ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

HERVÉ JACQUET

Sur un résultat de Waldspurger

Annales scientifiques de l'É.N.S. 4e série, tome 19, nº 2 (1986), p. 185-229
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1986_4_19_2_185_0>

Ann. scient. Éc. Norm. Sup.,
4e série, t. 19, 1986, p. 185 à 229.

SUR UN RÉSULTAT DE WALDSPURGER [1]

PAR HERVÉ JACQUET

0. Introduction

(0.1) Nous allons donner une nouvelle démonstration d'un résultat remarquable de Waldspurger ([W3], Théorème 2). La démonstration de Waldspurger repose sur les propriétés de la représentation de Weil. La nôtre repose sur une variante de la formule des traces. Nous espérons qu'elle ne sera pas sans intérêt.

Rappelons d'abord le résultat. Soient F un corps de nombres, E une extension quadratique de F, η le caractère du groupe des classes d'idèles de F attaché à E. Regardons le groupe GL(2) comme un groupe algébrique G défini sur F ; soit Z son centre. Soit A un tore déployé maximal dans G, disons, pour fixer les idées, le groupe des matrices diagonales. Soit π une représentation cuspidale automorphique du groupe $G(F_A)$, triviale sur le centre $Z(F_A)$. Nous dirons que π satisfait à la première condition de Waldspurger (en abrégé W1) s'il existe des formes automorphes ϕ_1 et ϕ_2 dans l'espace de π telles que les intégrales suivantes soient non nulles :

$$(1)\qquad \int \phi_1(a)da, \qquad \int \phi_2(a)\eta(\det a)da, \qquad a\in A(F_A)/Z(F_A).$$

Introduisons d'autre part l'ensemble X(E : F), ou simplement X, des classes d'isomorphismes de couples (G′, T′), où G′ est une forme intérieure de G et T′ un tore maximal de G′, isomorphe sur F au groupe multiplicatif de E. Rappelons qu'un tel couple s'obtient au moyen d'un couple (H, L), formé d'une algèbre simple H de rang quatre sur F et d'un sous-corps L de H F-isomorphe à E, en prenant pour G′ le groupe multiplicatif de H et pour T′ celui de L. Le centre de G′ sera noté Z′.

Nous identifierons l'ensemble X à l'un de ses systèmes de représentants. Notons aussi $X(\pi)$ l'ensemble des triplets (G', T', π'), où le couple (G′, T′) est dans X et π' est une représentation automorphe cuspidale de $G'(F_A)$ reliée à π par la condition de [J-L], Th. (15.1) ; celle-ci, rappelons-le, s'énonce encore ainsi : il existe un ensemble fini S de places de F tel que, pour v non dans S, les groupes G_v et G'_v soient isomorphes et les représentations π_v et π'_v équivalentes, après identification des deux groupes. Nous dirons que π satisfait à la

[1] Partially supported by N.S.F. Grant MCS 82-00551.

deuxième condition de Waldspurger (W2) s'il existe un triplet (G′, T′, π′) dans X(π) et une forme automorphe ϕ dans l'espace de π' telle que l'intégrale suivante soit non nulle :

$$(2) \qquad \int \phi(t)\,dt, \qquad t \in \mathrm{T}'(\mathrm{F}_A)/\mathrm{Z}'(\mathrm{F}_A).$$

Alors :

Théorème (Waldspurger). — *Les conditions* W1 *et* W2 *sont équivalentes.*

(0.2) Indiquons les grandes lignes de notre démonstration. Tout d'abord nous pouvons identifier l'ensemble des doubles classes A\G/A avec la réunion disjointe des doubles classes T′\G′/T′(§ 1). A vrai dire pour avoir cette identification il nous faut nous limiter aux doubles classes « régulières ». Cela nous conduit à considérer une fonction lisse à support compact f sur $\mathrm{G}(\mathrm{F}_A)/\mathrm{Z}(\mathrm{F}_A)$ et, pour chaque (G′, T′), une fonction lisse à support compact f' sur $\mathrm{G}'(\mathrm{F}_A)/\mathrm{Z}'(\mathrm{F}_A)$. En fait f' sera nulle pour presque tous les (G′, T′). A la fonction f est associé le noyau cuspidal K_c et de même à chaque fonction f' est associé un noyau cuspidal K'_c. Les conditions imposées sur ces fonctions sont telles que (§ 7 à § 10) :

$$(1) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\iint \mathrm{K}_c(a, b)\,da\,\eta(\det b)\,db = \sum_{(\mathrm{G}',\mathrm{T}')} \iint \mathrm{K}'_c(s, t)\,ds\,dt, \\ a, b \in \mathrm{A}(\mathrm{F}_A)/\mathrm{A}(\mathrm{F})\mathrm{Z}(\mathrm{F}_A), \qquad s, t \in \mathrm{T}'(\mathrm{F}_A)/\mathrm{T}'(\mathrm{F})\mathrm{Z}'(\mathrm{F}_A). \end{array} \right.$$

La relation entre f et les f' est comme suit. Bien entendu ces fonctions sont des produits de fonctions locales. Si v est une place de F qui se décompose dans E alors pour tout (G′, T′) les groupes G'_v et G_v sont les « mêmes » et nous prenons pour f_v et f'_v la « même » fonction. Supposons au contraire que v se décompose. Alors l'ensemble $\mathrm{X}(\mathrm{E}_v : \mathrm{F}_v)$ est encore défini mais il est réduit à deux éléments $(\mathrm{G}_{vi}, \mathrm{T}_{vi})$, $i = 1, 2$, avec G_{v1} déployé. Nous pouvons encore identifier les doubles classes régulières de A_v avec la réunion disjointe des doubles classes régulières de T_1 et T_2. Nous montrons que pour une fonction f donnée il existe des fonctions f_i sur G_i telles que

$$\iint f(agb)\,da\,\eta_v(\det b)\,db = \iint f_i(sg't)\,ds\,dt,$$
$$a, b \in \mathrm{A}_v/\mathrm{Z}_v, \qquad s, t \in \mathrm{T}_{iv}/\mathrm{Z}_{iv},$$

si g correspond à g' (§ 2 à 4) (L'énoncé exact est un peu différent puisque le membre de gauche n'est pas tout à fait une fonction sur l'ensemble des doubles classes). Si de plus la situation est non ramifiée et f_v est une fonction de Hecke alors nous pouvons prendre et prenons $f_1 = f_v$ et $f_2 = 0$ (§ 5). La condition est maintenant que $f'_v = f_i$ si $\mathrm{G}'_v = \mathrm{G}_i$. Le résultat de Waldspurger découle facilement de l'identité (1) (*cf.* § 11). Le paragraphe 6 contient des résultats auxiliaires.

La méthode de démonstration de la formule (1) est basée sur une généralisation de la formule des traces qui peut s'énoncer comme suit. Soit G un groupe semi-simple défini sur F et A, B des sous-groupes de G définis sur F, λ et μ des caractères de $\mathrm{A}(\mathrm{F}_A)/\mathrm{A}(\mathrm{F})$ et

$B(F_A)/B(F)$ respectivement. Donnons-nous une fonction f sur $G(F_A)/G(F)$ lisse à support compact et calculons l'intégrale suivante :

$$\iint K_c(a, b)\lambda(a)\mu(b)dadb$$

où K_c est le noyau cuspidal attaché à f. Ce noyau a une expression compliquée qui contient en tout cas la somme :

$$\sum_{\zeta} f(x^{-1}\zeta y), \qquad \zeta \in G(F).$$

Choisissons un système de représentants pour les doubles classes des groupes A(F) et B(F). D'autre part si η est un élément de G(F) notons H_η le sous-groupe de $A \times B$ formé des paires (α, β) telles que $\alpha^{-1}\eta\beta = \eta$. Alors tout élément de G(F) peut s'écrire uniquement sous la forme :

$$\zeta = \alpha^{-1}\eta\beta, \qquad \eta \in A(F)\backslash G(F)/B(F), \quad (\alpha, \beta) \in H_\eta(F)\backslash A(F) \times B(F).$$

En imitant le calcul formel usuel nous arrivons aussitôt à l'expression suivante pour l'intégrale ci-dessus :

$$\sum_{\eta} \mathrm{Vol}\,(H_\eta(F)\backslash H(F_A)) \iint f(a^{-1}\eta b)\lambda(a)\mu(b)dadb,$$
$$a \in A(F)\backslash A(F_A), \qquad b \in B(F)\backslash B(F_A),$$

la somme portant sur tous les η tels que $\lambda(a)\mu(b)=1$ si $a^{-1}b=1$. Bien entendu nous avons ignoré les problèmes de convergence et l'existence des autres termes dans l'expression pour K_c.

(0.3) Il me reste à remercier l'Institute for Adavanced Study et ses membres permanents pour leur hospitalité, la majeure partie de ce travail ayant été écrite durant mon séjour à l'Institute, à l'occasion de l'année spéciale 1983-1984 sur les fonctions L. En particulier je remercie Langlands pour l'intérêt qu'il a pris à ce travail. Enfin je dois beaucoup de reconnaissance à Piatetski-Shapiro qui était aussi à l'Institute la même année. Sa connaissance approfondie de l'œuvre de Waldspurger m'a été très utile ; de plus une conversation avec Piateski-Shapiro a été le point de départ de ce travail.

1. Doubles classes

(1.1) Dans ce paragraphe F sera un corps quelconque, disons de caractéristique zéro, et E une extension quadratique de F. Nous noterons N(E : F) ou simplement N le sous-groupe des normes de E dans le groupe multiplicatif de F. L'ensemble X(E : F) ou simplement X introduit au paragraphe est encore défini. Considérons l'un de ses éléments (G, T). Il existe donc une algèbre simple H de rang 4 sur F et un sous-corps L de H isomorphe à E tels que G soit le groupe multiplicatif de H et T celui de L. Nous nous proposons de donner une paramétrisation des doubles classes T\G/T. A cet effet choisissons un élément ε du normalisateur N(T) de T qui ne soit pas dans T. Alors tout h dans H s'écrit de manière unique sous la forme :

$$h = h_1 + \varepsilon h_2, \qquad \text{avec} \quad h_i \in \mathrm{L}. \tag{1}$$

D'autre part, si $z \to z^-$ désigne l'unique F-automorphisme non trivial de L alors :

$$\varepsilon z \varepsilon^{-1} = z^- . \tag{2}$$

Le carré $c = \varepsilon^2$ est dans Z, ou, autrement dit, dans F. De plus la classe de c modulo N est déterminée par la classe d'isomorphisme du couple (G, T) et, réciproquement, la détermine.

Définissons deux involutions j^+ et j^- de H par les formules :

$$j^{\pm}(h) = h_1^- \pm \varepsilon h_2 \quad \text{avec } h \text{ comme dans (1)}. \tag{3}$$

Il est facile de vérifier que ce sont les seules involutions de H qui induisent sur L l'unique F-automorphisme non trivial de L. Pour h dans G nous poserons :

$$\mathrm{X}(h) = \frac{(1/2\mathrm{T}r(hj^+(h))}{(1/2\mathrm{T}r(hj^-(h))}. \tag{4}$$

Comme le dénominateur de cette fraction n'est autre que la norme réduite de h, X(h) est un élément bien défini de F ne dépendant que de la double classe de h modulo T. Nous introduirons aussi la fonction P(h : T) ou simplement P(h) définie par

$$\mathrm{X}(h) = \frac{1 + \mathrm{P}(h)}{1 - \mathrm{P}(h)}, \tag{5}$$

ou encore

$$\mathrm{P}(h) = c h_2 h_2^- (h_1 h_1^-)^{-1}, \qquad c = \varepsilon^2. \tag{6}$$

Ainsi P est une fonction à valeurs dans la droite projective qui est constante sur les doubles classes de T dans G. Remarquons toutefois que d'après la formule précédente, si P(h) n'est ni zéro ni infini, alors c'est un élément de la classe cN déterminée par le couple (G, T). De plus P(h) ne peut être égal à un, car cela donnerait X(h) infini. Nous dirons que h (ou sa double classe) est T-singulier si P(h) est zéro ou l'infini, T-régulier dans le cas contraire.

PROPOSITION. — *Deux éléments h et h' de* G *ont la même double classe modulo* T *si et seulement si* P(h) = P(h'). *De plus si x est dans cN et différent de* 1 *alors il existe un h dans* G *tel que* P(h) = x.

La démonstration est laissée au lecteur.

(1.2) La proposition suivante justifie l'emploi de l'adjectif T-régulier :

PROPOSITION. — *Supposons h* T-*régulier. Alors les relations*

$$sht = hz, \qquad s \in \mathrm{T}, \quad t \in \mathrm{T}, \quad z \in \mathrm{Z}$$

entraînent

$$s \in \mathrm{Z}, \quad t \in \mathrm{Z}, \qquad st = z.$$

La démonstration est laissée au lecteur.

(1.3) Ce qui précède s'applique « *mutatis mutandis* » à un couple de la forme (G, A) où G est le groupe GL(2) et A un tore déployé maximal, disons le groupe des matrices diagonales dans G. Alors H est l'algèbre des matrices 2 par 2, L la sous-algèbre des matrices diagonales et nous pouvons prendre

$$\varepsilon = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, \qquad c = 1.$$

Les fonctions X et P(. : A) (ou simplement P) sont définies comme plus haut. En particulier :

$$\mathrm{P}(h) = bc(ad)^{-1} \qquad \text{si} \quad h = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}.$$

Elles sont constantes sur les doubles classes de A dans G. A nouveau P ne peut prendre la valeur 1. Nous dirons encore qu'un élément h de G est A-singulier si P(h) est zéro ou l'infini, A-régulier dans le cas contraire. Il y a maintenant 6 doubles classes A-singulières : les classes sur lesquelles P prend la valeur zéro :

$$(1) \qquad \mathrm{T}, \quad \mathrm{T}n_+\mathrm{T}, \quad \mathrm{T}n_-\mathrm{T}, \qquad \text{où} \quad n_+ = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, \qquad n_- = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix},$$

et les classes sur lesquelles P prend la valeur infinie :

$$(2) \qquad \varepsilon\mathrm{T}, \qquad \mathrm{T}\varepsilon n_+\mathrm{T}, \qquad \mathrm{T}\varepsilon n_-\mathrm{T}.$$

Ainsi P ne permet pas de distinguer ces classes l'une de l'autre.

Toutefois P sépare les classes A-régulières :

PROPOSITION. — *Soient h et h′ des éléments* A-*réguliers de* G. *Alors h et h′ sont dans la même classe si et seulement si* P(h) = P(h'). *Si x est dans* F *différent de* 1 *et* 0, *alors il existe un élément* A-*régulier h tel que* P(h) = x.

Nous laisserons la démonstration au lecteur.

(1.4) Nous avons aussi l'analogue de la proposition (1.2) :

PROPOSITION. — *Supposons h* A-*régulier. Alors les relations*

$$ahb = hz, \qquad a \in \mathrm{A}, \quad b \in \mathrm{A}, \quad z \in \mathrm{Z}$$

entraînent

$$a \in \mathrm{Z}, \quad b \in \mathrm{Z}, \qquad ab = z.$$

Nous laisserons la démonstration au lecteur.

2. Intégrales orbitales : cas d'un tore compact

(2.1) Gardons les notations du paragraphe 1 mais supposons maintenant que F soit un corps local. Alors T/Z est compact. Choisissons une fois pour toutes un caractère additif non trivial ψ de F. Munissons le groupe additif F de la mesure dx auto-duale pour le caractère ψ, le groupe multiplicatif $\mathrm{F}^\times$ de la mesure $\mathrm{L}(1, 1_\mathrm{F}) \,|\, x \,|^{-1} dx$ (mesure de Tamagawa relative à ψ). Munissons de même le groupe multiplicatif $E^{\times}$ de la mesure de Tamagawa relative au caractère $\psi \circ Tr$. Par transport de structure nous obtenons des mesures sur T et Z. Munissons T/Z de la mesure quotient. Soit f une fonction lisse à support compact sur G/Z. Posons :

$$\text{(1)} \qquad H(g : f : T) = \iint f(sgt)\,ds\,dt, \qquad s, t \in T/Z.$$

Il est clair que $H(g : f : T)$ ne dépend que de la double classe de g modulo T. Soit x un élément de $F^{\times}$. S'il existe g dans G tel que $P(g : T) = x$, nous poserons $H(x : f : T) = H(g : f : T)$. Sinon nous poserons $H(x : f : T) = 0$. Nous obtenons ainsi une fonction $H(f : T)$ sur $F^{\times}$ et nous nous proposons de caractériser les fonctions H sur $F^{\times}$ qui sont de la forme $H = H(f : T)$ pour une fonction f appropriée.

(2.2) Considérons donc une fonction $H = H(f : T)$. Par définition H s'annule, donc est lisse, sur le complémentaire de cN. Considérons un point x de la forme $P(h : T)$. Comme la norme est une application submersive de $E^{\times}$ dans $F^{\times}$, l'application $g \to P(g : T)$ est *a fortiori* submersive au point h. Il en résulte que H est lisse au point x. Finalement supposons que 1 soit dans cN (c'est-à-dire que le groupe G soit déployé); nous pouvons alors supposer que $c = 1$. Nous allons montrer que H est nulle au voisinage de 1.

Puisque f est à support compact modulo Z, il existe un sous-ensemble compact C de G tel que $H(g : f : T) \neq 0$ entraîne $g \in TCT$. Il suffira donc de montrer l'existence d'un nombre K tel que la relation $g \in TCT$ entraîne $|P(g : T) - 1| > K$. Supposons qu'il n'existe pas de tel nombre. Alors il existerait une suite g_i d'éléments de TCT telle que $P(g_i : T)$ tende vers 1. Quitte à agrandir C et à multiplier les éléments de la suite par des éléments de T nous pouvons supposer que

$$g_i = 1 + \varepsilon t_i = c_i z_i$$

avec t_i dans T, c_i dans C et z_i dans Z. Alors

$$P(g_i : T) = t_i t_i^{-} = 1 + a_i$$

et a_i tend vers zéro. D'autre part nous avons :

$$\det g_i = -a_i \qquad \text{et} \qquad \det g_i = (z_i)^2 \det c_i.$$

Donc z_i tend vers zéro. Il en est donc de même de g_i. Comme la projection de g_i sur L est 1 cela nous donne une contradiction.

