

# ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

ALBERTO MEDINA

PHILIPPE REVOY

## **Algèbres de Lie et produit scalaire invariant**

*Annales scientifiques de l'É.N.S. 4<sup>e</sup> série*, tome 18, n° 3 (1985), p. 553-561

[http://www.numdam.org/item?id=ASENS\\_1985\\_4\\_18\\_3\\_553\\_0](http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1985_4_18_3_553_0)

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1985, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (<http://www.elsevier.com/locate/ansens>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

## ALGÈBRES DE LIE ET PRODUIT SCALAIRE INVARIANT

PAR ALBERTO MEDINA ET PHILIPPE REVOY

### Algèbres de Lie et produit scalaire invariant

0.1. Soit  $G$  un groupe de Lie connexe d'algèbre de Lie  $A$ . La donnée sur  $G$  d'une métrique pseudo-riemannienne bi-invariante équivaut à la donnée d'une forme quadratique  $q : A \rightarrow \mathbb{R}$  non dégénérée dont la forme bilinéaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  associée vérifie

$$(1) \quad \langle [x, y], z \rangle + \langle y, [x, z] \rangle = 0,$$

quels que soient  $x, y$  et  $z$  dans  $A$ . Une telle forme sera dite un produit scalaire invariant sur  $A$ .

Le but de ce travail, qui est une suite de celui entrepris par le premier des auteurs dans [3], est de caractériser les algèbres de Lie qui possèdent un produit scalaire invariant.

0.2. Soit  $\mathcal{C}$  la classe des couples  $(A, \varphi)$  où  $A$  est une algèbre de Lie réelle de dimension finie et  $\varphi$  un produit scalaire invariant sur  $A$ . Si  $(A_i, \varphi_i)$ ,  $i = 1, 2$ , sont deux objets de  $\mathcal{C}$ , leur somme  $(A_1 + A_2, \varphi_1 \perp \varphi_2)$  est dans  $\mathcal{C}$ . Un objet de  $\mathcal{C}$  est indécomposable si la restriction de  $\varphi$  à tout idéal propre de  $A$  est dégénérée. L'algèbre de dimension 1 et les algèbres simples (non commutatives) munies de leurs formes de Killing sont indécomposables. Éventuellement d'autres objets indécomposables pourront être obtenus de la façon suivante :

Soient  $(W, \psi)$  un objet de  $\mathcal{C}$ ,  $S$  une algèbre de Lie et  $d : S \rightarrow \text{Dér}(W)$  un homomorphisme d'algèbres de Lie de  $S$  dans l'algèbre des dérivations antisymétriques de  $W$ . Considérons l'application  $\omega : W \times W \rightarrow S^*$  définie par

$$(\omega(w_1, w_2), s) = \psi(s \cdot w_1, w_2),$$

où  $s \cdot w_1 = d(s)w_1$ . Alors l'espace vectoriel  $A = S^* \oplus W \oplus S$  devient une algèbre de Lie en posant :

$$[(f_1, w_1, s_1), (f_2, w_2, s_2)] \\ = (s_2 \cdot f_1 - s_1 \cdot f_2 + \omega(w_1, w_2), [w_1, w_2]_W + s_1 \cdot w_2 - s_2 \cdot w_1, [s_1, s_2]_S).$$

De plus si  $\beta$  est une forme bilinéaire invariante sur  $S$ , la forme  $\varphi : A \times A \rightarrow \mathbb{R}$  donnée par

$$\varphi((f_1, w_1, s_1), (f_2, w_2, s_2)) = \psi(w_1, w_2) + \beta(s_1, s_2) + f_1(s_2) + f_2(s_1),$$

est un produit scalaire invariant sur  $A$ . L'algèbre  $A$  est appelée l'algèbre double extension de  $(W, \psi)$  par  $S$  au moyen de  $d$ .

0.3. Le principal résultat de cet article est le suivant :

**THÉORÈME I.** — *Tout objet indécomposable  $(A, \varphi)$  de  $\mathcal{C}$  où  $A$  n'est pas simple est une double extension d'un couple  $(W, \psi)$  par une algèbre simple ou par l'algèbre de dimension 1.*

Parmi les conséquences de ce résultat on a :

**THÉORÈME II.** — *La classe  $\mathcal{C}$  des algèbres de Lie qui possèdent un produit scalaire invariant est la plus petite classe d'algèbres de Lie qui contienne les algèbres simples et les algèbres abéliennes et qui soit stable par somme directe et double extension.*

**THÉORÈME III.** — *La classe  $\mathcal{C}'$  des algèbres résolubles ayant un produit scalaire invariant est la plus petite classe d'algèbres de Lie contenant les algèbres abéliennes et qui soit stable par somme directe et par double extension par l'algèbre de dimension 1.*

Ce travail complète celui fait dans [5]. Le contenu des différentes sections est le suivant :

Paragraphe 1, idéaux et produit scalaire invariant; paragraphe 2, double extension. Démonstration du théorème I; paragraphe 3, exemples et applications; paragraphe 4, produit scalaire invariant, dérivations antisymétriques et cohomologie.

