}^{+\infty} \frac{t^l \varepsilon^{-l}}{(1-y/R)^l} \frac{(k+j+l)!}{l!\,(k+j)!}.$$

Le 1° découle de l'égalité suivante, valable pour $|a| < 1$:

$$\sum_{l=0}^{+\infty} \frac{(k+j)!}{l!\,(k+j)!} a^l = \frac{1}{(1-a)^{k+j+1}}.$$

Reprenons les notations du 2°, V contient un polydisque fermé centré en 0 de rayon $R' > 0$ assez petit. Les inégalités de Cauchy permettent alors d'écrire :

$$u_{kj}(t, y) \ll \frac{C^{k+j+d}}{(1-y/R')} \sum_{l=0}^{+\infty} \frac{t^l}{R'^l}.$$

Il est alors clair que $u \in A^d$.

Remarque 1.2.2. — Muni de la norme $N^{p,d}$ $A^d(R, \varepsilon, p)$ est un espace de Banach. Si $p' \geqq p$ il est clair que la norme $N^{p',d}$ majore la norme $N^{p,d}$. Soit $d' \in d + \mathbb{N}$, une simple opération de décalage sur l'indice j montre alors que :

$$\forall u \in A^{d'}(R, \varepsilon, 0), \qquad N^{0,d}(u) \leqq \varepsilon^{2(d'-d)} N^{0,d'}(u).$$

PROPOSITION 1.2.3.. — *Soient* $d_j \geqq 0$ *et* $u_j \in A^{d_j}(R, \varepsilon, 0)$ *pour* $1 \leqq j \leqq q$.

Posons $d = \sum_1^q d_j$. *Alors* $\prod_1^q u_j$ *appartient à* $A^d(R, \varepsilon, 0)$ *et :*

$$N^{0,d}\left(\prod_{j=1}^{q} u_j \right) \leqq \prod_{j=1}^{q} N^{0,d_j}(u_j).$$

Preuve. — Nous prouverons le résultat dans le cas $q=2$, le cas général s'en déduisant par récurrence. Soient donc $u \in A^{d_1}(R, \varepsilon, 0)$ et $V \in A^{d_2}(R, \varepsilon, 0)$.

Posons $j=j_1+j_2$, $k=k_1+k_2$, $l=l_1+l_2$. L'interprétation combinatoire des coefficients binomiaux montre que :

$$\frac{(k_1+j_1+l_1)!(k_2+j_2+l_2)!}{l_1!(k_1+j_1)!l_2!(k_2+j_2)!} \leqq \frac{(k+l+j)!}{l!(k+j)!}.$$

Avec des notations évidentes, le terme associé à $Y_1^{k\mu+j+d}$ dans la série définissant $uv \in A^{d_1+d_2}$ est :

$$\sum_{k_1=1}^{k-1} \sum_{j_1=0}^{j} u_{k_1, j_1} v_{k-k_1, j-j_1}$$

l'inégalité précédente permet alors d'obtenir l'inégalité :

$$C_{kj}^0(uv) \leqq \sum_{k_1=1}^{k-1} \sum_{j_1=0}^{j} \sum_{l_1=0}^{l} C_{k_1 j_1 l_1}^0(u)\, C_{k-k_1, j-j_1, l-l_1}^0(v),$$

celle-ci entraîne immédiatement le résultat de la proposition.

3. Estimations

Le résultat suivant m'a été communiqué par C. Wagschal.

LEMME 1.3.1. — *Considérons* $l \in \mathbb{N}$ *et* $0<R<R'$. *Alors :*

$$\frac{1}{1-y/R'} \frac{1}{(1-y/R)^{l+1}} \ll \frac{R'}{R'-R} \frac{1}{(1-y/R)^{l+1}}.$$

Preuve. — En faisant la différence des deux termes on obtient :

$$\left(\frac{R'}{R'-R} - \frac{1}{1-y/R'}\right)\frac{1}{(1-y/R)^{l+1}} = \frac{R}{R'-R} \frac{1}{(1-y/R)^{l}}\left(\frac{1-y}{R'}\right)^{-1}$$

comme les coefficients de cette série entière sont $\geqq 0$ le résultat est prouvé.

PROPOSITION 1.3.3. — *Soient* b *une fonction holomorphe et bornée par* K *sur un polydisque centré en* $0 \in \mathbb{C}^{n+1}$ *de rayon* R' *et* $u \in A^d(R, \varepsilon, p)$ *avec* $0<R<R'$, $0<\varepsilon<R'$. *Alors* $bu \in A^d(R, \varepsilon, p)$ *et :*

$$N^{p,d}(bu) \leqq \frac{R'}{R'-R} \frac{R'}{R'-\varepsilon} K N^{p,d}(u).$$

Preuve. — D'après les inégalités de Cauchy, on a :

$$b(t, y) \ll K \frac{1}{1-y/R'} \sum_{l=0}^{+\infty} \frac{t}{R'^l}.$$

Le lemme 1.3.1 permet alors d'écrire :

$$bu_{kj} \ll K \frac{R'}{R'-R} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(k+j+l)!}{(1-(y/R)^{k+j+l}} \frac{(k+j+l)!}{l!(k+j+p)!} C^p_{kjl}(u) \sum_{l=0}^{\infty} \frac{t^l}{R'^l}$$

on obtient alors les deux inégalités suivantes, qui entraînent le résultat :

$$C^p_{kj}(bu) \leqq K \frac{R'}{R'-R} \sum_{l_1=0}^{l} C^p_{kjl_1}(u) \frac{1}{R'^{l-l_1}}$$

$$N^{p,d}(bu) \leqq \frac{KR'}{R'-R} \sum_{kjl} \sum_{l_1=0}^{l} C^p_{kjl_1}(u) \varepsilon^{k+2j+l_1} \left(\frac{\varepsilon}{R'}\right)^{l-l_1}.$$

PROPOSITION 1.3.3. — *Soient* $F(x, u)$ *une fonction holomorphe et bornée par* K *sur un polydisque centré en* $0 \in \mathbb{C}^{n+1} \times \mathbb{C}^q$ *de rayon* R' *et* $u_1, \ldots, u_q \in A^0(R, \varepsilon, 0)$ $0<R<R'$, $0<\varepsilon<R'$, *telles que* $N^{0,0}(u_j)<R'$. *Alors* $v = F(x, u_1, \ldots, \ldots, u_q) - F(x, 0) \in A^0(R, \varepsilon, 0)$ *et*

$$N^{0,0}(v) \leqq K\left(\frac{R'}{R'-R}\right) \frac{R'}{R'-\varepsilon} \prod_{j=1}^{q} \left(1 - \frac{N^{0,0}(u_j)}{R'}\right)^{-1}.$$

Preuve. — Les inégalités de Cauchy permettent d'écrire que :

$$F(x, u_1, \ldots, u_q) - F(x, 0) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^q \setminus 0} F_\alpha(x) u_1^{\alpha_1} \ldots u_q^{\alpha_q}$$

où les F_α sont holomorphes et bornées par $KR'^{-|\alpha|}$ sur le polydisque centré en 0 de rayon $R'>0$. L'inégalité suivante découle des propositions 1.2.3 et 1.3.2 et entraîne le résultat.

$$N^{0,0}[F_\alpha u_1^{\alpha_1} \ldots u_q^{\alpha_q}] \leqq K\left(1 - \frac{R}{R'}\right)^{-1} \frac{R'^{1-|\alpha|}}{R'-\varepsilon} \prod_{j=1}^{q} (N^{0,0}(u_j))^{\alpha_j}.$$

PROPOSITION 1.3.4. — *Soit* $\alpha \in \mathbb{N}^{n+1}$, $|\alpha| \leqq m$, $|\alpha| \leqq p$. *Il existe* $c>0$ *tel que, pour tout* $u \in A^m(R, \varepsilon, p)$, $0<\varepsilon\leqq 1$, $0<R\leqq 1$,

$$N^{p-|\alpha|, m-|\alpha|}(\partial^\alpha u) \leqq c R^{-|\alpha|} N^{p,m}(u).$$

Preuve. — Nous prouverons le résultat quand $|\alpha|=1$, le cas général s'en déduisant par récurrence. Nous distinguerons trois cas correspondant à t, y_1, y_q $(q\geqq 2)$ au cours desquels nous effectuerons des décalages d'indices. Soit $q\geqq 2$, on a :

$$\partial_{y_q} u_{kj} \ll \frac{1}{R} \sum_l \frac{t^l}{(1-y/R)^{k+j+l+1}} \frac{(k+j+l+1)!}{l!(k+j+1+p-1)!} C^p_{kjl}(u).$$

Dans l'expression de $\partial_{y_q} u \in A^{m-1}$ $\partial_{y_q} u_{kj}$ est le terme d'indice $(k, j+1)$ donc :

$$C_{kjl}^{p-1}(\partial_{y_q} u) \leqq \frac{1}{R} C_{k, j-1, l}^{p}(u), \qquad j \geqq 1.$$

On en déduit que : $N^{p-1, m-1}(\partial_{y_q} u) \leqq \varepsilon^2 R^{-1} N^{p, m}(u)$. Pour ∂_{y_1} on reprend ce qui précède et considère en plus le cas où on dérive $y_1^{k\mu+j+m}$ au lieu de u_{kj}, on obtient alors (les termes d'indices <0 sont nuls) :

$$C_{kjl}^{p-1}(\partial_{y_1} u) \leqq \frac{1}{R} C_{k, j-1, l}^{p}(u) + \frac{k\mu+j+m}{k+j+p} C_{kjl}^{p}(u).$$

Donc $N^{p-1, m-1}(\partial_{y_1} u) \leqq 1/R(\varepsilon^2 + \mathrm{Cte}) N^{p, m}(u)$. $\partial_t u_{k, j}$ est, dans l'expression de $\partial_t u \in A^{m-1}$, le terme d'indice $(k, j+1)$ et on a :

$$\partial_t u_{kj} \ll \sum_l \frac{t^l}{(1-y/R)^{k+l+j+1}} \frac{(k+l+j+1)!}{l!(k+p-1+j+1)!} C_{k, j, l+1}^{p}(u).$$

Donc

$$C_{kjl}^{p-1}(\partial_t u) \leqq C_{k, j-1, l+1}^{p}(u)$$

et :

$$N^{p-1, m-1}(\partial_t u) \leqq \varepsilon N^{p, m}(u)$$

C.Q.F.D.

Le théorème suivant est l'aboutissement de cette section, il permet de contrôler le terme non linéaire $H(x, \partial^\alpha u)$ (*voir* introduction). On fixe $R'>0$ de telle façon que toutes les fonctions $H(x, u, v)$, apparaissant dans l'expression de $H(x, u) - H(x, v)$ fournie par la formule de Taylor à l'ordre un avec reste intégral, soient holomorphes et bornées sur le polydisque centré en 0 et de rayon R', puis on fixe $R_0>0$, $\varepsilon_0>0$ tel que $R_0 \leqq 1$, $R_0 < R'$ et $\varepsilon_0 \leqq 1$, $\varepsilon_0 < R'$. On a alors le :

THÉORÈME 1.3.5. — *Il existe $c>0$ tel que, pour*

$$0 < R \leqq R_0, \qquad 0 < \varepsilon \leqq \varepsilon_0$$
$$0 < r \leqq c R^{2m}$$

l'application $u \to H(x, \partial u)$ envoie la boule fermée $B(0; r) \subset A^m(R, \varepsilon, m)$ dans la boule fermée $B(0; (r/2)) \subset A^1(R, \varepsilon, 0)$ et soit lipschitzienne de rapport 1/2.

Preuve. — Étant donné que $H(x, 0) = 0$ il s'agit de vérifier le caractère lipschitzien de rapport 1/2. On observe que la formule de Taylor permet de décomposer $H(x, u_\alpha) - H(x, v_\alpha)$ en une somme finie de termes du type : $F(x, u_\delta, v_{\delta'}) u_{\alpha'}(u_\beta - v_\beta)$ ou $F(x, u_\delta, v_{\delta'}) v_{\alpha'}(u_\beta - v_\beta)$, où dans les deux cas $|\alpha'| + |\beta| \leqq 2m-1$. Cela dit on suppose $N^{m, m}(u) \leqq r$, $N^{m, m}(v) \leqq r$, alors la proposition 1.3.4 assure que :

$$N^{0, 0}(\partial^{\alpha'} u) \leqq c_1 r R^{-m} \qquad (\text{pour } |\alpha'| \leqq m)$$

si $c_1 r R^{-m} \leqq R'/2$ (c'est-à-dire $r \leqq c_2 R^m$, condition *a fortiori* vérifiée si $r \leqq c_2 R^{2m}$ vu que $R \leqq 1$), on a d'après la proposition 1.3.3 :

$$N^{0,0}(F(x, u, v) - F(x, 0, 0)) \leqq c_3$$

les propositions 1.2.3 et 1.3.2 assurent que

$$N^{0,1}((F(x, u, v) - F(x, 0, 0))\,\partial^{\alpha'} u\, \partial^{\beta}(u-v)) \leqq c' r R^{-2m} N^{m,m}(u-v)$$
$$N^{0,1}(F(x, 0, 0)\,\partial^{\alpha'} u\, \partial^{\beta}(u-v)) \leqq c'' r R^{-2m} N^{m,m}(u-v)$$

il existe donc une constante $c>0$ tel que $0<r\leqq c R^{2m}$ entraîne

$$N^{0,1}[H(x, \partial^{\alpha} u) - H(x, \partial^{\alpha} v)] \leqq \frac{r}{2c} R^{-2m} N^{m,m}(u-v) \leqq \frac{1}{2} N^{m,m}(u-v).$$

C.Q.F.D.

