Annales scientifiques de l'É.N.S.

Nicolas Lerner

Unicité du problème de Cauchy pour des opérateurs elliptiques

Annales scientifiques de l'É.N.S. 4e série, tome 17, nº 3 (1984), p. 469-505

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1984_4_17_3_469_0>

Ann. scient. Éc. Norm. Sup.,
4^e^ série, t. 17, 1984, p. 469-505.

UNICITÉ DU PROBLÈME DE CAUCHY POUR DES OPÉRATEURS ELLIPTIQUES

PAR Nicolas LERNER

0. Introduction

Nous présentons ici un résultat d'unicité du problème de Cauchy pour des opérateurs elliptiques à coefficients (complexes) C^∞ sans faire d'hypothèses de régularité sur les racines caractéristiques. Ce résultat généralise les théorèmes de Calderoń [7] et de Hörmander [11] et introduit une notion de pseudo-convexité prolongeant celle de Hörmander.

L'outil essentiel, qui nous a permis de suivre davantage de termes dans $P^* P$, est le calcul symbolique dans la quantification de Weyl (*cf.* Weyl [25], Hörmander [13], Unterberger [23]) et notamment la formule de Segal [21], utile pour calculer exactement le conjugué d'un opérateur avec un poids, conjugué dont on étudie la sous-ellipticité (Treves [22], Menikoff [17]).

Nous espérons prolonger ce résultat à des opérateurs non elliptiques, sur lesquels les travaux récents sont nombreux (Alinhac-Zuily [5], Lascar-Zuily [14], Alinhac [1], Saint-Raymond [20], Bahouri [6], Dehman [8], pour des résultats d'unicité et de non-unicité).

Nous nous proposons d'effectuer tout d'abord un rappel des principaux résultats pour ce qui concerne l'unicité du problème de Cauchy pour des opérateurs elliptiques. Commençons par donner la définition de l'unicité (locale) du problème de Cauchy.

Étant donnés un opérateur différentiel P, une hypersurface S, x_0 un point de S, on dit que P possède l'unicité de Cauchy par rapport à S près de x_0 si la condition suivante est vérifiée.

$$(0.1)\quad \begin{cases} \text{Il existe un voisinage V de } x_0 \text{ tel que si } u\in C^\infty(V),\ Pu=0 \text{ sur V, et } u \text{ nulle d'un} \\ \text{côté de S, alors } u \text{ est identiquement nulle sur un voisinage de } x_{01}. \end{cases}$$

Dans la suite on appellera m l'ordre de P, p_m son symbole principal, supposé *elliptique*.

Le théorème de Calderoń [7], dans le cas elliptique, implique l'unicité si la condition suivante est vérifiée.

$$(0.2)\quad \begin{cases} \text{L'équation en } \tau,\ p_m(x_0, \xi+\tau\varphi'(x_0))=0, \text{ pour } (x_0, \xi)\in T^*(\mathbb{R}^n)\diagdown\text{conormal de S} \\ \text{a des racines simples.} \\ [\varphi(x)=\varphi(x_0),\ \varphi \text{ réelle } C^\infty,\ \varphi'(x_0)\neq 0, \text{ est une équation de S.}] \end{cases}$$

En outre, le théorème de Calderon implique l'unicité pour des caractéristiques (non réelles) doubles de multiplicité constante (Hörmander [10], Mizohata [18]).

Hörmander [11], généralisant les résultats de Calderon, introduit la notion de pseudo-convexité qui tient compte, contrairement au précédent théorème de la « forme » de la surface et du côté où est supportée la solution considérée. Dans le cas elliptique, l'hypersurface $S\equiv\varphi(x)=\varphi(x_0)$ est dite fortement pseudo-convexe par rapport à P en x_0 si :

$$(0.3)\quad \begin{cases} p_m(x_0, \zeta_0)=\{p_m, \varphi\}(x_0, \zeta_0)=0 \qquad \text{implique} \quad \dfrac{\Gamma}{2i}\{\bar{p}_\varphi, p_\varphi\}_{|x_0, \zeta_0}>0, \\ \text{avec :} \\ \qquad \zeta_0=\xi-i\Gamma\varphi'(x_0), \qquad p_\varphi=p_m(x, \xi-i\Gamma\varphi'(x)). \end{cases}$$

Sous la condition (0.3), P possède l'unicité de Cauchy par rapport à S près de x_0.

Des théorèmes avec racines C^∞ (i.e. les racines en τ de (0.2) sont C^∞ de (x, ξ)), ont également été obtenus par Watanabe et Zuily [24], généralisant un résultat de Mizohata [18] et Hörmander [10]; sans donner le détail de ces théorèmes, rappelons toutefois qu'étant donnés un opérateur elliptique d'ordre m à coefficients C^∞ dont la multiplicité des caractéristiques est au plus r et une hypersurface $S\equiv\varphi(x)=\varphi(x_0)$, on obtient l'unicité de Cauchy par rapport à S près de x_0 moyennant une restriction sur $p_m, \ldots, p_{m-q+1}$ où $q=E(r+1/2)$, et la régularité des racines de l'équation (0.2).

Zuily [26] a donné un résultat pour des opérateurs à caractéristiques de multiplicité constante « assez élevée », sous une hypothèse portant sur le symbole sous-principal de l'opérateur.

Dans le cas de la dimension (*totale*) *deux*, des résultats spécifiques ont été obtenus par Zuily [27] avec des racines caractéristiques singulières.

Des résultats de non-unicité ont été fournis, tout d'abord par le contre-exemple de Pliš [19] (*voir* aussi Hörmander [12]) qui suit :

$$(0.4)\qquad P=(D_t^2+D_x^2+D_y^2)^2+t(D_x^2+D_y^2)^2-D_x^4/2,$$

est un opérateur elliptique à caractéristiques au plus doubles (de multiplicité variable). Soit $S\equiv t=0$; il existe a, u fonctions C^∞ nulles pour $t\leqq 0$ près de 0, telles que $Pu+au=0$ avec en outre support de $u=\{t\geqq 0\}$ localement.

Alinhac [2], généralisant ce résultat, a établi un théorème général de non unicité sous une hypothèse géométrique impliquant l'existence de « suffisamment » de caractéristiques doubles sur l'hypersurface.

Le plan de l'article est le suivant :

1. Le résultat (hypothèses, théorème général, exemples).

2. Invariance des hypothèses.
3. Conjugaison et quantification de Weyl.
4. Preuve.

1. Le résultat

Soit S une hypersurface orientée de $\mathbb{R}^n$ passant par x_0 et P un opérateur différentiel d'ordre m, de symbole principal p_m, de symbole sous-principal p_{m-1}. Une équation de S étant $\varphi(x)=\varphi(x_0)$ [φ réelle C^∞, $\varphi'(x_0)\neq 0$], on pose :

$$\varphi_0(x)=\varphi(x_0)+\varphi'(x_0)(x-x_0),$$

$H_{\varphi 0}$ désignant le champ hamiltonien de φ_0.

On pose alors pour $x\in\mathbb{R}^n$, $Z\in\mathbb{C}^n$, $\Gamma\in\mathbb{R}$:

$$C_{2m}^{[0]}(x, Z)=|p_m(x, Z)|^2, \tag{1.1}$$

$$C_{2m-1}^{[1]}(x, Z)=|H_{\varphi 0}(p_m)(x, Z)|^2, \tag{1.2}$$

$$C_{2m-1}^{[0]}(x, Z, \Gamma)=\Gamma\sum_{1\leqq j,\, k\leqq n}\frac{\partial^2(-\varphi)}{\partial x_j\,\partial x_k}(x_0)\,\overline{\frac{\partial p_m}{\partial \xi_j}(x, Z)}\,\frac{\partial p_m}{\partial \xi_k}(x, Z) + \operatorname{Im}\sum_{j=1}^{n}\overline{\frac{\partial p_m}{\partial \xi_j}(x, Z)}\,.\,\frac{\partial p_m}{\partial x_j}(x, Z), \tag{1.3}$$

$$C_{2m-2}^{[2]}(x, Z)=\frac{1}{2}|H_{\varphi 0}^2(p_m)(x, Z)|^2, \tag{1.4}$$

$$C_{2m-2}^{[1]}(x, Z, \Gamma)=\Gamma\sum_{1\leqq j,\, k\leqq n}\frac{\partial^2(-\varphi)}{\partial x_j\,\partial x_k}(x_0)\overline{\left(\frac{\partial}{\partial \xi_j}(H_{\varphi 0}(p_m))\right)(x, Z)} \times\left(\frac{\partial}{\partial \xi_k}(H_{\varphi 0}(p_m))\right)(x, Z)+\operatorname{Im}\sum_j\overline{\left(\frac{\partial}{\partial \xi_j}(H_{\varphi 0}(p_m))\right)(x, Z)}\left(\frac{\partial}{\partial x_j}(H_{\varphi 0}(p_m))\right)(x, Z). \tag{1.5}$$

On fait *l'une* des autre hypothèses suivantes $H(k, l)$, Z_0 désignant un covecteur complexe de la forme :

$$\xi_0-i\Gamma_0\,\varphi'(x_0)\qquad\text{avec}\quad \Gamma_0\geqq 0,\qquad |\xi_0|^2+\Gamma_0^2|\varphi'(x_0)|^2=1.$$