Dans la suite les algèbres de Lie sont de dimension finie sur un corps  $K$  de caractéristique nulle. Parfois, quand il est nécessaire,  $K$  désigne le corps des nombres réels.

## 1. Idéaux et produit scalaire invariant

1.1. Soit  $\mathcal{C}$  la classe des algèbres de Lie de dimension finie ayant un produit scalaire invariant. Évidemment  $\mathcal{C}$  contient les algèbres abéliennes et les algèbres semi-simples. Un élément  $(A, \varphi)$  de  $\mathcal{C}$  est dit indécomposable s'il n'est pas produit direct de deux éléments de  $\mathcal{C}$ . Il est clair que l'algèbre de dimension 1 et les algèbres simples sont des éléments indécomposables.

Dorénavant  $(A, \varphi)$  désigne un élément de  $\mathcal{C}$ . De (1) il résulte que l'orthogonal d'un idéal de  $A$  est lui aussi un idéal de  $A$ . Soient  $C^r(A)$  et  $C_r(A)$  respectivement les idéaux des suites centrales descendante et ascendante de  $A$ ; on a :

1.2. PROPOSITION. — *Une algèbre de Lie  $A$  munie d'un produit scalaire invariant vérifie les conditions suivantes :*

1° Pour tout entier  $r$ ,  $C_r(A)^\perp = C_r(A)$ .

2° Un sous-espace  $J$  de  $A$  est un idéal si et seulement si le centralisateur  $Z_A(J)$  de  $J$  dans  $A$  contient  $J^\perp$ .

3° Tout idéal de dimension 1 est contenu dans le centre de  $A$ .

La première assertion résulte d'un argument de récurrence; la deuxième découle de la définition d'un idéal. Quant à la troisième elle se démontre ainsi : soit  $I = Kz$  un idéal de dimension 1,  $I^\perp$  est de codimension 1 et  $Z_A(I)$  le contient. Il suffit de montrer que  $Z_A(I) \neq I^\perp$  sinon il existerait  $c$  dans  $A$  tel que  $\langle z, c \rangle$  et  $[z, c]$  sont non nuls. Alors  $[z, c] = \lambda z$ ,  $\lambda \neq 0$  et  $\langle [z, c], c \rangle = \lambda \langle z, c \rangle \neq 0$  mais  $\langle [z, c], c \rangle = \langle z, [c, c] \rangle = 0$  d'où le résultat.

Noter que 1.2 fournit des conditions nécessaires pour qu'une algèbre ait un produit scalaire invariant. Ainsi par exemple on devra avoir  $\dim A = \dim \mathcal{D}(A) + \dim Z(A)$ . En particulier une algèbre résoluble de centre nul n'admet pas de produit scalaire invariant.

La nature des éléments indécomposables de  $\mathcal{C}$  résulte de la proposition suivante :

1.3. PROPOSITION. — Soit  $(A, \varphi)$  un objet de  $\mathcal{C}$  et soit  $I$  un idéal minimal de  $A$ ; alors :

1° Si  $I$  est non dégénéré,  $I$  est un idéal simple ou un idéal central de dimension 1.

2° Si  $I$  est dégénéré,  $I$  est totalement isotrope et commutatif.

3° L'idéal  $I^\perp$  est un idéal maximal de  $A$ .

D'après 1°, on distingue trois types d'éléments indécomposables de  $\mathcal{C}$  : l'algèbre de dimension 1, les algèbres simples, munie par exemple de leur forme de Killing, et les algèbres non simples dont tout idéal propre est dégénéré. Une simple récurrence fournit alors :

1.4. COROLLAIRE. — Un élément  $(A, \varphi)$  de  $\mathcal{C}$  se décompose en somme directe d'idéaux orthogonaux de l'un des types ci-dessus.