4. Théorème linéaire

Rappelons que l'hypersurface caractéristique $\mathscr{S}$ est définie par l'équation $y_1=0$ et que P_{lin} envoie A^m dans A^1. Posons $x=(t, y_1, x')=(t, y)$, nous préciserons un peu plus loin le choix des coordonnées. Nous voulons construire par l'optique géométrique une solution u dans A^m de l'équation $P_{\text{lin}} u = v$, $u|_{t=0} = u_0$ où v est donnée dans A^1 et $t=0$ est l'équation d'une hypersurface transverse au champ $\partial_\xi p_m(x, dy_1)$. Nous chercherons une solution $u = Tv$ sous la forme : $Tv = u = \sum u_{kj} Y_1^{k\mu+j+m}$. On a $P_{\text{lin}} = \sum p_\beta(x)\,\partial^\beta$. L'optique géométrique introduit les opérateurs différentiels $\mathscr{L}_\sigma$ d'ordre $\leqq \sigma$ définis par :

$$\mathscr{L}_\sigma = \sum_{\substack{|\beta| \leqq m \\ \alpha_1 = \beta_1 + \sigma - m}} p_\beta(x) \frac{\beta_1!}{\alpha_1!(\beta_1-\alpha_1)!} \partial_{y_1}^{\alpha_1} \partial_{x'}^{\beta'}$$

de sorte que

$$P_{\text{lin}}(f y_1^r) = \sum_{\sigma=0}^{m} \frac{r!}{(r-m+\sigma)!} \mathscr{L}_\sigma(f)\, y_1^{r-m+\sigma}$$

Vu les hypothèses faites, un changement de coordonnées permet de supposer :

$$\mathscr{L}_0 = y_1 b(x), \qquad \mathscr{L}_1 = \partial_t + a(x).$$

On peut écrire alors l'équation $P_{\text{lin}} u = v = \sum v_{k,j} Y_1^{k\mu+j+1}$ sous la forme :

$$(\star) \quad v_{k,j} = \frac{(k\mu+j+m)!}{(k\mu+j+1)!}[\partial_t + a(x) + (k\mu+j+1)\, b(x)]\, u_{kj} + \sum_{\sigma=2}^{m} \frac{(k\mu+j+1+m-\sigma)!}{(k\mu+j+1)!} \mathscr{L}_\sigma(u_{k,j+1-\sigma})$$

d'où l'existence d'une solution «formelle» u. Nous allons alors prouver le résultat linéaire suivant:

THÉORÈME 1.4.1. — *Soit $\mathscr{T}$ une hypersurface analytique passant par $0 \in \mathbb{C}^{n+1}$, d'équation $t=0$, et transverse à $\partial_\xi p_m(x, dy_1)$ (donc à $\mathscr{S}$). Soit $1 > \mathrm{R}' > 0$ tel que tous les coefficients de $\mathrm{P}_{\mathrm{lin}}$ soient holomorphes et bornés sur le polydisque centré en 0 de rayon R', soit $0 < \mathrm{R} < \mathrm{R}'$. Alors il existe $\varepsilon_1 > 0$, $c > 0$ tel que pour $0 < \varepsilon < \varepsilon_1$ et $u_1 \in \mathrm{A}^m(\mathrm{R}, \varepsilon, m)$ on puisse définir un opérateur T de A^1 dans A^m tel que $\forall v \in \mathrm{A}^1(\mathrm{R}, \varepsilon, 0)$ on ait:*

$$\mathrm{T}v\big|_{t=0} = u_0, \qquad \mathrm{P}_{\mathrm{lin}}(\mathrm{T}v) = v$$
$$\mathrm{N}^{m,m}(\mathrm{T}v) \leqq c\,(\varepsilon\,\mathrm{N}^{0,1}(v) + \mathrm{N}^{m,m}(u_0))$$

d'où:

$$\mathrm{N}^{m,m}(\mathrm{T}v - \mathrm{T}v') \leqq c\,\varepsilon\,\mathrm{N}^{0,1}(v - v') \qquad si \quad v' \in \mathrm{A}^1(\mathrm{R}, \varepsilon, 0).$$

Preuve. — Pour alléger l'écriture posons

$$\mathrm{M}_{kjl} = \frac{t^l}{(1 - y/\mathrm{R})^{k+j+l+1}} \frac{(k+j+l+1)!}{l!\,(k+j+m)!}.$$

Soient D_{kjl} les coefficients figurant dans la définition de la norme $\mathrm{N}^{0,1}$ de $v \in \mathrm{A}^1(\mathrm{R}, \varepsilon, 0)$. *A fortiori* on peut écrire:

$$v_{kj} \ll \sum_l \mathrm{M}_{kjl} \frac{(k+j+m)!}{(k+j+1)!} \mathrm{D}_{kjl}$$
$$(k\mu + j + 1)\,u_{kj} \ll \mathrm{Cte} \sum_l \mathrm{M}_{kjl}\,\mathrm{C}^m_{kjl}(u).$$

Si dans $\mathscr{L}_\sigma$ apparaît $\partial_t^p \partial_y^{\sigma-p}$ alors, comme lors de la preuve de la proposition 1.3.4 on majore $\partial_t^p \partial_y^{\sigma-p} u_{k,\,j+1-\sigma}$ par:

$$(\star\star) \qquad \sum_{l=0}^{+\infty} \mathrm{M}_{kjl}\,\mathrm{C}^m_{k,\,j+1-\sigma,\,l+p} \frac{(k+j+m)!}{(k+j+1-\sigma+m)!} \mathrm{R}^{p-\sigma}.$$

Les coefficients des opérateurs sont holomorphes et bornés sur le polydisque centré en 0 de rayon $\mathrm{R}'(>\mathrm{R})$. Si $c(x)$ est un tel coefficient alors la preuve de la proposition 1.3.2 montre qu'on peut majorer $c(x)\,\partial_t^p \partial_y^{\sigma-p} u_{k,\,j+1-\sigma}$ par:

$$\mathrm{R}^{p-\sigma} \sum_l \mathrm{M}_{kjl} \frac{(k+j+m)!}{(k+j+1-\sigma+m)!} \sum_{l_1=0}^{l} \mathrm{C}^m_{k,\,j+1-\sigma,\,l_1+p}(u)\,\mathrm{R}'^{-(l-l_1)}.$$

Maintenant reprenons la solution «formelle» u donnée par ($\star$), la formule ($\star$) permet d'obtenir une expression pour $\partial_t u_{kj}$ et on a:

$$\frac{(k\mu + i + 1)!}{(k\mu + j + m)!} \leqq \mathrm{Cte}\,(k+j+1)^{1-m}$$

Comme la fraction figurant dans (☆☆) est majorée par $\mathrm{Cte}\,(k+j+1)^{\sigma-1}$, les inégalités précédentes prouvent ceci : pour que

$$u_{kj} \ll \Sigma \frac{t^l}{(1-y/\mathrm{R})^{k+j+l}} \frac{(k+j+l)!}{l!\,(k+j+m)!} \mathrm{C}^m_{kjl},$$

il suffit que (C désigne une constante dépendant de R)

$$\mathrm{C}^m_{kjl+1} \geqq \mathrm{C}\left[\mathrm{D}_{kjl} + \sum_{l_1=0}^{l} \mathrm{C}^m_{kjl_1} \mathrm{R}'^{l_1-l} + \sum_{\sigma=2}^{m} \sum_{p=0}^{\sigma} \sum_{l_1=0}^{l} \mathrm{C}^m_{k,\, j+1-\sigma,\, l_1+p} \mathrm{R}'^{l_1-l}\right]$$

et on obtient la plus petite solution en prenant des inégalités partout (les C^m_{kj0} sont donnés et correspondent à $u_0 = u|_{t=0}$). On en déduit que :

$$\mathrm{C}^m_{kjl+1} \leqq \mathrm{C}\left[\mathrm{D}_{kjl} + \sum_{l_1=0}^{l} \mathrm{C}^m_{kjl_1} \mathrm{R}'^{l_1-l} + \sum_{\sigma=2}^{m} \sum_{p=0}^{\sigma} \sum_{l_1=0}^{l+p} \mathrm{C}^m_{k,\, j+1-\sigma,\, l_1} \mathrm{R}'^{l_1-p-l}\right].$$

Soit $\varepsilon_0 > 0$ tel que $\varepsilon_0 \leqq 1$, $\varepsilon_0 < \mathrm{R}'$. On cherche *a priori* $\varepsilon_1 \leqq \varepsilon_0$. En multipliant les inégalités précédentes par ε^{l+1+2j}, en observant que $\sum_{l \geqq 0} (\varepsilon/\mathrm{R}')^l \leqq c$ et que (pour $2\sigma - p - 1 \geqq \sigma - 1 \geqq 1$) :

$$\varepsilon^{l+1+2j} = \varepsilon^{l_1+2(j+1-\sigma)} \varepsilon^{l+p-l_1} \varepsilon^{2\sigma-p-1}$$

on obtient :

$$\sum_{\substack{j \\ l \geqq 1}} \mathrm{C}^m_{kjl} \varepsilon^{l+2j} \leqq \mathrm{C}' \varepsilon \Big[\sum_{\substack{j \\ l \geqq 0}} \mathrm{D}_{kjl} \varepsilon^{l+2j} + \sum_{\substack{i \\ l \geqq 0}} \mathrm{C}^m_{kjl} \varepsilon^{l+2j}\Big]$$

et on conclut en prenant $\varepsilon_1 = \min(\varepsilon_0, 1/2c')$.

5. Preuve du théorème 1.1.3

Reprenons les notations des théorèmes 1.3.5 et 1.4.1. Choisissons R, r et ε strictement positifs conformément au théorème 1.3.5 et tels qu'en outre $c\,\mathrm{N}^{m,\,m}(u_0) \leqq r/2$, $c\,\varepsilon < 1$. On peut alors définir une application T_1 qui envoie la boule fermée $\mathrm{B}'(0; r)$ de $\{u/u|_{t=0} = u_0\} \cap \mathrm{A}^m(\mathrm{R}, \varepsilon, m)$ dans elle-même, est contractante et telle que :

$$\forall u \in \mathrm{B}'(0, r), \quad \mathrm{P}_{\mathrm{lin}}(\mathrm{T}_1(u)) = \mathrm{H}(x, \partial^\alpha u).$$

Le théorème 1.1.3 découle alors du théorème du point fixe.

1. Préliminaires

Nous commençons par introduire des fonctions et lemmes auxilliaires. On sait (*voir* [5]) qu'il existe $C>0$ tel que la fonction définie par:

$$\varphi(t)=C\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{t^p}{(p+1)^2}$$

vérifie $\varphi^2 \ll \varphi$. Pour $R>0$ posons:

$$\mathcal{O}_R(y)=\prod_{j=1}^{n}\varphi(y_j/R)$$

on a alors $\mathcal{O}_R^2 \ll \mathcal{O}_R$ et, pour $R'>R$ et $1\leqq j\leqq n$:

$$\partial_{y_j}\mathcal{O}_R(y)\ll\frac{1}{R}\frac{\mathcal{O}_R(y)}{1-y/R},\qquad \frac{1}{1-y/R'}\ll C(R,R')\,\mathcal{O}_R(y)$$

$C(R,R')$ ne dépend que de R/R' et $R\to C(R,R')$ est croissante (*voir* [5]).

En utilisant les inégalités précédentes et les inégalités de Cauchy on obtient le:

LEMME 2.1.1. — *Soit $f(y)$ une fonction holomorphe et bornée par* K *sur le polydisque centré en* 0 *et de rayon* $R'>R$. *Alors on a*: $f(y)\ll KC(R,R')\,\mathcal{O}_R(y)$.

Soit maintenant $b(t,y)$ une fonction holomorphe près de l'origine, on considère alors les plus petits C_l appartenant à $\mathbb{R}^+\cup\{+\infty\}$ tels que

$$b(t,y)\ll\sum_{l=0}^{+\infty}\frac{\mathcal{O}_R(y)\,t^l}{(1-y/R)^l}C_l. \tag{1}$$

Nous poserons $\|b\|_{R,\varepsilon}=\sum_{l=0}^{+\infty}C_l\varepsilon^l$, cette quantité (éventuellement infinie) sera parfois notée $\|b\|$ lorsqu'il est inutile de préciser R, ε.

PROPOSITION 2.1.2. — 1° *Soient $b_1(t,y)$, $1\leqq j\leqq k$, k fonctions holomorphes près de* 0 *telles que les quantités $\|b_j\|_{R,\varepsilon}$ soient finies. Alors on a*:

$$\left\|\left(\prod_1^k b_j\right)\right\|_{R,\varepsilon}\leqq\prod_1^k\|b_j\|_{R,\varepsilon}.$$

2° *Soit $b(t,y)$ une fonction holomorphe et bornée par* K *sur le polydisque centré en* 0 *de rayon* $R'>R$. *Supposons* $0<\varepsilon<R'$, *alors on a*:

$$\|b\|_{R,\varepsilon}\leqq\frac{C(R,R')\,K}{(1-\varepsilon/R')}.$$

Preuve. — 1° Il suffit de prouver le résultat pour $k=2$, le cas général s'en déduisant par récurrence. Notons $C_{j,l}$ les plus petites constantes intervenant dans la définition de

$\| b_j \|_{R,\varepsilon}$. Comme $\mathcal{O}_R^2 \ll \mathcal{O}_R$ on a alors:

$$b_1(t,y)\,b_2(t,y) \ll \sum_{l=0}^{+\infty} \frac{\mathcal{O}_R(y)}{(1-y/R)^l}\, t^l \sum_{l_1=0}^{l} C_{1,l_1} C_{2,l-l_1}$$

on obtient alors immédiatement le 1°. Prouvons le 2°. Considérons le développement $b = \Sigma\, b_l(y)\, t^l$, les inégalités de Cauchy et le lemme 2.1.1 entraînent alors:

$$b_l(y) \ll C(R, R')\, K R'^{-l} \frac{\mathcal{O}_R(y)}{(1-y/R)^l}$$

on obtient alors immédiatement le 2°.

Soit $r = \sum_0^\infty b_k(t,y)\, S^{(k+2m-1)/2}$ un élément de $B^{m-1}(\mathbb{C}^{n+1})$ (*voir* déf. 1.1.4), considérons les plus petits $C_{k,l} \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ tels que:

$$(2) \qquad b_k(t,y) \ll \sum_{l=0}^{+\infty} \frac{\mathcal{O}_R(y)\, t^l}{(1-y/R)^{k+l}} \frac{(k+l)!}{l!\,(k+m-1)!} C_{k,l}.$$

On pose alors pour A et $\varepsilon > 0$,

$$M(r)(A, \varepsilon) = \sum_{k,l \geq 0} C_{k,l} A^k \varepsilon^{k+l}.$$

Nous noterons $B^{m-1}(R, A, \varepsilon)$ l'ensemble des r de B^{m-1} tels que $M(r)(A, \varepsilon)$ soit fini, c'est un Banach pour cette norme. La proposition suivante précise les domaines géométriques de convergence associés à ces normes, sa preuve est assez analogue à celle de la proposition 1.2.1.

PROPOSITION 2.1.3. — 1° *Soit* $r(t, y, S) \in B^{m-1}(R, A, \varepsilon)$ *alors les* b_k *sont holomorphes dans*

$$\Omega = \left\{ (t,y) \in \mathbb{C}^{n+1}, |y_j| < R \ et\, |t| < \varepsilon \prod_{j=1}^{n} (1 - |y_j|/R) \right\}$$

et, pour tout compact $K \subset \Omega$ *il existe* $C > 0$ *tel que*:

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \sup_K |b_k| \leq C^{k+1}.$$

2° $B^{m-1}(\mathbb{C}^{n+1})$ *défini en* 1.1.4 *est exactement la réunion des* $B^{m-1}(R, A, \varepsilon)$.