Hypothèse H (0,1) :

$$C_{2m}^{[0]}(x_0, Z_0)=0\qquad\text{implique}\quad C_{2m-1}^{[1]}(x_0, Z_0)>0.$$

Hypothèse H (0,0) :

$$C_{2m}^{[0]}(x_0, Z_0)=C_{2m-1}^{[1]}(x_0, Z_0)=0\qquad\text{implique}\quad C_{2m-1}^{[0]}(x_0, Z_0, \Gamma_0)>0.$$

Hypothèse H (1,2) :

$$
\mathrm{H}^0(1,2)\quad \left\{\begin{array}{l}
\qquad C^{[0]}_{2m}(x_0, Z_0)=C^{[1]}_{2m-1}(x_0, Z_0)=0 \\
\text{implique :} \\
\qquad C^{[0]}_{2m-1}(x_0, Z_0, \Gamma_0)\geqq 0, \\
C^{[0]}_{2m}(x_0, Z_0)=C^{[1]}_{2m-1}(x_0, Z_0)=C^{[0]}_{2m-1}(x_0, Z_0, \Gamma_0)=0 \\
\text{implique :} \\
\qquad C^{[2]}_{2m-2}(x_0, Z_0)>0,
\end{array}\right.
$$

$$
\mathrm{H}'(1,2)\quad \left\{\begin{array}{l}
\text{soit :} \\
(x_0, Z_0)=(x_0, \xi_0-i\Gamma_0\varphi'(x_0)), \qquad \Gamma_0\geqq 0, \quad |Z_0|=1, \\
\text{tel que :} \\
C^{[0]}_{2m}(x_0, Z_0)=C^{[1]}_{2m-1}(x_0, Z_0)=C^{[0]}_{2m-1}(x_0, Z_0)=0;
\end{array}\right.
$$

il existe un voisinage W de (x_0, Z_0) dans $\mathbb{R}^n\times$ sphère unité de $\mathbb{C}^n$ et un voisinage V de Γ_0 dans R_+, des fonctions $\lambda_m(x, Z, \Gamma)$, $\mu_m(x, Z, \Gamma)$, homogènes de degré m en (Z, Γ) bornées sur $\mathrm{W}\times\mathrm{V}$, des constantes λ_0, μ_0 tels que pour $(x, Z, \Gamma)\in\mathrm{W}\times\mathrm{V}$ on ait :

$$\Gamma C^{[0]}_{2m-1}(x, Z, \Gamma)+2\,\mathbb{R}e\,p_m(x, Z)\,\lambda_m(x, Z, \Gamma)+\Gamma^2 C^{[1]}_{2m-1}(x, Z)\,\lambda_0\geqq 0,$$

et :

$$-\|\Gamma(d_\xi p_m)(x, Z)\|^2+2\,\mathbb{R}e\,\overline{p_m(x, Z)}\,\mu_m(x, Z, \Gamma)+\Gamma^2 C^{[1]}_{2m-1}(x, Z)\,\mu_0\geqq 0.$$

Hypothèse H (1,1) :

$$
\mathrm{H}^0(1,1)\quad \left\{\begin{array}{l}
\qquad C^{[0]}_{2m}(x_0, Z_0)=C^{[1]}_{2m-1}(x_0, Z_0)=0 \\
\text{implique :} \\
\qquad C^{[0]}_{2m-1}(x_0, Z_0)\geqq 0, \\
C^{[0]}_{2m}(x_0, Z_0)=C^{[1]}_{2m-1}(x_0, Z_0)=C^{[0]}_{2m-1}(x_0, Z_0, \Gamma_0)=C^{[2]}_{2m-2}(x_0, Z_0)=0, \\
\text{implique :} \\
\qquad C^{[1]}_{2m-2}(x_0, Z_0, \Gamma_0)>0.
\end{array}\right.
$$

$\mathrm{H}'(1,1)$ identique à $\mathrm{H}'(1,2)$.

Remarquons que l'hypothèse H (0,1) est l'hypothèse de caractéristiques simples de Calderoń. De plus H (0,0) est l'hypothèse de forte pseudo-convexité de Hörmander. En outre, on peut observer que l'hypothèse (microlocale) $\mathrm{H}^0(1,2)$ n'est *pas* suffisante pour obtenir l'unicité car l'opérateur de Pliš (0.4) à caractéristiques de multiplicité au plus double vérifie cette hypothèse; celle-ci s'écrit en effet avec $Z_0=\xi_0-i\Gamma_0\varphi'(x_0)$:

$$p_m(x_0, Z_0)=\{p_m, \varphi\}(x_0, Z_0)=0 \qquad \text{implique} \quad C^{[0]}_{2m-1}(x_0, Z_0, \Gamma_0)\geqq 0$$

et :

$$p_m(x_0, Z_0)=\{p_m, \varphi\}(x_0, Z_0)=C^{[0]}_{2m-1}(x_0, Z_0, \Gamma_0)=0,$$

implique :

$$\{\{p_m, \varphi\}, \varphi\}(x_0, Z_0) > 0.$$

Or la première partie est vérifiée pour l'opérateur de Pliš car, aux points caractéristiques doubles, comme l'opérateur est à coefficients constants en « x » (ici variable d'espace), $C^{[0]}_{2m-1}(x_0, Z_0, \Gamma_0) = 0$, et la deuxième l'est également car l'opérateur est à caractéristiques au plus doubles.

Au contraire, l'hypothèse $H'(1,2)$ n'est pas vérifiée pour l'opérateur de Pliš, comme on le verra plus bas.

De manière générale, $H^0(k, l)$ est une hypothèse microlocale non suffisante pour assurer l'unicité si $k \geqq 1$, la première partie de $H'(k, l)$ permet de « recoller » les hypothèses $H^0(k, l)$ et la deuxième partie de $H'(k, l)$ est liée à la convexification.

Nous pouvons alors énoncer les résultats principaux.

THÉORÈME 1. — *Soit* P *un opérateur différentiel elliptique à coefficients* C^∞ (*complexes*) *et* $S \equiv \varphi(x) = \varphi(x_0)$ *une hypersurface orientée.*

On suppose qu'il existe (k, l) *tels que l'hypothèse* $H(k, l)$ *soit vérifiée. Alors, il existe un voisinage* V *de* x_0 *tel que, si :*

$$Pu = 0 \textit{ sur } V \qquad \textit{et} \qquad V \cap \operatorname{supp} u \subset S_+ \equiv \varphi(x) \geqq \varphi(x_0),$$

alors $u \equiv 0$ *près de* x_0.

Autrement dit, P *possède l'unicité de Cauchy par rapport à* S *près de* x_0 (0.1).

Remarquons que le théorème de Calderoń est $H(0,1)$ implique l'unicité, que celui de Hörmander est $H(0,0)$ implique l'unicité.

Le théorème 1 est une conséquence du théorème 2, celui-ci établissant une estimation de Carleman.

THÉORÈME 2. — *Soit* P *un opérateur différentiel elliptique à coefficients* C^∞ (*complexes*) *et* $S \equiv \varphi(x) = \varphi(x_0)$ *une hypersurface orientée. On suppose qu'il existe* (k, l) *tels que l'hypothèse* $H(k, l)$ *soit vérifiée. Il existe un voisinage* V *de* x_0, *une constante* $C > 0$ *tels que, pour tout* $v \in C_0^\infty(V)$, *pour tout* $\gamma \geqq C$, *on ait :*

$$\|P_\gamma v\|_{L^2} \geqq C^{-1} \sum_{j=0}^{m} \gamma^{m-j-((k+1)/2)} \sum_{|\alpha|=j} \|D_x^\alpha v\|_{L^2},$$

avec :

$$P_\gamma = e^{-\gamma\psi} P e^{\gamma\psi},$$

où :

$$\psi(x) = \varphi(x_0) + \varphi'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2!}\varphi''(x_0)(x - x_0)^{(2)} - \frac{C}{2}[\varphi'(x_0)(x - x_0)]^2 + \frac{1}{2C^2}|x - x_0|^2.$$

Donnons maintenant quelques exemples.

(*a*) Tout d'abord, montrons que l'opérateur de Pliš (0.4) ne vérifie pas l'hypothèse de « recollement » H′(1,2).

En effet :

$$p_m=(\tau^2+\xi^2+\eta^2)^2+t\,(\xi^2+\eta^2)^2-\frac{1}{2}\xi^4, \qquad S\equiv t=0,$$

$$(x_0;\,Z_0)=\left(0,0,0;\,-\frac{i\sqrt{2}}{2},\,0,\,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=(t_0,\,x_0,\,y_0;\,\tau_0,\,\xi_0,\,\eta_0).$$

Choisissons alors, pour $0<\varepsilon<\sqrt{2}/5$,

$$\tau=-i\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\varepsilon\right), \qquad \xi=(\varepsilon\sqrt{2}-5\,\varepsilon^2)^{1/2},$$

$$\eta=\frac{\sqrt{2}}{2}-2\,\varepsilon, \qquad \Gamma=\frac{\sqrt{2}}{2}, \qquad t=\xi^4/2\,(\xi^2+\eta^2)^2,$$

de sorte que $|\tau|^2+|\xi|^2+|\eta|^2=1$.