Une autre conséquence de 1.3 est la suivante :

1.5. COROLLAIRE. — Si  $(A, \varphi)$  n'a pas de vecteurs isotropes alors  $A$  est réductive.

Les formes bilinéaires symétriques invariantes sur une algèbre de Lie simple correspondent aux 3-cocycles à valeurs réelles [2]. On peut montrer que l'espace de ces formes est en correspondance biunivoque avec le plus grand sous-corps commutatif  $L$  de  $\text{End}_K(A)$  tel que  $A$  soit une  $L$ -algèbre de Lie simple. On a ainsi :

1.6. PROPOSITION. — L'espace des formes bilinéaires symétriques invariantes sur une algèbre de Lie réelle  $A$  est de dimension 1 ou 2. Il est de dimension 1 si et seulement si  $A_{\mathbb{R}} \otimes \mathbb{C}$  est une  $\mathbb{C}$ -algèbre simple.

Pour plus de détails le lecteur est renvoyé à [3].

## 2. Double extension. Démonstration du théorème I

2.1. Soit  $I$  un idéal minimal de  $A$ ,  $I$  est totalement isotrope. Un calcul simple montre que  $I$  est commutatif et qu'il est contenu dans le centre de  $I^\perp$ . La restriction à  $I^\perp$  du produit scalaire de  $A$  a pour radical  $I$ ; par suite il y a sur l'algèbre  $W = I^\perp/I$  un produit scalaire invariant déduit de celui de  $A$ . Considérons les deux suites exactes d'algèbres de Lie suivante :

$$(2) \quad \begin{cases} 0 \rightarrow I \rightarrow I^\perp \rightarrow I^\perp/I \rightarrow 0, \\ 0 \rightarrow I^\perp \rightarrow A \rightarrow A/I^\perp \rightarrow 0. \end{cases}$$

L'algèbre quotient  $S=A/I^\perp$  est soit simple, soit abélienne de dimension 1; donc  $A$  est produit semi-direct de  $I^\perp$  par  $S$  et nous pouvons identifier  $S$  à une sous-algèbre de  $A$ . Étudions les liens entre les deux suites.

Désignons par  $\beta : \Lambda^2 W \rightarrow I$  le 2-cocycle défini par la première suite de (2). Comme  $S$  est supplémentaire de  $I^\perp$  dans  $A$ ,  $H=I \oplus S$  est un sous-espace non dégénéré de  $A$ , hyperbolique car  $I$  est un sous-espace totalement isotrope de dimension  $1/2 \dim H$ . On a alors,  $A=H \oplus H^\perp$  et  $I^\perp=I \oplus H$ . Identifions le sous-espace  $W$  de  $I^\perp$  à  $H^\perp$ . D'après la première suite, pour  $x$  et  $y$  dans  $H^\perp$  on a :

$$[x, y]_A = [x, y]_W + \beta(x, y),$$

où  $\beta \in \text{Hom}(\Lambda^2 W, I)$  est un 2-cocycle,  $I$  étant considéré comme  $W$ -module trivial. Pour  $d$  dans  $S$  et  $x$  dans  $H^\perp$  posons  $d(x)=[d, x]_A = d_1(x) + \lambda_d(x)$  où  $d_1(x) \in H^\perp$  et  $\lambda_d(x) \in I$ . Si  $d'$  appartient aussi à  $S$  on devra avoir :

$$\langle [d, d'], x \rangle_A = 0 = \langle d, [d', x] \rangle_A,$$

ce qui signifie que  $\langle d, \lambda_{d'}(x) \rangle = 0$  dans  $H$ . Ceci étant vrai quel que soit  $d$  dans  $S$ ,  $\lambda_{d'}(x)$  est orthogonal à  $S$  et à  $I$  et donc nul.

Par conséquent pour  $d$  dans  $S$  et  $(x, y)$  dans  $W^2$  on a d'une part  $\langle d, [x, y]_A \rangle = \langle d, \beta(x, y) \rangle$  et d'autre  $\langle d, [x, y]_A \rangle = \langle d_1(x), y \rangle_W$ .

On a donc la relation fondamentale suivante :

$$\langle d, \beta(x, y) \rangle_H = \langle d_1(x), y \rangle_W$$

pour tout  $x$  et  $y$  dans  $W$  et tout  $d$  dans  $S$ .

Ceci veut dire que la connaissance de  $\beta$  équivaut à celle de l'homomorphisme  $d \rightarrow d_1$  de  $S$  dans l'algèbre des dérivations antisymétriques de  $W$ .

Reste à étudier la structure de  $S$ -module de  $I$ , c'est-à-dire le crochet  $[u, d]$  pour  $u$  dans  $I$  et  $d$  dans  $S$ . Quel que soit  $d'$  dans  $S$  on a  $\langle [u, d], d' \rangle_H = \langle u, [d, d'] \rangle$ . Les éléments  $d$  et  $u$  étant fixés,  $d' \rightarrow \langle u, [d, d'] \rangle_H$  est une forme linéaire sur  $S$ .