Preuve. — 1° Par hypothèse il existe $D > 0$ tel que:

$$b_k(t,y) \ll \frac{D\, \mathcal{O}_R(y)}{(1-y/R)^k} (A\, \varepsilon)^{-k} \sum_l \frac{(k+l)!}{k!\, l!} \frac{t^l \varepsilon^{-l}}{(1-y/R)^l}$$

le 1° découle alors de l'égalité suivante, valable pour $|a|<1$:

$$\sum_{l=0}^{\infty} \frac{(k+l)!}{k!\,l!} a^l = \frac{1}{(1-a)^{k+l+1}}.$$

2° Considérons un élément $\Sigma b_k \mathrm{S}^{(k+2m-1)/2}$ de $\mathrm{B}^{m-1}(\mathbb{C}^{n+1})$, il existe $\mathrm{C}>0$ et un polydisque D centré en 0 de rayon $\mathrm{R}'>0$ tels que $\forall x \in \mathrm{D}$, $\forall k$, on ait $|b_k(x)|<\mathrm{C}^{k+1}$. Écrivons $b_k(t, y)=\sum_l b_{k,l}(y)\, t^l$, les inégalités de Cauchy et le lemme 2.1.1 permettent d'écrire pour $\mathrm{R}<\mathrm{R}'$:

$$b_{kl}(y) \ll (k+m-1)^{m-1}\, \mathrm{C}(\mathrm{R}, \mathrm{R}')\, \mathrm{C}^{k+1}\, \mathrm{R}'^{-l} \frac{\mathcal{O}_{\mathrm{R}}(y)}{(1-y/\mathrm{R})^{k+l}} \frac{(k+l)!}{l!\,(k+m-1)}$$

on obtient alors immédiatement le 2°.

Lemme 2.1.4. — *Soient u, v, $a_{i,j}$ $(1 \leqq i, j \leqq n)$, u_j $(1 \leqq j \leqq n)$ des fonctions de (t, y) holomorphes près de l'origine et telles que $\partial_t u=\sum_{i,j} a_{i,j} \partial_{y_j} u_j+v$. Alors pour $0<\mathrm{R}<1$ et $\varepsilon>0$ on a*:

$$\|u\|_{\mathrm{R}, \varepsilon} \leqq \frac{\varepsilon}{\mathrm{R}}\Big(\sum_{i,j}\|a_{i,j}\| \times \|u_j\|+\|v\|\Big)+\|(u|_{t=0})\|.$$

Preuve. — Notons $\mathrm{C}_l^{i,j}$, C_l^j, C_l les coefficients intervenant respectivement dans la définition de $\|a_{i,j}\|_{\mathrm{R}, \varepsilon}$, $\|u_j\|_{\mathrm{R}, \varepsilon}$, $\|v\|_{\mathrm{R}, \varepsilon}$. Les propriétés de $\mathcal{O}_{\mathrm{R}}$ permettent d'écrire:

$$\partial_{y_j} u_j \ll \frac{1}{\mathrm{R}} \sum_{l=0}^{+\infty} \frac{(l+1)\, t^l\, \mathcal{O}_{\mathrm{R}}}{(1-y/\mathrm{R})^{l+1}} \mathrm{C}_l^j$$

on peut alors écrire:

$$\partial_t u \ll \frac{1}{\mathrm{R}} \sum_{l=0}^{+\infty} \frac{(l+1)\, t^l\, \mathcal{O}_{\mathrm{R}}}{(1-y/\mathrm{R})^{l+1}}\Big[\mathrm{C}_l+\sum_{i,j} \sum_{l_1=0}^{l} \mathrm{C}_{l_1}^{i,j} \mathrm{C}_{l-l_1}^j\Big]$$

on en déduit l'inégalité suivante:

$$u(t, y)-u(0, y) \ll \frac{1}{\mathrm{R}} \sum_{l=0}^{+\infty} \frac{t^{l+1}\, \mathcal{O}_{\mathrm{R}}}{(1-y/\mathrm{R})^{l+1}}\Big[\mathrm{C}_l+\sum_{i,j} \sum_{l_1=0}^{l} \mathrm{C}_{l_1}^{i,j} \mathrm{C}_{l-l_1}^j\Big]$$

et on obtient alors immédiatement le résultat voulu.

Dans la suite nous utiliserons fréquemment la proposition suivante qui permet de majorer la norme de $\mathrm{F}(\ldots)$ sous des conditions faciles à écrire; on la démontre aisément en utilisant la proposition 2.1.2 et en procédant exactement comme dans la preuve de la proposition 1.3.3.

Proposition 2.1.5. — *Soit $\mathrm{F}(x, z)$ une fonction holomorphe et bornée par K sur le polydisque centré en $0 \in \mathbb{C}^{n+1} \times \mathbb{C}^p$ de rayon $\mathrm{R}'>2\mathrm{R}$. Supposons $0<\varepsilon<\mathrm{R}'/2$, et considérons* *des fonctions $u_1, \ldots, u_p$ holomorphes près de $0 \in \mathbb{C}^{n+1}$ telles que $\|u_j\|_{R,\varepsilon} \leqq R'/2$ pour $1 \leqq j \leqq p$. Alors*

$$\|F(x, u_1, \ldots, u_p)\|_{R,\varepsilon} \leqq \frac{C(R, R')K}{1-\varepsilon/R'} \prod_{j=1}^{p} \left(1 - \frac{\|u_j\|}{R'}\right)^{-1}$$

$$\leqq 2^{p+1} K\, C(R, R') \leqq 2^{p+1} K\, \mathrm{Cte}.$$

Dans [4] est exposée une preuve moderne du théorème de Cauchy-Kovaleska, nous aurons besoin d'introduire une fonction paramètre b_1 et de le redémontrer brièvement pour estimer les normes $\| \quad \|$ des solutions qu'il fournit.

THÉORÈME DE CAUCHY-KOVALESKA 2.1.6. — *Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Soient deux fonctions (scalaires) $b_1(t, y)$, $b_2(t, y)$ et une fonction vectorielle $v(y) = (v_1(y), \ldots, v_k(y))$ holomorphes près de l'origine. Considérons, pour $i = 1$, 2 un système P_i non linéaire d'ordre 1 de k équations à k inconnues de la forme:*

$$P_i u = \partial_t u + Q(t, y, \partial^\alpha u) + b_i S(t, y, u)$$

où $|\alpha| \leqq 1$, $\alpha \neq (1, 0, 0, \ldots, 0)$, $Q(t, y, u_\alpha)$ et $S(t, y, u)$ étant supposées holomorphes près de $(0, \partial^\alpha v(0))$. Alors sur un voisinage de $0 \in \mathbb{C}^{n+1}$ il existe, pour $i = 1, 2$, une unique fonction vectorielle holomorphe $u^i = (u_1^i, \ldots, u_k^i)$ vérifiant $P_i u^i = 0$ et $u^i(0, y) = v(y)$. Soient δ et $K > 0$, il existe E, c, R_0 et $\varepsilon_0 > 0$ tels que quel que soient $0 < R \leqq R_0$ et $0 < \varepsilon \leqq \min(c R^{-1}, \varepsilon_0)$, si les $\|b_i\|_{R,\varepsilon}$ sont inférieures à K alors pour tout β de longueur $\leqq 1$ on a:

$$\max_{1 \leqq j \leqq k} \|[\partial^\beta u_j^i - \partial^\beta u_j^i(0)]\|_{R,\varepsilon} \leqq \delta + E \,.\, \|(b_i - b_i(0))\|_{R,\varepsilon}$$

$$\max_{1 \leqq j \leqq k} \|[\partial^\beta u_j^1 - \partial^\beta u_j^2]\|_{R,\varepsilon} \leqq E \,.\, \|b_1 - b_2\|_{R,\varepsilon}.$$

Preuve. — Considérons donc δ et $K > 0$. Raisonnons pour P_1 et b_1. En posant $q = (\partial^\beta u^1)$ où $|\beta| \leqq 1$ et $\beta \neq (1, 0, \ldots, 0)$, on se ramène au système matriciel *quasi linéaire* du premier ordre:

$$\partial_t q = L(t, y, q, \partial_y q) = I(t, y, q) + J(t, y, q) b_1 + G(t, y, q) \partial_y b_1 + H(t, y, q) \partial_y q$$

où $q(0, y) = c(y)$ est donnée. Quitte à remplacer $q(t, y)$ par $q(t, y) - c(y)$ nous pouvons supposer $q(0, y) \equiv 0$; le lemme 2.1.1 et le fait que $c(R, R')$ ne dépende que de R/R' (*voir* [5]) montre qu'il existe $R'_0 > 0$ tel que pour $0 < R \leqq R'_0$ on ait $\|c(y) - c(0)\|_R \leqq \delta/2$. Nous allons appliquer le théorème du point fixe à l'opérateur T qui à $q(t, y)$ holomorphe vérifiant $q(0, y) \equiv 0$ associe $q' = T(q)$ vérifiant $\partial_t q' = L(t, y, q, \partial_y q)$ et $q'(0, y) \equiv 0$. Si $q = (q_j)$ nous poserons $\|q\| = \max_j \|q_j\|$. Il est plus commode d'écrire dès maintenant les fonctions et équations (matricielles) dont nous aurons besoin:

(3) $$\partial_t(T(p) - T(q)) = (V_1 + V_2 b_1 + V_3 \partial_y b_1 + V_4 \partial_y q)(p - q) + V_5 \partial_y (p - q).$$

Si $q_i(t, y)$ désigne la solution correspondant à b_i on a:

(4) $$\partial_t(q_1 - q_2) = (U_1 + U_2 b_1 + U_3 \partial_y b_1 + U_4 \partial_y q_1)(q_1 - q_2)$$

$$+\mathrm{U}_5(b_1-b_2)+\mathrm{U}_6\,\partial_y(b_1-b_2)+\mathrm{U}_7\,\partial_y(q_1-q_2)$$

$$\partial_t u^i-\partial_t u^i(0)=\mathrm{W}_1\,q_i+\mathrm{W}_2+\mathrm{b}_i(\mathrm{W}_3\,q_i+\mathrm{W}_4)+(b_i-b_i(0))\,\mathrm{W}_5 \tag{5}$$

où W_2 et W_4 sont des fonctions de x s'annulant en 0. W_1 et W_3 sont des fonctions de (x, q), W_5 est une constante.

$$\partial_t(u^1-u^2)=(\mathrm{U}_8+\mathrm{U}_9\,b_1)(q_1-q_2)+\mathrm{U}_{10}(b_1-b_2). \tag{6}$$

On choisit alors $\varepsilon_0'>0$ et $\mathrm{R}'>0$ tels que toutes les fonctions I, J, G, H, $\mathrm{V}_j(x,p,q)$, $\mathrm{U}_l(x,q_1,q_2)$, W_i soient holomorphes et bornées sur les polydisques centrés en 0 et de rayon R', et tels que pour tout $\mathrm{R}\leqq\mathrm{R}'/2$ et $\varepsilon\leqq\varepsilon_0'$ on ait:

$$\|\mathrm{W}_2\|_{\mathrm{R},\varepsilon}\leqq\frac{\delta}{2(1+\mathrm{K})},\qquad \|\mathrm{W}_4\|_{\mathrm{R},\varepsilon}\leqq\frac{\delta}{2(1+\mathrm{K})}$$

[c'est possible d'après le lemme 2.1.1 et les propriétés de $\mathrm{C}(\mathrm{R},\mathrm{R}')$ (*voir* [5])].

Dans la suite nous noterons B_i, $i\in\mathbb{N}$, des constantes ne dépendant ni de ε ni de R. Supposons que:

$$(\star)\qquad 0<\mathrm{R}\leqq\min(1,\mathrm{R}'/2),\qquad 0<\varepsilon\leqq\mathrm{R}'/2,\qquad \|q\|_{\mathrm{R},\varepsilon}\ \text{ et }\ \|q_i\|_{\mathrm{R},\varepsilon}\leqq\mathrm{R}'/2,$$

alors la proposition 2.1.5 montre qu'on peut majorer la norme $\|\ \|_{\mathrm{R},\varepsilon}$ de I, J, G, H, V_j, U_l, W_i par une constante B_1. Sous les hypothèses de l'énoncé et la condition $(\star)$, le lemme 2.1.4 montre que $\|\mathrm{T}(q)\|_{\mathrm{R},\varepsilon}\leqq\mathrm{B}_2(\varepsilon/\mathrm{R})$; par conséquent si:

$$(\star\star)\qquad 0<\rho\leqq\mathrm{R}'/2,\qquad \mathrm{B}_2\frac{\varepsilon}{\mathrm{R}}\leqq\rho$$

alors $\|q\|_{\mathrm{R},\varepsilon}\leqq\rho\Rightarrow\|\mathrm{T}(q)\|\leqq\rho$. Sous les conditions $(\star)$ et $(\star\star)$, l'équation (3) et le lemme 2.1.4 montrent que

$$\|p\|\leqq\rho\ \text{ et }\ \|q\|\leqq\rho,\qquad \|\mathrm{T}(p)-\mathrm{T}(q)\|\leqq\mathrm{B}_3\frac{\varepsilon}{\mathrm{R}}\|p-q\|$$

d'où une contraction stricte si $\mathrm{B}_3(\varepsilon/\mathrm{R})\leqq 1$, condition qui résulte de $(\star\star)$ en prenant B_2 suffisamment grand. En résumé:

$$(\star\star\star)\qquad \left\{\begin{array}{l}\exists\,\mathrm{R}_0>0,\quad \varepsilon_0>0,\quad \rho_0>0,\mathrm{B}>0\quad\text{tel que pour}\\ \qquad 0<\mathrm{R}\leqq\mathrm{R}_0,\qquad 0<\varepsilon\leqq\varepsilon_0\\ \qquad\qquad \mathrm{B}\dfrac{\varepsilon}{\mathrm{R}}\leqq\rho\leqq\rho_0\end{array}\right.$$

on ait une solution q vérifiant $\|q\|_{\mathrm{R},\varepsilon}\leqq\rho$.