(2.3) Examinons le comportement de la fonction H au voisinage de zéro et au voisinage de l'infini. Nous allons montrer qu'il existe un voisinage U de 0 dans F et une fonction lisse A sur U telle que :

$$\text{(1)} \qquad H(x) = A(x)(1 + \eta(cx)), \qquad \text{pour} \quad x \in U,$$

$$\text{(2)} \qquad 2A(0) = \operatorname{vol}(T/Z) \int f(t)\,dt.$$

De même nous montrerons qu'il existe un voisinage U de 0 dans F et une fonction lisse B sur U telle que :

$$\text{(3)} \qquad \mathrm{H}(x)=\mathrm{B}(x^{-1})(1+\eta(cx)), \qquad \text{pour} \quad x^{-1}\in\mathrm{U},$$

$$\text{(4)} \qquad 2\mathrm{B}(0)=\mathrm{vol}\,(\mathrm{T}/\mathrm{Z})\int f(\varepsilon t)dt.$$

En effet comme $\mathrm{P}(\varepsilon g : \mathrm{T})=\mathrm{P}(g : \mathrm{T})^{-1}$ nous avons :

$$\iint f(s\varepsilon gt)dsdt=\mathrm{H}(x^{-1} : f : \mathrm{T})$$

ou encore :

$$\mathrm{H}(x^{-1} : f : \mathrm{T})=\mathrm{H}(x : f' : \mathrm{T}) \qquad \text{avec} \quad f'(g)=f(\varepsilon g).$$

Il suffira donc de démontrer les assertions relatives au point zéro. Il sera commode de traiter d'abord le cas non archimédien. Prenons un x dans $c\mathrm{N}$. Alors $x=cll^{-}$ d'où $x=\mathrm{P}(h)$ avec $h=1+\varepsilon l$. Nous pouvons donc écrire :

$$\mathrm{H}(x : f : \mathrm{T})=\iint f\,[t_1(1+\varepsilon l)t_2]dt_1dt_2$$

ou encore après un changement de variables :

$$\text{(5)} \qquad \mathrm{H}(x : f : \mathrm{T})=\iint f\left[\left(1+\varepsilon l\,\frac{\bar{t}_1}{t_1}\right)t_2\right]dt_1dt_2.$$

Comme f est lisse il existe un idéal V de E tel que pour l dans V nous ayons :

$$f(g)=f\,[(1+\varepsilon l)g] \quad \text{pour tout} \quad g.$$

Il existe alors un idéal U dans F tel que $ll^{-}\in\mathrm{U}$ soit équivalent à $l\in\mathrm{V}$. Pour x dans $c\mathrm{U}$ nous avons donc $\mathrm{H}(x)=0$ si x n'est pas dans $c\mathrm{N}$; si au contraire x est dans $c\mathrm{N}$ alors $x=cll^{-}$ avec l dans V et nous avons d'après la formule (5) :

$$\mathrm{H}(x)=\mathrm{vol}\,(\mathrm{T}/\mathrm{Z})\int f(t)dt.$$

Notre assertion est alors immédiate.

Passons au cas archimédien. Alors F est le corps des nombres réels et L le corps des nombres complexes. Posons $\mathrm{K}(x)=\mathrm{H}(cx)$. Soit V un disque $\{z \mid zz^{-}<a\}$ dans L tel que $1+\varepsilon\mathrm{V}$ soit contenu dans G. Alors le second membre de (5) définit une fonction lisse sur V, disons $\mathrm{C}(l)$, ne dépendant que de la norme de l. Nous avons

$$\mathrm{K}(x)=0 \qquad \text{si} \quad x<0,$$
$$\mathrm{K}(x)=\mathrm{C}(l) \qquad \text{si} \quad x>0 \qquad \text{et} \qquad x=ll^{-} \quad \text{avec} \quad l \text{ dans V}.$$

En particulier la restriction de C à l'axe réel est lisse et paire et nous avons

$$\mathrm{K}(x)=0 \qquad \text{si} \quad x<0,$$
$$\mathrm{K}(x)=\mathrm{C}(y) \qquad \text{si} \quad 0<x<a \qquad \text{et} \qquad x=y^2 \quad \text{avec} \quad y \text{ réel}.$$

Le contenu de notre assertion est l'existence d'une fonction lisse D sur F telle que $D(x)=K(x)$ pour $a>x>0$. Elle est donc conséquence d'un théorème de Whitney.

(2.4) Les propriétés précédentes caractérisent les fonctions $H(f:T)$:

PROPOSITION. — *Soit* H *une fonction sur* $F^{\times}$. *Pour qu'il existe une fonction lisse à support compact* f *sur* G/Z *telle que* $H=H(f:T)$ *il faut et il suffit que les conditions suivantes soient satisfaites :*

(1) H *est nulle dans le complément de* $c\mathrm{N}$;

(2) H *est nulle dans un voisinage du point* 1 ;

(3) *il existe une fonction lisse* A *sur un voisinage de* 0 *dans* F *telle que, pour* x *près de* 0, *on ait :*

$$H(x)=A(x)(1+\eta(cx));$$

(4) *il existe une fonction lisse* B *sur un voisinage de* 0 *de* F *telle que pour* $|x|$ *suffisamment grand on ait :*

$$H(x)=B(x^{-1})(1+\eta(cx)).$$

Enfin si f, A *et* B *satisfont ces conditions alors :*

$$2A(0)=\mathrm{vol}\,(T/Z)\int f(t)dt, \qquad 2B(0)=\mathrm{vol}\,(T/Z)\int f(\varepsilon t)dt.$$

Nous venons de montrer que les conditions (1) à (4) sont nécessaires. Nous laisserons au lecteur le soin de montrer qu'elles sont aussi suffisantes. La dernière assertion de la proposition a été prouvée au numéro (2.3).

3. Intégrales orbitales : cas d'un tore déployé

(3.1) Dans ce paragraphe F est un corps local, E une extension quadratique, η le caractère quadratique de $F^{\times}$ attaché à E, G le groupe GL(2) et A le sous-groupe des matrices diagonales. Munissons encore $F^{\times}$ de la mesure de Tamagawa, $(F^{\times})^2$ du produit tensoriel des mesures de Tamagawa des facteurs. Par transport de structure nous obtenons une mesure sur A. Munissons A/Z de la mesure quotient. Si f est une fonction lisse à support compact sur G/Z et g est A-régulier dans G nous poserons :

$$H(g:f:A)=H(g:f:1)=\iint f(agb)da\,db, \qquad a,\quad b\in A/Z, \tag{1}$$

$$H(g:f:\eta)=\iint f(agb)da\,\eta\,(\det b)da\,db, \qquad a,\quad b\in A/Z. \tag{2}$$

La première intégrale ne dépend que de $P(g:A)$ et nous noterons $H(x:f:A)$ ou $H(x:f:1)$ sa valeur en un point g telle que $P(g:A)=x$. Nous poserons aussi $H(1:f:A)=H(1:f:1)=0$. Pour x dans F différent de 0 et 1 nous définirons une matrice $g(x)$ par :

$$g(x)=\begin{vmatrix} 1 & x \\ 1 & 1 \end{vmatrix}. \tag{3}$$

Alors $P(g(x))=x$ de sorte que nous avons défini une section de l'espace des doubles classes de A dans G. Nous poserons $H(x:f:\eta)=H(g(x):f:\eta)$ si x est différent de 1 et 0 ; $H(x:f:\eta)=0$ si $x=1$. Posons :

(4) $$w=\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Notons N le groupe des matrices trigonales strictes supérieures et N' le groupe des matrices trigonales strictes inférieures. Alors nous avons un recouvrement de G par deux ouverts :

(5) $$G = ANN' \cup ANwN.$$

Nous pouvons donc écrire f comme une somme f_1+f_2 où f_1 a son support dans le premier ouvert et f_2 dans le deuxième. Posons

(6) $$\phi(g)=\int f(ag)da, \qquad a\in A/Z$$

et définissons de même ϕ_1 et ϕ_2. Alors ϕ est invariante à gauche sous A et à support compact modulo A. Il en est de même de ϕ_1 et ϕ_2 et $\phi=\phi_1+\phi_2$. De plus les fonctions Φ_1 et Φ_2 définies par

(7) $$\Phi_1(u, v)=\phi_1\left[\begin{vmatrix} 1 & u \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ v & 1 \end{vmatrix}\right],$$

(8) $$\Phi_2(u, v)=\phi_2\left[\begin{vmatrix} 1 & u \\ 0 & 1 \end{vmatrix} w \begin{vmatrix} 1 & v \\ 0 & 1 \end{vmatrix}\right]$$

sont à support compact sur $F \times F$. Comme

(9) $$g(x)\begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a(1-x) & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 1 & a^{-1}(1-x)^{-1}x \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{vmatrix}$$
$$= \begin{vmatrix} 1-x & 0 \\ 0 & a \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 1 & a(1-x)^{-1} \\ 0 & 1 \end{vmatrix} w \begin{vmatrix} 1 & a^{-1} \\ 0 & 1 \end{vmatrix},$$

nous avons pour x différent de 0 et 1 :

(10) $$H(x:f:A)=\int \Phi_1[a^{-1}(1-x)^{-1}x, a]d^\times a+\int \Phi_2[a(1-x)^{-1}, a^{-1}]d^\times a.$$

Pour prouver la convergence de notre intégrale, nous pouvons supposer f positive. Alors le calcul précédent est justifié. Dans le membre de droite de (10) les intégrandes sont à support compact dans $F^\times$ et donnent donc des intégrales convergentes. Ainsi H est convergente et égale à (10). De la même façon, nous avons, pour x différent de 0 et 1 :

(11) $$H(x:f:\eta)=\int \Phi_1[a^{-1}(1-x)^{-1}x, a]\eta(a)d^\times a+\int \Phi_2[a(1-x)^{-1}, a^{-1}]\eta(a)d^\times a.$$

(3.2) Nous allons étudier les propriétés des fonctions $H(f:\eta)$. La formule (3.1.11) montre déjà que $H(x:F:\eta)$ est une fonction lisse en tout point x différent de 0 et 1. D'autre part si Φ_1 et Φ_2 ont leur support dans l'ensemble des (x, y) tels que $|x|<C$, $|y|<C$ alors dans la deuxième intégrale nous avons, sur le support de Φ_2, $|a(1-x)^{-1}|<C$ et $|a^{-1}|<C$

ce qui donne : $C^{-2} < |1-x|$ si la deuxième intégrale n'est pas nulle. De même si la première intégrale n'est pas nulle nous trouvons $|(1-x)^{-1}x| < C^2$, ce qui implique aussi $D < |1-x|$ pour une constante D convenable. Il en résulte que $H(x:f:\eta)$ est nulle au voisinage de 1. On peut donc considérer la formule (3.1.11) comme vraie pour tout x non nul.

Étudions maintenant $H(f:\eta)$ au voisinage de 0. Dans (3.1.11) la deuxième intégrale est évidemment une fonction lisse de x au point 0. Pour étudier la première intégrale nous utiliserons le lemme suivant, dont la démonstration est laissée au lecteur :

LEMME. — *Soit* Φ *une fonction de Schwartz-Bruhat à deux variables. Alors il existe deux fonctions de Schwartz-Bruhat à une variable* A_1 *et* A_2 *telles que pour tout* x *différent de* 0 *on ait :*

$$\int \Phi(a^{-1}x, a)\eta(a)d^{\times}a = A_1(x) + A_2(x)\eta(x).$$

Si F *est réel et* Φ *est donnée avec un support compact, on peut prendre* A_1 *et* A_2 *à support compact.*

Revenons à la première intégrale de (3.1.11). Avec les notations de la démonstration du lemme, l'intégrale est égale à

$$A_1(x(1-x)^{-1}) + A_2(x(1-x)^{-1})\eta(x(1-x)^{-1}). \tag{3}$$

Si x est suffisamment près de 0 alors $1-x$ est une norme et $\eta(x(1-x)^{-1}) = \eta(x)$. D'autre part $A_i(x(1-x)^{-1})$ est une fonction lisse de x dans un voisinage de 0. Comme la deuxième intégrale de (3.1.11) est évidemment lisse au point 0 nous en concluons que, dans un voisinage de 0, $H(x:f:\eta)$ a la forme suivante :

$$H(x:f:\eta) = A_1(x) + A_2(x)\eta(x) \tag{4}$$

où A_i, $i=1, 2$, est lisse.

Pour étudier $H(x:f:\eta)$ pour $|x|$ grand remarquons que

$$\varepsilon g(x) = g(x^{-1})\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & x \end{vmatrix} \quad \text{si} \quad \varepsilon = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Il en résulte que

$$H(x^{-1}:f:\eta) = H(x:f:\eta)\eta(x) \qquad \text{avec} \quad f'(g) = f(\varepsilon g). \tag{3}$$

Il existe donc deux fonctions B_i, $i=1, 2$, définies au voisinage de 0 et lisses, telles que :

$$H(x:f:\eta) = B_1(x^{-1}) + B_2(x^{-1})\eta(x) \tag{4}$$

pour $|x|$ suffisamment grand.

(3.3) En résumé :

PROPOSITION. — *Soit* H *une fonction sur* $F^{\times}$ *telle qu'il existe une fonction lisse à support compact* f *sur* G/Z *avec* $H(x:f:\eta) = H(x)$. *Alors :*

(1) H *est lisse sur* $F^{\times}$ *;*

(2) H *s'annule sur un voisinage de* 1 *;*

(3) *il existe un voisinage* U *de* 0 *et deux fonctions lisses* A_i, $i=1, 2$, *dans* U *tels que, pour* x *près de* 0, *on ait :*

$$H(x) = A_1(x) + A_2(x)\eta(x);$$

(4) *il existe un voisinage* U *de* 0 *et deux fonctions lisses* B_i, $i=1, 2$, *dans* U *tels que, pour* $|x|$ *assez grand, on ait :*

$$H(x)=B_1(x^{-1})+B_2(x^{-1})\eta(x).$$

(3.4) Nous allons discuter la signification des valeurs en zéro des fonctions A_i et B_i de la proposition (3.3). A cet effet rappelons tout d'abord que, si ϕ est une fonction de Schwartz-Bruhat sur F, alors l'intégrale :

$$\int \phi(x)\,|x|^s d^\times x,$$

ou plutôt son prolongement analytique, a un pôle au point $s=0$; le résidu en ce point a la forme $C\phi(0)$, où la constante C dépend du choix de la mesure de Haar sur le groupe $F^\times$. D'autre part l'intégrale :

$$\int \phi(x)\,|x|^s \eta(x) d^\times x$$

a un prolongement holomorphe au point zéro et sa valeur en ce point sera encore notée comme une intégrale :

$$\int \phi(x)\eta(x)d^\times x.$$

Nous introduirons les quantités suivantes :

$$\text{(1)} \qquad H(n_+ : f : \eta) = \iint f\left[\begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{vmatrix}\right] d^\times a\,\eta(b) d^\times b,$$

$$\text{(2)} \qquad H(n_- : f : \eta) = \iint f\left[\begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ b & 1 \end{vmatrix}\right] d^\times a\,\eta(b) d^\times b,$$

$$\text{(3)} \qquad H(\varepsilon n_+ : f : \eta) = \iint f\left[\begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \varepsilon \begin{vmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{vmatrix}\right] d^\times a\,\eta(b) d^\times b,$$

$$\text{(4)} \qquad H(\varepsilon n_- : f : \eta) = \iint f\left[\begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \varepsilon \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ b & 1 \end{vmatrix}\right] d^\times a\,\eta(b) d^\times b.$$

En général ces intégrales sont divergentes, mais on peut les interpréter comme il a été rappelé ci-dessus. Par exemple la première intégrale est la valeur au point 0 de la fonction méromorphe qui, pour $\mathrm{Re}\, s > 0$, est donnée par l'intégrale convergente :

$$\text{(5)} \qquad \iint f\left[\begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{vmatrix}\right] d^\times a\,\eta(b)\,|b|^s d^\times b.$$

Remarquons toutefois que si f a son support dans l'ensemble ouvert ANwN alors les intégrales (1) et (2) sont convergentes. En fait l'intégrale (1) est nulle puisque AN ne rencontre pas ANwN. D'autre part l'intersection de AN′ avec un ensemble compact contenu dans ANwN est un compact disjoint de A. Il en résulte que dans (2) l'intégrande a support compact dans $F^\times \times F^\times$ et l'intégrale converge donc trivialement. De même les intégrales (3) et (4) convergent si f a son support dans ANN′.

PROPOSITION. — *Avec les notations ci-dessus et celles de la proposition (3.3) nous avons :*

(6) $$\mathrm{H}(n_+ : f : \eta) = \mathrm{A}_2(0)$$

(7) $$\mathrm{H}(n_- : f : \eta) = \mathrm{A}_1(0)$$

(8) $$\mathrm{H}(\varepsilon n_+ : f : \eta) = \mathrm{B}_1(0)$$

(9) $$\mathrm{H}(\varepsilon n : f : \eta) = \mathrm{B}_2(0).$$

Démonstration. — Démontrons les assertions (6) et (7). D'après (3.1), il suffit de faire la démonstration quand f a son support dans ANN′ ou dans ANwN. Supposons d'abord que f ait son support dans ANwN. Alors (*cf.* (3.1.9) et (3.1.11)) :

(10) $$\mathrm{H}(x : f : \eta) = \int \Phi[a(1-x)^{-1}, a^{-1}]\eta(a)d^{\times}a$$

où

(11) $$\Phi(u, v) = \phi\left[\begin{vmatrix} 1 & u \\ 0 & 1 \end{vmatrix} w \begin{vmatrix} 1 & v \\ 0 & 1 \end{vmatrix}\right],$$

(12) $$\phi(g) = \int f(ag)da, \qquad a \in \mathrm{A}/\mathrm{Z}.$$

Comme H est lisse en zéro nous avons $\mathrm{A}_2 = 0$ et $\mathrm{A}_1 = \mathrm{H}(f : \eta)$. Alors :

$$\mathrm{A}_1(0) = \int \phi\left[\begin{vmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{vmatrix} w \begin{vmatrix} 1 & a^{-1} \\ 0 & 1 \end{vmatrix}\right]\eta(a)d^{\times}a.$$

En tenant compte du fait que f est invariante sous le centre nous pouvons écrire ceci sous la forme :

$$\mathrm{A}_1(0) = \iint f\left[b \begin{vmatrix} a^2 & 0 \\ a & 1 \end{vmatrix}\right] db\,\eta(a)d^{\times}a.$$

Un changement de variables montre que ceci n'est autre que $\mathrm{H}(n_- : f : \eta)$. Comme A_2 et $\mathrm{H}(n_+ : f : \eta)$ sont nuls la relation (6) est aussi vérifiée.