Comme  $H$  est non dégénéré, il existe  $v$  unique dans  $I$  tel que  $\langle v, d' \rangle_H = \langle u, [d, d'] \rangle_H$  et donc  $v=[u, d]$ . Ainsi le  $S$ -module  $I$  s'identifie à  $S^*$  ce dernier étant regardé comme  $S$ -module par la représentation co-adjointe.

Ceci achève la preuve du théorème I.

Remarquer que l'espace vectoriel sous-jacent à  $A$  est  $S^* \oplus W \oplus S$  et que le crochet de Lie  $y$  est donné par la formule :

$$(3) \quad [(u, x, s), (v, y, t)] = (\text{ad}_s^*(v) - \text{ad}_t^* u + \beta(x, y), [x, y]_W + s \cdot y - t \cdot x, [s, t]),$$

où  $s \rightarrow \text{ad}_s^*$  dénote la représentation co-adjointe de  $S$  et  $s \cdot y$  l'action de  $S$  sur  $W$ .

2.2. Réciproquement donnons-nous un objet  $(W, \psi)$  de  $\mathcal{C}$ , une algèbre de Lie  $S$  et un homomorphisme  $d$  de  $S$  dans l'algèbre de Lie des dérivations antisymétriques de  $W$ . La formule (3) définit sur l'espace  $A=S^* \oplus W \oplus S$  une structure d'algèbre de Lie. De plus, la somme orthogonale de  $\psi$  et d'un produit scalaire invariant sur l'algèbre  $S^* \times S$  de la

forme

$$\langle (f, s), (f', s') \rangle = f(s') + f'(s) + \langle s, s' \rangle_1,$$

où  $\langle s, s' \rangle_1$  est une forme bilinéaire symétrique invariante sur  $S$ , définit un produit scalaire invariant  $\varphi$  sur  $A$ .

L'algèbre  $A$  ainsi construite est dite une double extension de  $(W, \psi)$  par  $S$  au moyen de  $d$ .

2.3. Prouvons maintenant les théorèmes II et III.

Prenons d'abord  $(A, \varphi)$  avec  $A$  résoluble. Compte tenu de 1.4, nous pouvons supposer  $A$  indécomposable. D'après I,  $A$  est une double extension d'une algèbre  $W$  de dimension  $\dim A - 2$  puisque un idéal minimal  $I$  de  $A$  est une droite (1° de 1.2). Évidemment  $W$  est résoluble. Alors le théorème III résulte d'une simple récurrence.

Pour prouver le théorème II on peut se ramener aux objets  $(A, \varphi)$  de  $\mathcal{C}$  dont le centre de  $A$  est réduit à 0. Dans ce cas il n'y a pas d'idéal minimal  $I$  de dimension 1 (1.3) et  $A/I^\perp = S$  est simple et non commutative. Comme auparavant un argument de récurrence achève la démonstration.

### 3. Exemples et applications

Dans ce qui suit  $(W, \psi)$  est un élément de  $\mathcal{C}$ .

3.1. Soit  $(W, \psi)$  l'algèbre réduite à 0 et soit  $S$  une algèbre quelconque. La double extension de  $(W, \psi)$  par  $S$  n'est autre que l'algèbre  $A = S^* \times S$  produit semi-direct suivant la représentation co-adjointe. Si  $\varphi_1$  est une forme bilinéaire symétrique invariante sur  $S$ , la forme

$$\varphi((f, x), (g, y)) = f(y) + g(x) + \varphi_1(x, y)$$

est un produit scalaire invariant sur  $A$ . Si  $d$  est une dérivation antisymétrique de  $S$  par rapport à  $\varphi_1$ , le couple  $\delta = (-^t d, d)$  est une dérivation antisymétrique de  $A$ . Si  $S$  possède une dérivation inversible  $d$ , en prenant  $\varphi_1 = 0$ ,  $\delta$  est une dérivation inversible de  $A$ . Dans ce cas le 2-cocycle  $\beta$  sur  $A$  défini par  $\beta(a, b) = \varphi(\delta(a), b)$  est inversible et un groupe de Lie connexe d'algèbre  $A$  sera muni d'une structure symplectique invariante à gauche.

3.2. Soit  $d$  une dérivation antisymétrique de  $(W, \varphi)$ . Le 2-cocycle sur  $W$  associé à  $d$  est défini par  $\beta(w_1, w_2) = \varphi(d(w_1), w_2)$ ; il détermine un homomorphisme  $d$  d'algèbres de Lie de  $\mathbb{R}$  dans les dérivations antisymétriques de  $W$ .