On peut supposer $\rho_0\leqq(\delta/2)$, alors $\|q\|\leqq(\delta/2)$ et en revenant à u_i:

$$\|\mathrm{D}^\alpha u^i-\mathrm{D}^\alpha u^i(0)\|\leqq\delta\qquad\text{pour}\quad|\alpha|\leqq 1,\qquad \alpha\neq(1,0,\ldots,0).$$

La proposition 2.1.5, l'équation (5) et (☆☆☆) montrent que:

$$\|\partial_t u^i - \partial_t y^i(0)\|_{R,\varepsilon} \leqq \left(B_4 \rho + \frac{\delta}{2(1+K)}\right)(1+K) + E_1 \|b_i - b_i(0)\|$$

$$\leqq B_5 \rho_0 + \frac{\delta}{2} + E_1 \|b_i - b_i(0)\|$$

où E_1 est une constante. En supposant $B_5 \rho_0 \leqq \delta/2$ on a:

$$\|\partial_t u^i - \partial_t u^i(0)\| \leqq \delta + E_1 \|b_i - b_i(0)\|.$$

L'équation (4) et le lemme 2.1.4 montrent que:

$$\|q_1 - q_2\| \leqq B_6 \frac{\varepsilon}{R}(\|q_1 - q_2\| + \|b_1 - b_2\|)$$

nous prenons ρ_0 suffisamment petit dans (☆☆☆) pour avoir $B_6(\varepsilon/R) \leqq (1/2)$ alors on a

$$\|q_1 - q_2\| \leqq 2 B_6 \frac{\varepsilon}{R} \|b_1 - b_2\| \leqq \|b_1 - b_2\|,$$

d'où

$$\|D^\alpha u_1 - D^\alpha u_2\| \leqq E_2 \|b_1 - b_2\| \qquad \text{pour} \quad |\alpha| \leqq 1, \qquad \alpha \neq (1, 0, \ldots, 0)$$

où E_2 est une constante. L'équation (6) et la proposition 2.1.5 entraînent alors:

$$\|\partial_t u^1 - \partial_t u^2\| \leqq E_3 \|b_1 - b_2\|.$$

Posons $E = \max E_i$, il existe $c > 0$ tel que si $\varepsilon \leqq c R$ alors on peut choisir ρ_0 suffisamment petit dans (☆☆☆) pour avoir:

$$\rho_0 \leqq \delta/2, \qquad B_5 \rho_0 \leqq \delta/2, \qquad B_6 \frac{\varepsilon}{R} \leqq \frac{1}{2},$$

le théorème est alors prouvé.

2. Preuve du théorème 1.1.6

Nous commençons par donner plusieurs lemmes établissant des identités algébriques qui nous permettront de bien identifier les termes que nous voulons contrôler.

LEMME 2.2.1. — *Pour $\alpha \in \mathbb{N}^{n+1}$ et γ réel, on a*

$$\partial_x^\alpha (s^\gamma) = \sum_{j=0}^{|\alpha|} \frac{\gamma!}{(\gamma - j)!} s^{\gamma - j} B_{j,\alpha}(\partial s)$$

où les $B_{j,\alpha}$ *sont des polynômes en les dérivées* $\partial^\lambda s$ *avec* $1 \leqq |\alpha| \leqq |\alpha| - j + 1$, *de la forme*:

$$B_{j,\alpha}(\partial s) = \Sigma\, B_{j,\alpha,\lambda_1,\ldots,\lambda_l,k_1,\ldots,k_l}(\partial^{\lambda_1} s)^{k_1}\ldots(\partial^{\lambda_l} s)^{k_l}$$

où

$$\Sigma |\lambda_i| k_i \leqq |\alpha|, \qquad \Sigma k_i = j \quad \text{et} \quad \sum_{|\lambda_i| \geqq 3} k_i(|\lambda_i| - 2) \leqq \max(0, |\alpha| - j - 1),$$

$$B_{0,0} = 1 \qquad et \qquad B_{0,\alpha} = 0 \quad si \quad \alpha \neq 0.$$

Preuve. — Il est clair que dans l'expression de $B_{j,\alpha}(\partial s)$, $\Sigma\, k_i |\lambda_i| \leqq |\alpha|$ et $\Sigma\, k_i = j$. On a donc:

$$\sum_{i=1}^{l} k_i(|\lambda_i| - 1) \leqq |\alpha| - j;$$

d'où

$$A = \sum_{|\lambda_i| \geqq 3} k_i(|\lambda_i| - 2) = \sum_{|\lambda_i| \geqq 3} k_i(|\lambda_i| - 1) - \sum_{|\lambda_i| \geqq 3} k_i \leqq |\alpha| - j - \sum_{|\lambda_i| \geqq 3} k_i$$

d'où $A \leqq |\alpha| - j - 1$ s'il existe des $|\lambda_i| \geqq 3$, sinon $A = 0$ et le résultat est trivial.

La formule de Leibniz et le lemme précédent entraînent alors le:

LEMME 2.2.2. — *On a*

$$\partial_x^\alpha(bs^\gamma) = \sum_{j=0}^{|\alpha|} \frac{\gamma!}{(\gamma - j)!} s^{\gamma - j} \sum_{|\beta| \leqq |\alpha| - j} B_{j,\beta,\alpha}(\partial s)\, \partial_x^\beta b$$

où $B_{j,\beta,\alpha} = \binom{\alpha}{\beta} B_{j,\alpha-\beta}$.

Pour $2\gamma = k + 2m - 1$, posons $C_j(k) = \gamma(\gamma - 1)\ldots(\gamma - j + 1)$; c'est un polynôme de degré j en k. En utilisant le lemme précédent et en réordonnant les indices on obtient aisément le lemme suivant:

LEMME 2.2.3. — *Soient* $\alpha_1, \ldots, \alpha_N$ *des multi-indices de* $\mathbb{N}^{n+1}$. *Si*

$$r = \sum_{0}^{+\infty} b_k s^{(k+2m-1)/2}$$

alors

$$\partial^{\alpha_1} r \ldots \partial^{\alpha_N} r = \sum_{\substack{k \geqq 0 \\ q \geqq 0}} s^{(k/2) + N(m - (1/2)) - q} \sum_{\substack{k_1 + \ldots + k_N = k \\ q_1 + \ldots + q_N = q \\ |\beta_j| \leqq |\alpha_j| - q_j}} \prod_{j=1}^{N} C_{q_j}(k_j)\, B_{q_j,\beta_j,\alpha_j}(\partial s)\, \partial_x^{\beta_j} b_{k_j}.$$

Avec les notations de l'introduction du I rappelons que:

$$P(a + r) = P(a) + P_{\text{lin}}(a).\, r - H(x, \partial^\alpha r)$$

le lemme 2.2.3 permet d'obtenir les deux lemmes suivants.

LEMME 2.2.4:

$$\mathrm{P}_{\mathrm{lin}}(a).r=\sum_{k=2}^{+\infty} s^{(k+1)/2} \sum_{\substack{k'-2j=k+2-2m\\ 0\leqq j\leqq|\alpha|\leqq m\\ |\beta|\leqq|\alpha|-j}} \mathrm{C}_j(k')\frac{\partial p}{\partial u_\alpha}(x,\partial a)\,\mathrm{B}_{j,\beta,\alpha}(\partial s)\,\partial_x^\beta b_{k'}.$$

LEMME 2.2.5:

$$\mathrm{H}(x,\partial^\alpha r)=\sum_{k=-1}^{+\infty} s^{(k+1)/2}\,\Sigma\,\mathrm{E}_{\alpha_1,\ldots,\alpha_\mathrm{N}}(x,\partial a)\prod_{j=1}^{\mathrm{N}}\mathrm{C}_{q_j}(k_j)\,\mathrm{B}_{q_j,\beta_j,\alpha_j}(\partial s)\,\partial_x^{\beta_j} b_{k_j}.$$

la somme étant étendue: à tous les N*-uplets de multi-indices* $(\alpha_1,\ldots,\alpha_\mathrm{N})$ $(\mathrm{N}\geqq 2)$, *avec* $|\alpha_j|\leqq m$ *et un au plus étant de longueur* m, *à tous les indices* $k_j\geqq 0$, $j=1,\ldots,\mathrm{N}$, $q_j\geqq 0$, $j=1,\ldots,\mathrm{N}$, $|\beta_j|\leqq|\alpha_j|-q_j$ *et* $k+1=k_1+\ldots+k_\mathrm{N}+2\mathrm{N}(m-1/2)-2(q_1+\ldots+q_\mathrm{N})$, *on observe que* $2\leqq\mathrm{N}\leqq k+3$. *Les* $\mathrm{E}_{\alpha_1,\ldots,\alpha_\mathrm{N}}$ *étant holomorphes sur un même polydisque centré en* $(0,\partial^\beta a_p(0))\ p+|\beta|\leqq m$ *de rayon* $\mathrm{R}'_1>0$ *et y vérifiant des estimations du type* $\sup|\mathrm{E}_{\alpha_1,\ldots,\alpha_\mathrm{N}}|\leqq \mathrm{K}^{1+\mathrm{N}}$. *Enfin si pour un indice* $j\,|\alpha_j|=m$ *alors* $\mathrm{E}_{\alpha_1,\ldots,\alpha_\mathrm{N}}$ *ne dépend que des dérivées de a d'ordre* $\leqq m-1$.

Preuve. — On peut écrire

$$\mathrm{H}(x,\partial^\alpha r)=\sum_{\alpha_1,\ldots,\alpha_\mathrm{N}}\mathrm{E}_{\alpha_1,\ldots,\alpha_\mathrm{N}}(x,\partial a)\,\partial^{\alpha_1}r\ldots\partial^{\alpha_\mathrm{N}}r$$

les propriétés de H mentionnées dans l'introduction montrent que $\mathrm{N}\geqq 2$, $|\alpha_j|\leqq m$, un au plus étant de longueur m. Le lemme 2.2.3 permet alors d'obtenir la formule du lemme et les propriétés énoncées. Vérifions toutefois que $\mathrm{N}\leqq k+3$. Tous les q_j sauf peut-être un sont inférieurs ou égaux à $m-1$ et ils sont tous majorés par m, comme les k_i sont $\geqq 0$ on a alors:

$$k+1=\sum_1^{\mathrm{N}}k_i+\mathrm{N}(2m-1)-2\sum_1^{\mathrm{N}}q_i\geqq \mathrm{N}(2m-1)-2(m+(\mathrm{N}-1)(m-1)).$$

Avec les notations des lemmes 2.2.4 et 2.2.5 posons alors:

$$\mathrm{P}_{\mathrm{lin}}(a).r=\sum_{k=-2}^{+\infty}s^{(k+1)/2}d_{k,\,\mathrm{lin}}$$

$$-\mathrm{H}(x,\partial^\alpha r)=\sum_{k=-1}^{+\infty}s^{(k+1)/2}d_{k,\,h}\qquad(d_{-2,\,h}=0).$$

$$d_k=d_{k,\,h}+d_{k,\,\mathrm{lin}}.$$

L'équation $\mathrm{P}(a+r)=0$ est alors entraînée par le système infini d'équations:

$$d_{-2,\,\mathrm{lin}}=0$$

$$\mathrm{P}(a)+d_{-1,\,\mathrm{lin}}+d_{-1,\,h}=0$$

$$d_{k,\,\mathrm{lin}}+d_{k,\,h}=0 \quad \text{pour tout } k \geqq 0.$$

On note la présence, dans $d_{k,\,h}$, du terme $b_0\, b_{k+1}$ qui nous empêche de considérer un système récurrent comportant un nombre fini d'équations. Calculons $d_{-2,\,\mathrm{lin}}$ et $d_{-1,\,\mathrm{lin}}$; considérons dans le lemme 2.2.4 les termes correspondants à $k=-2$ et $k=-1$: k' est égal à $k+2+2(j-m)$ et est positif ou nul, comme dans les deux cas $k+2 \leqq 0$ on a forcément $j=m=|\alpha|$ et $|\beta|=0$.

Enfin on constate que $\mathrm{B}_{m,\,0,\,\alpha}(\partial s)=\mathrm{B}_{m,\,\alpha}(\partial s)$ est aussi égal à $\prod_{0}^{n} (\partial_{x_j} s)^{\alpha_j}$.

Le lemme 2.2.4 assure alors que :

$$d_{-2,\,\mathrm{lin}}=\mathrm{C}_m(0)\, p_m(x,\, \partial a,\, \partial s)\, b_0$$
$$d_{-1},\ \mathrm{lin}=\mathrm{C}_m(1)\, p_m(x,\, \partial a,\, \partial s)\, b_1.$$

L'équation $d_{-2,\,\mathrm{lin}}=0$ résulte alors de l'équation eikonale

$$\partial_t s=\tau_1(x,\, \partial^\beta a,\, \partial_y^j s), \qquad |j|=1, \quad |\beta| \leqq m-1$$

et on a alors $d_{-1,\,\mathrm{lin}}=0$. Désignons par τ la variable duale de t.

LEMME 2.2.6. — *Posons* $\beta_0=(1,\, 0,\, \ldots,\, 0)$, $\partial^{\beta_0}=\partial_t$. *Pour tout* $k \geqq 0$ *on a :*

$$d_{k,\,\mathrm{lin}}=\mathrm{C}_{m-1}(k)\frac{\partial p_m}{\partial \tau}(x,\, \partial a,\, ds)\, \partial_t b_k+\sum \mathrm{C}_j(k')\frac{\partial p}{\partial u_\alpha}(x,\, \partial a)\, \mathrm{B}_{j,\,\beta,\,\alpha}(\partial s)\, \partial_x^\beta b_{k'}.$$

La dernière somme est étendue aux indices j, k' et aux multi-indices α, β tels que $k'-2j=k+2-2m$, $|\beta|$ est inférieur ou égal à $|\alpha|-j$, $0 \leqq j \leqq |\alpha| \leqq m$, $j<m$, $(k',\, j,\, \alpha,\, \beta)$ est distinct de $(k,\, m-1,\, \alpha,\, \beta_0)$ si $|\alpha|=m$.