Comme ici $p_m=(\tau^2+\xi^2+\eta^2)^2$,

$$C^{[1]}_{2m-1}=\left|\frac{\partial p_m}{\partial\tau}\right|^2, \qquad C^{[0]}_{2m-1}=\operatorname{Im}\overline{\frac{\partial p_m}{\partial\tau}}\,.\,\frac{\partial p_m}{\partial t},$$

on obtient, λ_m et λ_0 devant être bornés :

$$\Gamma\,C^{[0]}_{2m-1}+2\,\mathbb{R}e\,\overline{p_m}\,.\,\lambda_m+\Gamma^2\,C^{[1]}_{2m-1}\,\lambda_0=-\varepsilon\sqrt{2}+O(\varepsilon^2)$$

qui est négatif pour ε assez petit.

(*b*) En dimension (totale) deux $(t,\,\underline{x})\in\mathbb{R}$, de variables duales $(\tau,\,\xi)$, un opérateur de symbole principal p_m avec :

$$p_m=(\tau+i\,\xi)^2+a(t)\,\xi^2, \tag{1.6}$$

par rapport à l'hypersurface $S\equiv t=0$, près de $(0,0)$, vérifie l'hypothèse H(1,2) si la condition suivante est satisfaite :

$$\left\{\begin{array}{l}\text{il existe } C_0>0 \text{ telle que pour } 0\leqq|t|<C_0^{-1},\\ \qquad |a'(t)|^2\leqq C_0\,|a(t)|\end{array}\right.. \tag{1.7}$$

Remarquons que, si $a(0)\neq 0$, (1.7) est vérifiée et en outre l'opérateur est à racines caractéristiques simples (et elliptique) et le théorème de Calderoń permet de conclure.

On suppose par conséquent que $a(0)=0$. On a :

$$(x_0;\ Z_0)=(\underline{x}_0,\ t_0;\ \xi_0,\ \tau_0)=\left(0{,}0;\ \frac{\sqrt{2}}{2},\ -i\frac{\sqrt{2}}{2}\right),$$

$$C_{2m}^{[0]}(x,\ Z)=|(\tau+i\xi)^2+a(t)\xi^2|^2,$$

$$\Gamma^2 C_{2m-1}^{[1]}(x,\ Z)=4\Gamma^2|\tau+i\xi|^2,$$

$$\Gamma C_{2m-1}^{[0]}(x,\ Z,\ \Gamma)=\Gamma \operatorname{Im} 2\overline{(\tau+i\xi)a'(t)}\xi^2,$$

$$C_{2m-2}^{[2]}(x,\ Z)=2,$$

avec $x=(t,\ \underline{x})$, t dans un voisinage de 0, $\underline{x}$ dans un voisinage de 0, $\tau\in\mathbb{C}$ dans un voisinage de $-(i\sqrt{2}/2)$, $\xi\in\mathbb{C}$ dans un voisinage de $\sqrt{2}/2$, $\Gamma\in\mathbb{R}_+$ dans un voisinage de $\sqrt{2}/2$,

$$|\tau|^2+|\xi|^2=1 \qquad \text{et} \qquad Z=(\tau,\ \xi).$$

L'hypothèse microlocale $H^0(1{,}2)$ est trivialement vérifiée.

Posant :

$$\Lambda=\Gamma C_{2m-1}^{[0]}(x,\ Z,\ \Gamma)+2\,\mathbb{R}e\,\overline{p_m(x,\ Z)}\,\lambda_m(x,\ Z,\ \Gamma)+\Gamma^2 C_{2m-1}^{[1]}(x,\ Z)\,\lambda_0(x,\ Z,\ \Gamma),$$

on obtient :

$$\Lambda=2\,\Gamma\operatorname{Im}(\overline{\tau+i\xi})\,a'(t)\,\xi^2 +2\,\mathbb{R}e\,\overline{[(\tau+i\xi)^2+a(t)\,\xi^2]}\,\tilde{\lambda}_2(t,\ \tau,\ \xi,\ \Gamma)+4\Gamma^2|\tau+i\xi|^2\,\tilde{\lambda}_0(t,\ \tau,\ \xi,\ \Gamma).$$

Prenons $\tilde{\lambda}_2(t,\ \tau,\ \xi,\ \Gamma)=(a(t)/|a(t)|)\xi^2$ si $a(t)\neq 0$, et $\tilde{\lambda}_2(t,\ \tau,\ \xi,\ \Gamma)=0$ si $a(t)=0$, de sorte que $|\tilde{\lambda}_2|\leqq|\xi|^2$ et $\tilde{\lambda}_2$ est borné car $|\tau|^2+|\xi|^2=1$; prenons $\tilde{\lambda}_0=C_1$ Cte$\geqq 0$.

Pour $\alpha>0$ il vient, si $a(t)\neq 0$;

$$\Lambda\geqq-\Gamma^2|\tau+i\xi|^2\alpha-\alpha^{-1}|a'(t)|^2|\xi|^4+2|a(t)||\xi|^4 -2|\tau+i\xi|^2|\xi|^2+4C_1\Gamma^2|\tau+i\xi|^2,$$

et par suite :

$$\Lambda\geqq 2|\xi|^4\left[|a(t)|-\frac{1}{2\alpha}|a'(t)|^2\right]+4\Gamma^2|\tau+i\xi|^2\left[C_1-\frac{\alpha}{4}-\frac{1}{2}\frac{|\xi|^2}{\Gamma^2}\right],$$

ce qui a un sens car $|\xi|/\Gamma$ est proche de 1 et on peut supposer $(|\xi|^2/\Gamma^2)\leqq 2$ dans le voisinage considéré. On choisit alors $\alpha=(C_0/2)$ (C_0 est la constante de (1.7)), et $C_1=(C_0/8)+1$, il vient :

$$\Lambda\geqq 2|\xi|^4 C_0^{-1}[C_0|a(t)|-|a'(t)|^2]+4\Gamma^2|\tau+i\xi|^2\left[\frac{C_0}{8}+1-\frac{C_0}{8}-1\right],$$

et par suite $\Lambda\geqq 0$ dans le cas $a(t)\neq 0$.

Si $a(t)=0$,

$$\Lambda=2\Gamma\,\mathrm{Im}\,(\overline{\tau+i\xi})\,a'(t)\,\xi^2+4\Gamma^2\,|\tau+i\xi|^2\,C_1,$$

et comme de (1.7) il vient $a'(t)=0$, on obtient la première partie de l'hypothèse H′(1,2),

Vérifions maintenant la deuxième partie de H′ (1,2). Posant :

$$M=-\|\Gamma\, d_\xi\, p_m(x, Z)\|^2+2\,\mathbb{R}e\,\overline{p_m(x, Z)}\,\mu_m(x, Z, \Gamma)+\Gamma^2\,C^{[1]}_{2m-1}(x, Z)\,\mu_0(x, Z, \Gamma),$$

il vient :

$$\begin{aligned} M=-4\,|\,\Gamma(\tau+i\xi)\,i+\Gamma\,a(t)\,\xi^2+2\,\mathbb{R}e\,\overline{[(\tau+i\xi)^2+a(t)\,\xi^2]}\,\mu_2 \\ +(\mu_0\,\Gamma^2-\Gamma^2)\,4\,|\tau+i\xi|^2\geqq \\ -8\,\Gamma^2\,|\tau+i\xi|^2-8\,\Gamma^2\,|a(t)|^2\,|\xi|^2+4\,(\mu_0\,\Gamma^2-\Gamma^2)\,|\tau+i\xi|^2 \\ +2\,\mathbb{R}e\,\overline{[(\tau+i\xi)^2+a(t)\,\xi^2]}\,\mu_2. \end{aligned}$$

On choisit alors $\mu_2=\tilde{\mu}_2(t, \xi, \Gamma)=(1/2)\,C_2\,a(t)\,\xi^2$, où C_2 est une constante >0; $\tilde{\mu}_2$ est borné car $|\tau|^2+|\xi|^2=1$. On obtient alors :

$$M\geqq\Gamma^2\,|\tau+i\xi|^2\,[4\,\mu_0-12]+|a(t)|^2\,[C_2\,|\xi|^4-8\,\Gamma^2\,|\xi|^2] \\ -2\,|\tau+i\xi|^2\,\frac{1}{2}\,C_2\,|a(t)|\,|\xi|^2.$$

Par suite :

$$M\geqq|\tau+i\xi|^2\,[4\,\mu_0\,\Gamma^2-12\,\Gamma^2-C_2\,|\xi|^2\,\|a\|_\infty]+|a(t)|^2\,|\xi|^2\,[C_2\,|\xi|^2-8\,\Gamma^2].$$

On choisit $C_2=16$ et $\mu_0=3+8\,\|a\|_\infty$ où :

$$\|a\|_\infty=\sup_{t\in V(0)}|a(t)|,\quad (V(0)\text{ voisinage de 0 dans }\mathbb{R}).$$

Il vient alors :

$$M\geqq|\tau+i\xi|^2\,\|a\|_\infty\,16\,[2\,\Gamma^2-|\xi|^2]+|a(t)|^2\,|\xi|^2\,8\,[2\,|\xi|^2-\Gamma^2].$$

Or $\Gamma_0=\xi_0=(\sqrt{2}/2)$ donc $\{(\Gamma, \xi)\in\mathbb{R}_+\times\mathbb{C},\ |\xi|^2/2<\Gamma^2<2|\xi|^2\}$ est un voisinage de (Γ_0, ξ_0), ce qui donne le résultat.