Soit  $A$  la double extension de  $(W, \psi)$  par  $\mathbb{R}$  au moyen de  $d$ ; si  $W$  et  $d$  sont nilpotents l'algèbre  $A$  est nilpotente.

Soit  $V$  un espace vectoriel et soit  $(W, \psi)$  l'algèbre commutative  $V^* \oplus V$  munie de sa structure d'espace hyperbolique canonique. Si  $u$  est un endomorphisme de  $V$ , le 2-cocycle  $\beta_u$  sur  $W$  associé à la dérivation  $\delta = (-^t u, u)$  vient donné par :

$$\beta_u((f, x), (g, y)) = g(u(x)) - f(u(y)).$$

Munissons  $V_u = V \oplus \mathbb{R}e$  du crochet de Lie définie par  $[x, y] = 0$  pour  $x$  et  $y$  dans  $V$  et  $[e, x] = u(x)$ . L'algèbre  $A_{u_u}$  double extension de  $(W, \psi)$  par  $\mathbb{R}$  n'est que le produit semi-direct  $A_u = V_u \times V_u$  (3.1). Si  $u$  est bijectif, l'algèbre dérivé  $\mathcal{D}(A_u)$  est isomorphe à l'algèbre d'Heisenberg et  $A_u$  a un 2-cocycle inversible.

3.3. Soit  $(W, \psi)$  une algèbre commutative munie d'un produit scalaire défini positif et soit  $d$  une dérivation antisymétrique inversible de  $W$ . Il existe une base orthonormale  $e_i$ ,  $1 \leq i \leq 2p$ , de  $W$  et des scalaires  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_p > 0$  tels que  $d(e_{2j-1}) = \lambda_j e_{2j}$ ,  $d(e_{2j}) = -\lambda_j e_{2j-1}$ . L'algèbre  $A(\lambda_1, \dots, \lambda_p)$  double extension de  $(W, \psi)$  par  $\mathbb{R} = \mathbb{R}e_0$  suivant  $d$  est une algèbre indécomposable munie d'un produit scalaire invariant d'indice 1. Le crochet sur  $A(\lambda_1, \dots, \lambda_p)$  est donné par le tableau suivant :

$$\begin{aligned} [d, e_{2j-1}] &= \lambda_j e_{2j} & [d, e_{2j}] &= -\lambda_j e_{2j-1}, \\ [e_{2j-1}, e_{2j}] &= \lambda_j e_0, & [d, e_0] &= [e_k, e_0] = 0, \end{aligned}$$

où  $1 \leq j, k \leq 2p$ .

Le produit scalaire a pour expression

$$q\left(\sum_{i=0}^{2p} x_i e_i + yd\right) = x_0 y + \sum_{i=1}^{2p} x_i^2.$$

Deux algèbres  $A(\lambda_1, \dots, \lambda_p)$ ,  $A(\mu_1, \dots, \mu_p)$  sont isomorphes et isométriques si et seulement si, il existe  $k > 0$  tel que  $\mu_i = k \lambda_i$ . Une algèbre  $A(\lambda)$  est isomorphe et isométrique à  $A(1)$ .

Les  $A(\lambda_1, \dots, \lambda_p)$  sont les seules algèbres indécomposables non simples à être munies d'un produit d'indice 1 invariant (cf. [3]). En particulier, le groupe simplement connexe d'algèbre  $A(1)$  est un modèle d'espace-temps (voir [4]).

Soit  $G$  le groupe de Lie simplement connexe d'algèbre de Lie  $A(\lambda_1, \dots, \lambda_p)$ .

Les sous-groupes discrets co-compacts de  $G$  déterminent des variétés de Lorentz compactes homogènes de groupe  $G$ .

Pour des applications des produits scalaires invariants aux structures de Lie-Poisson, le lecteur est renvoyé à [4].

#### 4. Produit scalaire invariant, dérivations antisymétriques et cohomologie

De ce qui précède il est bien évident que les doubles extensions de  $(W, \psi)$  sont déterminées par les dérivations antisymétriques de  $W$ . Ainsi on connaîtra les algèbres ayant un produit scalaire d'indice 2 invariant si l'on connaît les endomorphismes antisymétriques de l'espace de Minkowski et les dérivations antisymétriques des algèbres  $A(\lambda_1, \dots, \lambda_p)$  construites en 3.3. Les dérivations antisymétriques de  $(W, \psi)$  ont aussi d'étroits rapports avec la cohomologie réelle de l'algèbre  $W$ . En effet on a :

4.1. PROPOSITION. — Il y a un isomorphisme naturel entre l'espace de cohomologie  $H^2(W; \mathbb{R})$  et le quotient de l'espace des dérivations antisymétriques de  $W$  par le sous-espace de ses dérivations intérieures.