Supposons maintenant que f ait son support dans ANN′. Alors (*cf.* (3.1.7) et (3.1.11)) :

(13) $$\mathrm{H}(x : f : \eta) = \int \Phi(a^{-1}(1-x)^{-1}x, a)\eta(a)d^{\times}a$$

où

(14) $$\Phi(u, v) = \phi\left[\begin{vmatrix} 1 & u \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ v & 1 \end{vmatrix}\right],$$

(15) $$\phi(g) = \int f(ag)da, \qquad a \in \mathrm{A}/\mathrm{Z}.$$

Rappelons la définition de A_1 et A_2 :

(16) $$\mathrm{H}(x) = \mathrm{A}_1(x) + \mathrm{A}_2(x)\eta(x);$$

d'autre part d'après le lemme (3.2) :

$$\int \Phi(a^{-1}x, a)\eta(a)d^{\times}a = C_1(x) + C_2(x)\eta(x). \tag{17}$$

En comparant avec (4) nous voyons que $C_i((1-x)^{-1}x) = A_i(x)$. Donc C_i et A_i ont la même valeur en zéro. En prenant la transformée de Mellin de l'équation précédente nous obtenons:

$$\iint \Phi(x, a)\,|\,x\,|^s\eta(a)\,|\,a\,|^s d^{\times}a = \int C_1(x)\,|\,x\,|^s d^{\times}x + \int C_2(x)\,|\,x\,|^s\eta(x)d^{\times}x.$$

En calculant le résidu des deux membres à $s=0$ nous trouvons :

$$\int \Phi(0, a)\eta(a)d^{\times}a = C_1(0).$$

D'après (14) et (15) le membre de gauche n'est autre que $H(n_- : f : \eta)$. D'autre part le membre de droite n'est autre que $A_1(0)$. La relation (7) est donc établie. La relation (6) peut s'établir de la même façon.

Les relations (8) et (9) découlent des relations (6) et (7) appliquées à la fonction f' définie par $f'(g) = f(\varepsilon g)$.

4. Fonctions appariées

(4.1) Dans ce paragraphe E est un corps local, E une extension quadratique de F, η le caractère quadratique attaché à E. Nous considérerons encore le couple (G, A) formé du groupe GL(2) et du sous-groupe des matrices diagonales et l'ensemble $X = X(E : F)$. Il est réduit à deux éléments (G_i, T_i), $i = 1, 2$, avec disons G_1 déployé. Soit f une fonction lisse à support compact sur G/Z et f_i, $i = 1, 2$, une fonction lisse à support compact sur G_i/Z_i. Nous dirons que f et le couple (f_1, f_2) sont appariés si la condition suivante est satisfaite. Pour tout x dans F différent de 1 et 0 soient i et g dans G_i tels que $x = P(g : T_i)$ ($i = 1$ si x est une norme de E, $i = 2$ sinon) ; alors :

$$H(x : f : \eta) = H(g : f_i : T_i).$$

PROPOSITION. — *Une fonction f étant donnée il existe un couple (f_1, f_2) apparié à f. De plus si f et le couple (f_1, f_2) sont appariés nous avons :*

$$\mathrm{Vol}\,(T_i/Z_i) \int f_i(t_i)dt_i = H(n_+ : f : \eta) \pm H(n_- : f : \eta),$$

$$\mathrm{Vol}\,(T_i/Z_i) \int f_i(\varepsilon t_i)dt_i = H(\varepsilon n_- : f : \eta) \pm H(\varepsilon n_+ : f : \eta)$$

avec le signe + si $i=1$, le signe − si $i=2$.

Démonstration. — Cela résulte aussitôt des propositions (2.4), (3.3) et (3.4).

(4.2) Si F est réel nous désignerons par K le sous-groupe orthogonal dans G. Nous noterons U l'ensemble des couples (f_1, f_2) qui sont appariés à une fonction lisse à support compact f sur G/Z, K-finie si F est réel.

Notons U_1 (resp. U_2) la première (resp. seconde) projection de U. Alors les ensembles U_i ont une propriété de densité.

PROPOSITION. — *Soit* ϕ *une fonction continue sur* G_i/Z_i *biinvariante sous* T_i. *Supposons que l'intégrale de* ϕ *contre toute fonction de* U_i *soit nulle. Alors* ϕ *est nulle.*

La démonstration occupera le reste de ce paragraphe.

(4.3) Soit f une fonction continue à support compact sur G/Z; alors :

$$\text{(1)} \qquad \int f(g)dg = c\int H(x : f : A) \mid 1-x\mid^{-2} dx, \qquad x\neq 0.$$

où c est une constante indépendante de f.

Nous aurons aussi besoin d'une estimée sur les fonctions $H(x : f : A)$ où f est continue à support compact sur G/Z :

(2) LEMME. — *Soit* f *une fonction à support compact sur* G/Z *et* $H(x)=H(x : f : A)$. *Alors* H *s'annule dans un voisinage du point* 1 *et est* $O(\log\mid x\mid)$ *pour* $\mid x\mid$ *petit ou grand.*

Démonstration du lemme. — Elle est analogue à celle donnée dans (3.2) excepté que le lemme de (3.2) est remplacé par l'assertion suivante : si Φ est une fonction de Schwartz-Bruhat à deux variables, alors il existe deux fonctions de Schwartz-Bruhat à une variable A_i, $i=1, 2$, telles que:

$$\int \Phi(a^{-1}x, a)d^\times a = A_1(x)+A_2(x)\log\mid x\mid.$$

Enfin nous aurons besoin de formules d'intégration pour les groupes G_i analogues à (1) :

$$\text{(3)} \qquad \int f_1(g)dg = c_1\int H(x : f_1 : T_1)\mid 1-x\mid^{-2}dx, \qquad x>0,$$

$$\text{(4)} \qquad \int f_2(g)dg = c_2\int H(x : f_2 : T_2)\mid 1-x\mid^{-2}dx, \qquad x<0,$$

où c_i est une constante et f_i une fonction continue à support compact sur G_i/Z_i.

(4.4) *Démonstration de la proposition (4.2).* — Pour fixer les idées supposons $i=1$. Posons $H(x)=H(x:\phi:T_1)$. En particulier $H(x)=0$ si x n'est pas une norme. Nous calculerons à des constantes multiplicatives près. Supposons maintenant f et (f_1, f_2) appariés avec f K-finie si F est réel. Alors d'après (4.3.3) :

$$\int \phi(g_1)f_1(g_1)dg_1 = \int H(x)H(x : f_1 : T_1)\mid 1-x\mid^{-2}dx.$$

Soit d'autre part ϕ_0 la fonction sur G définie par

$$\phi_0(g)=H(x)\eta(\det b) \qquad \text{si} \quad g=ag(x)b.$$

Vues les propriétés de H et la formule d'intégration (4.3.1) ϕ_0 est localement intégrable et :

$$\int \phi_0(g)f(g)dg = \int H(x)H(x : f : \eta)\mid 1-x\mid^{-2}dx.$$

Comme $H(x : f : \eta) = H(x : f_1 : T_1)$ si x est une norme il vient

$$\int \phi_0(g) f(g) dg = \int \phi(g_1) f_1(g_1) dg_1 .$$

Le second membre est nul par hypothèse. Donc ϕ_0 est orthogonale à toute fonction lisse (resp. toute fonction lisse K-finie si F est réel). Il en résulte que ϕ_0 est nulle. Il en est donc de même de H ; comme ϕ est T_1-biinvariante ϕ est déterminée complètement par H et nous obtenons $\phi = 0$.

5. Intégrales orbitales : la situation non ramifiée

(5.1) Dans ce paragraphe F est un corps local non archimédien, E une extension quadratique non ramifiée de F. Nous supposerons que la caractéristique résiduelle de F n'est pas 2 et que l'ordre du caractère ψ est 0. Nous considérerons le couple (G, A) formé du groupe GL(2) et du sous-groupe diagonal. Nous noterons R l'anneau des entiers de F, P l'idéal maximal de R, ω une uniformisante et K le groupe GL(2, R). L'ensemble $X = X(E : F)$ est réduit à deux éléments (G_1, T_1) et (G_2, T_2). Nous supposerons $G_1 = G$, T_1 contenu dans le sous-groupe ZK. Nous écrirons simplement T pour T_1. Les mesures de $A \cap K / Z \cap K$ et $T \cap K / Z \cap K$ sont donc égales à 1. Le but de ce paragraphe est de démontrer la proposition suivante :

PROPOSITION. — *Soit f une fonction bi-K-invariante et à support compact sur le groupe G/Z. Alors f et le couple $(f, 0)$ sont appariés. De plus :*

$$H(n_+ : f : \eta) = H(n_- : f : \eta) = 1/2 \operatorname{Vol}(T/Z) \int f(t) dt .$$

Il sera commode de considérer des fonctions à support compact sur G plutôt que des fonctions à support compact sur G/Z. Bien entendu les mesures des ensembles $A \cap K$, $T \cap K$, $Z \cap K$ sont donc égales à 1. Si f est une fonction bi-K-invariante à support compact sur G, alors nous poserons :

$$H(g : f : T) = \iint f(sgt) ds dt, \qquad s \in T, \quad t \in T/Z. \tag{1}$$

Puisque T est contenu dans ZK ceci se réduit à :

$$H(g : f : T) = \int f(zg) dz, \qquad z \in Z. \tag{2}$$

De même, nous poserons :

$$H(g : f : \eta) = \iint f(agb) da \eta(\det b) db, \qquad a \in A, \quad b \in A/Z. \tag{3}$$

Nous écrirons encore $H(x : f : \eta)$ pour $H(g(x) : f : \eta)$. Les relations à prouver sont donc :

(4) $$H(x : f : \eta) = \int f(zg)\,dz \qquad \text{si} \quad v(x) \text{ est pair et } P(g : T) = x,$$

(5) $$H(x : f : \eta) = 0 \qquad \text{si} \quad v(x) \text{ est impair}.$$

Par linéarité nous pouvons supposer que f est, soit la fonction caractéristique f_0 de K, soit la fonction caractéristique f_m de l'ensemble

(6) $$K \begin{vmatrix} \omega^m & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} K, \qquad \text{où} \quad m > 0.$$

Remarquons que $f_m(g) \neq 0$ si et seulement si les conditions suivantes sont vérifiées :

(7) les coefficients de g sont des entiers ;

(8) $v(\det g) = m$;

(9) l'un au moins des coefficients de g est une unité.

Bien entendu si $m = 0$ la condition (9) est superflue.

(5.2) Nous calculerons d'abord $H(x : f_m : \eta)$ que, pour simplicité, nous noterons $H(x : m)$. Nous commencerons par le cas $m > 0$.

PROPOSITION. — *Supposons $m > 0$. Alors $H(x : m)$ est donné par les formules suivantes :*

(1) *si $v(x)$ est impair $H(x : m) = 0$;*

(2) *si $v(x)$ est pair $H(x : m) = 0$, à moins que $v(x) = 0$ et $v(1-x) = m$ auquel cas $H(x : m) = 1$.*

Démonstration. — Nous utiliserons le lemme suivant :

LEMME. — *Posons*

$$S = (-1)^{i+j}$$

où la somme porte sur tout les couples d'entiers (i, j) appartenant au bord du rectangle défini par les inégalités

$$0 \leq i \leq P, \qquad 0 \leq j \leq Q.$$

Alors S est donné par les formules suivantes :

(3) si $PQ > 0$, alors $S = 0$;

(4) si $P = 0$ et $Q > 0$, alors $S = 1$ si Q est pair et $S = 0$ si Q est impair ;

(5) si $Q = 0$ et $P > 0$, alors $S = 1$ si P est pair et $S = 0$ si P est impair ;

(6) si $P = 0$ et $Q = 0$, alors $S = 1$.

Démontrons maintenant la proposition. Il sera commode d'écrire Mat $[a, b, c, d]$ pour la matrice dont les coefficients sont les nombres a, b, c, d. Avec cette notation nous avons :

(7) $$H(x : m) = \sum f_m(\text{Mat}\,[\omega^{i+k}, x\omega^{j+k}, \omega^i, \omega^j])(-1)^{i+j},$$

où la somme porte sur tous les triplets d'entiers (i, j, k). Comme le déterminant de la matrice (7) a une valuation égale à $i+j+k+v(1-x)$ la condition (5.1.8) montre que dans la somme ci-dessus nous pouvons nous restreindre aux triplets tels que :

$$i + j + k + v(1-x) = m.$$

Cela nous permet d'éliminer k et, en tenant compte de (5.1.7) et (5.1.9), d'écrire :

$$\mathrm{H}(x:m)=\sum(-1)^{i+j} \tag{8}$$

où la somme porte sur tous les couples d'entiers (i, j) tels que :

$$0 \leq i \leq m-v(1-x)+v(x) \tag{9}$$

$$0 \leq j \leq m-v(1-x) \tag{10}$$

$$ij[m-v(1-x)+v(x)-i][m-v(1-x)-j]=0. \tag{11}$$

La somme est vide et $\mathrm{H}(x:m)$ nul à moins que :

$$m-v(1-x) \geq 0 \qquad \text{et} \qquad m-v(1-x)+v(x) \geq 0. \tag{12}$$

Supposons les conditions (12) satisfaites. Alors nous pouvons appliquer le lemme. Nous avons donc $\mathrm{H}(x:m)=0$ à moins que

$$[m-v(1-x)][m-v(1-x)+v(x)]=0. \tag{13}$$

La vérification de la proposition est alors élémentaire.

(5.3) Calculons maintenant $\mathrm{H}(x:0)$.

PROPOSITION. — $\mathrm{H}(x:0)$ *est donné par les formules suivantes :*

(1) *si* $v(x)$ *est impair alors* $\mathrm{H}(x:0)=0$;

(2) *si* $v(x)$ *est pair alors* $\mathrm{H}(x:0)=1$, *à moins que* $v(x)=0$ *et* $v(1-x)>0$ *auquel cas* $\mathrm{H}(x:0)=0$.

Démonstration. — Nous avons encore :

$$\mathrm{H}(x:0)=\sum f_0(\operatorname{Mat}[\omega^{i+k}, x\omega^{j+k}, \omega^i, \omega^j])(-1)^{i+j}, \tag{3}$$

où la somme porte sur tous les triplets d'entiers (i, j, k). Comme plus haut, en tenant compte des conditions (5.1.7) et (5.1.8), nous pouvons éliminer k et écrire :

$$\mathrm{H}(x:0)=\sum(-1)^{i+j} \tag{4}$$

où la somme porte sur tous les couples d'entiers (i, j) tels que :

$$0 \leq i \leq v(x)-v(1-x) \tag{5}$$

$$0 \leq j \leq -v(1-x). \tag{6}$$

La vérification de la proposition est alors élémentaire.

(5.4) Calculons maintenant l'intégrale $\int f_m(zg)dz$. Elle ne dépend que de $x=\mathrm{P}(g:\mathrm{T})$ et nous noterons $\mathrm{H}(x:m:\mathrm{T})$ sa valeur. Rappelons que par définition x est une norme, autrement dit la valuation de x est paire. Nous commencerons par le cas $m>0$.

PROPOSITION. — *Supposons* $m>0$. *Alors* $\mathrm{H}(x:m:\mathrm{T})=0$, *à moins que* $v(x)=0$ *et* $v(1-x)=m$ *auquel cas* $\mathrm{H}(x:m:\mathrm{T})=1$.

Démonstration. — Nous pouvons supposer que E est l'extension engendrée par la racine carré de τ, où τ est une unité. Alors nous pouvons prendre pour T le groupe multiplicatif de l'algèbre :

(1) $$L = \left\{ \begin{vmatrix} a & b \\ b\tau & a \end{vmatrix} \right\}$$

et pour ε la matrice :

(2) $$\varepsilon = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}.$$

Calculons $H(x:m:T)$ où $x = P(g:T)$. Nous pouvons supposer que :

(3) $$g = 1_2 + \varepsilon \begin{vmatrix} u & v \\ v\tau & u \end{vmatrix}.$$

Alors $\det g = 1 - x$ et $x = u^2 - v^2\tau$. Nous avons :

(4) $$H(b:m:T) = \sum_k f_m(\omega^k g),$$

où

(5) $$\omega^k g = \begin{vmatrix} \omega^k(1+u) & \omega^k v \\ -\omega^k v\tau & \omega^k(1-u) \end{vmatrix}.$$

Vue la condition (5.1.8) cette somme a donc au plus un terme dont l'indice k est déterminé par l'équation

(6) $$k = 1/2\,[m - v(1-x)].$$

En particulier $H(b:m:T) = 0$ ou 1. Vues les conditions (5.1.7) à (5.1.9) $H(x:m:T) = 1$ si et seulement si les conditions suivantes sont vérifiées :

(7) $$m \equiv v(1-x) \bmod 2\,;$$

(8) les coefficients de la matrice (5) où k est donné par (6) sont entiers ;

(9) l'un au moins des coefficients de cette matrice est une unité.

Supposons d'abord $v(x) < 0$. Alors $v(1-x) = v(x)$. Puisque $x = u^2 - v^2\tau$ et τ n'est pas un carré $v(x)$ est pair. D'après (7) $H(x:m:T) = 0$ à moins que m ne soit aussi pair. Supposons donc qu'il en soit ainsi. Nous pouvons écrire :

$$u = u_0\omega^{1/2v(x)}, \qquad v = v_0\omega^{1/2v(x)},$$

où u_0 et v_0 sont des entiers, l'un au moins étant une unité. Alors les coefficients de la matrice (5) sont les nombres :

$$\omega^{1/2(m-v(x))}(1 + u_0\omega^{1/2v(x)}), \qquad \omega^{1/2m}v_0,$$
$$-\omega^{1/2m}v_0\tau, \qquad \omega^{1/2(m-v(x))}(1 - u_0\omega^{1/2v(x)}).$$

Tous ces nombres sont dans l'idéal P donc $H(x:m:T) = 0$.

Supposons $v(x) > 0$. Alors $v(1-x) = 0$. D'après (7) $H(x:m) = 0$ à moins que m ne soit pair.

Supposons qu'il en soit ainsi. Alors $k=1/2m$, u et v sont des entiers. Les coefficients de la matrice (5) sont maintenant les nombres

$$\begin{array}{ll} \omega^{1/2m}(1+u), & \omega^{1/2m}v, \\ -\omega^{1/2m}v\tau, & \omega^{1/2m}(1-u). \end{array}$$

Tous ces nombres sont dans l'idéal P donc $\mathrm{H}(x:m:\mathrm{T})=0$.