(*c*) En dimension (totale) trois $[(t, \underline{x,y})\in\mathbb{R}^3$, de variables duales $(\tau, \xi, \eta)]$, un opérateur de symbole principal p_m avec :

$$(1.8)\qquad p_m=(\tau^2+\xi^2+\eta^2)^2+\lambda(t)^2\,(\xi^2+\eta^2)^2+2\,\lambda(t)\,(\xi^2+\eta^2)\,(\tau^2-\xi^2-\eta^2),$$

par rapport à l'hypersurface $S\equiv t=0$, près de (0, 0, 0), vérifie l'hypothèse H(1,2) si la condition suivante est satisfaite :

$$(1.9)\qquad \begin{cases} \text{il existe } C_0>0 \text{ telle que, pour } 0\leqq|t|<C_0^{-1}, \\ |\lambda'(t)|^2\leqq C_0\,|\lambda(t)| \end{cases}.$$

Remarquons que, si $\lambda(0)=0$ [ce que l'on supposera, le cas $\lambda(0)\neq 0$ correspondant à des racines caractéristiques simples] les racines sont doubles sur $t=0$, de multiplicité variable au plus double (si λ non constant).

On a :

$$(x_0;\ Z_0)=(\underline{x}_0,\ \underline{y}_0,\ \underline{t}_0;\ \xi_0,\ \eta_0,\ \tau_0),$$

soit :

$$(x_0;\ Z_0)=\left(0,\ 0,\ 0;\ \frac{\sqrt{2}}{2}\cos\theta_0,\ \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\theta_0,\ -i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\qquad\text{et}\qquad \Gamma_0=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$C_{2m}^{[0]}(x,\ Z)=|(\tau^2+\xi^2+\eta^2)^2+\lambda^2(\xi^2+\eta^2)^2+2\lambda(\xi^2+\eta^2)(\tau^2-\xi^2-\eta^2)|^2,$$

$$\Gamma^2 C_{2m-1}^{[1]}(x,\ Z)=\Gamma^2\,|4\tau[\tau^2+(\xi^2+\eta^2)(1+\lambda)]|^2,$$

$$\Gamma C_{2m-1}^{[0]}(x,\ Z,\ \Gamma)=\Gamma\,\mathrm{Im}\{\overline{4\tau[\tau^2+(\xi^2+\eta^2)(1+\lambda)]}\}$$

$$\{(\xi^2+\eta^2)^2(2\lambda\lambda'-2\lambda')+2\lambda'(\xi^2+\eta^2)\tau^2\},$$

$$C_{2m-2}^{[2]}(x,\ Z)=|4[\tau^2+(\xi^2+\eta^2)(1+\lambda)+2\tau^2]|^2,$$

avec $x=(t,\ \underline{x},\ \underline{y})$, t dans un voisinage de 0, $\underline{x}$, $\underline{y}$ dans un voisinage de 0, $\tau\in\mathbb{C}$ dans un voisinage de $-i(\sqrt{2}/2)$, $\xi\in\mathbb{C}$ dans un voisinage de $(\sqrt{2}/2)\cos\theta_0$, $\eta\in\mathbb{C}$ dans un voisinage de $(\sqrt{2}/2)\sin\theta_0$, $\Gamma\in\mathbb{R}_+$ dans un voisinage de $\sqrt{2}/2$:

$$|\tau|^2+|\xi|^2+|\eta|^2=1,\qquad Z=(\tau,\ \xi,\ \eta).$$

Vérifions l'hypothèse microlocale $H^0(1,2)$. Si :

$$C_{2m}^{[0]}(x_0,\ Z_0)=C_{2m-1}^{[1]}(x_0,\ Z_0)=0,$$

alors il est clair que $C_{2m-1}^{[0]}(x_0,\ Z_0)=0$, et dans ces conditions $C_{2m-2}^{[2]}(x_0,\ Z_0)=16>0$.

Vérifions l'hypothèse $H'(1,2)$.

Posant :

$$\Lambda=\Gamma C_{2m-1}^{[0]}(x,\ Z,\ \Gamma)+2\,\mathbb{R}e\,\overline{p_m(x,\ Z)}\,\lambda_m(x,\ Z,\ \Gamma)+\Gamma^2 C_{2m-1}^{[1]}(x,\ Z)\,\lambda_0(x,\ Z,\ \Gamma),$$

on obtient :

$$\Lambda=\Gamma\,\mathrm{Im}\{\overline{4\tau[\tau^2+(\xi^2+\eta^2)(1+\lambda)]}\}$$

$$\{(\xi^2+\eta^2)^2(2\lambda\lambda'-4\lambda')+2(\tau^2+\xi^2+\eta^2)(\xi^2+\eta^2)\lambda'\}$$

$$+2\,\mathbb{R}e\,\overline{[(\tau^2+\xi^2+\eta^2)^2+2(\tau^2+\xi^2+\eta^2)\lambda(\xi^2+\eta^2)+(\xi^2+\eta^2)^2(\lambda^2-4\lambda)]}\,\tilde{\lambda}_4(t,\ \tau,\ \xi,\ \eta)$$

$$+\tilde{\lambda}_0(t,\ \tau,\ \xi,\ \eta)\,\Gamma^2\,|4\tau[\tau^2+(\xi^2+\eta^2)(1+\lambda)]|^2.$$

Choisissons :

$$\tilde{\lambda}_4(t,\tau,\xi,\eta)=\frac{C_1}{2}\frac{\lambda(t)}{|\lambda(t)|}[2(\tau^2+\xi^2+\eta^2)(\xi^2+\eta^2)-4(\xi^2+\eta^2)^2] \quad \text{si} \quad \lambda(t)\neq 0,$$

$$\tilde{\lambda}_4(t,\tau,\xi,\eta)=0 \quad \text{si} \quad \lambda(t)=0,$$

C_1 étant une constante >0, $\tilde{\lambda}_0=C_2$, Cte >0.

Il vient, pour $\lambda(t)\neq 0$:

$$\begin{aligned}\Lambda={}&2\,\Gamma\,\mathrm{Im}\,\overline{2\tau[\tau^2+(\xi^2+\eta^2)(1+\lambda)]}\,[2(\tau^2+\xi^2+\eta^2)(\xi^2+\eta^2)-4(\xi^2+\eta^2)^2]\lambda'\\&+\Gamma\,\mathrm{Im}\,\overline{4\tau[\tau^2+(\xi^2+\eta^2)(1+\lambda)]}\,[2\lambda\lambda'(\xi^2+\eta^2)^2]\\&+2\,\mathbb{R}e\left\{\overline{[(\tau^2+\xi^2+\eta^2)^2+(\xi^2+\eta^2)^2\lambda^2+2(\tau^2+\xi^2+\eta^2)(\xi^2+\eta^2)\lambda-4(\xi^2+\eta^2)^2\lambda]}\right.\\&\left.\times\left[\frac{C_1}{2}\frac{\lambda(t)}{|\lambda(t)|}\right][2(\tau^2+\xi^2+\eta^2)(\xi^2+\eta^2)-4(\xi^2+\eta^2)^2]\right\}\\&+C_2\,\Gamma^2\,|4\tau[\tau^2+(\xi^2+\eta^2)(1+\lambda)]|^2.\end{aligned}$$

Pour $\alpha>0$, $\beta>0$, il vient :

$$\begin{aligned}\Lambda\geqq{}&-\frac{\Gamma^2}{\alpha}|2\tau|^2\,|\tau^2+(\xi^2+\eta^2)(1+\lambda)|^2\\&-\alpha\,|\lambda'|^2\,|2(\tau^2+\xi^2+\eta^2)(\xi^2+\eta^2)-4(\xi^2+\eta^2)^2|^2\\&-\beta\,|\lambda\lambda'|^2\,|\xi^2+\eta^2|^4-\frac{\Gamma^2}{\beta}|4\tau|^2\,|\tau^2+(\xi^2+\eta^2)(1+\lambda)|^2\\&+C_1\,|2(\tau^2+\xi^2+\eta^2)(\xi^2+\eta^2)-4(\xi^2+\eta^2)^2|^2\,|\lambda(t)|\\&+2\,\mathbb{R}e\left\{\overline{[(\tau^2+\xi^2+\eta^2)^2+(\xi^2+\eta^2)^2\lambda^2]}\,\frac{C_1}{2}\frac{\lambda(t)}{|\lambda(t)|}\right.\\&\left.\times[2(\tau^2+\xi^2+\eta^2)(\xi^2+\eta^2)-4(\xi^2+\eta^2)^2]\right\}\\&+C_2\,\Gamma^2\,|4\tau|^2\,|\tau^2+(\xi^2+\eta^2)(1+\lambda)|^2.\end{aligned}$$