Preuve. — Compte tenu de l'expression de $d_{k,\,\mathrm{lin}}$ fournie par le lemme 2.2.4 il s'agit de vérifier que :

$$\frac{\partial p_m}{\partial \tau}(x,\, \partial a,\, ds)=\sum_{|\alpha|=m}\frac{\partial p}{\partial u_\alpha}(x,\, \partial a)\, \mathrm{B}_{m-1,\,\beta_0,\,\alpha}(\partial s)$$

or on a $\mathrm{B}_{m-1,\,\beta_0,\,\alpha}=\binom{\alpha}{\beta_0}\mathrm{B}_{m-1,\,\alpha-\beta_0}=\alpha_0\, \mathrm{B}_{m-1,\,\alpha-\beta_0}$ le lemme résulte alors de l'égalité suivante :

$$\alpha_0\, \mathrm{B}_{m-1,\,\alpha-\beta_0}(\partial s)=\alpha_0\, (\partial_t s)^{\alpha_0-1}\prod_{j=1}^{n} (\partial_{y_i} s)^{\alpha_j}.$$

LEMME 2.2.7. — *Il existe une fonction holomorphe* E *telle que*

$$d_{-1,\,h}=b_0^2\, \mathrm{E}(x,\, \partial^\alpha a,\, \partial^j s) \qquad \text{où} \quad |\alpha| \leqq m-1 \quad \text{et} \quad |j|=1.$$

Preuve. — Considérons l'expression de $d_{-1,\,h}$ fournie par le lemme 2.2.5. Comme $k=-1$, on a $\mathrm{N}=2$ vu que $2 \leqq \mathrm{N} \leqq k+3$. En outre (lemme 2.2.5)

$$0=k+1=k_1+k_2+4\left(m-\frac{1}{2}\right)-2(q_1+q_2)$$

$$q_j \leqq |\alpha_j| \qquad \text{d'où} \quad q_1+q_2 \leqq 2m-1$$

d'où $k_1+k_2=2(q_1+q_2)-4(m-(1/2)) \leqq 0$ soit $k_1=k_2=0$ et $q_1+q_2=2m-1$ ce qui implique $q_j=|\alpha_j|$ d'où $\beta_j=0$. Dans l'expression de $B_{q_j,\alpha_j}(\partial s)$ on a $1 \leqq |\lambda_i| \leqq |\alpha_j|-q_j+1$ soit $|\lambda_i|=1$. L'un des α_j étant de longueur m, E ne dépend que des dérivées de a d'ordre $\leqq m-1$.

Les résultats précédents montrent alors que $P(a+r)=0$ est entraîné par les équations suivantes, numérotées (9), (10), (11) :

L'équation eikonale :

$$\partial_t s=\tau_1(x, \partial^\beta a, \partial_y^j s)\,|\beta| \leqq m-1, \qquad |j|=1. \tag{9}$$

$$P(a)+b_0^2\,E(x, \partial^\beta a, \partial^j s)=0, \qquad |\beta| \leqq m-1, \quad |j|=1. \tag{10}$$

a et s vérifiant les conditions initiales indiquées dans l'énoncé du théorème 1.1.6.

Pour tout $k \geqq 0\ \partial_t b_k=D_{k,h}+D_{k,\mathrm{lin}}$ où :

$$D_{k,\mathrm{lin}}=\frac{-1}{C_{m-1}(k)}\,\frac{1}{\partial p_m/\partial\tau(x, \partial a, ds)}\sum C_j(k')\frac{\partial p}{\partial u_\alpha}(x, \partial a)\times B_{j,\beta,\alpha}(\partial s)\,\partial_x^\beta b_{k'},$$

les indices figurant dans cette somme sont précises dans le lemme 2.2.6

$$D_{k,h}=\frac{-1}{C_{m-1}(k)}\,\frac{1}{\partial p_m/\partial\tau(-)}\sum E_{\alpha_1,\ldots,\alpha_N}(x, \partial a)\prod_{j=1}^{N} C_{q_j}(k_j)\,B_{q_j,\beta_j,\alpha_j}(\partial s)\,\partial_x^{\beta_j} b_{k_j}, \tag{11}$$

les indices figurant dans cette somme sont précisés dans le lemme 2.2.5.

Nous prouverons le théorème 1.1.6 en appliquant [pour une norme $M(R, A, \varepsilon)$ convenable] le théorème du point fixe à l'opérateur T défini comme suit : à une suite $b=(b_k)_{k \geqq 0}$ telle que $\forall k\ b_k(0, y)=b_k^1(y)$ on associe d'abord le couple (a, s) vérifiant les équations (9), (10) et les conditions initiales associées, puis la suite $f=(f_k)_{k \geqq 0}$ vérifiant $\forall k\ f_k(0, y)=b_k^1(y)$, $\partial_t f_k=D_{k,\mathrm{lin}}(b)+D_{k,h}(b)$. On pose alors $T(b)=f$ et on remarque qu'un point fixe de T fournit une solution des équations (9), (10) et (11).

Dorénavant nous considérerons deux suites b et b' vérifiant les conditions précédentes, nous poserons $T(b)=f$, $T(b')=f'$ et nous noterons (a', s') le couple correspondant à b'. Nous désignerons par $A_{k,l}$ [resp. $C_{k,l}$] les plus petites constantes $\geqq 0$ (dépendant de R) permettant de majorer $b_k-b'_k$ [resp. à la fois b_k et b'_k] comme il est indiqué dans l'inégalité (2). Nous désignerons par G_l [resp. F_l] où $l \in \mathbb{N}$ les plus petites constantes $\geqq 0$ (dépendant de R) permettant de majorer à la fois toutes les dérivées *d'ordre* $\leqq 2$ de $s-s'$ [resp. de s et s']. Avec ces notations on a le :

LEMME 2.2.8. — *Soit* $0 < R < 1$ *et* $B_{j,\beta,\alpha}$ *comme dans le lemme* 2.2.2. *Alors*

1° *On peut majorer* $B_{j,\beta,\alpha}(\partial s)$ *par la somme d'un nombre fini de termes du types :*

$$\mathrm{Cte}\,R^{-v}\sum_{l=0}^{+\infty}\frac{t^l\,\mathcal{O}_R(y)}{(1-y/R)^{l+v}}(1+l)^v\sum_{l_i}\prod_{i=1}^{j} F_{l_i+v_i},$$

où les v_i sont des entiers naturels tels que $\sum v_i \leqq v = \max(|\alpha|-|\beta|-j-1,\ 0)$, *et* $\sum l_i = l$. *Si* $j=0$ *on convient que* $\prod_{i=1}^{0}(\ \ )=1$.

2° *On peut majorer* $B_{j,\beta,\alpha}(\partial s) - B_{j,\beta,\alpha}(\partial s')$ *par la somme d'un nombre fini de termes du type :*

$$\mathrm{Cte}\, R^{-v} \sum_{l=0}^{+\infty} \frac{t^l\, \mathcal{O}_R(y)}{(1-y/R)^{l+v}} (1+l)^v \sum_{l_i} G_{l_1+v_1} \prod_{i=2}^{j} F_{l_i+v_i}$$

les indices vérifient les propriétés énoncées au 1°. *Si* $j=1$ *on convient que* $\prod_{i=2}^{1}(\ \ )=1$.

Preuve. — 2° Le résultat est trivial pour $j=0$ car $B_{0,0}=1$ et $B_{0,\alpha}=0$ pour $\alpha \neq 0$. Nous supposons $j \geqq 1$. L'inégalité (1) et les propriétés de $\mathcal{O}_R$ montrent qu'on peut majorer $\partial_y^{r-r'} \partial_t^{r'} \partial^2 s$ par :

$$R^{r'-r} \sum_{l=0}^{+\infty} \frac{t^l\, \mathcal{O}_R(y)}{(1-y/R)^{l+r}} \frac{(l+r)!}{l!} F_{l+r'} \tag{12}$$

on majore $\partial_y^{r-r'} \partial_t^{r'} (\partial^2 s - \partial^2 s')$ par le terme (12') obtenu en remplaçant $F_{l+r'}$ par $G_{l+r'}$ dans (12). D'après les lemmes 2.2.1 et 2.2.2 $B_{j,\beta,\alpha}(\partial s)$ est une somme de termes du type :

$$\binom{\alpha}{\beta} B_{j,\alpha-\beta,\alpha,\lambda_1,\ldots,\lambda_l,k_1,\ldots,k_l} (\partial_s^{\lambda_1})^{k_1} \times \ldots \times (\partial_s^{\lambda_l})^{k_l}$$

où

$$\sum |\lambda_i| k_i \leqq |\alpha|-|\beta|, \qquad \sum k_i = j, \qquad \sum_{|\lambda_i| \geqq 3} k_i(|\lambda_i|-2) \leqq \max(0,\ |\alpha|-|\beta|-j-1).$$

On a l'identité :

$$X_1 \times \ldots \times X_N - X'_1 \times \ldots \times X'_N = \sum_{i=1}^{N} X'_1 \ldots X'_{i-1} (X_i - X'_i) X_{i+1} \ldots X_N.$$

En prenant $X_i = \partial^{\lambda_i} s$, $X'_i = \partial^{\lambda_i} s'$ (répétés k_i fois), en utilisant les majorations (12), (12)', $\mathcal{O}_R^2 \ll \mathcal{O}_R$ et l'inégalité suivante $(j \leqq |\alpha| \leqq m)$.

$$\prod_{i=1}^{j} \frac{(l_i+r_i)!}{l_i!} \leqq C(m,n) \left(1+\sum_{i=1}^{j} l_i\right)^{\Sigma r_i}$$

on obtient le 2°. En prenant $F_l = G_l$ on obtient le 1°.

Pour contrôler $D_{k,\,\mathrm{lin}}$ nous aurons besoin des deux prochains lemmes.

LEMME 2.2.9. — *Considérons les indices* j, k', α, β *figurant dans* $D_{k,\,\mathrm{lin}}$ *et spécifiés dans le lemme* 2.2.6, $k' = k+2(1-m+j)$. *Posons* $v = \max(|\alpha|-|\beta|-j-1, 0)$. *Alors*

1° $k'+|\beta|+v+m-1-j$ *est inférieur ou égal à* $k+1$ *et :*

$$\frac{(k'+|\beta|+l)!}{(k'+m-1)!}(k+1)^{-m+1+j}(l+1)^v \leqq \mathrm{Cte}\frac{(k+l+1)!}{(k+m-1)!}.$$

2° *Posons* $\beta=(\beta_1, \beta')$, *on a* $k' \geqq k-2m$ *et :*

$$\beta_1+k'+l+v < k+l+1.$$

Preuve. — 1° On observe que

$$\frac{(k'+|\beta|+l)!}{(k'+m-1)!}(k+1)^{-m+1+j}(l+1)^v \leqq \mathrm{Cte}\frac{(k'+|\beta|+l+v)!}{(k+j)!}$$

comme $j \leqq m-1$ *il suffira de vérifier que :*

$$k+1-k'-|\beta|-v-(m-1-j) \geqq 0$$

si $v=0$ ce terme se réduit à $m-j-|\beta|$ qui est bien $\geqq 0$. Si $v>0$ ce terme se réduit à $1+m-|\alpha|$ qui est bien positif. Ceci prouve le 1°.

2° Il s'agit de prouver que $2(1-m+j)+\beta_1+v-1$ est strictement négatif. Si $v>0$ ce terme se réduit à : $-m+j+|\alpha|-m+\beta_1-|\beta|$ qui est bien <0. Supposons donc $v=0$, ce terme se réduit alors à : $1+\beta_1-2(m-j)$. Si $|\alpha| \leqq m-1$ alors on majore $1+\beta_1$ par $1+|\alpha|-j \leqq m-j$ et c'est gagné. Si $|\alpha|=m$, le seul cas posant *a priori* problème est celui où $\beta_1=m-j$ et $m-j=1$. Comme $|\beta| \leqq |\alpha|-j=1$ ceci entraîne que (k', j, α, β) est égal à $(k, m-1, \alpha, \beta_0)$ ce qui est exclu. Le lemme est donc prouvé.

Pour alléger les notations posons

$$\mathrm{X}_{k,l}=\frac{\mathcal{O}_{\mathrm{R}}(y)\,t^l}{(1-y/\mathrm{R})^{k+l+1}}\,\frac{(k+l+1)!}{(k+m-1)!\,l!}.$$

Il sera utile d'introduire une fonction $\mathrm{S}(x)$ holomorphe près de 0 et les plus petites constantes $\geqq 0\,\mathrm{S}_l$ telles que :

$$\mathrm{S}(x) \ll \sum_{l=0}^{+\infty}\frac{t^l\,\mathcal{O}_{\mathrm{R}}(y)}{(1-y/\mathrm{R})^l}\mathrm{S}_l \tag{13}$$

LEMME 2.2.10 (avec ces notations). — *Posons* $\beta=(\beta_1, \beta')$ *et soit* $0<\mathrm{R}<1$.

1° *On peut majorer le terme*

$$\frac{\mathrm{S}(x)}{\mathrm{C}_{m-1}(k)}\mathrm{C}_j(k')\,\mathrm{B}_{j,\beta,\alpha}(\partial s)\,\partial^\beta b_{k'}$$

figurant dans $\mathrm{D}_{k,\mathrm{lin}}(b)$ [voir (11)] *par la somme d'un nombre fini (ne dépendant que de* m *et* n*) de termes du type :*

$$\mathrm{Cte}\left(\frac{1}{\mathrm{R}}\right)^{v+|\beta'|}\sum_{l=0}^{+\infty}\mathrm{X}_{k,l}\sum_{l_i}\mathrm{C}_{k',\,l_0+\beta_1}\prod_{i=1}^{j}\mathrm{F}_{l_i+v_i}\mathrm{S}_{l_{j+1}}$$

où les v_i sont des entiers naturels tels que $\sum v_i$ est inférieur ou égal à

$$v=\max(|\alpha|-|\beta|-j-1,\, 0),\qquad v+|\beta'|\leqq m,\qquad \sum_{0}^{j+1} l_i=l.$$

2° *Avec ces notations on peut majorer le terme*

$$\frac{S(x)}{C_{m-1}(k)}C_j(k')\,[B_{j,\beta,\alpha}(\partial s)\,\partial^\beta b_{k'}-B_{j,\beta,\alpha}(\partial s')\,\partial^\beta b'_k]$$

par la somme d'un nombre fini (ne dépendant que de m et n) de termes du type :

$$\mathrm{Cte}\left(\frac{1}{R}\right)^{v+|\beta'|}\sum_{l=0}^{+\infty} X_{k,l}\sum_{l_i} S_{l_{j+1}}\Big(A_{k',\,l_0+\beta_1}\prod_{i=1}^{j} F_{l_i+v_i}+C_{k',\,l_0+\beta_1}\times G_{l_1+v_1}\prod_{i=2}^{j} F_{l_i+v_i}\Big)$$

où on convient que $\prod_{i=2}^{1}(\ )=1$ *et les autres indices vérifiant les propriétés énoncées au* 1°.