Supposons enfin $v(x)=0$. Alors $v(1-x)\geq 0$. Si $m-v(1-x)$ est impair alors $\mathrm{H}(x:m:\mathrm{T})=0$. Supposons donc $m-v(1-x)$ pair. Alors les coefficients de la matrice (5) sont les nombres :

$$\begin{array}{ll} \omega^{1/2[m-v(1-x)]}(1+\mathrm{u}), & \omega^{1/2[m-v(1-x)]}v \\ -\omega^{1/2[m-v(1-x)]}v\tau, & \omega^{1/2[m-v(1-x)]}(1-u). \end{array}$$

Comme x est une unité u et v sont des entiers et l'un au moins est une unité. Si $1+u$ et $1-u$ étaient tous les deux dans P nous aurions $2\in\mathrm{P}$, une contradiction. Donc au moins l'un des nombres $1+u$ et $1-u$ est une unité. Si donc $\mathrm{H}(x:m:\mathrm{T})$ n'est pas nulle alors les conditions (8) et (9) entraînent que $m=v(1-x)$. Les coefficients de la matrice (5) se réduisent donc à

$$1+u, \qquad v, \qquad -v\tau, \qquad 1-u.$$

Ce sont des entiers et l'un au moins est une unité. Donc $\mathrm{H}(x:m:\mathrm{T})=1$.

Nous avons donc complètement calculé H et notre résultat est en accord avec la proposition.

(5.5) Calculons enfin $\mathrm{H}(x:0:\mathrm{T})$. Rappelons une fois de plus que $v(x)$ est pair.

Proposition. — $\mathrm{H}(x:0:\mathrm{T})=1$, *à moins que* $v(x)=0$ *et* $v(1-x)>0$ *auquel cas* $\mathrm{H}(x:0:\mathrm{T})=0$.

Démonstration. — Comme plus haut nous avons

$$\mathrm{H}(x:m:\mathrm{T})=\sum_k f_0(\omega^k g). \tag{1}$$

La somme a en fait au plus un terme dont l'indice k est donné par :

$$k=-1/2v(1-x). \tag{2}$$

En particulier $\mathrm{H}(x:0:\mathrm{T})=0$ ou 1. De plus $\mathrm{H}(x:0:\mathrm{T})=1$ si et seulement si $v(1-x)$ est pair et la matrice

$$\omega^k g=\begin{vmatrix} \omega^k(1+u) & \omega^k v \\ -\omega^k v\tau & \omega^k(1-u) \end{vmatrix}. \tag{3}$$

avec k donné par (2) est dans $\mathrm{GL}(2, \mathrm{R})$.

Supposons $v(x)<0$ et $v(1-x)$ pair. Alors $v(1-x)=v(x)$, $v(x)$ est pair et

$$u=u_0\omega^{1/2v(x)}, \qquad v=v_0\omega^{1/2v(x)}$$

où u_0 et v_0 sont des entiers, l'un au moins étant une unité. Alors les coefficients de la matrice (3) sont les nombres :

$$\omega^{-1/2v(x)}+u_0, \qquad v_0, \qquad -v_0\tau, \qquad \omega^{-1/2v(x)}-u_0.$$

Ce sont des entiers. Comme le déterminant de la matrice (3) est une unité d'après le choix de k la matrice (3) est dans $\mathrm{GL}(2, \mathrm{R})$ et $\mathrm{H}(x:0:\mathrm{T})=1$.

Supposons $v(x)\geq 0$ et $v(1-x)=0$ (bien entendu $v(x)>0$ entraîne $v(1-x)=0$. Alors $k=0$ et les coefficients de la matrice (3) se réduisent aux nombres :

$$1+u, \qquad v, \qquad -v\tau, \qquad 1-u.$$

Comme u et v sont des entiers ces nombres sont aussi des entiers et la matrice (3) est dans $\mathrm{GL}(2, \mathrm{R})$. Donc $\mathrm{H}(x:0:\mathrm{T})=1$.

Supposons enfin $v(x)=0$ et $v(1-x)>0$. Alors H est nul à moins que $v(1-x)$ ne soit pair. Supposons qu'il en soit ainsi. Alors les coefficients de la matrice (3) sont les nombres :

$$\omega^{-1/2v(1-x)}(1+u), \qquad \omega^{-1/2v(1-x)}v$$
$$\omega^{-1/2v(1-x)}v\tau, \qquad \omega^{-1/2v(1-x)}(1-u).$$

Comme $1+u$ ou $1-u$ est une unité l'un au moins de ces nombres n'est pas un entier donc (3) n'est pas dans $\mathrm{GL}(2, \mathrm{R})$ et $\mathrm{H}(x:0:\mathrm{T})=0$.

Nous avons donc complètement calculé H et notre résultat est en accord avec la proposition.

(5.6) En rapprochant les propositions (5.2), (5.3), (5.4) et (5.5) nous voyons que nous avons prouvé les identités (5.1.4) et (5.1.5). Ceci termine donc la démonstration de la première assertion de la proposition (5.1). La deuxième découle alors de la proposition (4.1).

(5.7) Pour établir la convergence des intégrales orbitales globales nous aurons besoin d'un résultat supplémentaire, dont nous laisserons la démonstration au lecteur :

(1) Lemme. — *Supposons h dans* KZ *et posons* $x=\mathrm{P}(h:\mathrm{A})$. *Supposons* $v(x)=0$ *et* $v(1-x)=0$. *Alors les relations*

$$ahb\in \mathrm{KZ}, \qquad a\in \mathrm{A}, \qquad b\in \mathrm{A}$$

entraînent

$$a\in \mathrm{Z}(\mathrm{K}\cap \mathrm{A}), \qquad b\in \mathrm{Z}(\mathrm{K}\cap \mathrm{A}).$$

Le lemme implique évidemment la proposition suivante :

Proposition. — *Soit f la fonction caractéristique de* KZ. *Supposons l'extension quadratique* E *non ramifiée et* T *contenu dans* KZ. *Soit h un élément de* KZ *et* $x=\mathrm{P}(h:\mathrm{A})$. *Si x et $1-x$ sont des unités alors :*

$$\mathrm{H}(h:f:\mathrm{A})=1, \qquad \mathrm{H}(h:f:\eta)=1.$$

6. Rappels sur les représentations locales de GL(2)

(6.1) Soit F un corps local et E une extension quadratique de E. Nous considérerons encore l'ensemble X qui est réduit à deux éléments $(\mathrm{G}_1, \mathrm{T}_1)$ et $(\mathrm{G}_2, \mathrm{T}_2)$, avec disons G_1 déployé. Il sera commode d'utiliser le résultat suivant :

Proposition. — *Soit π une représentation unitaire irréductible de $\mathrm{G}_i/\mathrm{Z}_i$. Alors la dimension de l'espace des formes linéaires continues et T_i-invariantes sur l'espace des vecteurs* *lisses de π est au plus un. De plus une telle forme est donnée par le produit scalaire avec un vecteur lisse* T_i*-invariant.*

Si F n'est pas archimédien alors l'assertion sur la dimension est prouvée dans [W2], Propositions 9. Si F est réel, elle est classique. Le reste de la proposition est évident.

(6.2) De même :

PROPOSITION. — *Soit π une représentation unitaire irréductible de G_1/Z_1 de dimension infinie. Alors la dimension de l'espace des formes linéaires continues et A-invariantes (respectivement invariantes relativement au caractère $\eta \circ \det$ de A) sur l'espace des vecteurs lisses de π est un.*

Ce sont les propositions 9 et 10 de [W1].

(6.3) Considérons, pour $i=1, 2$, une représentation unitaire irréductible π_i de G_i/Z_i. Nous supposerons que le couple (π_1, π_2) satisfait aux conditions du théorème (15.1) de [J. L.] ; en particulier π_1 est dans la série discrète.

PROPOSITION. — *Les représentations π_i ne peuvent toutes les deux avoir un vecteur non nul invariant sous le groupe* T_i.

Si F est non archimédien alors notre assertion se trouve dans le théorème 2 de [W2]. Si F est réel, elle est classique.

7. Intégrales orbitales globales : cas d'un tore déployé

(7.1) Dans le reste de ce travail F sera un corps de nombres et E une extension quadratique de F, η le caractère quadratique du groupe des classes d'idèles de F attaché à E. Dans ce paragraphe et le suivant nous considérerons le couple (G, A) et une fonction lisse à support compact f sur $G(F_A)/Z(F_A)$. A la fonction f est attaché le noyau cuspidal K_c. Soit ϕ_j une base orthonormale de l'espace des formes cuspidales pour le groupe G/Z.

Alors, par définition :

$$K_c(x, y) = \sum \rho(f)\phi_j(x)\phi_j^-(y) \tag{1}$$

où :

$$\rho(f)\phi(x) = \int f(g)\phi(xg)dg. \tag{2}$$

Nous nous proposons dans ce paragraphe et le suivant de donner une expression utile pour l'intégrale :

$$\iint K_c(a, b)\eta(\det b)\, da\, db, \qquad a, b \in A(F_A)/A(F)Z(F_A). \tag{3}$$

Nous avons choisi un caractère non trivial ψ de F_A/F. Nous avons donc à chaque place v la mesure de Tamagawa attachée à ψ_v et par transport de structure sur A_v et Z_v. Nous avons donc la mesure produit sur $A(F_A/F)$ et la mesure quotient sur $A(F_A)/Z(F_A)$. Nous désignerons par S un ensemble fini de places contenant les places infinies, les places ramifiées dans E et les places de caractéristique résiduelle 2. Pour toute place v de F nous noterons K_v

le sous-groupe compact maximal usuel. En particulier $K_v = GL(2, R_v)$ si v est fini. Nous prendrons la fonction f produit de fonctions locales f_v qui sont K_v-finies à toutes les places. Nous supposerons que f_v est bi-K_v-invariante pour tous les v non dans S. Bien entendu f_v est en fait la fonction caractéristique de $K_v Z_v$ pour presque tous les v non dans S. Nous avons une décomposition de K_c en une somme :

$$(4) \qquad K_c(x, y) = \sum f(x^{-1}\gamma y) - K_{sp}(x, y) - K_{ei}(x, y),$$

où la somme est sur tous les γ dans $G(F)/Z(F)$, K_{sp} dénote le noyau spécial et K_{ei} le noyau d'Eisenstein (la définition est rappelée plus loin). Nous pouvons écrire le premier terme de cette somme comme la somme de deux autres termes K_r et K_s où :

$$(5) \qquad K_r(x, y) = \sum f(x^{-1}\gamma, y), \qquad \gamma \text{ A-régulier};$$

$$(6) \qquad K_s(x, y) = \sum f(x^{-1}\gamma, y), \qquad \gamma \text{ A-singulier}.$$

Alors K_c peut s'écrire

$$(7) \qquad K_c = K_r + K_s - K_{sp} - K_{ei}.$$

(7.2) Nous considérons d'abord l'intégrale de K_r. Tout élément γ de $G(F)/Z(F)$ peut s'écrire uniquement sous la forme :

$$(1) \qquad \gamma = \alpha g(\xi)\beta, \quad \text{avec } \alpha \text{ et } \beta \in A(F)/Z(F) \text{ et } \xi \text{ différent de 0 et 1}.$$

(*cf.* (3.1.3) pour la notation et § 1). Il vient donc aussitôt :

$$(2) \qquad \iint K_r(a, b)\eta(\det b)\, da\, db = \sum H(\xi : f : \eta), \qquad \xi \neq 0 \text{ et } 1$$

où nous avons posé :

$$(3) \qquad H(\xi : f : \eta) = \iint f(ag(\xi)b)\eta(\det b)\, da\, db, \qquad a, b \in A(F_A)/Z(F_A).$$

Justifions nos calculs formels. Tout d'abord le support de f ne rencontre qu'un nombre fini de classes régulières. En effet la fonction X introduite au paragraphe 1 (*cf.* (1.1.4)) définit une fonction continue du groupe $G(F_A)/Z(F_A)$ dans F_A. Elle ne prend donc qu'un nombre fini de valeurs sur l'intersection du support de f avec l'ensemble des points rationnels ; il en est donc de même de la fonction $P(\,.\,: A)$, ce qui nous donne notre assertion. D'autre part chacune des intégrales (3) converge absolument : il suffit en effet de le prouver pour l'intégrale

$$(4) \qquad H(\xi : f : A) = \iint f(ag(\xi)b)\, da\, db, \qquad a, b \in A(A)/Z(A).$$

Chacune des intégrales locales $H(\xi : f_v : A_v)$ converge ; presque toutes sont égales à 1 (*cf.* (5.7)). Donc (4) converge. Il en est donc de même de (3) et (3) est le produit des intégrales locales correspondantes :

$$(5) \qquad H(\xi : f : \eta) = \prod H(\xi : f_v : \eta_v).$$

Dans ce produit presque toutes les intégrales sont égales à 1 (*cf.* (5.7)).

(7.3) Passons à l'intégrale de K_s. Elle n'est pas absolument convergente, mais elle est « faiblement » convergente au sens suivant. Soit c un nombre plus grand que 1. Convenons de désigner par

$$(1) \qquad \int_{c^{-1}}^{c}\int_{c^{-1}}^{c} K_s(a, b)\eta(\det b)\,da\,db, \qquad a, b \in A(F_A)/A(F)Z(F_A)$$

l'intégrale de $K_s(a, b)\eta(\det b)$ sur l'ensemble des couples (a, b) satisfaisant $c^{-1} < |a_1/a_2| < c$, $c^{-1} < |b_1/b_2| < c$; bien entendu a_1 et a_2 par exemple désignent les coefficients diagonaux de a. Comme l'intégrale est prise sur un ensemble compact elle existe. Nous allons voir que l'intégrale (1) tend vers une limite lorsque c tend vers l'infini. Cette limite sera par définition l'intégrale faible de $K_s(a, b)\eta(\det b)$. Nous avons vu au numéro (1.3) qu'il y avait 6 doubles classes singulières pour A, à savoir les doubles classes des éléments suivants : $e, n_+, n_-, \varepsilon, \varepsilon n_+, \varepsilon_{n-}$. Numérotons les de 1 à 6. Alors nous avons une décomposition de K_s en 6 termes K_i, $1 \leq i \leq 6$, où K_i est la somme des $f(x^{-1}\gamma y)$ pour tous les γ dans la ième double classe. Étudions l'intégrale de K_1 par exemple. Nous avons

$$K_1(x, y) = \sum f(x^{-1}\alpha y), \qquad \alpha \in A(F)/Z(F).$$

D'où :

$$\int_{c^{-1}}^{c}\int_{c^{-1}}^{c} K_1(a, b)\eta(\det b)\,da\,db = \int_{c^{-1}}^{c}\int_{c^{-1}}^{c} f(ab)\eta(\det b)\,da\,db;$$

dans l'intégrale de gauche a et b varient dans le sous-ensemble compact de $A(F_A)/A(F)Z(F_A)$ défini ci-dessus ; dans l'intégrale de droite b varie encore dans le sous-ensemble compact de $A(F_A)/A(F)Z(F_A)$ défini par $c^{-1} < |b_1/b_2| < c$, mais a varie dans le sous-ensemble de $A(F_A)/Z(F_A)$ défini par $c^{-1} < |a_1/a_2| < c$. Changeons a en ab^{-1} dans l'intégrale de droite. Nous obtenons une intégrale double, l'intégrale intérieure ne dépendant que de $|b_1/b_2|$. Cette intégrale intérieure s'écrit :

$$\int_{c^{-1}}^{c} \eta(\det b)\,db, \qquad b \in A(F_A)/A(F)Z(F_A).$$

Elle est nulle parce que la restriction de η au groupe des idèles de valeur absolue 1 n'est pas triviale. L'intégrale de K_1 est donc faiblement convergente et sa valeur est 0. Il en va de même pour l'intégrale de K_4.

Examinons les intégrales des autres termes, K_2 par exemple. Nous avons :

$$(2) \qquad K_2(x, y) = \sum f(x^{-1}\alpha n_+ \beta y), \qquad \alpha, \beta \in A(F)/Z(F).$$

Il en résulte que :

$$\int_{c^{-1}}^{c}\int_{c^{-1}}^{c} K_2(a, b)\eta(\det b)\,da\,db = \int_{c^{-1}}^{c}\int_{c^{-1}}^{c} \sum f(an_+\beta b)\eta(\det b)\,da\,db;$$

dans l'intégrale de droite b varie encore dans le sous-ensemble compact de $A(F_A)/A(F)Z(F_A)$ défini par $c^{-1} < |b_1/b_2| < c$, mais a varie dans le sous-ensemble de $A(F_A)/Z(F_A)$ défini par

$c^{-1} < |a_1/a_2| < c$. Introduisons maintenant la fonction ϕ sur $(F^x)_A \times F_A$ définie par :

$$\phi(x, y) = f\left[\begin{vmatrix} x & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 1 & y \\ 0 & 1 \end{vmatrix}\right]. \tag{3}$$

Elle est à support compact. Notre intégrale s'écrit :

$$\int \sum_{\zeta} \int \phi(ab^{-1}, b\zeta)\eta(b) da\, db,$$
$$\zeta \in F^x, \qquad a \in (F^x)_A, \qquad c^{-1} < |a| < c, \qquad b \in (F^x)_A/F^x, \qquad c^{-1} < |b| < c.$$

En utilisant la formule de Poisson par rapport à la deuxième variable et en prenant la transformée de Fourier par rapport à la deuxième variable nous obtenons pour cette intégrale l'expression :

$$\int \sum_{\zeta} \int \phi(ab^{-1}, b\zeta)\eta(b) da\, db + \int \sum_{\zeta} \int \phi^{\wedge}(ab, b\zeta) |b| \eta(b) da\, db, \qquad c^{-1} < |a| < c, \quad 1 < |b| < c.$$

Il est évident que les deux mêmes intégrales étendues au domaine :

$$a \in F_A^x, \qquad b \in F_A^x/F_A^x, \qquad 1 < |b|,$$

convergent absolument. De plus dans les intégrales étendues au domaine précédent nous pouvons changer a en $ab^{\pm 1}$. Nous concluons que l'intégrale de K_2 est faiblement convergente et que sa valeur est la somme :

$$\iint \sum_{\zeta} \phi(a, b\zeta)\eta(b) da\, db + \iint_{\zeta} \phi^{\wedge}(a, b\zeta) |b| \eta(b) da\, db,$$
$$a \in F_A^x, \qquad b \in F_A^x/F_A^x, \qquad 1 < |b|.$$

Ceci n'est autre que la valeur en $s=0$ du prolongement analytique de l'intégrale suivante :

$$\iint \phi(a, b) |b|^s \eta(b) da\, db, \qquad a \in \dot{F}_A^x, \qquad b \in F_A^x. \tag{4}$$

Cette valeur sera aussi notée comme une intégrale :

$$\iint \phi(a, b)\eta(b) da\, db, \qquad a \in F_A^x, \qquad b \in F_A^x. \tag{5}$$

Avec cette convention nous pouvons écrire que l'intégrale faible de K_2 est égale à :

$$H(n_+ : f : \eta) = \iint f\left[\begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{vmatrix}\right]\eta(b) da\, db. \tag{6}$$

Un résultat analogue est valable pour les intégrales des autres K_i. Finalement nous voyons que l'intégrale faible de K_s existe et est égale à la somme :

$$H(n_+ : f : \eta) + H(n_- : f : \eta) + H(n\varepsilon_+ : f : \eta) + H(\varepsilon n_- : f : \eta); \tag{7}$$

le premier terme est défini par (6) et les autres termes sont définis de manière analogue :

(8) $$H(n_- : f : \eta) = \iint f\left[\begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ b & 1 \end{vmatrix}\right]\eta(b)\,da\,db\,;$$

(9) $$H(\varepsilon n_+ : f : \eta) = \iint f\left[\begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \varepsilon \begin{vmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{vmatrix}\right]\eta(b)\,da\,db\,;$$

(10) $$H(\varepsilon n_- : f : \eta) = \iint f\left[\begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \varepsilon \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ b & 1 \end{vmatrix}\right]\eta(b)\,da\,db\,.$$

(7.4) Passons maintenant à l'intégrale de K_{sp}. Rappelons la définition de K_{sp} :

$$K_{sp}(x, y) = \mathrm{Vol}^{-1}\sum \int f(g)\chi(\det g)dg\chi(\det x)\chi^{-1}(\det y)\,,$$

où la somme porte sur tous les caractères quadratiques χ du groupe des classes d'idèles de F et Vol est le volume du quotient $G(F_A)/G(F)Z(F_A)$. Si χ est un tel caractère alors, soit χ, soit $\chi\eta$ a une restriction non triviale aux groupes des classes d'idèles de norme 1. En raisonnant comme pour K_1 nous voyons aussitôt que K_{sp} est faiblement intégrable et son intégrale nulle.