Il vient :

$$\begin{aligned}\Lambda\geqq{}&|2(\tau^2+\xi^2+\eta^2)(\xi^2+\eta^2)-4(\xi^2+\eta^2)^2|^2\,[C_1\,|\lambda(t)|-\alpha\,|\lambda'(t)|^2]\\&+|\tau^2+(\xi^2+\eta^2)(1+\lambda)|^2\\&\times\left[C_2\,\Gamma^2\,|4\tau|^2-\frac{\Gamma^2}{\alpha}|2\tau|^2-\frac{\Gamma^2}{\beta}|4\tau|^2\right]-\beta\,|\lambda\lambda'|^2\,|\xi^2+\eta^2|^4\\&+2\,\mathbb{R}e\left\{\overline{[(\tau^2+\xi^2+\eta^2)^2+(\xi^2+\eta^2)\lambda^2]}\,\frac{C_1}{2}\frac{\lambda(t)}{|\lambda(t)|}\right.\\&\left.\times[2(\tau^2+\xi^2+\eta^2)(\xi^2+\eta^2)-4(\xi^2+\eta^2)^2]\right\}.\end{aligned}$$

Or :

$$|2(\tau^2+\xi^2+\eta^2)(\xi^2+\eta^2)-4(\xi^2+\eta^2)^2|$$
$$=|4(\xi^2+\eta^2)^2|\left|1-\frac{1}{2}(\tau^2+\xi^2+\eta^2)(\xi^2+\eta^2)^{-1}\right|,$$

ce qui a un sens puisque $\xi^2+\eta^2$ est proche de 1/2. Comme en outre $\tau^2+\xi^2+\eta^2$ est proche de 0, on peut supposer :

$$|2(\tau^2+\xi^2+\eta^2)(\xi^2+\eta^2)-4(\xi^2+\eta^2)^2|\geqq 2|\xi^2+\eta^2|^2.$$

En outre :

$$|2(\tau^2+\xi^2+\eta^2)(\xi^2+\eta^2)-4(\xi^2+\eta^2)^2|\leqq\left|\frac{2\tau^2}{(\xi^2+\eta^2)}(\xi^2+\eta^2)^2\right|+2|(\xi^2+\eta^2)^2|,$$

et comme $|\tau|^2/|\xi^2+\eta^2|$ est proche de 1, on peut supposer :

$$|2(\tau^2+\xi^2+\eta^2)(\xi^2+\eta^2)-4(\xi^2+\eta^2)^2|\leqq 5|\xi^2+\eta^2|^2.$$

Il vient par suite :

$$\begin{aligned}\Lambda\geqq&|\xi^2+\eta^2|^4[4C_1|\lambda(t)|-4\alpha|\lambda'(t)|^2-\beta|\lambda(t)\lambda'(t)|^2]\\&+|\tau^2+(\xi^2+\eta^2)(1+\lambda)|^2\left[C_2\Gamma^2-\frac{\Gamma^2}{4\alpha}-\frac{\Gamma^2}{\beta}\right]|4\tau|^2\\&+\mathbb{R}e\,\overline{(\tau^2+\xi^2+\eta^2)^2}\,C_1\frac{\lambda(t)}{|\lambda(t)|}[2(\tau^2+\xi^2+\eta^2)(\xi^2+\eta^2)-4(\xi^2+\eta^2)^2]\\&+2\,\mathbb{R}e\,\overline{(\xi^2+\eta^2)^2\lambda^2}\,\frac{C_1}{2}\frac{\lambda(t)}{|\lambda(t)|}[2(\tau^2+\xi^2+\eta^2)(\xi^2+\eta^2)-4(\xi^2+\eta^2)^2],\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Lambda\geqq&|\xi^2+\eta^2|^4[4C_1|\lambda|-4\alpha|\lambda'|^2-\beta|\lambda\lambda'|^2-5C_1|\lambda|^2]\\&+|\tau^2+(\xi^2+\eta^2)(1+\lambda)|^2\left[C_2\Gamma^2-\frac{\Gamma^2}{4\alpha}-\frac{\Gamma^2}{\beta}\right]|4\tau|^2\\&-5C_1|\xi^2+\eta^2|^2|\tau^2+\xi^2+\eta^2|^2.\end{aligned}$$

Or :

$$\begin{aligned}|\tau^2+\xi^2+\eta^2|^2&=|\tau^2+(\xi^2+\eta^2)(1+\lambda)-\lambda(\xi^2+\eta^2)|^2\\&\leqq 2|\tau^2+(\xi^2+\eta^2)(1+\lambda)|^2+2|\lambda|^2|\xi^2+\eta^2|^2.\end{aligned}$$

Il vient par suite :

$$\Lambda \geqq |\xi^2+\eta^2|^4 [4 C_1 |\lambda| - 4\alpha |\lambda'|^2 - \beta |\lambda\lambda'|^2 - 5 C_1 |\lambda|^2 - 10 C_1 |\lambda|^2] + |\tau^2+(\xi^2+\eta^2)(1+\lambda)|^2 \left\{ \left[C_2 - \frac{1}{4\alpha} - \frac{1}{\beta} \right] \Gamma^2 |4\tau|^2 - 10 C_1 |\xi^2+\eta^2|^2 \right\}.$$

Or on a $|\lambda'|^2 \leqq C_0 |\lambda|$ et donc :

$$4 C_1 |\lambda| - 4\alpha |\lambda'|^2 - \beta |\lambda\lambda'|^2 - 5 C_1 |\lambda|^2 - 10 C_1 |\lambda|^2 \geqq |\lambda| [4 C_1 - 4\alpha C_0 - \beta |\lambda|^2 C_0 - 15 C_1 |\lambda|].$$

On choisit $\alpha=\beta=1$, $C_1=2\, C_0$, et on suppose t assez proche de 0 pour que $|\lambda(t)|^2+30|\lambda(t)| \leqq 4$.

Puis on remarque que $\Gamma^2|4\tau|^2$ est proche de 4 alors que $|\xi^2+\eta^2|^2$ est proche de 1/4. Il suffit de choisir $C_2>(5/4)+(20/3)\, C_0$ pour obtenir le résultat $\Lambda \geqq 0$.

Montrons maintenant la deuxième partie de l'hypothèse $H'(1,2)$.

Posant :

$$M = -\| \Gamma\, d_\xi\, p_m(x, Z) \|^2 + 2\, \mathbb{R}e\, \overline{p_m(x, Z)}\, \mu_m(x, Z) + \Gamma^2 C_{2m-1}^{[1]}(x, Z)\, \mu_0(x, Z, \Gamma),$$

il vient :

$$M = -16\,\Gamma^2 |\tau^2(1+\lambda)+(\xi^2+\eta^2)(1-\lambda)^2|^2 [|\xi|^2+|\eta|^2] + 2\, \mathbb{R}e\, \overline{[(\tau^2+\xi^2+\eta^2)^2 + 2\lambda(\xi^2+\eta^2)(\tau^2+\xi^2+\eta^2) + (\lambda^2-4\lambda)(\xi^2+\eta^2)^2]}\, \mu_m + 16\,\Gamma^2 |\tau|^2 |\tau^2+(\xi^2+\eta^2)(1+\lambda)|^2 (\mu_0-1).$$

En remarquant que :

$$|\tau^2(1+\lambda)+(\xi^2+\eta^2)(1-\lambda)^2| \leqq 2|1+\lambda|^2 |\tau^2+(\xi^2+\eta^2)(1+\lambda)|^2 + 2^5 |\lambda|^2 |\xi^2+\eta^2|^2,$$

et en choisissant $\mu_4 = \tilde{\mu}_4(t, \tau, \xi, \eta) = C_1\, (\xi^2+\eta^2)^2\, (\lambda^2-4\lambda)$, et $\mu_0 = C_2$, il vient (C_1, C_2 étant des constantes positives) :

$$M \geqq |\tau^2+(\xi^2+\eta^2)(1+\lambda)|^2 [16\,\Gamma^2 |\tau|^2 (C_2-1) - 16\,\Gamma^2 (|\xi|^2+|\eta|^2)\, 2\, |1+\lambda|^2] + |\xi^2+\eta^2|^2 [2\, C_1 |4\lambda-\lambda^2|^2 |\xi^2+\eta^2|^2 - 16\,\Gamma^2 (|\xi|^2+|\eta|^2)\, 2^5 |\lambda|^2] - 2\, C_1\, \mathbb{R}e\, [\overline{(\tau^2+\xi^2+\eta^2)^2 + 2\lambda(\xi^2+\eta^2)(\tau^2+\xi^2+\eta^2)}]\, (\xi^2+\eta^2)^2 (\lambda^2-4\lambda),$$

et par suite, comme :

$$(\tau^2+\xi^2+\eta^2)^2 + 2\lambda(\xi^2+\eta^2)(\tau^2+\xi^2+\eta^2) = (\tau^2+(\xi^2+\eta^2)(1+\lambda))^2 - \lambda^2(\xi^2+\eta^2)^2,$$

il vient :

$$M \geqq |\tau^2+(\xi^2+\eta^2)(1+\lambda)|^2$$
$$\times [|\tau|^2(C_2-1)\,16\,\Gamma^2-16\,\Gamma^2(|\xi|^2+|\eta|^2)\,2\,|1+\lambda|^2-2\,C_1\,|\xi^2+\eta^2|^2\,|4\,\lambda-\lambda^2|]$$
$$+|\xi^2+\eta^2|^2\,|\lambda|^2\,[2\,C_1\,|4-\lambda|^2\,|\xi^2+\eta^2|^2$$
$$-16\,\Gamma^2(|\xi|^2+|\eta|^2)\,2^5-2\,C_1\,|\xi^2+\eta^2|^2\,|4\,\lambda-\lambda^2|].$$

Comme $\lambda(0)=0$, $\xi^2+\eta^2$ est proche de 1/2 ainsi que Γ^2 et $|\tau|^2$, on choisit $C_1=1$ et $C_2=4$ et on obtient $M \geqq 0$.