En fait si  $\beta : W \times W \rightarrow \mathbb{R}$  est une forme bilinéaire alternée, il existe un unique endomorphisme de l'espace  $W$  tel que :

$$(4) \quad \beta(x, y) = \langle d(x), y \rangle; \quad x, y \text{ dans } W.$$

Or il est facile de vérifier les deux faits suivants :

(i)  $d$  est une dérivation de l'algèbre  $W$  si et seulement si  $\beta$  est un 2-cocycle réel pour la représentation triviale.

(ii)  $d$  est une dérivation intérieure si et seulement si  $\beta$  est un 2-cobord.

A titre d'exemple étudions les dérivations antisymétriques de l'algèbre  $W = A(\lambda_1, \dots, \lambda_p)$  de 3.3 et l'espace  $H^2(W, \mathbb{R})$ . Pour ceci notons  $e_i, 0 \leq i \leq 2p+1$  la base de  $W$  décrite en 3.3. Le centre  $Z(W)$  de  $W$  a pour base  $e_0$  et les  $e_i, 0 \leq i \leq 2p$  est une base de  $\mathcal{D}(W)$ . Puisqu'une dérivation  $\delta$  de  $W$  laisse stables  $Z(W)$  et  $\mathcal{D}(W)$ , elle s'écrit matriciellement comme :

$$\delta = \begin{pmatrix} \alpha & \varphi & v \\ 0 & U & y \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}.$$

Ici,  $\alpha, \beta$  et  $v$  sont des scalaires,  $U$  est un endomorphisme de l'espace  $W'$  engendré par les  $e_i, 1 \leq i \leq 2p$ ,  $y$  est un vecteur de  $W'$  et  $\varphi$  une forme linéaire sur  $W'$ . Aussi  $\delta(e_0) = \alpha e_0$ ,  $\delta(e_{2p+1}) = v e_0 + y + \beta e_{2p+1}$ .

Le fait que  $\delta$  soit antisymétrique implique  $v=0, \alpha + \beta = 0$  et  $\varphi(x) + \langle x, y \rangle_{W'} = 0$  pour tout  $x$  dans  $W'$ ; en outre  $U$  est antisymétrique pour le produit scalaire de  $W'$ .

D'autre part, comme  $\delta$  est une dérivation il suit qu'on a dans  $\text{End}(W')$  la relation  $[d, U] = \alpha d$  où  $d$  est la restriction de  $ade_{2p+1}$  à  $W'$ . On en déduit pour tout entier positif  $n, [d^n, U] = n \alpha d^n$ . Donc  $[P(d), U] = \alpha d P'(d)$  pour tout polynôme  $P, P'$  étant son polynôme dérivé.

Soit  $Q$  le polynôme minimal de  $d$ . On a  $\alpha d Q'(d) = 0$  et puisque  $d$  est inversible dans  $gl(W')$ ,  $\alpha Q'(d) = 0$ . Ainsi  $\alpha = 0, [d, U] = 0$  et la matrice  $\delta$  devient

$$\delta = \begin{pmatrix} 0 & \varphi & 0 \\ 0 & U & y \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Par ailleurs, si  $z = \lambda e_{2p+1} + t$  avec  $t \in W'$ , la dérivation intérieure  $adz$  de  $W$  a pour matrice

$$adz = \begin{pmatrix} 0 & \varphi_{dt} & 0 \\ 0 & \lambda d & -dt \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

où  $\varphi_{dt}$  est la forme linéaire  $x \mapsto \langle dt, x \rangle_{W'}$ . En ajoutant une dérivation intérieure à  $\delta$  on peut annuler  $y$  et  $\varphi$  de sorte que  $\delta$  est représentable par une application linéaire



antisymétrique  $U : W' \rightarrow W'$  qui commute avec  $d$ . Deux applications  $U_1$  et  $U_2$  comme celle-ci seront dites équivalentes si leur différence est proportionnelle à  $d$ . Nous avons donc :

4.2. PROPOSITION. — *L'algèbre quotient des dérivations antisymétriques de  $A(\lambda_1, \dots, \lambda_p)$  par l'idéal des dérivations intérieures est la partie antisymétrique du commutant de  $\mathbb{R}[d]$  dans  $gl(W')$  modulo la relation d'équivalence ci-dessus.*