8. Le noyau d'Eisenstein

(8.1) Nous continuons avec les notations du paragraphe 7. Nous allons voir que l'intégrale

(1) $$\iint K_{ei}(a, b)\eta(\det b)\,da\,db, \qquad a, b \in A(F_A)/A(F)Z(F_A)$$

est faiblement convergente. En ce qui concerne la valeur de l'intégrale, tout comme dans les applications maintenant classiques de la formule des traces, nous n'aurons besoin que d'un résultat assez faible. Choisissons en effet une place u en dehors de S qui se décompose dans E. Fixons les composants de f aux autres places et regardons l'intégrale (1) comme une fonction de f_u. Notons $f_u^\wedge$ la transformée de Satake de f_u. Nous prouverons le résultat suivant :

PROPOSITION. — *Il existe une fonction intégrable sur la droite réelle ϕ et une constante c telles que :*

(2) $$\iint K_{ei}(a, b)\eta(\det b)\,da\,db = \int \phi(t) f_u^\wedge(q_u^{-it})dt + c f_u^\wedge(q^{-1}).$$

(8.2) Nous aurons besoin de résultats standards sur la transformée de Mellin d'une série d'Eisenstein. Nous fixerons une fois pour toutes un sous-groupe C de F_A isomorphe au groupe des nombres réels >0 tel que F_A soit le produit de C et F^1, le groupe des idéles de module 1. Le groupe C est muni de la mesure image réciproque de la mesure $t^{-1}\,dt$ par l'application $c \to |c|$ et F^1 de la mesure quotient. Sauf mention expresse du contraire tous les caractères du groupe des classes d'idèles seront supposés triviaux sur C. Soit χ un tel caractère et V(X) l'espace des fonctions ϕ sur K (le produit des K_v) telles que :

(1) $$\phi\left[\begin{vmatrix} a & x \\ 0 & b \end{vmatrix} k\right] = \chi(ab^{-1})\phi(k)$$

si $$\begin{vmatrix} a & x \\ 0 & b \end{vmatrix} \text{ est dans K}.$$

Considérons maintenant une fonction ϕ sur $K \times \mathbb{C}$, telle que pour chaque nombre complexe u la fonction $\phi(., u)$ soit dans $V(\chi)$. La fonction sera supposée être holomorphe, ou même, méromorphe par rapport à u ; par exemple elle peut être indépendante de u. Nous étendrons ϕ en une fonction $\phi(g, u, \chi)$ sur $G(F_A)$ telle que :

$$\phi\left[\begin{vmatrix} a & x \\ 0 & b \end{vmatrix} g, u, \chi\right] = \chi(ab^{-1})\,|\,ab^{-1}\,|^{u+1/2}\phi(g, u, \chi). \tag{2}$$

La série d'Eisenstein est alors le prolongement analytique de la série :

$$E(g, \phi, u, \chi) = \sum \phi(\gamma g, u, \chi), \qquad \gamma \in G(F)/A(F)N(F). \tag{3}$$

La série converge absolument si $\operatorname{Re} u > 1/2$. Le terme constant de E le long de N, le groupe des matrices trigonales strictes supérieures, est par définition l'intégrale

$$E_N(g, \phi, u, \chi) = \int E(ng, \phi, u, \chi)\,dn, \qquad n \in N(F_A)/N(F). \tag{4}$$

Il a la forme :

$$E_N(g, \phi, u, \chi) = \phi(g, u, \chi) + M(u, \chi)\phi(g, -u, \chi^{-1}) \tag{5}$$

où $M(u, \chi)$ est l'opérateur d'entrelacement qui va de $V(X)$ à $V(\chi^{-1})$. Nous aurons aussi besoin d'un autre coefficient de Fourier de E, à savoir :

$$W(g, \phi, u, \chi) = \int E\left[\begin{vmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{vmatrix} g, \phi, u, \chi\right]\psi(-x)\,dx, \qquad x \in F_A/F, \tag{6}$$

où ψ est le caractère fixé du groupe F_A/F. La série de Fourier de E s'écrit donc :

$$E(g, \phi, u, \chi) = \phi(g, u, \chi) + M(u, \chi)\phi(g, -u, \chi^{-1}) + \sum W(\alpha g, \phi, u, \chi) \tag{7}$$

où la somme est pour α dans $A(F)/Z(F)$. Nous pouvons aussi considérer une série de Fourier pour le groupe N′ des matrices trigonales strictes inférieures. Comme

$$N' = wNw^{-1}, \qquad \text{avec} \quad w = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, \tag{8}$$

elle s'écrit en fait :

$$E(g, \phi, u, \chi) = \phi(wg, u, \chi) + M(u, \chi)\phi(wg, -u, \chi^{-1}) + \sum W(\alpha wg, \phi, u, \chi). \tag{9}$$

La transformée de Mellin $L(s, \lambda : \phi : u, \chi)$ de E est définie par l'intégrale suivante (ou son prolongement analytique) :

$$L(s, \lambda : \phi : u, \chi) = \int \{ E\ [\operatorname{diag}(a, 1)] - E_N\ [\operatorname{diag}(a, 1)] \}\,|\,a\,|^{s-1/2}\lambda(a)\,da, \qquad a \in F_A^{x}/F^{x}. \tag{10}$$

Nous avons supprimé de la notation la dépendance de E des variables autres que la première. En remplaçant E par sa série de Fourier nous obtenons aussitôt pour la transformée de Mellin l'expression :

$$(11)\qquad \int \mathrm{W}\,[\operatorname{diag}(a, 1)]\,|\,a\,|^{s-1/2}\lambda(a)da.$$

Nous pouvons aussi écrire la transformée de Mellin de E comme suit :

$$(12)\qquad \mathrm{L}(s\ldots)=\int_1^{+\infty}(\mathrm{E}-\mathrm{E_N})+\int_0^1(\mathrm{E}-\mathrm{E_{N'}})+\int_1^{+\infty}\mathrm{E_N}+\int_0^1\mathrm{E_{N'}}.$$

Dans chacune de ces intégrales, la fonction est évaluée au point diag $(a, 1)$ et intégrée contre $|\,a\,|^{s-1/2}\lambda(a)$ sur un sous-ensemble du groupe des classes d'idèles. Pour la première intégrale, par exemple, le sous-ensemble est défini par l'inégalité $1<|\,a\,|$. En utilisant la série de Fourier de E nous obtenons sans peine une autre expression pour la transformée de Mellin de E :

$$\begin{aligned}(13)\qquad & \int_1^{+\infty}\mathrm{W}\,[\operatorname{diag}(a, 1)]\,|\,a\,|^{s-1/2}\lambda(a)da\\ &+\int_1^{+\infty}\mathrm{W}\,[\operatorname{diag}(a, 1)w]\,|\,a\,|^{s-1/2}\lambda(a)da\\ &+\int_1^{+\infty}[\,|\,a\,|^{s+u}\lambda\chi(a)\phi(e)+|\,a\,|^{s-u}\lambda\chi^{-1}(a)\mathrm{M}(u,\chi)\phi(e)\,]da\\ &+\int_0^{1}[\,|\,a\,|^{s-u-1}\lambda\chi^{-1}(a)\phi(w)+|\,a\,|^{s+u-1}\lambda\chi(a)\mathrm{M}(u,\chi)\phi(w)\,]da.\end{aligned}$$

Les deux premières intégrales convergent pour tout s et les deux dernières pour $\mathrm{Re}\, s > 1/2$. Les deux dernières intégrales se calculent facilement. En particulier, pour $s=1/2$ et u purement imaginaire, nous obtenons l'expression suivante pour la transformée de Mellin de E au point $s=1/2$:

$$\begin{aligned}(14)\qquad \mathrm{L}(1/2, \lambda:\phi:u,\chi)=&\int_1^{+\infty}\mathrm{W}\,[\operatorname{diag}(a, 1)]\lambda(a)da\\ &+\int_1^{+\infty}\mathrm{W}\,[\operatorname{diag}(a, 1)w]\lambda(a)da\\ &-\frac{1}{u+1/2}\,[\phi(w)\delta(\lambda\chi^{-1})+\phi(e)\delta(\lambda\chi)]\\ &+\frac{1}{u-1/2}\,[\mathrm{M}(u,\chi)\phi(w)\delta(\lambda\chi)+\mathrm{M}(u,\chi)\phi(e)\delta(\lambda\chi^{-1})].\end{aligned}$$

où nous avons posé pour tout caractère χ du groupe des classes d'idèles

$$\delta(\chi)=\int\chi(a)da,\qquad a\in\mathrm{F}^1{}_A/\mathrm{F}^\times.$$

Nous aurons à calculer la différence entre la transformée de Mellin et l'intégrale suivante :

$$\int_{c^{-1}}^{c} \mathrm{E}\,[\operatorname{diag}(a,1)]\lambda(a)da. \tag{15}$$

Rappelons que cette notation signifie que l'intégrale est prise sur le sous-ensemble compact des classes d'idèles a telles que $c^{-1}<|a|<c$. Au lieu de (12) nous avons pour l'intégrale (15) l'expression :

$$\int_1^c (\mathrm{E}-\mathrm{E}_{\mathrm{N}})+\int_{c^{-1}}^{1}(\mathrm{E}-\mathrm{E}_{\mathrm{N}'})+\int_1^c \mathrm{E}_{\mathrm{N}}+\int_{c^{-1}}^{1}\mathrm{E}_{\mathrm{N}'}. \tag{16}$$

En remplaçant à nouveau E par sa série de Fourier nous obtenons pour (15) l'expression :

$$\begin{aligned}(17)\quad &\int_1^c \mathrm{W}\,[\operatorname{diag}(a,1)]\lambda(a)da+\int_1^c \mathrm{W}\,[\operatorname{diag}(a,1)w]\lambda(a)da\\ &+\int_1^c [|a|^{1/2+u}\lambda\chi(a)\phi(e)+|a|^{1/2-u}\lambda\chi^{-1}(a)\mathrm{M}(u,\chi)\phi(e)]da\\ &+\int_{c^{-1}}^{1}[|a|^{-u-1/2}\lambda\chi^{-1}(a)\phi(w)+|a|^{u-1/2}\lambda\chi(a)\mathrm{M}(u,\chi)\phi(w)]da.\end{aligned}$$

En calculant les deux dernières intégrales et en comparant à (14) nous obtenons finalement l'expression que nous avions en vue :

$$\begin{aligned}(18)\quad \int_{c^{-1}}^{c} \mathrm{E}\,[\operatorname{diag}(a,1)]\lambda(a)da&=\mathrm{L}(1/2,\lambda:\phi:u,\chi)\\ &+\frac{c^{u+1/2}}{u+1/2}\delta(\chi\lambda)\phi(e)+\frac{c^{-u+1/2}}{-u+1/2}\delta(\chi^{-1}\lambda)\mathrm{M}(u,\chi)\phi(e)\\ &+\frac{c^{u+1/2}}{u+1/2}\delta(\chi^{-1}\lambda)\phi(w)+\frac{c^{-u+1/2}}{-u+1/2}\delta(\chi\lambda)\mathrm{M}(u,\chi)\phi(w)+\mathrm{R}(c)\end{aligned}$$

où $\mathrm{R}(c)$ est donné par :

$$-\mathrm{R}(c)=\int_c^{+\infty}\mathrm{W}\,[\operatorname{diag}(a,1)]\lambda(a)da+\int_c^{+\infty}\mathrm{W}\,[\operatorname{diag}(a,1)w]\lambda(a)da. \tag{19}$$

Il est clair que $\mathrm{R}(c)$ tend vers zéro lorsque c tend vers l'infini.

(8.3) Nous aurons besoin d'estimées précises sur $\mathrm{R}(c)$. Rappelons que R dépend, non seulement de c, mais aussi de u, λ et ϕ. Nos estimées seront conséquence du lemme suivant :

LEMME (1). — *Supposons la fonction ϕ indépendante de u. Alors il existe une fonction de Schwartz-Bruhat Φ telle que, pour tout u imaginaire, nous ayons :*

$$|\mathrm{W}\,[\operatorname{diag}(a,1),\phi,u,\chi]|\le\Phi(a)\,|a|^{-1/2}\,|\mathrm{L}(2u+1,\chi^{2\mathrm{S}})|^{-1}.$$

La notation $\mathrm{L}(s,\chi^{\mathrm{S}})$ désigne le produit des facteurs locaux $\mathrm{L}(s,\chi_v)$ pour tous les v non dans S. De plus nous supposons ϕ invariante sous K_v pour tous les v non dans S.

Démonstration. — Il existe une fonction de Schwartz-Bruhat à deux variables Φ telle que :

$$\phi(g,u,\chi)=\int\Phi[(0,t)g]\chi^2(t)\,|t|^{2u+1}dt\times\chi(\det g)\,|\det g|^{u+1/2}\times\mathrm{L}(2u+1,\chi^{2\mathrm{S}})^{-1}.$$

Un calcul formel (fait en détail dans [J. L.], § 3) donne :

$$\mathrm{W}\,[\operatorname{diag}(a, 1)\ldots] = \mathrm{L}(2u+1, \chi^{2\mathrm{S}})^{-1} \times \int \Phi^{\wedge}(ta, t^{-1})\chi^2(t)\,|\,t\,|^{2u+1}dt\chi(a)\,|\,a\,|^{u+1/2},$$

où $\Phi^{\wedge}$ est la transformée de Fourier par rapport à la seconde variable. Il suffira donc de démontrer l'assertion suivante : étant donnée une fonction de Schwartz-Bruhat $\Phi \geq 0$ à deux variables, il existe une fonction de Schwartz-Bruhat à une variable $\phi \geq 0$ telle que pour tout idèle a nous ayons :

$$\int \Phi(at, t^{-1})dt \leq \phi(a)\,|\,a\,|^{-1}.$$

Considérons le problème local analogue. De manière précise, considérons d'abord le cas où le corps local F est non archimédien et la fonction Φ est la fonction caractéristique des entiers. Alors l'intégrale n'est autre que le volume de l'ensemble défini par les inégalités $|\,a\,| \leq |\,t\,| \leq 1$. L'intégrale est donc 0 à moins que a ne soit un entier. En supposant que ce soit le cas l'intégrale vaut $1+v(a)$. Puisque $q \geq a$ ceci est plus petit que $q^{v(a)}$. Donc notre intégrale est au plus $\phi(a)\,|\,a\,|^{-1}$, où ϕ est la fonction caractéristique des entiers. Si F et Φ sont quelconques l'intégrale, regardée comme une fonction de a, a la forme :

$$\int \Phi(at, t^{-1})dt = \phi_1(a) + \phi_2(a) \log |\,a\,|$$

où les ϕ_i sont des fonctions de Schwartz-Bruhat (*cf.* (4.3)). Il est clair que le membre de droite est majoré par $\phi(a)\,|\,a\,|^{-1}$, où ϕ est une fonction de Schwartz-Bruhat convenable. En multipliant ces majorations locales nous obtenons facilement la majoration globale requise.