2. Invariance des hypothèses

On se propose de montrer dans ce paragraphe que les hypothèses sont invariantes par changement de coordonnées et ne dépendent pas de l'équation choisie pour l'hypersurface orientée. Cela est bien connu pour l'hypothèse $H(0,1)$ de caractéristiques simples ainsi que pour $H(0,0)$, hypothèse de stricte pseudo-convexité de Hörmander.

(*a*) HYPOTHÈSE $H(1,2)$. — Rappelons que, pour $x \in \mathbb{R}^n$, $Z \in \mathbb{C}^n$, $\Gamma \in \mathbb{R}$, $\varphi(x)=\varphi(x_0)$ étant une équation de l'hypersurface orientée, on a [*cf.* (1.1), (1.2), (1.3), (1.4) et (1.5)] [1] :

$$C_{2m}^{[0]}(x, Z)=|p_m(x, Z)|^2,$$

$$C_{2m-1}^{[1]}(x, Z)=\left|\frac{\partial p_m}{\partial \xi}(x, Z)\,.\,\varphi'(x_0)\right|^2,$$

$$C_{2m-1}^{[0]}(x, Z, \Gamma)=\Gamma\,\overline{\frac{\partial p_m}{\partial \xi}(x, Z)}\,.\,\frac{\partial p_m}{\partial \xi}(x, Z)\,.\,(-\varphi''(x_0))+\operatorname{Im}\overline{\frac{\partial p_m}{\partial \xi}(x, Z)}\,.\,\frac{\partial p_m}{\partial \xi}(x, Z),$$

$$C_{2m-2}^{[2]}(x, Z)=\frac{1}{2}\left|\frac{\partial^2 p_m}{\partial \xi^2}(x, Z)\,.\,\varphi'(x_0)^2\right|^2,$$

$$C_{2m-2}^{[1]}(x, Z, \Gamma)=\Gamma\,\overline{\frac{\partial^2 p_m}{\partial \xi^2}(x, Z)}\,\frac{\partial^2 p_m}{\partial \xi^2}(x, Z)\,\varphi'(x_0)^2\,(-\varphi''(x_0))$$
$$+\operatorname{Im}\overline{\frac{\partial^2 p_m}{\partial \xi^2}}(x, Z)\,.\,\frac{\partial^2 p_m}{\partial x\,\partial \xi}(x, 2)\,\varphi'(x_0)^2.$$

Si on fait un changement de variable, en conservant la même équation pour l'hypersurface orientée S :

$$x=\Phi(y),\qquad x_0=\Phi(y_0),\qquad \xi=J(y)\,\eta,\qquad J(y)={}^t\,\Phi'(y)^{-1},$$
$$S \equiv (\varphi\circ\Phi)(y)=(\varphi\circ\Phi)(y_0),$$

[1] Considérant $\partial p_m/\partial \xi$ comme un tenseur une fois contravariant, $\partial^2 p_m/\partial \xi^2$ deux fois contravariant, $\partial^2 p_m/\partial \xi\,\partial x$ une fois contravariant et une fois covariant, $\varphi''(x_0)$ deux fois covariant, $\varphi'(x_0)$ une fois covariant.

on obtient pour $y \in \mathbb{R}^n$, $T \in \mathbb{C}^n$, $\Gamma \in \mathbb{R}$, posant $Z = J(y) T$:

$$d_{2m}^{[0]}(y, T) = |q_m(y, T)|^2 = |p_m(x, Z)|^2 = C_{2m}^{[0]}(x, Z), \tag{2.1}$$

$$d_{2m-1}^{[1]}(y, T) = C_{2m-1}^{[1]}(x, Z) + \overline{\frac{\partial p_m}{\partial \xi}(x, Z)} \cdot \frac{\partial p_m}{\partial \xi}(x, Z)\, \varepsilon_1(x - x_0), \tag{2.2}$$

où le tenseur deux fois covariant ε_1 est C^∞ et $\varepsilon_1(0) = 0$

$$d_{2m-1}^{[0]}(y, T, \Gamma) = C_{2m-1}^{[0]}(x, Z, \Gamma) + \overline{\frac{\partial p_m}{\partial \xi}(x, Z)} \cdot \frac{\partial p_m}{\partial \xi}(x, Z)\, \Omega, \tag{2.3}$$

avec :

$$\Omega = \Gamma\, \varepsilon_2(x - x_0) + u(x - x_0)(\operatorname{Im} Z + \Gamma\, \varphi'(x_0)),$$

où ε_2 est un tenseur deux fois covariant C^∞, $\varepsilon_2(0) = 0$, u est un tenseur une fois covariant borné dans un voisinage de 0.

Supposons H(1,2) vérifiée pour les coordonnées x, montrons-la pour les coordonnées y.

L'hypothèse $H^0(1,2)$ est microlocale et on obtient facilement son invariance; on a en effet :

$$C_{2m}^{[0]}(x_0, \xi_0 - i\Gamma_0\, \varphi'(x_0)) = |p_m(x_0, \xi_0 - i\Gamma_0\, \varphi'(x_0))|^2,$$

$$C_{2m-1}^{[1]}(x_0, \xi_0 - i\Gamma_0\, \varphi'(x_0)) = \left| \{p_m(x, \xi - i\Gamma\, \varphi'(x)), \varphi(x)\}_{\substack{x = x_0 \\ \xi - i\Gamma\, \varphi'(x) = \xi_0 - i\Gamma_0\, \varphi'(x_0)}} \right|^2,$$

$$C_{2m-1}^{[0]}(x_0, \xi_0 - i\Gamma_0\, \varphi'(x_0), \Gamma_0)$$

$$= \frac{1}{2i} \{\overline{p_m(x, \xi - i\Gamma\, \varphi'(x))}, p_m(x, \xi - i\Gamma\, \varphi'(x))\}_{\substack{x = x_0 \\ \xi - i\Gamma\, \varphi'(x) = \xi_0 - i\Gamma_0\, \varphi'(x_0)}},$$

$$C_{2m-2}^{[2]}(x_0, \xi_0 - i\Gamma_0\, \varphi'(x_0))$$

$$\frac{1}{2} \left| \{\{p_m(x, \xi - i\Gamma\, \varphi'(x)), \varphi(x)\}, \varphi(x)\} \right|^2_{\substack{x = x_0 \\ \xi - i\Gamma\, \varphi'(x) = \xi_0 - i\Gamma_0\, \varphi'(x_0)}}.$$

Vérifions l'invariance de $H'(1,2)$. Considérons pour cela :

$$T_0 = \eta_0 - i\, \omega_0 (\varphi \circ \Phi)'(y_0), \qquad \omega_0 \geqq 0, \qquad |T_0| = 1,$$

avec :

$$d_{2m}^{[0]}(y_0, T_0) = d_{2m-1}^{[1]}(y_0, T_0) = d_{2m-1}^{[0]}(y_0, T_0, \omega_0) = 0;$$

alors :

$$C_{2m}^{[0]}(x_0, \tilde{Z}_0) = C_{2m-1}^{[1]}(x_0, \tilde{Z}_0) = C_{2m-1}^{[0]}(x_0, \tilde{Z}_0, \omega_0) = 0,$$

avec $x_0 = \Phi(y_0)$, $\tilde{Z}_0 = {}^t\Phi'(y_0)^{-1}\, T_0$ et en outre :

$$C_{2m}^{[0]}(x_0, Z_0) = C_{2m-1}^{[1]}(x_0, Z_0) = C_{2m-1}^{[0]}(x_0, Z_0, \Gamma_0) = 0,$$

avec :

$$Z_0 = \frac{{}^t\Phi'(y_0)^{-1}\,T_0}{|{}^t\Phi'(y_0)^{-1}\,T_0|}, \qquad \Gamma_0 = \frac{\omega_0}{|{}^t\Phi'(y_0)^{-1}\,T_0|},$$

(${}^t\Phi'(y_0)^{-1}$ est un isomorphisme et $T_0 \neq 0$). Remarquons que l'ellipticité de p_m assure que $\Gamma_0 > 0$.