Ce commutant dépend des valeurs  $\lambda_i$ . Si tous les  $\lambda_i$  sont différents, cas générique,  $\mathbb{R}[d]$  est un espace vectoriel de dimension  $2p$ ; le polynôme minimal de  $d$ , et son polynôme caractéristique, est  $\prod_{i=1}^p (d^2 + \lambda_i)$  et le commutant de  $\mathbb{R}[d]$  est exactement  $\mathbb{R}[d]$ . Les éléments antisymétriques de  $\mathbb{R}[d]$  sont les polynômes impaires de  $\mathbb{R}[d]$  : l'algèbre des dérivations antisymétriques de  $A(\lambda_1, \dots, \lambda_p)$  est donc l'algèbre abélienne de base  $d^3, d^5, \dots, d^{2p-1}$  de dimension  $p-1$ .

Si tous les  $\lambda_i$  sont égaux à  $\lambda$ , le polynôme minimal de  $d$  est  $d^2 + \lambda$  et  $\mathbb{R}[d]$  est le corps des complexes;  $W'$  est un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension  $p$  et le commutant de  $\mathbb{R}[d]$  est  $gl_{\mathbb{C}}(W')$ . On se ramène au cas  $\lambda=1$  et on pose alors pour  $x$  et  $y$  dans  $W'$   $f(x, y) = \langle x, y \rangle + i \langle x, dy \rangle$  : c'est une forme hermitienne définie positive. La condition  $[d, U]=0$  et l'antisymétrie de  $U$  signifie que  $U$  est un élément de l'algèbre de Lie unitaire  $u(p)$ . Par conséquent l'algèbre quotient dans 4.2, pour  $\lambda_i = \lambda, 1 \leq i \leq p$ , est l'algèbre  $su(p)$  qui est de dimension  $p^2 - 1$ . Dans le cas général, dont la démonstration est laissé au lecteur, on a :

4.3. PROPOSITION. — *Soient  $\lambda'_1, \dots, \lambda'_q$  les valeurs distinctes parmi les  $\lambda_i$  et  $\alpha_1, \dots, \alpha_q$  leurs multiplicités respectives. Alors l'algèbre de Lie des dérivations antisymétriques modulo les dérivations intérieures de  $A(\lambda_1, \dots, \lambda_p)$  est le quotient de l'algèbre  $D = \prod_{i=1}^q u(\alpha_i)$  par la sous-algèbre abélienne de dimension 1, plongement diagonal de  $\mathbb{R}$  dans le centre  $\mathbb{R}f_1 \times \mathbb{R}f_2 \times \dots \times \mathbb{R}f_q$  de  $D$ .*

La proposition suivante est une conséquence immédiate de 4.3.

4.4. COROLLAIRE. —  $\dim H^2(A(\lambda_1, \dots, \lambda_p); \mathbb{R}) = \sum_{i=1}^q \alpha_i^2 - 1$ .

Pour terminer nous allons prouver le résultat suivant que nous avons déjà énoncé dans [5].

4.5. THÉORÈME. — *Soient  $A$  une algèbre de Lie munie d'un produit scalaire invariant. Dans l'espace des dérivations antisymétriques, l'ensemble des dérivations de rang maximal est un ouvert  $U$  (au sens de la topologie de Zariski ou de la topologie ordinaire si  $K = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ ). Si  $d$  est dans  $U$ , la sous-algèbre  $\text{Ker } d$  est abélienne.*

La première affirmation est claire car la maximalité du rang se traduit par un nombre fini d'inégalités algébriques. Pour la seconde rappelons d'abord le résultat suivant dû à M. Duflo et M. Vergne [1] : soit  $A$  une algèbre de Lie,  $f \in A^*$  et  $A(f) = \{x \in A;$

$f \circ \text{ad } x = 0$ }. Alors  $A(f)$  est une sous-algèbre de  $A$ ; l'ensemble des  $f$  de  $A^*$  tels que  $A(f)$  soit de dimension minimale est un ouvert dense de  $A^*$ ; de plus si  $f$  est dans cet ouvert,  $A(f)$  est une sous-algèbre commutative de  $A$ . Dans les hypothèses de 4.5,  $\text{Ker } d$  est le radical de la 2-forme fermée  $\beta_d(x, y) = \langle dx, y \rangle$ . La preuve de la seconde assertion se fera en rendant  $d$  intérieure et donc  $\beta_d$  exacte au moyen d'une double extension et en appliquant le résultat rappelé.