Il est classique que la fonction $\mathrm{L}(2u+1, \chi^{2\mathrm{S}})^{-1}$ est à croissance au plus polynomiale sur la droite $\mathrm{Re}\,(u)=0$. D'autre part, si ϕ est une fonction de Schwartz-Bruhat, il existe pour tout $\mathrm{N}>0$ une constante C(N) telle que

$$\int_c^{+\infty} \phi(a)\,|\,a\,|^{-1}da \leq \mathrm{C}(\mathrm{N})c^{-\mathrm{N}}.$$

En comparant avec la définition (19) de R nous obtenons aussitôt :

LEMME (2). — *Pour tout* N *il existe des constantes* C(N) *et* M *telles que pour tout u imaginaire nous ayons :*

$$|\,\mathrm{R}(c, u)\,| \leq \mathrm{C}(\mathrm{N})\,|\,c\,|^{-\mathrm{N}}\,|\,u\,|^{\mathrm{M}}.$$

De la même façon en utilisant l'expression (8.3.14) pour la transformée de Mellin et le fait que l'opérateur $\mathrm{M}(u, \chi)$ est unitaire sur l'axe imaginaire nous obtenons l'estimée suivante :

LEMME (3). — *Sur l'axe imaginaire* $\mathrm{M}(u, \chi)\phi(k)$ *et* $\mathrm{L}(1/2, \lambda : \phi : u, \chi)$ *sont à croissance au plus polynomiale.*

(8.4) Étudions maintenant l'intégrale du noyau K_{ei}. Rappelons sa définition. Pour tout caractère χ choisissons une base orthonormée ϕ_i de l'espace de Hilbert $\mathrm{V}(\chi)$; désignons par $\rho(u, \chi)$ la représentation de $G(F_A)$ par translations à droite dans l'espace des fonctions ϕ telles que

$$\phi\left[\begin{vmatrix} a & x \\ 0 & b \end{vmatrix} g\right] = \chi(ab^{-1}) \,|\, ab^{-1}\,|^{u+1/2} \phi(g). \tag{1}$$

Nous pouvons identifier l'espace de $\rho(u, \chi)$ avec $V(\chi)$ et poser :

$$F(u, \chi : i, j) = (\rho(u, \chi)\phi_i,\ \phi_j). \tag{2}$$

Nous écrirons $E_{ei}(x, i, \ldots)$ pour $E_{ei}(x, \phi_i, \ldots)$. Avec ces notations :

$$K_{ei}(x, y) = \sum_{\chi} K_\chi(x, y) \tag{3}$$

où, pour chaque caractère χ du groupe des classes d'idèles,

$$K_\chi(x, y) = (2i\pi)^{-1} \sum_{i, j} \int_{-i\infty}^{+i\infty} F(u, \chi : i, j) E(x, j, u, \chi) E(y, i, u, \chi)^{-}\, du. \tag{4}$$

Pour un f donné les sommes (3) et (4) sont finies. Posons

$$I(c, \chi) = \int_{c^{-1}}^{c} \int_{c^{-1}}^{c} K_\chi(a, b) \eta\,(\det b)\, da\, db. \tag{5}$$

Nous pouvons évidemment échanger l'ordre des intégrations pour u et le couple (a, b). En tenant compte de (8.2.18) nous obtenons pour $I(c, \chi)$ l'expression suivante :

$$\begin{aligned}
(6)\quad & (i\pi)^{-1} \sum_{i, j} \int_{-i\infty}^{+i\infty} F(u, \chi : i, j) \\
& \times \left[L(1/2, 1 : j, u, \chi) + R(c, u) + \frac{c^{u+1/2}}{u+1/2} \delta(\chi)\phi_j(e) + \frac{c^{-u+1/2}}{-u+1/2} \delta(\chi^{-1}) M(u, \chi)\phi_j(e) \right. \\
& \left. + \frac{c^{u+1/2}}{u+1/2} \delta(\chi^{-1})\phi_j(w) + \frac{c^{-u+1/2}}{-u+1/2} \delta(\chi) M(u, \chi)\phi_j(w) \right] \\
& \times \left[L(1/2, \eta, i, u, \chi)^{-} + R'(c, u) + \frac{c^{-u+1/2}}{-u+1/2} \delta(\eta\chi)\phi_i^{-}(e) + \frac{c^{u+1/2}}{u+1/2} \delta(\chi^{-1}\eta) M(u, \chi)\phi_i^{-}\ (e) \right. \\
& \left. + \frac{c^{-u+1/2}}{-u+1/2} \delta(\chi^{-1}\eta)\phi_i^{-}(w) + \frac{c^{u+1/2}}{u+1/2} \delta(\chi\eta) M(u, \chi)\phi_i^{-}(w) \right] \times du.
\end{aligned}$$

Pour chaque (i, j), les termes $R(c, u)$ et $R'(c, u)$ satisfont aux conclusions du lemme (8.3.2). Pour un f donné $F(u, \chi : i, j)$ est nul sauf pour un nombre fini de couples (i, j). En particulier, $F(u, \chi : i, j)$ est nul à moins que ϕ_i et ϕ_j ne soient tous les deux invariants par tous les K_v avec v non dans S. De plus, sur l'axe imaginaire, $F(u, \chi : i, j)$ décroît rapidement (plus vite que l'inverse d'un polynôme en u). Au contraire, d'après (8.3), les termes $L(\ldots)$ et les termes contenant les puissances de c sont à croissance lente. Il en résulte que lorsque nous développons l'expression (6) nous trouvons un certain nombre de termes qui tendent vers zéro lorsque c tend vers l'infini. Nous pouvons ignorer ces termes. Parmi les termes qui restent il y a une intégrale indépendante de c :

$$(7) \qquad \sum_{i,j} \int_{-i\infty}^{+i\infty} F(u, \chi, i, j) \times L(1/2, 1 : j : u, \chi) \times [L(1/2, \eta, i, u, \chi)]^{-} du.$$

Les autres termes ne sont présents que si $\chi = 1$ ou $\chi = \eta$. Chacun de ces termes est de l'un des types suivants :

$$(8) \qquad \int F(u, 1 : i, j) L(1/2, \eta : i : u, 1)^{-} \frac{c^{1/2+u}}{1/2+u} (\phi_j(e) + \phi_j(w)) du,$$

$$(9) \qquad \int F(u, \eta : i, j) L(1/2, 1 : j : u, \eta) \frac{c^{1/2-u}}{1/2-u} (\phi_i^{-}(e) + \phi_i^{-}(w)) du,$$

$$(10) \qquad \int F(u, 1 : i, j) L(1/2, \eta : i : u, 1)^{-} \frac{c^{1/2-u}}{1/2-u} (M(u, 1)\phi_j(e) + M(u, 1)\phi_j(w)) du,$$

$$(11) \qquad \int F(u, \eta : i, j) L(1/2, 1 : j : u, \eta) \frac{c^{1/2+u}}{1/2+u} (M(u, \eta)\phi_i^{-}(e) + M(u, \eta)\phi_i^{-}(w)) du.$$

L'intégrale (7) a visiblement les propriétés requises par la proposition (8.1). Pour démontrer cette proposition, il nous suffira donc de montrer que chacune des expressions (8) à (11) a une limite lorsque c tend vers l'infini et que, de plus, cette limite est nulle si la transformée de Satake de la fonction f_u est nulle au point q^{-1}. Cette dernière condition signifie que l'intégrale de f_u sur G_u/Z_u est nulle et implique que $F(u, 1 : i, j)$ et $F(u, \eta : i, j)$ s'annulent aux points $u = 1/2$ et $u = -1/2$.

(8.5) Examinons le terme (8) du numéro (8.4). Nous déplacerons le contour d'intégration de la ligne $\operatorname{Re} u = 0$ à la ligne $\operatorname{Re} u = -1/2$; toutefois dans cette dernière ligne, nous remplacerons le segment joignant le point $-1/2 - i\varepsilon$ au point $-1/2 + i\varepsilon$ par le demi-cercle de centre $-1/2$ et de rayon ε qui passe par les points $-1/2 - \varepsilon i$, $\varepsilon - 1/2$ et $-1/2 + i\varepsilon$. Vérifions que ce déplacement du contour est légitime. Le facteur

$$F(u) = F(u, 1 : i, j)(\phi_j(e) + \phi_j(w))$$

ainsi que ses dérivées, est holomorphe et à décroissance rapide dans la bande verticale $-1/2 \leq \operatorname{Re} u \leq 0$. La fonction exponentielle reste bornée. Le facteur $(1/2 + u)^{-1}$ reste aussi borné à l'infini dans cette bande verticale. Examinons la transformée de Mellin. Rappelons que nous pouvons trouver une représentation intégrale de $\phi_i(g, u, 1)$:

$$\phi_i(g, u, 1) = \int \Phi[(0, t)g] \, |t|^{2u+1} dt \times |\det g|^{u+1/2} L(2u+1, 1^S)^{-1}.$$

Un calcul formel simple donne alors pour la transformée de Mellin (notée $L(u)$ en abrégé) :

$$(1) \qquad L(u) = L(2u+1, 1^S)^{-1} \int \Phi^{\wedge}(a, b) \, |a|^{1/2+u} \eta(a) \, |b|^{1/2-u} \eta(b) \, da\, db,$$

où $\Phi^\wedge$ est la transformée de Fourier de Φ par rapport à la deuxième variable. En prenant l'imaginaire conjugué de deux membres nous obtenons donc :

$$\text{(2)} \qquad L(-u^-)^- = L(-2u+1,\, 1^S)^{-1}T(u)\,,$$

où

$$\text{(3)} \qquad T(u) = \int \Phi_1(a, b) \mid a \mid^{1/2-u} \eta(a) \mid b \mid^{1/2+u} \eta(b) da db\,.$$

Dans cette expression Φ_1 est une fonction de Schwartz-Bruhat; l'intégrale de « Tate » double $T(u)$, ainsi que tous ses dérivées, est bornée dans la bande verticale $-1/2 \leq \mathrm{Re}\,(u) \leq 0$. Enfin dans la bande en question nous avons $1 \leq \mathrm{Re}\,(-2u+1) \leq 2$ et la fonction $L(-2u+1, 1_S)^{-1}$ est holomorphe et bornée par un polynôme en $\mathrm{Im}\,(u)$. Comme notre intégrale s'écrit :

$$\int F(u) L(1-2u,\, 1^S)^{-1} T(u) c^{1/2+u} (1/2+u)^{-1} du\,.$$

Notre déplacement du contour d'intégration est en effet légitime. En remplaçant u par $u-1/2$, nous obtenons pour le terme (8.3.8) l'expression suivante :

$$\text{(4)} \qquad \int F(u-1/2) L(2-2u,\, 1^S)^{-1} T(u-1/2) c^u u^{-1} du\,.$$

Dans (4) le contour d'intégration est maintenant la droite $\mathrm{Re}\,(u)=0$, excepté que le segment joignant le point $-i\varepsilon$ au point $i\varepsilon$ est remplacé par le demi-cercle de centre 0 qui passe par les points $-i\varepsilon$, ε, $i\varepsilon$. Faisons maintenant tendre ε vers 0. Alors l'intégrale sur le demi-cercle tend vers

$$i\pi F(-1/2) L(2,\, 1^S)^{-1} T(-1/2)\,,$$

tandis que l'intégrale sur la partie rectiligne du contour tend vers une « valeur principale de Cauchy ». En utilisant une variable d'intégration réelle t nous obtenons donc que (4) est aussi égale à :

$$\text{(5)} \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} F(it-1/2) L(2-2it,\, 1^{S-1}) T(it-1/2) c^{it} t^{-1} dt + i\pi F(-1/2) L(2,\, 1^S)^{-1} T(-1/2)\,.$$

Pour t réel la fonction $L(-2it+2, 1^S)$ est donnée par un produit infini (ou une série de Dirichlet) absolument et uniformément convergent. Ses dérivées sont donc bornées et son inverse aussi est bornée. Les dérivées du facteur $L(-2it+2, 1^S)^{-1}$ sont donc bornées. Dans (5) le produit des trois premiers termes est donc une fonction de Schwartz de t. Lorsque c tend vers l'infini l'intégrale de Cauchy tend vers $i\pi$ fois la valeur de la fonction de Schwartz au point 0. Au total nous voyons que (5), i. e. le terme (8.4.8), tend vers une limite finie lorsque c tend vers l'infini, à savoir :

$$2i\pi F(-1/2) L(2,\, 1^S)^{-1} T(-1/2)\,;$$

cette limite s'annule en même temps que $F(-1/2, 1 : i, j)$. C'est bien là ce qu'il nous fallait prouver. Une conclusion analogue s'applique au terme (8.4.9).

(8.6) Examinons maintenant le terme (8.3.10). Nous poserons pour simplifier :

$$\mathrm{F}(u)=\mathrm{F}(u, 1 : i, j).$$

Nous allons utiliser une expression un peu différente de celle que nous avons utilisé jusqu'à présent pour la transformée de Mellin.

Écrivons ϕ pour ϕ_j et supposons, comme il est loisible, que ϕ soit un produit de fonctions locales ϕ_v. Nous pouvons aussi supposer que, pour chaque place v, ϕ_v est soit K_v invariante, soit au contraire d'intégrale nulle sur K_v. Notons T l'ensemble des places où cette dernière condition est satisfaite. Alors T est fini et contient S. Nous pouvons trouver une représentation intégrale pour $\phi(g, u, 1)$ de la forme :

(1) $$\phi(g, u, 1)=\int \Phi[(0, t)g]\,|t|^{2u+1}dt \times |\det g|^{u+1/2}\mathrm{L}(2u+1, 1^{\mathrm{T}})^{-1}.$$

Nous en concluons, comme plus haut, que la transformée de Mellin qui apparaît dans (8.3.10) peut s'écrire :

(2) $$\mathrm{L}(-2u+1, 1^{\mathrm{T}})^{-1}\mathrm{T}(u).$$

où $\mathrm{T}(u)$ est défini par une intégrale de Tate double, holomorphe pour tout u. D'autre part nous pouvons écrire l'opérateur d'entrelacement $\mathrm{M}(u, 1)$ comme un produit :

(3) $$\mathrm{M}(u, 1)=\mathrm{L}(2u, 1)\mathrm{L}(2u+1, 1)^{-1}\mathrm{N}(u, 1)$$

où N est l'opérateur d'entrelacement normalisé. Maintenant le quotient de $\mathrm{L}(2u, 1)$ par $\mathrm{L}(-2u+1, 1)$ est une fonction exponentielle ab^u. Il en résulte que le produit des facteurs (2) et (3) se réduit à :

(4) $$ab^u\mathrm{L}(-2u+1, 1_{\mathrm{T}})\mathrm{L}(2u+1, 1_{\mathrm{T}})^{-1}\mathrm{L}(2u+1, 1^{\mathrm{T}})^{-1}\mathrm{T}(u)\mathrm{N}(u, 1).$$

Ainsi le terme (8.3.10) est donné par l'intégrale suivante :

(5) $$\int \mathrm{F}(u)\mathrm{L}(2u+1, 1^{\mathrm{T}})^{-1}\mathrm{T}(u)c^{1/2-u}(1/2-u)^{-1}\mathrm{A}(u)du,$$

avec

$$\mathrm{A}(u)=ab^u\mathrm{L}(-2u+1, 1_{\mathrm{T}})\mathrm{L}(2u+1, 1_{\mathrm{T}})^{-1}[\mathrm{N}(u, 1)\phi(e)+\mathrm{N}(u, 1)\phi(w)].$$

Nous allons déplacer le contour d'intégration. Le contour présent est la droite $\mathrm{Re}\,(u)=0$. Le nouveau contour sera la droite $\mathrm{Re}\,(u)=1/2$, excepté que le segment joignant les points $1/2-i\varepsilon$ et $1/2+i\varepsilon$ sera remplacé par le demi-cercle passant par les points $1/2-i\varepsilon$, $1/2-\varepsilon$, $1/2+i\varepsilon$. La fin de la démonstration sera alors la même que dans le cas précédent, excepté qu'il nous faut montrer que le facteur $\mathrm{A}(u)$ est holomorphe et à croissance lente dans la bande $0 \leq \mathrm{Re}\,(u) \leq 1/2$. Le rapport des facteurs L qui apparaît dans A est le produit des rapports

$$\mathrm{L}(-2u+1, 1_v)\mathrm{L}(2u+1, 1_v)^{-1}$$

pour tous les v dans T. Si v est une place finie, alors ce rapport est une fraction rationnelle en q_v^{-u} donc est à croissance lente. Si v est infinie, la formule de Stirling montre que ce rapport est à croissance lente. Rappelons que ϕ_v est égale à un sur tout K_v pour tous les v non dans T. Pour un tel v, nous avons $N(u, 1_v)\phi_v(k_v)=1$ pour tout u. Donc $N(u, 1)\phi(e)$ par exemple est en fait le produit sur tous les v dans T de

$$N(u, 1_v)\phi_v(e).$$

Si v est finie ceci est encore à croissance lente. Si v est infinie, ceci est un polynôme en u. Donc A est bien à croissance lente. Prouvons enfin l'holomorphie de A aux pôles du facteur $L(-2u+1, 1_T)$ dans la bande. Prouvons par exemple l'holomorphie en 1/2 de :

$$L(-2u+1, 1_T)L(2u+1, 1_T)^{-1}N(u, 1)\phi(e).$$

Le produit précédent s'écrit en fait :

$$\prod_{v\in T} L(-2u+1, 1_v)L(2u+1, 1_v)^{-1}N(u, 1_v)\phi_v(e).$$

Prenons un v dans T. Comme l'intégrale de φ_v sur K_v est nulle, $N(u, 1_v)\phi_v(e)$ s'annule au point $u=1/2$ et ce zéro compense le pôle du facteur $L(-2u+1, 1_v)$ au même point. Le produit est donc bien holomorphe au point 1/2 et ceci termine notre discussion pour le terme (8.3.10). Une discussion analogue s'applique au terme (8.3.11). Les assertions du numéro (8.1) sont donc complètement prouvées.

9. Intégrales orbitales globales : le cas d'un tore compact

(9.1) Dans ce paragraphe F est encore un corps de nombres et E une extension quadratique de F. Nous fixerons un élément (G, T) de l'ensemble X(E : F) et un élément ε de $N(T)-T$. Alors le carré c de ε est un élément de $F^\times$ et la classe cN du groupe des normes N de E détermine la classe d'isomorphisme de (G, T). Soit f une fonction, lisse et à support compact, sur le groupe $G(F_A)/Z(F_A)$. A la fonction f est attaché le noyau cuspidal K_c. Soit ϕ_i une base orthonormale de l'espace des formes automorphes qui sont cuspidales et orthogonales aux fonctions $g \to \chi(\det g)$, où χ est un caractère de carré trivial du groupe des classes d'idèles de F. Alors, par définition :

(1)
$$K_c(x, y)=\sum \rho(f)\phi_j(x)\phi_j^-(y).$$

Nous nous proposons de donner une expression utile pour l'intégrale

(2)
$$\iint K_c(s, t)dsdt, \qquad s, t\in T(F_A)/T(F)Z(F_A).$$

Bien entendu $\psi \circ \mathrm{Tr}$ est un caractère de E_A/E et nous avons donc pour chaque place v de E la mesure de Tamagawa sur le groupe $E_v^\times$ et, par transport de structure sur le groupe T_v. Nous avons aussi la mesure produit sur le groupe $T(E_A)$ et la mesure quotient sur $T(F_A)/Z(F_A)$. Nous noterons S un ensemble fini de places de F contenant les places à l'infini, les places ramifiées dans E, les places où G n'est pas déployé, les places où ψ_v n'est pas d'ordre 0 et les places de caractéristique résiduelle 2. Nous choisirons pour tout v un sous-groupe compact maximal K_v de G_v de telle manière que T_v soit contenu dans K_vZ_v si v ne se décompose pas dans E et $G(F_A)$ soit le produit restreint des G_v par rapport aux K_v. Nous supposerons que f est le produit de fonctions locales f_v, lisses et à support compact, sur G_v/Z_v. Nous supposerons f_v bi-K_v-invariante pour chaque v non dans S. Nous ne changeons pas l'intégrale (1) si pour v non décomposée dans E nous remplaçons f_v par la fonction f_v' définie par :

$$f_v'(g)=\mathrm{vol}\,(T_v)^{-1}\int f(s_v g t_v)ds_v dt_v .$$

Nous pouvons donc supposer que pour chaque v qui ne se décompose pas dans E la fonction f_v est bi-T_v-invariante, en particulier bi-K_v-finie. Enfin nous supposerons f_v bi-K_v-finie aux places v qui se décomposent dans E. Nous avons alors :

$$K_c(x, y)=\sum f(x^{-1}\gamma y)-K_{sp}(x, y)-K_{ei}(x, y), \tag{3}$$

où la somme porte sur tous les γ dans G(F)/Z(F), K_{sp} dénote le noyau spécial et K_{ei} le noyau d'Eisenstein. Le noyau d'Eisenstein est bien entendu nul si G n'est pas déployé. Le noyau K_{sp} est défini par la somme suivante :

$$K_{sp}(x, y)=\sum \mathrm{Vol}^{-1}\int f\,(\det g)dg\chi\,(\det x)\chi^{-1}\,(\det y)\,; \tag{4}$$

la somme porte sur tous les caractères χ de carré trivial du groupe des classes d'idèles de F et Vol est le volume du quotient $G(F_A)/G(F)Z(F_A)$. Nous pouvons définir deux autres noyaux :

$$K_r(x, y)=\sum f(x^{-1}\gamma y), \qquad \gamma \text{ T-régulier}, \tag{5}$$

$$K_s(x, y)=\sum f(x^{-1}\gamma y), \qquad \gamma \text{ T-singulier}, \tag{6}$$

Alors K_c est la somme suivante :

$$K_c=K_r+K_s-K_{sp}-K_{ei}. \tag{7}$$

Comme le quotient $T(F_A)/T(F)Z(F_A)$ est compact, l'intégrale (2) est simplement la somme des intégrales de chaque terme dans (7).