Preuve. — 2° On peut majorer $\partial^\beta b_{k'}$ par

$$\left(\frac{1}{R}\right)^{|\beta'|}\sum_{l=0}^{+\infty}\frac{t^l\,\mathcal{O}_R(y)}{(1-y/R)^{k'+l+|\beta|}}\,\frac{(k'+l+|\beta|)!}{(k'+m-1)!\,l!}\,C_{k',\,l+\beta_1}\tag{14}$$

on peut majorer $\partial^\beta(b'_{k'}-b_k)$ par un terme (14)′ obtenu en remplaçant $C_{k',\,l+\beta_1}$ par $A_{k',\,l+\beta_1}$ dans (14). Comme $\mathcal{O}_R^2\ll\mathcal{O}_R$, le lemme 2.2.8 et les inégalités (14), (14)′ entraînent les deux inégalités suivantes :

$$(B_{j\,\beta\alpha}(\partial s)-B_{j\,\beta\alpha}(\partial s'))\,\partial^\beta b_{k'}\qquad S(x)\,\frac{C_j(k')}{C_{m-1}(k)}$$
$$\ll\frac{\mathrm{Cte}}{R^{v+|\beta'|}}\,\frac{C_j(k')}{C_{m-1}(k)}\sum_{l\geqq 0}\frac{t^l\,\mathcal{O}_R}{(1-y/R)^{l+v+k'+|\beta|}}\,\frac{(k'+l+|\beta|)!}{(k'+m-1)\,l!}\quad(1+l)^v$$
$$\sum_{l_i} G_{l_1+v_1}\prod_{i=2}^{j}F_{l_i+v_i}C_{k',\,l_0+\beta_1}S_{l_{j+1}}$$

et

$$\frac{C_j(k')}{C_{m-1}(k)}S(x)\,B_{j\,\beta\alpha}(\partial s')\,(\partial^\beta b'_{k'}-\partial^\beta b_{k'})$$
$$\ll\frac{\mathrm{Cte}}{R^{v+|\beta'|}}\,\frac{C_j(k')}{C_{m-1}(k)}\sum_{l\geqq 0}\frac{t^l\,\mathcal{O}_R}{(1-y/R)^{l+v+k'+|\beta|}}\,\frac{(k'+l+|\beta|)!}{(k'+m-1)!\,l!}(1+l)^v$$
$$\times\sum_{l_i}S_{l_{j+1}}A_{k',\,l_0+\beta_1}\prod_{i=1}^{j}F_{l_i+v_i}$$

comme $C_j(k')$ est majoré par Cte $C_{m-1}(k)(1+k)^{j-m+1}$ le résultat découle du lemme 2.2.9 1°. Cette preuve permet d'obtenir aisément le 1°.

NOTATIONS 2.2.11. — Notons $c(\mathrm{R}, \varepsilon)=(c_j(\mathrm{R}, \varepsilon))$ la famille des normes $\| \quad \|_{\mathrm{R}, \varepsilon}$ des fonctions $\partial^\alpha a-\partial^\alpha a(0)$ ($|\alpha| \leqq m$), $\partial^\beta s-\partial^\beta s(0)$ ($|\beta| \leqq 2$). En remplaçant a par a' et s par s' on définit de même la famille $c'(\mathrm{R}, \varepsilon)=(c'_j(\mathrm{R}, \varepsilon))$. En remplaçant a par $a-a'$ et s par $s-s'$ on définit de même la famille $d(\mathrm{R}, \varepsilon)=(d_j(\mathrm{R}, \varepsilon))$. Enfin les équations (9) et (10) montrent, $b_0(0)$ étant fixé, que les $\partial^\alpha a(0)$ et $\partial^\beta s(0)$ sont des constantes indépendantes de $b_0(t, y)$.

$\mathcal{O}_{\mathrm{R}}(0)$ est indépendant de R donc il existe une constante $\mathrm{Z} \geqq 1$ indépendante de R (ne dépendant que des conditions initiales) telle que $\sum_l \mathrm{F}_l \varepsilon^l$ est majoré par $\mathrm{Z}+\sum_j c_j(\mathrm{R}, \varepsilon)$.

On note que $\sum d_j(\mathrm{R}, \varepsilon)$ majore $\sum \mathrm{G}_l \varepsilon^l$.

PROPOSITION 2.2.12. — *Soit* $\mathrm{I}(x, u_\alpha, v_\beta)$ *une fonction holomorphe bornée par* K *sur le polydisque de rayon* $\mathrm{R}'_1>0$ *de centre* $(0, \partial^\alpha a(0), \partial^\beta s(0))$ *où* $|\alpha| \leqq m$, $|\beta| \leqq 2$. *Soit* $0<\mathrm{R}_1<\mathrm{R}'_1$; *supposons* $0<\mathrm{R}<\min(1, \mathrm{R}_1/2)$, $0<2\varepsilon<\mathrm{R}_1$ *et* $2 \sup_j (c_j(\mathrm{R}, \varepsilon), c'_j(\mathrm{R}, \varepsilon)) \leqq \mathrm{R}_1$. *Alors il existe une constante* C *ne dépendant que de* m *et* n *telle que :*

$$\|\mathrm{I}(x, \partial^\alpha a, \partial^\beta s)-\mathrm{I}(x, \partial^\alpha a', \partial^\beta s')\|_{\mathrm{R}, \varepsilon} \leqq \frac{\mathrm{CK}}{\mathrm{R}'_1-\mathrm{R}_1} \sum_i d_i(\mathrm{R}, \varepsilon).$$

Preuve. — La formule de Taylor à l'ordre un montre que :

$$\mathrm{I}(x, \partial^\alpha a, \partial^\beta s)-\mathrm{I}(x, \partial^\alpha a', \partial^\beta s')=\sum_{\alpha_1} \mathrm{J}_{\alpha_1} \partial^{\alpha_1}(a-a')+\sum_{\beta_1} \mathrm{L}_{\beta_1} \partial^{\beta_1}(s-s')$$

où les J_{α_1}, L_{β_1} sont des fonctions de $(x, \partial^\alpha a, \partial^\beta s, \partial^{\alpha'} a', \partial^{\beta'} s')$ holomorphes et bornées par $\mathrm{K}(\mathrm{R}'_1-\mathrm{R}_1)^{-1}$ sur le polydisque de rayon R_1 et de centre $(0, \partial^\alpha a(0), \partial^\beta s(0), \partial^{\alpha'} a'(0), \partial^{\beta'} s'(0))$. Supposons vérifiées toutes les hypothèses de la proposition. La proposition 2.1.5 montre alors qu'on peut majorer $\|\mathrm{J}_{\alpha_1}\|_{\mathrm{R}, \varepsilon}$ et $\|\mathrm{L}_{\beta_1}\|_{\mathrm{R}, \varepsilon}$ par

$$\frac{\mathrm{KC}'}{\mathrm{R}'_1-\mathrm{R}_1}$$

où C′ ne dépend que de m et n, la proposition 2.1.2 montre alors que :

$$\|\mathrm{J}_{\alpha_1} \partial^{\alpha_1}(a-a')\| \leqq \|J_{\alpha_1}\| \|\partial^{\alpha_1}(a-a')\| \leqq \|\mathrm{J}_{\alpha_1}\| \sum d_j(\mathrm{R}, \varepsilon)$$
$$\|\mathrm{L}_{\beta_1} \partial^{\beta_1}(s-s')\| \leqq \|\mathrm{L}_{\beta_1}\| . \|\partial^{\beta_1}(s-s')\| \leqq \|\mathrm{L}_{\beta_1}\| \sum d_j(\mathrm{R}, \varepsilon)$$

on obtient immédiatement le résultat de la proposition.

PROPOSITION 2.2.13 (avec ces notations). — *Supposons* $\mathrm{A}>1$ *et posons* $\varepsilon_2=\varepsilon \mathrm{A}^{2m} \mathrm{R}^{-m}$.

1° *Considérons les plus petites constantes positives* $\mathrm{H}_{k, l+1}$ *telles que :*

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathrm{D}_{k, \mathrm{lin}}(b) \ll \sum_0^{+\infty} \mathrm{X}_{k, l} \mathrm{H}_{k, l+1}.$$

Alors il existe $R_1 > 0$ *et* $J_1 > 0$ *tels que si on impose* $R < \min(1, (R_1/2))$, $2\varepsilon < R_1$, *et* $2 \sup_j (c_j(R, \varepsilon), c'_j(R, \varepsilon)) \leqq R_1$ *alors on a :*

$$\sum H_{k,\,l} A^k \varepsilon^{k+l} \leqq \varepsilon_2 J_1 M(b_k)(A, \varepsilon).$$

2° *Considérons les plus petites constantes positives* $H'_{k,\,l+1}$ *telles que :*

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad D_{k,\,\mathrm{lin}}(b) - D_{k,\,\mathrm{lin}}(b') \ll \sum_{k=0}^{+\infty} X_{k,\,l} H'_{k,\,l+1},$$

alors comme au 1° *il existe* R_1 *et* $J'_1 > 0$ *tels que avec les mêmes conditions on ait :*

$$\sum H'_{k,\,l} A^k \varepsilon^{k+l} \leqq \varepsilon_2 J'_1 [M(b-b') + (M(b) + M(b')) \sum d_j](A, \varepsilon).$$

Preuve. — 2° $S(x)$ [resp. $S'(x)$] désignera des fonctions du type $\partial P/\partial u_\alpha(x, \partial a)(\partial_\tau p_m(x, \partial a, ds))^{-1}$ [resp. on remplace (a, s) par (a', s') dans la précédente expression] que nous pourrons supposer holomorphes et bornées par K sur un polydisque de rayon R'_1 et de centre $(0, \partial^\beta a(0), \partial^\delta s(0))$ où $|\beta| \leqq m$, $|\delta| \leqq 1$. Soit $R_1 \in]0, R'_1[$ et considérons des réels ε et R positifs et inférieurs à $R_1/2$. Considérons alors les réels S_l, S''_l $(l \in \mathbb{N})$ permettant de majorer [*voir* (1)] $S(x)$ et $(S(x) - S'(x))$ de sorte que $\| S \|_{R,\,\varepsilon}$ et $\| S - S' \|_{R,\,\varepsilon}$ soient respectivement égaux à $\sum S_l \varepsilon^l$, $\sum S''_l \varepsilon^l$. Supposons en plus $2 \times \sup_j (c_j(R, \varepsilon), c'_1(R, \varepsilon)) \leqq R_1$, les propositions 2.1.5 et 2.2.12 montrent que :

$$\| S \|_{R,\,\varepsilon} \leqq K\,\mathrm{Cte} \tag{15}$$

$$\| S - S' \|_{R,\,\varepsilon} \leqq K\,\mathrm{Cte} \sum_i d_i(R, \varepsilon). \tag{16}$$

Pour chaque $k \in \mathbb{N}$ nous devons majorer un nombre fini ne dépendant de m et n de termes du type [*voir* (11)] :

$$\frac{C_j(k')}{C_{m-1}(k)} (S(x) B_{j\,\beta\alpha}(\partial s) \partial_x^\beta b_{k'} - S'(x) B_{j\,\beta\alpha}(\partial s') \partial_x^\beta b'_{k'})$$

les conditions sur j, β, α sont précisées dans le lemme 2.2.6, $k' = k + 2(1 - m + j)$, le 1° du lemme 2.2.10 permet de majorer le terme :

$$\frac{C_j(k')}{C_{m-1}(k)} (S - S') B_{j\,\beta\alpha}(\partial s) \partial_x^\beta b'_{k'}.$$

Le 2° du lemme 2.2.10 permet de majorer le terme :

$$\frac{C_j(k')}{C_{m-1}(k)} S (B_{j\,\beta\alpha}(\partial s) \partial_x^\beta b_{k'} - B_{j\,\beta\alpha}(\partial s') \partial_x^\beta b'_{k'}).$$

Reprenons les notations du lemme 2.2.10, on peut alors majorer $H'_{k,l+1}$ par un nombre fini de termes (ne dépendant que de m et n) du type :

$$\mathrm{Cte}\left(\frac{1}{R}\right)^{v+|\beta'|}\sum_{l_0+\ldots+l_{j+1}=l}\left[S_{l_{j+1}}\left(A_{k',l_0+\beta_1}\prod_{i=1}^{j}F_{l_i+v_i}+C_{k',l_0+\beta_1}G_{l_1+v_1}\prod_{i=2}^{j}F_{l_i+v_i}\right)\right.$$
$$\left.+S''_{l_{j+1}}C_{k',l_0+\beta_1}\prod_{i=1}^{j}F_{l_i+v_i}\right].$$

Rappelons que $R<1$ et $v+|\beta'|\leqq m$. Comme $A>1$ et $k'\geqq k-2m$, le 2° du lemme 2.2.9 entraîne :

$$\sum_{k,l}H'_{k,l}\varepsilon^{k+l}A^k\leqq \mathrm{Cte}\,R^{-m}\varepsilon A^{2m}[\|S\|((\sum F_l\varepsilon^l)^j(\sum A_{k,l}\varepsilon^{k+l}A^k)$$
$$+(\sum F_l\varepsilon^l)^{j-1}\sum G_l\varepsilon^l\sum C_{k,l}\varepsilon^{k+l}A^k)+\|S-S'\|(\sum F_l\varepsilon^l)^j\times\sum C_{k,l}\varepsilon^{k+l}A^k].$$

On majore $\sum F_l\varepsilon^l$ par $Z+\sum_j c_j(R,\varepsilon)$ (*voir* juste après 2.2.11) et $\sum G_l\varepsilon^l$ par $\sum_j d_j(R,\varepsilon)$. Les inégalités (15), (16) permettent d'obtenir immédiatement le 2°. Cette preuve permet d'obtenir aisément le 1°.

Pour contrôler $D_{k,h}(b)$ nous utiliserons les deux prochains lemmes.