Soit  $B$  l'algèbre de Lie double extension de  $A$  par  $\mathbb{R}$  suivant  $d$ ; on a alors pour tout  $x$  dans  $A$  :

$$(5) \quad \dim \text{Ker}(d + \text{ad}_A x) = \dim \text{Ker } \text{ad}_B(d + x) - 2.$$

En effet  $\text{Ker}(d + \text{ad}_A x)$  est l'ensemble des vecteurs  $z$  de  $A$  tels que  $d(z) + [x, z] = 0$  tandis que  $\text{Ker } \text{ad}_B(d + x)$  est formé des vecteurs  $\lambda d + \mu e + y$  tels que  $d(y) + [x, y] - \lambda d(x) = 0$  et  $\langle \lambda d(x), y \rangle = 0$ . Comme  $d(y)$  et  $[x, y]$  sont tous deux orthogonaux à  $y$ , la première condition entraîne la seconde. La condition restante peut alors s'écrire  $d(y - \lambda x) + [x, y - \lambda x] = 0$ , c'est-à-dire que  $y - \lambda x \in \text{Ker}(d + \text{ad}_A x)$ . On voit donc que l'application de  $\text{Ker } \text{ad}_B(d + x)$  dans  $K^2 \oplus A$  qui à  $\lambda d + \mu e + y$  associe  $(\lambda, \mu, y - \lambda x)$  est une bijection sur  $K^2 \oplus \text{Ker}(d + \text{ad}_A x)$  d'où (5).

Choisissons  $d$  dans l'ouvert  $U$ . Pour  $x \in A$  voisin de l'origine,  $d + \text{ad}_A x$  est encore dans l'ouvert  $U$  et donc  $\dim \text{Ker}(d + \text{ad}_A x)$  est constante pour  $x$  dans un voisinage de 0 dans  $A$ . D'après (5) il s'ensuit que la dimension de  $\text{Ker } \text{ad}_B(d + x)$  est constante dans un voisinage de 0 dans  $A$ . Comme  $e$  est dans le centre de  $B$ , si  $v$  est voisin de l'unité du corps  $K$  et  $\mu$  quelconque, la dimension du noyau de  $\text{ad}_B v(d + x + \mu e)$  est constante. Cela signifie que  $\dim \text{Ker } \text{ad}_B(\cdot)$  est constante dans un voisinage de  $d$  dans  $B$ . Posons  $f = \langle d, - \rangle_B$ , puisque  $\text{Ker } \text{ad}_B d$  est le radical de  $\beta_f$ , on voit alors qu'il existe dans  $B^*$  un ouvert  $\Omega$  contenant  $f$  dans lequel le rang de  $g\beta$ ,  $g \in \Omega$ , est constant. Donc le rang de  $\beta_f$ , définie par  $\beta_f(x, y) = \langle d, [x, y] \rangle$  est maximal et la sous-algèbre  $\text{Ker } \beta_f = \text{Ker } \text{ad}_B d$  est abélienne. Finalement comme la sous-algèbre  $\text{Ker } d$  de  $A$ , est l'intersection de  $A$  et de  $\text{Ker } \text{ad}_B d$ , le résultat est démontré.

#### BIBLIOGRAPHIE

- [1] M. DUFLO et M. VERGNE, *Une propriété de la représentation co-adjointe d'une algèbre de Lie* (C. R. Acad. Sci., Paris, t. 268, 1969, p. 583-585).
- [2] J. L. KOSZUL, *Homologie et cohomologie des algèbres de Lie* (Bull. Soc. Math. Fr., t. 78, 1950, p. 65-127).
- [3] A. MEDINA, *Groupes de Lie munis de pseudo-métriques de Riemann bi-invariantes* (Sém. Géom. Diff., 1981-1982, Montpellier).
- [4] A. MEDINA, *Structure orthogonale sur une algèbre de Lie et structure de Lie-Poisson associée* (Sém. Géom. Diff., 1983-1984, Montpellier).
- [5] A. MEDINA et Ph. REVOY, *Caractérisation des groupes de Lie ayant une pseudo-métrique bi-invariante* (Applications. Sem. Sud-Rhodanien de Géom., vol. III, Hermann, Paris), travaux en cours.
- [6] J. MILNOR, *Curvatures of Left Invariant Metrics on Lie Groups* (Adv. in Math., vol. 21, 1976, p. 283-329).

(Manuscrit reçu le 19 septembre 1984.)

A. MEDINA et Ph. REVOY  
 Université de Montpellier,  
 Mathématiques,  
 place Eugène-Bataillon,  
 34060 Montpellier Cedex.