(9.2) Étudions l'intégrale de K_r. Chaque élément γ de G(F)/Z(F) qui est T-régulier peut s'écrire de manière unique sous la forme :

$$\gamma=\sigma^{-1}\mu\tau, \tag{1}$$

où σ et τ parcourent T(F)/Z(F) et μ un ensemble de représentants pour les doubles classes T-régulières de T(F) dans G(F) (Prop. (1.2)). Nous obtenons donc immédiatement :

$$\iint K_r(s, t)dsdt=\sum \iint f(s^{-1}\mu t)dsdt, \tag{2}$$

les intégrales du membre de droite portant maintenant toutes les deux sur $T(F_A)/Z(F_A)$. L'intégrale double du membre de droite ne dépend que de $\zeta=P(\mu:T)$ et nous noterons $H(\zeta:f:T)$ sa valeur. Nous pouvons donc écrire :

$$\iint K_r(s, t)dsdt=\sum H(\zeta:f:T), \qquad \zeta\in c\mathrm{N}-1, \tag{2}$$

puisque la fonction P paramétrise les doubles classes régulières et ses valeurs, sur les éléments réguliers, sont tous les points de la classe cN associée au couple (G, T) moins le point 1 (Prop. (1.1)). Bien entendu l'intégrale orbitale $H(\zeta : f : T)$ est le produit des intégrales orbitales locales :

(3) $$H(\zeta : f : T) = \prod H(\zeta : f_v : T_v).$$

Presque tous les facteurs sont égaux à 1. En effet soit v une place de F qui n'est pas dans S ; supposons que f_v soit la fonction caractéristique de $Z_v K_v$. Si v ne se décompose pas dans E, alors T_v est contenu dans $Z_v K_v$ et l'intégrale vaut 1. Si v se décompose dans E alors l'intégrale locale vaut encore 1 d'après la proposition (5.7).

(9.3) Passons à l'intégrale du terme K_r. Il n'y a que deux doubles classes singulières, T(F) et εT(F). Il vient donc :

(1) $$\iint K_s(s, t) ds dt = \mathrm{vol} \int f(t) dt + \mathrm{vol} \int f(\varepsilon t) dt,$$

où vol dénote le volume du quotient $T(F_A)/T(F)Z(F_A)$ et chacune des intégrales porte sur le quotient $T(F_A)/Z(F_A)$.

(9.4) Passons à l'intégrale du terme K_{sp}. D'après (4), nous avons :

(1) $$\iint K_{sp}(s, t) ds dt = \sum \mathrm{Vol}^{-1} \int f(g) \chi(\det g) dg \int \chi(\det s) ds \int \chi^{-1}(\det t) dt ;$$

chacune des intégrales sur le quotient $T(F_A)/T(F)Z(F_A)$ est 0 à moins que $s \to \chi(\det s)$ ne soit trivial sur $T(F_A)$; ceci est le cas si et seulement si $\chi = 1$ ou $\chi = \eta$. L'intégrale de K_{sp} se réduit donc à deux termes :

(2) $$\iint K_{sp}(s, t) ds dt = \mathrm{Vol}^{-1} \mathrm{vol}^2 \left[\int f(g) \chi(\det g) dg + \int f(g) dg \right].$$

En particulier, choisissons comme dans (8.1) une place z de F non dans S, fixons les composants de f aux places autres que z et regardons l'intégrale comme une fonction de $f_z^\wedge$. Alors l'intégrale (5) est de la forme $c f_z^\wedge(q_z^{-1})$, où c est une constante.

(9.5) Passons au terme K_{ei}. Il est nul si G n'est pas déployé sur F. Supposons G déployé et revenons aux notations de (8.4). Nous avons :

(1) $$K_{ei}(x, y) = (i\pi)^{-1} \int_{-i\infty}^{+i\infty} A(x, y, u) du,$$

où

(2) $$A(x, y, u) = \sum_{\chi, j} [\rho(f)E](x, j, u, \chi) E(y, j, u, \chi)^- .$$

Notons que le sous-groupe compact maximal implicite dans la définition des séries d'Eisenstein est maintenant le produit des groupes K_v, avec $K_v Z_v = T_v$ si v est infinie. En particulier la série (2) est finie. Comme nous intégrons sur un ensemble compact nous obtenons :

$$\text{(3)} \qquad \iint \mathrm{K}_{\mathrm{ei}}(s, t) ds dt = (i\pi)^{-1} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \mathrm{A}(u : f) du,$$

où

$$\text{(4)} \qquad \mathrm{A}(u : f) = \sum_{\chi, j} \int [\rho(f)\mathrm{E}](s, j, u, \chi) ds \int \mathrm{E}(t, j, u, \chi)^{-} dt.$$

Maintenant $[\rho(f)\mathrm{E}](x, j, u, \chi)$ est nul à moins que ϕ_j ne soit K_v-invariante pour toutes les places v non dans S. En particulier, choisissons comme plus haut une place z de F qui n'est pas dans S et se décompose dans E. Alors $f = f^z . f_z$ où f^z est le produit des f_v pour $v \neq z$ et

$$\text{(5)} \qquad [\rho(f)\mathrm{E}](x, j, u, \chi) = f_z^{\wedge}(q_z^{-2iu}) [\rho(f^z)\mathrm{E}](x, j, u, \chi).$$

Il vient donc :

$$\text{(6)} \qquad \iint \mathrm{K}_{\mathrm{ei}}(s, t) ds dt = (2i\pi)^{-1} \int_{-i\infty}^{+i\infty} f_z^{\wedge}(q_z^{-2iu}) \mathrm{A}(u : f^z) du,$$

où $\mathrm{A}(u : f^z)$ est intégrable, résultat qui sera suffisant pour notre objet.

10. L'identité fondamentale

(10.1) Dans ce paragraphe F est toujours un corps de nombres, E une extension quadratique de F, η le caractère quadratique attaché à E. Nous considérerons encore le couple (G, A) formé du groupe GL(2) et du sous-groupe des matrices diagonales A ; nous fixerons un élément ε du normalisateur de A qui ne soit pas dans A. Nous noterons K_v le sous-groupe compact maximal usuel de G_v et nous supposerons ε contenu dans K_v pour tout v. Nous nous donnerons un ensemble fini S de places de F, contenant les places infinies, les places qui se ramifient dans E, les places où ψ n'est pas d'ordre 0 et les places de caractéristique résiduelle 2. Il sera commode de supposer que S a un nombre pair d'éléments. Soit X(S) l'ensemble des couples (G′, T′) dans X(E : F) tels que G′ se déploie en dehors de S. Pour chaque (G′, T′) dans X(S) et chaque place v, nous choisirons un sous-groupe compact maximal K'_v de G'_v de manière que $\mathrm{G}'(\mathrm{F}_A)$ soit le produit restreint des G'_v par rapport aux K'_v. Nous supposerons que si v ne se décompose pas dans E alors T'_v est contenu dans $\mathrm{K}'_v \mathrm{Z}_v$. Pour tout v non dans S les mesures de $\mathrm{T}'_v \cap \mathrm{K}'_v / \mathrm{K}'_v \cap \mathrm{Z}'_v$ et $\mathrm{A}_v \cap \mathrm{K}_v / \mathrm{K}_v \cap \mathrm{Z}_v$ sont 1. Nous fixerons un élément ε' du normalisateur de T′ qui ne soit pas dans T′ et nous supposerons que ε' est dans K'_v pour tous les v non dans S. Nous nous donnerons une fonction lisse à support compact f sur $\mathrm{G}(\mathrm{F}_A)/\mathrm{Z}(\mathrm{F}_A)$ et, pour chaque (G′, T′) dans X(S), une fonction lisse à support compact f' sur $\mathrm{G}'(\mathrm{F}_A)/\mathrm{Z}'(\mathrm{F}_A)$. Bien entendu ces fonctions seront supposées être des produits de fonctions locales. Nous ferons de plus les hypothèses suivantes :

(1) Soit v une place de S qui ne se décompose pas dans E. Alors f'_v est T'_v-biinvariante. De plus si x est un élément de F_v différent de 1 et 0, (G′, T′) un élément de X(S) et g' un élément de G'_v tels que $x = \mathrm{P}(g' : \mathrm{T}_v)$ alors (cf. § 4) :

$$\mathrm{H}(x : f_v : \eta_v) = \mathrm{H}(g' : f'_v : \mathrm{T}'_v).$$

(2) Soit v une place de S qui se décompose dans E. Alors f_v est K_v-finie et f'_v K'_v-finie. Soit g un élément A_v-régulier de G_v. Si $(G', T') \in X(S)$ et $g' \in G_v$ sont tels que

$$P(g : A_v) = P(g' : T'_v)$$

alors :

(*i*)
$$H(g : f_v : A_v) = H(g' : f'_v : T'_v) ;$$

(*ii*)
$$\int f_v(a_v) da_v = \int f'_v(t'_v) dt'_v ;$$

(*iii*)
$$\int f_v(\varepsilon a_v) da_v = \int f'_v(\varepsilon' t'_v) dt'_v .$$

(3) Si v n'est pas dans S alors f_v est K_v-biinvariante, $f'_v K'_v$-biinvariante et tout isomorphisme du couple (G_v, K_v) sur le couple (G'_v, K'_v) transforme f_v en f'_v.

(4) *Remarque.* — Dans la situation de la condition (2) il existe un isomorphisme du couple (G_v, A_v) sur le couple (G'_v, T'_v). La condition (2) est satisfaite si nous prenons pour f'_v l'image de f_v par cet isomorphisme. En effet cela est clair pour (2.*i*) et (2.*ii*). Pour (2.*iii*), l'intégrale du membre de droite ne change pas si nous remplaçons ε' par l'image de ε par l'isomorphisme en question et alors notre assertion est évidente.

A la fonction f est associé le noyau cuspidal K_c pour le groupe G. De même, pour chaque (G', T'), à la fonction f' est associé le noyau cuspidal K'_c pour le groupe G'. Nous allons dans ce paragraphe démontrer le résultat suivant :

THÉORÈME. — *Avec les hypothèses et notations précédentes :*

(4)
$$\iint K_c(a, b) \eta (\det b) da\, db = \sum_{(G', T')} \iint K'_c(s, t) ds\, dt, \qquad (G', T') \in X(S).$$

(10.2) Pour prouver notre identité nous écrirons, comme dans les paragraphes 7 et 9 :

(1)
$$K_c = K_r + K_s - K_{sp} - K_{ei} ,$$

(2)
$$K'_c = K'_r + K'_s - K'_{sp} - K'_{ei} .$$

Nous prouverons d'abord les identités suivantes :

(3)
$$\iint K_r(a, b) \eta (\det b) da\, db = \sum_{(G', T')} \iint K'_r(s, t) ds\, dt ,$$

(4)
$$\iint K_s(a, b) \eta (\det b) da\, db = \sum_{(G', T')} \iint K'_s(s, t) ds\, dt .$$

Supposons ces identités démontrées et montrons comment le théorème en découle. Considérons la différence :

(5)
$$\iint K_c(a, b) \eta (\det b) da\, db - \sum_{(G', T')} \iint K'_c(s, t) ds\, dt .$$

Vues (3) et (4) elle s'écrit :

$$
\begin{aligned}
&-\iint \mathrm{K}_{\mathrm{sp}}(a, b)\eta\,(\det b)da\,db+\sum_{(\mathrm{G}',\mathrm{T}')}\iint \mathrm{K}'_{\mathrm{sp}}(s, t)ds\,dt\\
&-\iint \mathrm{K}_{\mathrm{ei}}(a, b)\eta\,(\det b)da\,db+\sum_{(\mathrm{G}',\mathrm{T}')}\iint \mathrm{K}'_{\mathrm{ei}}(s, t)ds\,dt\,.
\end{aligned}
$$

Rappelons que pour le groupe G il s'agit d'intégrales faibles.

Choisissons maintenant une place z de E qui ne soit pas dans S et qui se décompose dans E. Fixons les composantes de f et des f' aux autres places. A la place z les transformées de Satake de f_z et des f_z' sont les mêmes. Nous pouvons donc regarder nos intégrales comme fonctions de $f_z^{\wedge}$. Alors d'après (8.1), (9.3) et (9.4) la somme ci-dessus a la forme

$$
\int_{-\infty}^{+\infty} \phi(t)f_z^{\wedge}(q_z^{-2it})dt+cf_z^{\wedge}(q_z^{-1})\,, \tag{6}
$$

où ϕ est intégrable. On finit la démonstration comme dans [L] en utilisant le fait que les intégrales de K_c et K'_c ont aussi la forme :

$$
\sum_t a_t f_z^{\wedge}(t)\,, \tag{7}
$$

où les nombres complexes t sont, soit sur le cercle unité, soit sur l'axe réel entre q_z^{-1} et q_z et la série des a_t est absolument convergente. L'unicité de la décomposition d'une mesure en une mesure atomique et une mesure continue entraîne que la différence (5) est en fait nulle.

(10.3) Prouvons l'égalité (10.2.3). Le membre de gauche s'écrit :

$$
\sum_\zeta \mathrm{H}(\zeta : f : \eta), \qquad \zeta\neq 0, 1\,,
$$

tandis que le membre de droite s'écrit comme une somme double :

$$
\sum_{(\mathrm{G}',\mathrm{S}')}\sum_\zeta \mathrm{H}(\zeta : f' : \mathrm{T}')
$$

la somme intérieure portant sur tous les ζ dans la classe cN, privée du point 1, déterminée par le couple (G′, T′). Nous pouvons recombiner les deux sommes et écrire le membre de droite comme une somme

$$
\sum_\zeta \mathrm{H}(\zeta : f' : \mathrm{T}), \qquad \zeta\in \mathrm{N(S)}-1\,,
$$

en désignant par N(S) la réunion des classes cN déterminées par les éléments de X(S). D'après la théorie du corps de classe les éléments de $\mathrm{F}^{\times}-\mathrm{N(S)}$ sont exactement les ζ dans $\mathrm{F}^{\times}$ qui satisfont à la condition suivante : il existe une place v de F, qui n'est pas dans S, qui ne se décompose pas dans F et qui est telle que ζ ne soit pas une norme de l'extension quadratique E_v de F_v. D'après la Proposition (5.1) nous avons, pour un tel ζ, $\mathrm{H}(\zeta : f_v : \eta_v)=0$ si v est la place en question. Il en résulte que $\mathrm{H}(\zeta : f : \eta)=0$. Il suffira donc de démontrer l'égalité des intégrales orbitales $\mathrm{H}(\zeta : f : \eta)$ et $\mathrm{H}(\zeta : f' : \mathrm{T}')$ si ζ est dans N(S). Décomposons ces intégrales en produits d'intégrales locales $\mathrm{H}(\zeta : f_v : \eta_v)$ et $\mathrm{H}(\zeta : f'_v : \mathrm{T}'_v)$ respectivement.

Pour v dans S l'égalité de ces intégrales résulte des hypothèses (1) et (2). Pour v non dans S l'égalité résulte de l'hypothèse (3) et de la proposition (5.1). L'égalité des intégrales orbitales globales, et la formule (3), sont donc établies.

(10.4) Prouvons maintenant l'égalité (10.2.4). Nous pouvons utiliser la formule (7.3.7) pour calculer le membre de gauche et la formule (9.3.1) pour calculer le membre de droite. L'égalité (10.2.4) sera alors conséquence des deux égalités suivantes :

$$\mathrm{H}(n_+ : f : \eta) + \mathrm{H}(n_- : f : \eta) = \sum_{(\mathrm{G}', \mathrm{T}')} \mathrm{vol}\,(\mathrm{T}'(\mathrm{F}_A)/\mathrm{T}'(\mathrm{F})\mathrm{Z}'(\mathrm{F}_A)) \int f'(t)\,dt, \tag{1}$$

$$\mathrm{H}(\varepsilon n_+ : f : \eta) + \mathrm{H}(\varepsilon n_- : f : \eta) = \sum_{(\mathrm{G}', \mathrm{T}')} \mathrm{vol}\,(\mathrm{T}'(\mathrm{F}_A)/\mathrm{T}'(\mathrm{F})\mathrm{Z}'(\mathrm{F}_A)) \int f'(\varepsilon' t)\,dt. \tag{2}$$

La deuxième identité résulte de la première identité appliquée à la fonction f_1 définie par $f_1(g) = f(\varepsilon g)$ et aux fonctions f'_1 définies par $f'_1(g) = f'(\varepsilon' g)$. Il est en effet facile de vérifier que les conditions (10.1.1) à (10.1.3) sont satisfaites par f_1 et les f'_1. Prouvons donc la première identité.

Calculons le membre de droite de (1). Introduisons un idèle différentiel a de E et b de F. Le prolongement analytique de l'intégrale de Tate

$$\int \phi(t) \,|\, t\,|^s \eta(t)\,dt, \tag{3}$$

où ϕ est une fonction de Schwartz-Bruhat, prend au point $s=0$ la valeur :

$$\mathrm{L}(0, \eta) \prod_{v \in \mathrm{T}} \int \phi_v(t_v)\eta(t_v)\,dt_v \mathrm{L}(0, \eta_v)^{-1} \prod_{v \in \mathrm{V}} \phi_v(0) \,|\, a_v\,|^{1/2},$$

où T est l'ensemble des places de F qui ne se décomposent dans E et V l'ensemble de celles qui se décomposent.