LEMME 2.2.14. — *Considérons les indices q_j, k_j, α_j, β_j, $j=1,\ldots,N$ figurant dans $D_{k,h}$ et spécifiés dans le lemme 2.2.5. Posons $v_j=\max(|\alpha_j|-|\beta_j|-q_j-1,0)$, $v=\sum v_j$, $l=\sum l_j$. Posons aussi*

$$G'_j=\frac{(k_j+|\beta_j|+l_j)!}{(k_j+m-1)!\,l_j!}(1+l_j)^{v_j}C_{q_j}(k_j).$$

1° *Alors il existe $C_1>0$ ne dépendant que de m et n tel que :*

$$\sum_{j=1}^{N}(k_j+v_j+l_j+|\beta_j|)\leqq k+l+1+2-N$$

$$(k+1)^{1-m}\prod_{j=1}^{N}G'_j\leqq\frac{(k+l+1)!}{(k+m-1)!\,l!}C_1^N.$$

2° *Posons $\beta_j=(\beta_j^1,\beta'_j)$, alors $l+\sum_{j=1}^{N}(k_j+\beta_j^1+v_j)$ est inférieur ou égal à $k+l+1+2-N$. Supposons $N=2$, s'il y a égalité alors $k_1+k_2=k+1$. Par ailleurs $\sum k_j\geqq k-2Nm$.*

Preuve. — 1° Le lemme 2.2.5 montre que $k+1=\sum_{1}^{N}(k_j+2m-1-2q_j)$ et que chaque q_j+v_j et $|\beta_j|+q_j$ est inférieur ou égal à $|\alpha_j|$, d'où :

$$k+l+1-\sum_{j=1}^{N}(k_j+|\beta_j|+l_j+v_j)=\sum_{j=1}^{N}(2m-1-q_j-v_j-q_j-|\beta_j|)\geqq\sum_{j=1}^{N}(2m-1-2|\alpha_j|).$$

On a $N\geqq 2$ et $|\alpha_j|<m$ pour au moins $N-1$ indices j, le membre de droite est donc supérieur ou égal à $N-2$, ce qui prouve la première inégalité. Les q_j sont compris entre 0 et m, un au plus étant égal à m, on a donc :

$$N-2+\sum_{j=1}^{N}k_j\leqq k+1\leqq\sum_{j=1}^{N}k_j+2N\left(m-\frac{1}{2}\right).$$

Donc chaque k_j est majoré par $k+1$ et $\sum k_j\geqq k-2mN$. On peut majorer $C_{q_j}(k_j)$ par $C(1+k_j)^{q_j}$, où $C>0$ ne dépend que de m et n. Comme $|\beta_j|+q_j\leqq|\alpha_j|$ et que, pour au moins $N-1$ indices, $|\alpha_j|<m$, on constate que $|\beta_j|+v_j-m+1$ est négatif ou nul pour au moins $N-1$ indices j et est inférieur ou égal à 1 pour tout j. Chaque k_j étant majoré par $k+1$; on a donc :

$$(k+1)^{-1}\sum_{j=1}^{N}C_{q_j}(k_j)(1+k_j)^{|\beta_j|+v_j-m+1}\leqq C^N\frac{k+2}{k+1}.$$

Cela dit on obtient facilement les inégalités suivantes :

$$\frac{(k_j+|\beta_j|+l_j)!}{(k_j+m-1)!}(1+l_j)^{v_j}\leqq C'(m,n)\frac{(k_j+|\beta_j|+l_j+v_j)!}{(k_j+v_j+|\beta_j|)!}(1+k_j)^{|\beta_j|+v_j-m+1}$$

$$\prod_{j=1}^{N}\frac{(k_j+|\beta_j|+l_j+v_j)!}{(k_j+|\beta_j|+v_j)!\,l_j!}\leqq\frac{(\sum k_j+|\beta_j|+l_j+v_j)!}{(\sum k_j+|\beta_j|+v_j)!\,l!}$$

comme $k+l+1$ majore $\sum(k_j+|\beta_j|+l_i+v_j)$ on a :

$$(k+1)^{2-m}\frac{(\sum k_j+|\beta_j|+l_j+v_j)!}{(\sum k_j+|\beta_j|+v_j)!}\leqq(k+1)^{2-m}\frac{(k+l+1)!}{(k+1)!}\leqq \mathrm{Cte}\frac{(k+l+1)!}{(k+m-1)!}$$

on obtient immédiatement le 1°. Prouvons le 2°; supposons $N=2$ et que $k+l+1$ soit égal à $l+\sum_{1}^{2}(k_j+\beta_j^1+v_j)$.

Le début de la preuve du 1° montre que q_j+v_j et $\beta_j^1+q_j$ sont égaux à $|\alpha_j|$ et que $|\alpha_1|+|\alpha_2|=2m-1$. Par exemple on a :

$$2|\alpha_1|=2m=v_1+\beta_1^1+2q_1,\qquad 2|\alpha_2|=2m-2=v_2+\beta_2^1+2q_2$$

on vérifie immédiatement que ceci entraîne $v_1=v_2=0$. Comme $|\alpha_j|\geqq q_1+|\beta_j|$ on a forcément $q_1=|\alpha_1|$ et $q_2=|\alpha_2|$, donc $q_1+q_2=2m-1$ et donc $k_1+k_2=k+1$.

C.Q.F.D.

Dans le lemme suivant nous reprenons une fonction $S(x)$ holomorphe près de 0 vérifiant (13) (*cf.* lemme 2.2.10).

LEMME 2.2.15. — *Supposons* $0<R<1$. *Si* $\beta_j\in\mathbb{N}^{n+1}$ *on pose* $\beta_j=(\beta_j^1, \beta_j')$.

1° *On peut alors majorer le terme ci-dessous noté* $C(s, b)$

$$\frac{S(x)}{C_{m-1}(k)}\prod_{j=1}^{N} C_{q_j}(k_j)\, B_{q_j,\ \beta_j,\ \alpha_j}(\partial s)\,\partial^{\beta_j} b_{k_j}$$

(*où les indices sont précisés dans le lemme* 2.2.5) *par la somme d'un nombre fini* ($=C^N$ *où* C *ne dépend que de m et n*) *de termes du type :*

$$\left(\frac{\mathrm{Cte}}{R}\right)^{mN}\sum_{l=0}^{+\infty} X_{k,\ l}\sum S_{l_0}\prod_{j=1}^{N} C_{k_j,\ l_j+\beta_j^1}\prod_{i=1}^{q_i} F_{v_{j,\ i}+l_{j,\ i}}$$

où, la Cte ne dépend que de m et n, $l_0+\sum_j(l_j+\sum_i l_{j,\ i})=l$, *pour chaque j la somme des* $v_{j,\ i}$ *est inférieure ou égale à* $\max(|\alpha_j|-|\beta_j|-q_j-1, 0)$.

2° *Si* $C(s', b')$ *désigne le terme du* 1° *où on a remplacé s par s' et par b par b' alors on peut majorer* $C(s, b)-C(s', b')$ *par la somme d'un nombre fini* ($=C^N$ *où* C *ne dépend que de m et n*) *de termes du type :*

$$\left(\frac{\mathrm{Cte}}{R}\right)^{mN}\sum_{l=0}^{+\infty} X_{k,\ l}\sum S_{l_0}\left[\prod_{j=1}^{N}\left(\prod_{i=1}^{q_j} F_{v_{j,\ i}+l_{j,\ i}}\right)\sum_{h=1}^{N} A_{k_n,\ l_h+\beta_h^1}\prod_{\substack{j=1\\ j=h}}^{N} C_{k_j,\ l_j+\beta_j^1}\right.$$
$$\left.+\sum_{j=1}^{N} C_{k_j,\ l_j+\beta_j^1}\sum_{h=1}^{N} G_{l_{h,\ 1}+v_{h,\ 1}}\prod_{i=2}^{q_h} F_{v_{h,\ i}+l_{h,\ i}}\prod_{\substack{i=1=1\\ jh}}^{N\ q_j}\!\!\prod F_{v_{j,\ i}+l_{j,\ i}}\right]$$

où on convient que $\prod_p^q(\quad)=1$ *si* $q<p$, *la Cte ne dépend que de m et n, et les indices vérifient les propriétés énoncées au* 1°.

Preuve 2°. Nous utiliserons l'identité :

$$X_1\ldots X_{2N}-X_1'\ldots X_{2N}'=\sum_{j=1}^{2N} X_1'\ldots X_{j-1}'(X_j-X_j')\,X_{j+1}\ldots X_{2N}$$

en remplaçant, pour $j\leqq N$, X_j [resp. X_j'] par $B_{q_j,\ \beta_j,\ \alpha_j}(\partial s)$ [resp. $B_{q_j,\ \beta_j,\ \alpha_j}(\partial s')$] et en remplaçant, pour $j>N$, X_j [resp. X_j'] par $\partial^{\beta_j} b_{k_j}$ [resp. $\partial^{\beta_j} b_{k_j}'$]. Comme dans la preuve du lemme 2.2.10 on peut majorer $\partial^{\beta_j} b_{k_j}$ resp $[\partial^{\beta_j}(b_{k_j}-b_{k_j}')]$ par un terme du type (14) [resp. (14)']. Reprenons les notations du lemme 2.2.14, le lemme 2.2.8 (et ce qui précède) montre qu'on peut majorer $C(s, b)-C(s', b')$ par :

$$\left(\frac{\mathrm{Cte}}{\mathrm{R}}\right)^{m\,\mathrm{N}} \sum \frac{\mathcal{O}_{\mathrm{R}}\, t^l}{(1-y/\mathrm{R})^{l+\Sigma(v_j+k_j+|\beta_j|)}} (1+k)^{1-m} \left(\prod_{j=1}^{\mathrm{N}} \mathrm{G}'_j\right) \mathrm{M}$$

où M désigne l'expression $\sum \mathrm{S}_{l_0}[\ldots]$ écrite dans le 2° du lemme.

Le lemme 2.2.14 assure que :

$$(k+1)^{1-m} \frac{\mathcal{O}_{\mathrm{R}}\, t^l}{(1-y/\mathrm{R})^{l+\Sigma(v_j+k_j+|\beta_j|)}} \prod_1^{\mathrm{N}} \mathrm{G}'_j \ll \mathrm{C}_1^{\mathrm{N}} \mathrm{X}_{k,\, l}$$

on obtient alors le 2° et on prouve le 1° d'une manière analogue.

Proposition 2.2.16. — . *Supposons* $\mathrm{A}>1$ *et posons* $\varepsilon_2=\varepsilon\,\mathrm{A}^{2m}\mathrm{R}^{-m}$.

1° *Considérons les plus petites constantes* $\geqq 0$ $\mathrm{H}_{k,\, l+1}$ *telles que :*

$$\forall k \in \mathbb{N}.\ \mathrm{D}_{k,\, h}(b) \ll \sum_0^{+\infty} \mathrm{X}_{k,\, l}\, \mathrm{H}_{k,\, l+1}.$$

Alors il existe I_1, I_2 *et* $\mathrm{R}_1>0$ *tels que si on impose* $\mathrm{R}<\min(1, (\mathrm{R}_1/2))$, $2\varepsilon<\mathrm{R}_1$, $2\sup_j(c_j(\mathrm{R}, \varepsilon), c'_j(\mathrm{R}, \varepsilon)) \leqq \mathrm{R}_1$ *et* $2\varepsilon_2 \mathrm{Y} \leqq \mathrm{R}_1$ *où :*

$$\mathrm{Y}=(m+1)(1+\mathrm{M}(b)+\mathrm{M}(b'))(\mathrm{A}, \varepsilon)\times(\mathrm{Z}+\sum c_j(\mathrm{R}, \varepsilon))^m$$

on a :

$$\sum \mathrm{H}_{k,l}\, \mathrm{A}^k \varepsilon^{k+l} \leqq \mathrm{R}^{-2m} \mathrm{A}^{-1} \mathrm{I}_1 \mathrm{Y}^2 + \varepsilon_2 \mathrm{A}^{4m} \mathrm{R}^{-2m} \mathrm{Y}^3 \mathrm{I}_2.$$

2° *Considérons les plus petites constantes* $\geqq 0$ $\mathrm{H}'_{k,\, l+1}$ *telles que :*

$$\forall k \in \mathbb{N},\quad \mathrm{D}_{k,\, h}(b)-\mathrm{D}_{k,\, h}(b') \ll \sum_0^{+\infty} \mathrm{X}_{k,\, l}\, \mathrm{H}'_{k,\, l+1}.$$

Alors comme au 1° *il existe* I'_1, I'_2 *et* $\mathrm{R}_1>0$ *tels que sous les mêmes conditions on a :*

$$\sum \mathrm{H}'_{k,\, l}\, \mathrm{A}^k \varepsilon^{k+l} \leqq (\mathrm{M}(b-b')+\sum_j d_j)[\mathrm{R}^{-2m} \mathrm{A}^{-1} \mathrm{I}'_1 \mathrm{Y}^2 + \varepsilon_2 \mathrm{A}^{4m} \mathrm{R}^{-2m} \mathrm{Y}^3 \mathrm{I}'_2].$$

Preuve 2°. — Reprenons les notations du lemme 2.2.5. Dans cette preuve $\mathrm{S}_{\mathrm{N}}(x)$ [resp. $\mathrm{S}'_{\mathrm{N}}(x)$] désignera des fonctions du type $\mathrm{E}_{\alpha_1, \ldots, \alpha_{\mathrm{N}}}(x, \partial a)\times(\partial_{\tau^{p_m}}(x, \partial a, ds))$ [resp. on remplace (a, s) par (a', s')] que nous pourrons supposer holomorphes et bornées par $\mathrm{K}^{\mathrm{N}+1}$ sur le polydisque de rayon R'_1 et de centre $(0, \partial^\beta a(0), \partial^\delta s(0))\,|\beta|\leqq m$, $|\delta|\leqq 1$. Soit $\mathrm{R}_1 \in]0, \mathrm{R}'_1[$ et considérons des réels positifs ε, R inférieurs à $\mathrm{R}_1/2$. Considérons, pour $l \in \mathbb{N}$, des réels $\mathrm{S}_{\mathrm{N},\, l}$, $\mathrm{S}''_{\mathrm{N},\, l}$ tels que (*cf.* preuve de la proposition 2.2.13) $\sum_l \mathrm{S}_{\mathrm{N},\, l}\, \varepsilon^l$ et $\sum_l \mathrm{S}''_{\mathrm{N},\, l}\, \varepsilon^l$ soient respectivement égaux à $\|\mathrm{S}_{\mathrm{N}}\|_{\mathrm{R},\, \varepsilon}$, $\|\mathrm{S}_{\mathrm{N}}-\mathrm{S}'_{\mathrm{N}}\|_{\mathrm{R},\, \varepsilon}$. Supposons

$2\sup_j (c_j(\mathrm{R}, \varepsilon), c'_j(\mathrm{R}, \varepsilon)) \leqq \mathrm{R}_1$, les propositions 2.1.5 et 2.2.12 montrent que :

$$\| \mathrm{S_N} \|_{\mathrm{R}, \varepsilon} \leqq \mathrm{Cte}\ \mathrm{K}^{\mathrm{N}+1} \tag{17}$$

$$\| \mathrm{S_N} - \mathrm{S'_N} \|_{\mathrm{R}, \varepsilon} \leqq \frac{\mathrm{Cte}\,\mathrm{K}^{\mathrm{N}+1}}{\mathrm{R}'_1 - \mathrm{R}_1} \sum_i d_i(\mathrm{R}, \varepsilon). \tag{18}$$