Considérons :

$$\Lambda = \omega\, d^{[0]}_{2m-1}(y, T, \omega) + 2\,\mathbb{R}e\,\overline{q_m(y, T)}\,\lambda^{(y)}_m(y, T, \omega) + \lambda^{(y)}_0\,\omega^2\, d^{[1]}_{2m-1}(y, T).$$

On a, posant $\tilde{Z} = {}^t\Phi'(y)^{-1}\,T$, $\tilde{\Gamma} = \omega$, $x = \Phi(y)$:

$$\begin{aligned}\Lambda = \tilde{\Gamma}\, C^{[0]}_{2m-1}(x, \tilde{Z}, \tilde{\Gamma}) + \tilde{\Gamma}^2 &\left[\overline{\frac{\partial p_m}{\partial \xi}(x, \tilde{Z})}\,.\,\frac{\partial p_m}{\partial \xi}(x, \tilde{Z})\right] \\ &\times\left[\varepsilon_2(x - x_0) + u(x - x_0)\left(\frac{\operatorname{Im}\tilde{Z}}{\tilde{\Gamma}} + \varphi'(x_0)\right)\right] \\ &+ 2\,\mathbb{R}e\,\overline{p_m(x, \tilde{Z})}\,\lambda^{(y)}_m(y, T, \omega) + \lambda^{(y)}_0\,\tilde{\Gamma}^2\, C^{[1]}_{2m-1}(x, \tilde{Z}) \\ &+ \lambda^{(y)}_0\,\tilde{\Gamma}^2\,\overline{\frac{\partial p_m}{\partial \xi}(x, \tilde{Z})}\,.\,\frac{\partial p_m}{\partial \xi}(x, \tilde{Z})\,\varepsilon_1(x - x_0).\end{aligned}$$

En posant :

$$\alpha = |{}^t\Phi'(y)^{-1}\,T|, \qquad Z = \frac{{}^t\Phi'(y)^{-1}\,T}{\alpha} = \frac{\tilde{Z}}{\alpha}, \qquad \Gamma = \frac{\omega}{\alpha} = \frac{\tilde{\Gamma}}{\alpha},$$

on obtient :

$$\begin{aligned}\alpha^{-2m}\,\Lambda = \Gamma\, C^{[0]}_{2m-1}(x, Z, \Gamma) &+ 2\,\mathbb{R}e\,\overline{p_m(x, Z)}\,\frac{1}{\alpha^m}\lambda^{(y)}_m(y, T, \omega) + \lambda^{(y)}_0\,\Gamma^2\, C^{[1]}_{2m-1}(x, Z) \\ &+ \Gamma^2\,\overline{\frac{\partial p_m}{\partial \xi}(x, Z)}\,.\,\frac{\partial p_m}{\partial \xi}(x, Z)\left[\lambda^{(y)}_0\,\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + u\left(\frac{\operatorname{Im} Z}{\Gamma} + \varphi'(x_0)\right)\right].\end{aligned}$$

En utilisant alors la deuxième partie de l'hypothèse H (1,2) (en coordonnées x), on obtient :

$$\begin{aligned}\alpha^{-2m}\,\Lambda \geqq \Gamma\, C^{[0]}_{2m-1}(x, Z, \Gamma) &+ \Gamma^2\, C^{[1]}_{2m-1}(x, Z) \\ &\times\left[\lambda^{(y)}_0 - \left(\lambda^{(y)}_0\,|\varepsilon_1| + |\varepsilon_2| + |u|\left|\frac{\operatorname{Im} Z}{\Gamma} + \varphi'(x_0)\right|\right)\mu^{(x)}_0\right] \\ &+ 2\,\mathbb{R}e\,\overline{p_m(x, Z)}\left[\frac{1}{\alpha^m}\lambda^{(y)}_m - \left(\lambda^{(y)}_0\,|\varepsilon_1| + |\varepsilon_2| + |u|\left|\frac{\operatorname{Im} Z}{\Gamma} + \varphi'(x_0)\right|\right)\mu^{(x)}_m(x, Z, \Gamma)\right].\end{aligned}$$

On choisit alors $y \in W(y_0)$ voisinage assez petit de y_0 pour que :

$$|\varepsilon_1(\Phi(y)-\Phi(y_0))|\,\mu_0^{(x)}<\frac{1}{2}, \qquad |\varepsilon_2(\Phi(y)-\Phi(y_0))|<1.$$

En outre, on choisit un voisinage de T_0 dans la sphère unité de $\mathbb{C}^n$, et un voisinage de ω_0 dans $\mathbb{R}_+$ (rappelons que $\omega_0>0$) tels que :

$$\left|\operatorname{Im}\left[\frac{{}^t\Phi'(y)^{-1}\,T}{\omega}\right]+\varphi'(x_0)\right|<1,$$

soit par suite :

$$\left|\operatorname{Im}\frac{Z}{\Gamma}+\varphi'(x_0)\right|<1 \qquad \text{et} \quad \|u\|_\infty=\sup_{y\in W(y_0)}|u(\Phi(y)-\Phi(y_0))|$$

(ce qui a un sens car u est borné dans un voisinage de 0), on obtient en choisissant :

$$\lambda_0^{(y)}=2(2+\|u\|_\infty)\,\mu_0^{(x)},$$

puis :

$$\frac{1}{\alpha^m}\lambda_m^{(y)}(y,T,\omega)=\mu_m^{(x)}(x,Z,\Gamma)\left[\lambda_0^{(y)}|\varepsilon_1|+|\varepsilon_2|+|u|\left|\frac{\operatorname{Im}Z}{\Gamma}+\varphi'(x_0)\right|\right]+\lambda_m^{(x)}(x,Z,\Gamma),$$

ce qui donne :

$$\lambda_m^{(y)}(y,T,\omega)=\mu_m^{(x)}(\Phi(y),{}^t\Phi'(y)^{-1}\,T,\omega)$$

$$\times\left[\lambda_0^{(y)}|\varepsilon_1|+|\varepsilon_2|+|u|\left|\frac{\operatorname{Im}{}^t\Phi'(y)^{-1}\,T}{\omega}+\varphi'(x_0)\right|\right]+\lambda_m^{(x)}(\Phi(y),{}^t\Phi'(y)^{-1}\,T,\omega)$$

$$(\varepsilon_\varkappa=\varepsilon_\varkappa(\Phi(y)-\Phi(y_0)),\ u=u(\Phi(y)-\Phi(y_0))),$$

de sorte que $\lambda_m^{(y)}$ est homogène de degré m de (T,ω) et que $(1/\alpha^m)\lambda_m^{(y)}$ et donc $\lambda_m^{(y)}$ est bornée sur un voisinage de (y_0, T_0, ω_0) dans $\mathbb{R}^n\times$ sphère unité de $\mathbb{C}^n\times\mathbb{R}_+$, on obtient finalement le résultat $\Lambda\geqq 0$ en utilisant la première partie de l'hypothèse $H(1,2)$ dans les coordonnées x.

Montrons maintenant que la deuxième partie de l'hypothèse $H'(1,2)$ est invariante. Considérons :

$$M=-\omega^2\left\|\frac{\partial q_m}{\partial\eta}(y,T)\right\|^2+2\,\mathbb{R}e\,\overline{q_m(y,T)}\,\mu_m^{(y)}(y,T,\omega)+\omega^2\,d_{2m-1}^{[1]}(y,T)\,\mu_0^{(y)}.$$

Avec les mêmes notations que précédemment, on a :

$$\alpha^{-2m}\,M=-\Gamma^2\left\|\frac{\partial p_m}{\partial\xi}(x,Z)\,{}^t\Phi'(y)^{-1}\right\|^2+2\,\mathbb{R}e\,\overline{p_m(x,Z)}\,\frac{1}{\alpha^m}\,\mu_m^{(y)}(y,T,\omega)$$

$$+\Gamma^2\,\mu_0^{(y)}\,C_{2m-1}^{[1]}(x,Z)+\Gamma^2\,\mu_0^{(y)}\,\varepsilon_1\,\overline{\frac{\partial p_m}{\partial\xi}(x,Z)}\,.\,\frac{\partial p_m}{\partial\xi}(x,Z).$$

Il vient par conséquent :

$$\alpha^{-2m}\,M\geqq 2\,\mathbb{R}e\,\overline{p_m(x,Z)}\,\frac{1}{\alpha^m}\,\mu_m^{(y)}+\Gamma^2\,\mu_0^{(y)}\,C_{2m-1}^{[1]}-\Gamma^2\left\|\frac{\partial p_m}{\partial\xi}\right\|^2[\,|\,\Phi'(y)^{-1}\,|^2+|\,\varepsilon_1\,|\,\mu_0^{(y)}].$$

En prenant $y\in W(y_0)$ voisinage assez petit de y_0 pour que :

$$|\,\varepsilon_1\,(\Phi(y)-\Phi(y_0))\,|\,\mu_0^{(x)}<\frac{1}{2},$$

on choisit :

$$\mu_0^{(y)}=2\,\mu_0^{(x)}\,[1+\sup_{y\in W(y_0)}|\,\Phi'(y)^{-1}\,|^2],$$

puis :

$$\frac{1}{\alpha^m}\,\mu_m^{(y)}=\mu_m^{(x)}\,[1+|\,\Phi'(y)^{-1}\,|^2+\varepsilon_1\,\mu_0^{(y)}]$$

i. e.,

$$\mu_m^{(y)}(y,T,\omega)=\mu_m^{(x)}(\Phi(y),{}^t\Phi'(y)^{-1}T,\omega)\,[1+|\,\Phi'(y)^{-1}\,|^2+\varepsilon\,(\Phi(y)-\Phi(y_0))\,\mu_0^{(y)}],$$

qui est clairement homogène de degré m en (T,ω) et telle que $(1/\alpha^m)\,\mu_m^{(y)}$ et donc $\mu_m^{(y)}$ soit bornée sur un voisinage de (y_0,T_0,ω_0) dans $\mathbb{R}^n\times$ sphère unité de $\mathbb{C}^n\times\mathbb{R}_+$.