Appliquons cette formule aux fonctions ϕ_+ et ϕ_- définies par :

$$\phi_+(x) = \int f\left[a \begin{vmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{vmatrix}\right] da, \qquad a \in \mathrm{A}(\mathrm{F}_A)/\mathrm{Z}(\mathrm{F}_A),$$
$$\phi_-(x) = \int f\left[a \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ x & 1 \end{vmatrix}\right] da, \qquad a \in \mathrm{A}(\mathrm{F}_A)/\mathrm{Z}(\mathrm{F}_A).$$

Les composants locaux de ϕ_+ et ϕ_- sont définis de manière analogue en termes des composants locaux de f. Alors le membre de droite de (1) n'est autre que la somme des valeurs des intégrales de Tate (3) de ϕ_+ et ϕ_- au point $s=0$. De plus nous avons évidemment pour chaque v dans V :

$$\phi_{+v}(0) = \phi_{-v}(0) = \int f_v(a_v)\,da_v, \qquad a_v \in \mathrm{A}_v/\mathrm{Z}_v.$$

D'autre part pour chaque v dans T les valeurs au point 0 des intégrales de Tate de ϕ_{+v}

et ϕ_{-v} ne sont autres que les intégrales orbitales singulières des points n_+ et n_-. Posons donc pour simplifier les notations :

$$\mathrm{M}_v = \int f_v(a_v)da_v \qquad \text{pour} \quad v \text{ dans V},$$

$$\mathrm{M}_{v\pm} = 2\mathrm{H}(n_\pm : f_v : \eta_v) \qquad \text{pour} \quad v \text{ dans T}.$$

Alors le membre de gauche de l'égalité (1) s'écrit :

(4) $$\mathrm{L}(0, \eta)\prod_{\mathrm{T}} 1/2\mathrm{L}(0, \eta_v)^{-1}\prod_{\mathrm{V}} |a_v|^{1/2} \times \prod_{\mathrm{V}} \mathrm{M}_v[\prod_{\mathrm{T}} \mathrm{M}_{v+} + \prod_{\mathrm{T}} \mathrm{M}_{v-}].$$

Remarquons que dans chacun des produits infinis presque tous les facteurs sont égaux à 1.

Passons au second membre de (1). Le volume qui y apparaît n'est autre que $2\mathrm{L}(1, \eta)$, comme il est bien connu. L'intégrale est évidemment le produit des intégrales locales analogues :

$$\int f'(t)dt = \prod_v \int f'_v(t_v)dt_v.$$

Si v est dans V, l'intégrale locale n'est autre que M_v d'après l'hypothèse (10.1.2.*ii*). Si v est dans T alors l'intégrale est égale à

$$\mathrm{vol}\,(\mathrm{T}_v/\mathrm{Z}_v)^{-1} 1/2\,[\mathrm{M}_{v-} + \eta_v(c)\mathrm{M}_{v+}]$$

d'après la proposition (4.1) et la proposition (5.1). Le volume qui apparaît dans cette formule n'est autre que $|b_w|^{1/2}\,|a_v|^{-1/2}$, où w est l'unique place de E au-dessus de v. Au total le membre de droite de (1) est égal au produit suivant :

(5) $$2\mathrm{L}(1, \eta) \sum_{c \in \mathrm{N(S)/N}} \prod_{v \in \mathrm{T}} 1/2\mathrm{L}(0, \eta_v)^{-1} \prod_{v \in \mathrm{T}} |b_w|^{-1/2}\,|a_v|^{1/2} \prod_{v \in \mathrm{V}} \mathrm{M}_v \prod_{v \in \mathrm{T}} 1/2\,[\mathrm{M}_{v-} + \eta_v(c)\mathrm{M}_{v-}].$$

En comparant avec (4) nous voyons qu'il suffit de prouver les égalités suivantes :

(6) $$\mathrm{L}(0, \eta)\prod_{v \in \mathrm{V}} |a_v|^{1/2} = \mathrm{L}(1, \eta)\prod_{v \in \mathrm{T}} |b_w|^{-1/2}\,|a_v|^{1/2},$$

(7) $$\prod_{v \in \mathrm{T}} \mathrm{M}_{v+} + \prod_{v \in \mathrm{T}} \mathrm{M}_{v-} = 2 \sum_{c \in \mathrm{N}(s)/\mathrm{N}} \prod_{v \in \mathrm{T}} 1/2\,[\mathrm{M}_{v-} + \eta_v(c)\mathrm{M}_{v+}].$$

L'égalité (6) résulte aussitôt des équations fonctionnelles des fonctions $\mathrm{L}(s, 1_{\mathrm{E}})$ et $\mathrm{L}(s, 1_{\mathrm{F}})$ et leur relation avec $\mathrm{L}(s, \eta)$.

Passons à l'égalité (7). Pour $v \in \mathrm{T} - \mathrm{S}$ nous avons $\eta_v(c) = 1$ d'après la définition de N(S) et $\mathrm{M}_{v+} = \mathrm{M}_{v-}$ (Prop. (5.1)); de plus, pour presque tous les $v \in \mathrm{T} - \mathrm{V}$, $\mathrm{M}_{v+} = \mathrm{M}_{v-} = 1$. En posant $\mathrm{U} = \mathrm{T} \cap \mathrm{S}$, nous voyons que l'identité (7) se réduit à :

$$\prod_{v \in \mathrm{U}} \mathrm{M}_{v+} + \prod_{v \in \mathrm{U}} \mathrm{M}_{v-} = 2 \sum_{c \in \mathrm{N(S)/N}} \prod_{v \in \mathrm{U}} 1/2\,[\mathrm{M}_{v-} + \eta_v(c)\mathrm{M}_{v+}].$$

Soit H le groupe $\{1, -1\}^{\mathrm{U}}$. Pour chaque v dans U définissons un caractère χ_v de H par la formule $\chi_v(h) = h_v$. Soit H' le sous-groupe de H défini par l'équation $\prod_{v \in \mathrm{U}} \chi_v(h) = 1$. Alors l'application $c \to (\eta_v(c))$ définit une bijection de N(S)/N sur H′. Avec cette notation la formule à prouver s'écrit

$$\prod_{v \in \mathrm{U}} \mathrm{M}_{v+} + \prod_{v \in \mathrm{U}} \mathrm{M}_{v-} = 2 \sum_{h \in \mathrm{H}} \prod_{v \in \mathrm{U}} 1/2[\mathrm{M}_{v-} + \chi_v(h)\mathrm{M}_{v+}].$$

Comme $[\mathrm{H} : e] = 2[\mathrm{H}' : e]$, le membre de droite s'écrit :

$$[\mathrm{H}' : e]^{-1} \sum_{\mathrm{Y}} \sum_{h \in \mathrm{H}'} \prod_{v \in \mathrm{Y}} \chi_v(h) \prod_{v \in \mathrm{Y}} \mathrm{M}_{v+} \prod_{v \in \mathrm{U}-\mathrm{Y}} \mathrm{M}_{v-},$$

où la somme extérieure porte sur tous les sous-ensembles Y de U. Le caractère $\prod_{v \in \mathrm{Y}} \chi_v$ a une restriction non triviale à H′, à moins que Y ne soit vide ou égal à U. Dans la somme précédente, il n'y a donc que les termes correspondant à l'ensemble vide et U ; ceci nous donne notre égalité.

11. Le résultat de Waldspurger

(11.1) Nous allons finalement démontrer le résultat de Waldspurger en utilisant l'identité du paragraphe 10. Nous désignerons par S un ensemble fini de places de F satisfaisant les conditions du paragraphe 10. Comme nous pouvons prendre S arbitrairement grand, il n'y aura aucun inconvénient à ne considérer que des représentations cuspidales de G non ramifiées en dehors de S, des couples (G′, T′) appartenant à X(S) et, pour un tel couple, des représentations cuspidales de G′ non ramifiées en dehors de S. Nous noterons K (resp. K^{S}) le produit des sous-groupes compacts K_v pour tous les v (resp. tous les v non dans S) et G^{S} le produit restreint des G_v pour v non dans S. Pour un couple (G′, T′) dans X(S) les notations K′, K'^{S} et G'^{S} ont une signification analogue.

Pour préciser la première condition de Waldspurger remarquons que si les intégrales

$$\int \phi(a)da \qquad \text{et} \qquad \int \phi(bc)\eta\,(\det b)db$$

ne sont pas nulles pour un couple de vecteurs lisses, elles ne sont pas nulles pour un couple de vecteurs K-finis (ϕ, ϕ') ; de plus si S est assez grand, alors ϕ et ϕ' sont K^{S}-invariants. De même s'il existe un couple (G′, T′) dans X, une représentation cuspidale π' et un vecteur lisse ϕ dans l'espace de π' tels que l'intégrale $\int \phi(t)dt$ ne soit pas nulle, alors nous pouvons prendre ϕ K′-finie ; de plus, si S est assez grand, (G′, T′) est dans X(S) et ϕ invariante sous K'^{S}.

(11.2) Considérons donc un ensemble S et des fonctions f et f' satisfaisant les conditions du paragraphe 10. En particulier f_v (resp. f'_v) est biinvariante sous K_v (resp. K'_v). Considérons le noyau K_c. Nous pouvons l'écrire :

$$\mathrm{K}_c = \sum_{\pi} \mathrm{K}_{\pi}, \tag{1}$$

où, pour chaque représentation automorphe cuspidale (non ramifiée en dehors de S) π, nous avons posé :

$$\mathrm{K}_{\pi}(x, y) = \sum_j \rho(f)\phi_j(x)\phi_j^{-}(y), \tag{2}$$

ϕ_j dénotant une base orthonormale du sous-espace des vecteurs K^S-invariants dans l'espace de π. Nous supposerons les ϕ_j K-finies. La série (1) converge non seulement dans l'espace de Hilbert des fonctions de carré intégrable sur le quotient $G(F_A)/G(F)Z(F_A)$, mais aussi dans l'espace des fonctions à décroissance rapide sur le quotient $G(F_A)/G(F)Z(F_A)$. De plus, puisque f_v est K_v-finie pour v infinie, la série (2), pour un f donné, n'a qu'un nombre fini de termes non nuls. Désignons par H(S) l'algèbre de Hecke du groupe G^S relative au sous-groupe K^S. Écrivons $f = f_S f^S$, où f_S (resp. f^S) est le produit des f_v pour v dans S (resp. non dans S). Soit Λ_π le caractère de H(S) attaché à une représentation π. Alors nous avons :

(3) $$\iint K_c(a, b)\eta\,(\det b)da\,db = \sum_\pi a(\pi, f_S)\Lambda_\pi(f^S),$$

où nous avons posé :

(4) $$a(\pi, f_S) = \sum_j \int \rho(f_S)\phi_j(a)da \int \phi_j^-(b)\eta\,(\det b)db.$$

(11.3) Considérons de même un couple (G′, S′) dans X(S). Nous avons encore une décomposition

(1) $$K'_c = \sum_{\pi'} K_{\pi'},$$

(2) $$K_{\pi'}(x, y) = \sum_j \rho(f')\phi_j(x)\phi_j^-(y),$$

où ϕ_j est une base orthonormale de l'espace des vecteurs K'^S-invariants de π. La série (1) converge encore dans l'espace des fonctions à décroissance rapide et la série (2) est finie. En intégrant terme à terme nous trouvons :

(5) $$\iint K_{\pi'}(s, t)ds\,dt = a(\pi', f'_S)\Lambda_{\pi'}(f'^S),$$

où nous avons posé

(6) $$a(\pi', f'_S) = \sum_j \int \rho(f)\phi_j(s)ds \int \phi_j^-(t)dt.$$

L'intégrale totale est donc :

$$\iint K'_c(s, t)ds\,dt = \sum_{\pi'} a(\pi', f'_S)\Lambda_{\pi'}(f'^S).$$

(11.4) Utilisons maintenant notre identité fondamentale. Remarquons que si π' est une représentation cuspidale de G′ et π la représentation cuspidale de G qui lui correspond, alors $\Lambda_\pi(f_S) = \Lambda_{\pi'}(f'_S)$. Puisque π' détermine π nous pouvons écrire $a(\pi, f'_S)$ pour $a(\pi', f'_S)$. D'autre part, pour une représentation π donnée pour le groupe G, il sera commode de poser $a(\pi, f'_S) = 0$ s'il n'existe pas de représentation π' pour G′ correspondant à π. Alors notre identité fondamentale s'écrit :

(1) $$\sum_\pi a(\pi, f_S)\Lambda(\pi, f^S) = \sum_\pi \Big[\sum_{(G', T')} \sum a(\pi, f'_S)\Big]\Lambda(\pi, f^S).$$

Dans cette formule f^S est un élément arbitraire de H(S). Soit v une place dans S. Alors la fonction f_v est arbitraire K_v-finie. La fonction f_v' est reliée à f_v par les conditions (10.1.1) ou (10.1.2). Si v se décompose f_v' est en fait arbitraire K_v'-finie (*cf.* (10.1.4)). Si au contraire v ne se décompose pas, alors f_v' n'est plus arbitraire mais satisfait à une condition de densité : si une fonction h continue sur G_v/Z_v est bi-T_v-invariante et orthogonale à toutes les f_v' possibles alors h est nulle (Prop. (4.2)).

Supposons que π satisfasse à la première condition de Waldspurger ; alors il existe des vecteurs K-finis ϕ et ϕ' dans l'espace de π tels que :

$$\int \phi(a)da \neq 0 \qquad \text{et} \qquad \int \phi'(b)\eta\,(\det b)db \neq 0,$$

et nous pouvons supposer ϕ et ϕ' K^S-invariants. Choisissons la base ϕ_j de telle sorte que $\phi_1 = \phi' \parallel \phi' \parallel^{-1}$. Il existe f_S telle que $\rho(f_S)\phi_1 = \phi$ et $\rho(f_S)\phi_j = 0$ si $j \neq 1$. Alors nous avons

$$a(\pi, f_S) = \int \phi(a)da \left[\int \phi_1(b)\eta\,(\det b)db\right]^- \neq 0.$$

D'après le principe de l'indépendance linéaire « infinie » des caractères de H(S) ([L], p. 211), il existe au moins un (G′, T′) tel que $a(\pi, f_S')$ ne soit pas nul. Il en résulte évidemment qu'il existe au moins un ϕ dans l'espace de π' tel que $\int \phi(t)dt$ ne soit pas nulle. Ainsi π satisfait à la seconde condition de Waldspurger.

Supposons maintenant qu'il existe un couple (G′, T′), une représentation π' et un vecteur K′-fini ϕ dans l'espace de π' tels que l'intégrale $\int \phi(t)dt$ ne soit pas nulle ; nous pouvons supposer que (G′, T′) est dans X(S) et ϕ est invariante sous K'^S. Nous allons voir que nous pouvons choisir f_S' de manière que $a(\pi', f_S')$ ne soit pas nul. L'intégrale sur T définit une forme linéaire continue sur l'espace des vecteurs lisses de π' fixés par K'^S. Écrivons-la comme le produit scalaire avec un vecteur « généralisé » e_T :

$$\int \phi(t)dt = (\phi, e_T).$$

Si h est une fonction lisse à support compact sur G_S/Z_S, alors $\pi'(h)(e_T)$ est défini : c'est un vecteur lisse tel que $(\phi, \pi'(h)e_T) = (\pi'(h^*)\phi, e_T)$ pour tout vecteur ϕ, lisse ou non. Avec cette notation nous avons :

$$a(\pi, f_S') = (\pi'(f_S')e_T, e_T).$$

Le sous-espace de π' formé des vecteurs K'^S-invariants est isomorphe au produit tensoriel des espaces des π_v' avec v dans S. Pour chaque v dans S, il existe une forme linéaire continue non nulle e_v sur l'espace des vecteurs lisses de π_v' qui est invariante sous T_v. Cette forme est unique, à un facteur scalaire près (*cf.* (6.1) et (6.2)), et nous pouvons donc écrire :

$$a(\pi', f_S') = (\pi'(f_S')e_T, e_T) = C \prod_{v \in S} (\pi_v(f_v')e_v, e_v),$$

où C est une constante non nulle. Il s'agit de voir que nous pouvons choisir f_v' de telle sorte que $(\pi_v(f_v')e_v, e_v)$ ne soit pas nul. C'est évident si v se décompose puisque f_v'

est alors arbitraire K'_v-finie. Si v se décompose e_v est en fait un vecteur ordinaire puisque T_v est compact. Alors $(\pi_v(f'_v)e_v, e_v)$ est le produit scalaire de la fonction f'_v avec le coefficient matriciel continu $(\pi'(g)e_v, e_v)$; il ne peut donc être nul pour tout choix de f'_v d'après la propriété de densité des f'_v. D'autre part si (G'', T'') est un autre élément de X(S), alors $a(\pi, f''_S)=0$; autrement il existerait au moins une place v dans S où les groupes G'_v et G''_v ne sont pas isomorphes et les représentations π'_v et π''_v admettent des vecteurs non nuls invariants sous T'_v et T''_v respectivement. Or ceci est impossible (Proposition (6.3)). Le coefficient de Λ_π dans le second membre de (1) est donc non nul, pour un choix convenable de f'_S (i. e. f_S). Il en résulte comme plus haut que $a(\pi, f_S)$ n'est pas nul. Cela implique évidemment que π satisfait à la première condition de Waldspurger. Ceci termine donc la démonstration de l'équivalence des deux conditions de Waldspurger.

BIBLIOGRAPHIE

[D.-M.] J. DIXMIER et P. MALLIAVIN, *Factorisations de fonctions et vecteurs indéfiniment différentiable* (*Bull. Sc. Math.*, II, Sér. 102, p. 305-330).

[J.-L.] H. JACQUET et R. LANGLANDS, *Automorphic Forms on* GL(2) (*Lecture Notes in Math.*, n° 114, Springer Verlag, 1970).

[L] R. LANGLANDS, *Base Change for* GL(2) (*Annals of Mathematics Studies*, 96, Princeton University Press).

[W1] J.-L. WALDSPURGER, *Correspondance de Shimura* (*J. Math. pures et appl.*, vol. 59, 1980, p. 1-133).

[W2] J.-L. WALDSPURGER, *Correspondance de Shimura et Quaternions*, prerint.

[W3] J.-L. WALDSPURGER, *Sur les valeurs de certaines fonctions* L *automorphes en leur centre de symétrie*, preprint ⟨ 19 p, 1 p 3 ⟩.

(Manuscrit reçu le 15 mai 1984,
révisé le 30 mai 1985).

Hervé JACQUET,
Columbia University,
Department of Mathematics,
New York, N. Y. 10027,
U. S. A.