Pour majorer $\mathrm{H}'_{k,\, l+1}$ nous commençons par considérer les deux termes suivants :

$$\frac{\mathrm{S_N}(x) - \mathrm{S'_N}(x)}{\mathrm{C}_{m-1}(k)} \prod_{j=1}^{\mathrm{N}} \mathrm{C}_{q_j}(k_j)\, \mathrm{B}_{q_j,\, \beta_j,\, \alpha_j}(\partial s')\, \partial^{\beta_j} b'_{k_j}$$

$$\frac{\mathrm{S_N}(x)}{\mathrm{C}_{m-1}(k)} \left(\prod_{j=1}^{\mathrm{N}} \mathrm{C}_{q_j}(k_j)\, \mathrm{B}_{q_j,\, \beta_j,\, \alpha_j}(\partial s)\, \partial^{\beta_j} b_{k_j} \right.$$
$$\left. - \prod_{j=1}^{\mathrm{N}} \mathrm{C}_{q_j}(k_j)\, \mathrm{B}_{q_j,\, \beta_j,\, \alpha_j}(\partial s') \times \partial^{\beta_i} b'_{k_j} \right).$$

Reprenons les notations du lemme 2.2.15, il montre que $\mathrm{H}'_{k,\, l+1}$ est majoré par $\sum_2^\infty h'(k, l+1, \mathrm{N})$ où chaque $h'(k, l+1, \mathrm{N})$ est majoré par la somme d'un nombre fini $(=\mathrm{C}'^{\,\mathrm{N}})$ de termes du type :

$$\left(\frac{\mathrm{Cte}}{\mathrm{R}}\right)^{m\mathrm{N}} \sum_{\substack{q_j,\, k_j,\, l_j \\ l_{j,\, i}}} \left[\mathrm{S}''_{\mathrm{N},\, l_0} \prod_{j=1}^{\mathrm{N}} \mathrm{C}_{k_j,\, l_j + \beta_j^1} \prod_{i=1}^{q_j} \mathrm{F}_{v_j,\, i + l_{j,\, i}} + \mathrm{S}_{\mathrm{N},\, l_0} \mathrm{M}' \right]$$

où M' désigne le terme gigantesque écrit entre [ ] dans le 2° du lemme 2.2.15 (juste après S_{l_0}). Comme $\mathrm{A} > 1$ et $\sum k_j \geqq k - 2\mathrm{N}m$ le lemme 2.2.14 montre qu'il existe $\mathrm{C} > 0$ ne dépendant que de m et n tel que :

$$\sum_{k,\, l} h'(k, l, \mathrm{N})\, \mathrm{A}^k \varepsilon^{k+l} \leqq \mathrm{X_N}\, \mathrm{C}^{\mathrm{N}+1} \left(\sum \mathrm{C}_{k,\, l} \mathrm{A}^k \varepsilon^{k+l}\right)^{\mathrm{N}}$$
$$\times \| \mathrm{S_N} - \mathrm{S'_N} \| \times \sum_{q_j} \left(\sum \mathrm{F}_l \varepsilon^l\right)^{\Sigma q_j} + \| \mathrm{S_N} \| \Big[\Big(\sum_{q_j} \left(\sum \mathrm{F}_l \varepsilon^l\right)^{\Sigma q_j} \times \mathrm{N}\Big(\sum \mathrm{A}_{k,\, l}$$
$$\times \mathrm{A}^k \varepsilon^{k+l}\Big) \left(\sum \mathrm{C}_{k,\, l} \mathrm{A}^k \varepsilon^{k+l}\right)^{\mathrm{N}-1} + \left(\sum \mathrm{C}_{k,\, l} \mathrm{A}^k \varepsilon^{k+l}\right)^{\mathrm{N}} \mathrm{N} \left(\sum \mathrm{G}_l \varepsilon^l\right)$$
$$\times \sum_{q_j} \left(\sum \mathrm{F}_l \varepsilon^l\right)^{(\Sigma q_j) - 1}\Big],$$

où, si $\mathrm{N} \geqq 3$, $\mathrm{X_N}$ désigne $\mathrm{R}^{-m\mathrm{N}} \mathrm{A}^{2m\mathrm{N}} \varepsilon^{\mathrm{N}-2}$; si $\mathrm{N} \geqq 2$, $\mathrm{X_N}$ désigne soit $\mathrm{R}^{-2m} \mathrm{A}^{4m} \varepsilon$ soit $\mathrm{R}^{-2m} \mathrm{A}^{-1}$. Les q_j sont $\leqq m$ et le nombre de N-uple (q_j) est majoré par $(m+1)^{\mathrm{N}}$, comme $\mathrm{Z} \geqq 1$ on a alors :

$$\sum_{q_j} \left(\sum \mathrm{F}_l \varepsilon^l\right)^{\Sigma q_j} \leqq (m+1)^{\mathrm{N}} \left(\mathrm{Z} + \sum c_j(\mathrm{R}, \varepsilon)\right)^{m\mathrm{N}}.$$

Nous mettons à part le terme correspondant à $N=2$ et $X_2=R^{-2m}A^{-1}$. Pour $N\geqq 3$ on a :

$$C^{N+1}Y^N R^{-mN}A^{2mN}\varepsilon^{N-2}=\varepsilon_2 A^{4m}R^{-2m}C^4Y^3(\varepsilon_2 YC)^{N-3}.$$

Comme Y, A et R^{-1} sont plus grands que 1 on a (pour $N=2$) :

$$A^{4m}C^3Y^2R^{-2m}\varepsilon\leqq\varepsilon_2 A^{4m}R^{-2m}Y^3C^3.$$

Maintenant supposons $R_1<(KC)^{-1}$ et $2\varepsilon_2 Y\leqq R_1$, alors :

$$\sum_{n\geqq 2} N(CK)^N[\varepsilon_2(M(b)+M(b'))]^N(m+1)^N(Z+\sum c_j(R,\varepsilon))^{mN}<+\infty.$$

En utilisant (17) et (18) on obtient alors aisément le 2°; cette preuve montre comment on obtient le 1°.

Fin de la preuve du théorème 1.1.6. — En dérivant l'équation (9) par rapport à t nous obtenons :

$$(9)'\quad \partial_t^2 s=\partial_t\tau_1((x,\partial^\beta a,\partial_y^i s)+\sum_{\beta'}\partial_{u_{\beta'}}\tau_1(x,\partial^\beta a,\partial_y^j s)\,\partial_t\partial^{\beta'}a$$
$$+\sum_{j'}\partial_{\xi_{j'}}\tau_1(x,\partial^\beta a,\partial_y^j s)\,\partial_t\partial_y^{j'}s$$

où $|\beta|$ et $|\beta'|$ sont $\leqq m-1$ et où $|j|=|j'|=1$. En reprenant les notations 1.1.5, l'équation (10) donne :

$$(10)\qquad \partial_t^m a+Q'(t,y,\partial^\alpha a)+b_0^2 E(x,\partial^\beta a,\partial^i s)=0$$

où $|\beta|\leqq m-1$, $|j|=1$, $|\alpha|\leqq m$ et $\alpha\#(1,0,\ldots,0)$. Si l'on remplace le terme $\partial_t^m a$ apparaissant dans (9)' par l'expression fournie par (10) on peut former un système du premier ordre (comme celui considéré dans le théorème 2.1.6) du type :

$$\partial_t u+Q(t,y,\partial^\alpha u)+b_0^2 S(t,y,u)=0$$

où l'inconnue $u(t,y)$ est le vecteur colonne constitué des $\partial^\lambda s$ où $|\lambda|\leqq 1$ et des $\partial^\beta a$ où $|\beta|\leqq m-1$; la condition initiale $u(0,y)$ s'obtient à partir de l'équation (9) et des conditions initiales vérifiées par a et s dans le théorème 1.1.6. Par hypothèse il existe des réels A', R', ε', K strictement positifs tels que $M(b_k^1)(a',\varepsilon')\leqq\sqrt{K}-1$; dans la suite nous fixons un tel réel K et considérerons des réels strictement positifs A, R, ε tels que $R\leqq R'$, $\underline{A\varepsilon<A'\varepsilon'}$, de sorte que $M(b_k^1)(A,\varepsilon)$ soit inférieur à $\sqrt{K}-1$. Cela dit considérons $R_1>0$ fourni par les propositions 2.2.13 et 2.2.16; considérons $0<\delta\leqq R_1/8$; au couple (δ, K) le théorème 2.1.6 associe (entre autre choses) un réel $E>0$. Nous montrerons plus loin que l'on peut choisir $A\gg 1$ puis $\varepsilon\ll 1$ de sorte que l'opérateur $b\to f=T(b)$ envoie

$$B(A,R,\varepsilon)=\{(b_k)/b_k(0,y)=b_k^1(y),\ M(b)(A,\varepsilon)\leqq\sqrt{K},$$
$$M(b-b(0,y))(A,\varepsilon)\leqq\delta(4E\sqrt{K})^{-1}\}$$

dans elle-même et est contractant, ce qui prouvera le théorème 1.1.6. Reprenons les notations du théorème 2.1.6, nous imposons à ε et R les conditions suivantes :

$$0<R<R_0, \qquad R<\min(1, R_1/2)$$
$$0<\varepsilon \leqq \min(c R^{-1}, \varepsilon_0), \qquad 2\varepsilon<R_1,$$

nous supposerons aussi R suffisamment petit de sorte que :

$$\| b_0(0, y)-b_0(0)\|_R \leqq \delta(4E\sqrt{K})^{-1}. \tag{19}$$

Soient b, $b' \in B(A, R, \varepsilon)$, on a :

$$\| b_0^2 \|_{R, \varepsilon} \leqq \| b_0 \|^2 \leqq M^2(b)(A, \varepsilon) \leqq K$$
$$\begin{aligned} E \| b_0^2(t, y)-b_0^2(0)\|_{R, \varepsilon} &\leqq E\| b_0+b_0(0)\| . \| b_0-b_0(0)\| \\ &\leqq 2E\| b_0 \| (\| b_0-b_0(0, y)\| + \| b_0(0, y)-b_0(0)\|) \\ &\leqq \sqrt{K}[M(b-b(0, y))(A, \varepsilon)+\| b_0(0, y)-b_0(0)\|]; \end{aligned}$$

l'inégalité (19) montre alors que :

$$E\| b_0^2(t, y)-b_0^2(0)\|_{R, \varepsilon} \leqq \delta \leqq \frac{R_1}{8}.$$

Le théorème 2.1.6 montre alors que :

$$2 \sup_j (c_j(R, \varepsilon), c'_j(R, \varepsilon)) \leqq 2(\delta+\delta) \leqq \frac{R_1}{2}.$$
$$\begin{aligned} \forall_j, \quad d_j(R, \varepsilon) &\leqq E\| b_0^2-b_0'^2\|_{R, \varepsilon} \leqq E\| b_0-b'_0\| \times \| b_0+b'_0\| \\ &\leqq E\times M(b-b')(A, \varepsilon)\times M(b+b')(A, \varepsilon) \leqq 2E\sqrt{K}\, M(b-b')(A, \varepsilon); \end{aligned}$$

il existe donc $C>0$ tel que :

$$\sum_j d_j(R, \varepsilon) \leqq 2CE\sqrt{K}\, M(b-b')(A, \varepsilon).$$

Soit p le nombre de $c_j(R, \varepsilon)$, nous supposerons en plus que :

$$2(m+1)(1+2\sqrt{K})(Z+pR_1/2)^m \varepsilon_2 \leqq R_1,$$

de sorte que b, $b' \in B(A, R, \varepsilon) \Rightarrow 2\varepsilon_2 Y \leqq R_1$(Y est défini dans 2.2.16). Les propositions 2.2.13 et 2.2.16 montrent alors que pour tout b, $b' \in B(A, R, \varepsilon)$ on a les inégalités :

$$M(T(b))(A, \varepsilon) \leqq \varepsilon_2 J_1 M(b)+R^{-2m}A^{-1}Y^2 I_1+\varepsilon_2 A^{4m}R^{-2m}I_2+M(b_k^1) \tag{20}$$
$$\begin{aligned} M(T(b)-T(b'))(A, \varepsilon) \leqq M(b-b')(1+2CE\sqrt{K})\,[&\varepsilon_2(1+M(b)+M(b'))J'_1 \\ &+R^{-2m}A^{-1}I'_1 Y^2+\varepsilon_2 A^{4m}R^{-2m}Y^3 I'_2]. \end{aligned}$$

On observe qu'on peut majorer $M(T(b)-b(0, y))$ par le second membre amputé de $M(b_k^1)$ de la première inégalité (20). Les estimations précédentes montrent alors qu'on peut choisir $A \gg 1$ puis $0 < \varepsilon \leqq \varepsilon_0$ pour que A^{-1} et ε_2 soient suffisamment petits de sorte que $b \to f = T(b)$ envoie $B(A, R, \varepsilon)$ dans elle-même et soit contractante. Ceci prouve le théorème 1.1.6.

Remarque 2.2.17. — Si l'équation est linéaire par rapport aux dérivées d'ordre $\geqq m-1$, il semble qu'on ne puisse pas construire des solutions « moins régulières ».

Dans le cas $(n+1=2)$ de (2.1) : $\partial_t^2 u - u \partial_x^2 u = 0$ on ne peut pas construire, par la méthode précédente, des solutions du type

$$u = a + \sum_{k=0}^{+\infty} b_k s^{(k+1)/2}$$

où $b_0 \neq 0$. En effet en injectant u dans (21) et en annulant les coefficients de $s^{-3/2}$ et $s^{-2/2}$ on trouve $b_0 = 0$ ou $ds = 0$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Y. Hamada, J. Leray et C. Wagschal, *Systèmes d'équations aux dérivées partielles à caractéristiques multiples : problème de Cauchy ramifié, hyperbolicité partielle* (*J. Math. pures et appl.*, 1976).

[2] T. Ishii et T. Kobayashi, *Singular Solutions of Nonlinear Partial Differential Equations*, Preprint, 1984.

[3] T. Kobayshi et G. Nakamura, *Singular Solutions for Semilinear Hyperbolic Equations* I, Preprint, 1984.

[4] L. Nirenberg, *An Abstract form of the Nonlinear Cauchy-Kovaleski Theorem* (*J. Diff. Geometry*, vol. 6, 1972).

[5] C. Wagschal, *Le problème de Goursat non linéaire* (*J. Math. pures et appl.*, 1979).

[6] C. Wagschal, *Sur le problème de Cauchy ramifié* (*J. Math. pures et appl.*, 1974).

(Manuscrit reçu le 12 février 1985,
révisé le 12 février 1987).

Éric Leichtnam,
École Normale Supérieure,
45, rue d'Ulm,
75005 Paris.