Nous avons donc prouvé l'invariance de H(1,2) par changement de coordonnées. Il reste à démontrer que cette hypothèse ne dépend pas de l'équation choisie pour l'hypersurface orientée S.

Remarquons tout d'abord que si $S\equiv\tilde\varphi(x)=\tilde\varphi(x_0)\equiv\varphi(x)=\varphi(x_0)$ comme hypersurface orientée, on a avec $a>0$:

$$\tilde\varphi'(x_0)=a\,\varphi'(x_0)$$

et si p, q sont des vecteurs tels que :

$$\varphi'(x_0)\,p=\varphi'(x_0)\,q=0\qquad\text{alors}\quad\tilde\varphi''(x_0)(p,q)=a\,\tilde\varphi''(x_0)(p,q).$$

Soit alors :

$$\tilde Z_0=\xi_0-i\,\tilde\Gamma_0\,\tilde\varphi'(x_0)=\xi_0-i\,\tilde\Gamma_0\,a\,\varphi'(x_0)\qquad(\tilde\Gamma_0\,a>0\ \text{si}\ \tilde\Gamma_0>0).$$

Posant $Z_0=\tilde{Z}_0$, $\Gamma_0=a\,\tilde{\Gamma}_0$, $Z_0=\xi_0-i\,\Gamma_0\,\varphi'(x_0)$, on a :

$$\tilde{C}^{[0]}_{2m}(x, \tilde{Z})=C^{[0]}_{2m}(x, \tilde{Z}), \qquad \tilde{C}^{[1]}_{2m-1}(x, \tilde{Z})=a^2\,C^{[1]}_{2m-1}(x, \tilde{Z}),$$

$$\tilde{C}^{[0]}_{2m-1}(x, \tilde{Z}, \tilde{\Gamma})=C^{[0]}_{2m-1}(x, \tilde{Z}, a\tilde{\Gamma})+\tilde{\Gamma}\,(-\tilde{\varphi}''(x_0)+a\,\varphi''(x_0))\,\overline{\frac{\partial p_m}{\partial\xi}(x, \tilde{Z})}\,\frac{\partial p_m}{\partial\xi}(x, \tilde{Z}).$$

L'hypothèse microlocale $H^0(1,2)$ est invariante car si $\tilde{C}^{[0]}_{2m}(x_0, \tilde{Z}_0)=\tilde{C}^{[1]}_{2m-1}(x_0, \tilde{Z}_0)=0$ comme $\varphi'(x_0)\,\partial p_m/\partial\xi\,(x, \tilde{Z})=0$ il vient :

$$\tilde{C}^{[0]}_{2m}(x_0, \tilde{Z}_0)=C^{[1]}_{2m-1}(x_0, \tilde{Z}_0)=0$$

et :

$$\tilde{C}^{[0]}_{2m-1}(x_0, \tilde{Z}_0, \tilde{\Gamma}_0)=C^{[0]}_{2m-1}(x_0, \tilde{Z}_0, a\tilde{\Gamma}_0)\geqq 0$$

(car $a\tilde{\Gamma}_0>0$ quand $\tilde{\Gamma}_0>0$).

En outre si :

$$\tilde{C}^{[0]}_{2m}(x_0, \tilde{Z}_0)=\tilde{C}^{[1]}_{2m-1}(x_0, \tilde{Z}_0)=\tilde{C}^{[0]}_{2m-1}(x_0, \tilde{Z}_0, \tilde{\Gamma}_0)=0,$$
$$C^{[0]}_{2m}(x_0, Z_0)=C^{[1]}_{2m-1}(x_0, Z_0)=C^{[0]}_{2m-1}(x_0, Z_0, \Gamma_0)=0$$

et donc $C^{[2]}_{2m-2}(x_0, Z_0)>0$ et par suite :

$$\tilde{C}^{[2]}_{2m-2}(x_0, \tilde{Z}_0)=a^2\,C^{[2]}_{2m-2}(x_0, Z_0)>0$$

et le résultat.

Examinons l'invariance de $H'(1,2)$. On a :

$$\tilde{\Lambda}=\tilde{\Gamma}\,\tilde{C}^{[0]}_{2m-1}(x, \tilde{Z}, \tilde{\Gamma})+2\,\mathbb{R}e\,\overline{p_m(x, \tilde{Z})}\,\tilde{\lambda}_m(x, \tilde{Z}, \tilde{\Gamma})+\tilde{\Gamma}^2\,\tilde{C}^{[1]}_{2m-1}(x, \tilde{Z})\,\tilde{\lambda}_0,$$

posant $Z=\tilde{Z}$, $\Gamma=a\,\tilde{\Gamma}$, on a :

$$\tilde{\Lambda}=\frac{\Gamma}{a}C^{[0]}_{2m-1}(x, Z, \Gamma)+2\,\mathbb{R}e\,\overline{p_m(x, Z)}\,\tilde{\lambda}_m+\Gamma^2\,C^{[1]}_{2m-1}(x, Z)\,\tilde{\lambda}_0$$
$$+\frac{\Gamma^2}{a^2}(a\,\varphi''(x_0)-\tilde{\varphi}(x_0))\,\overline{\frac{\partial p_m}{\partial\xi}(x, Z)}\,\frac{\partial p_m}{\partial\xi}(x, Z).$$

Par suite en utilisant la deuxième partie de $H'(1,2)$, il vient :

$$\tilde{\Lambda}\geqq\frac{\Gamma}{a}C^{[0]}_{2m-1}(x, Z, \Gamma)+2\,\mathbb{R}e\,\overline{p_m(x, Z)}\,[\tilde{\lambda}_m-\|a^{-1}\,\varphi''(x_0)-\tilde{\varphi}''(x_0)\|\,\mu_m(x, Z, \Gamma)]$$
$$+\Gamma^2\,C^{[1]}_{2m-1}(x, Z)\,[\tilde{\lambda}_0-\|a^{-1}\,\varphi''(x_0)-\tilde{\varphi}''(x_0)\|\,\mu_0].$$

On choisit alors :

$$\tilde{\lambda}_0=a^{-1}\,\lambda_0+\|a^{-1}\,\varphi''(x_0)-\tilde{\varphi}''(x_0)\|\,\mu_0$$

et :

$$\tilde{\lambda}_m(x, \tilde{Z}, \tilde{\Gamma}) = a^{-1}\lambda_m(x, \tilde{Z}, a\tilde{\Gamma}) + \| a^{-1}\varphi''(x_0) - \tilde{\varphi}''(x_0) \| \mu_m(x, \tilde{Z}, a\tilde{\Gamma}),$$

qui donnent le résultat.

En outre on a :

$$\tilde{M} = -\tilde{\Gamma}^2 \left\| \frac{\partial p_m}{\partial \xi}(x, \tilde{Z}) \right\|^2 + 2\,\mathbb{R}e\,\overline{p_m(x, \tilde{Z})}\,\tilde{\mu}_m(x, \tilde{Z}, \tilde{\Gamma}) + \tilde{\Gamma}^2\,\tilde{C}^{[1]}_{2m-1}(x, \tilde{Z})\,\tilde{\mu}_0,$$

$$\tilde{M} = -\frac{\Gamma^2}{a^2} \left\| \frac{\partial p_m}{\partial \xi}(x, Z) \right\|^2 + 2\,\mathbb{R}e\,\overline{p_m(x, Z)}\,\tilde{\mu}_m + \Gamma^2\,C^{[1]}_{2m-1}(x, Z)\,\tilde{\mu}_0,$$

on choisit alors :

$$\tilde{\mu}_m(x, \tilde{Z}, \tilde{\Gamma}) = \frac{2}{a^2}\,\mu_m(x, \tilde{Z}, a\tilde{\Gamma}), \qquad \tilde{\mu}_0 = \frac{2}{a^2}\,\mu_0,$$

qui donnent le résultat $\tilde{M} \geqq 0$.

(*b*) HYPOTHÈSE H (1,1). — Il suffit ici de vérifier l'invariance de la dernière hypothèse microlocale. Or :

$$C^{[1]}_{2m-2}(x_0, \xi_0 - i\,\Gamma_0\,\varphi'(x_0))$$
$$= \frac{1}{2i}\{\{p_m(x, \xi - i\,\Gamma\,\varphi'(x)), \varphi(x)\},$$
$$\{p_m(x, \xi - i\,\Gamma\,\varphi'(x)), \varphi(x)\}\}\Big|_{\substack{x = x_0\\ \xi - i\,\Gamma\,\varphi'(x) = \xi_0 - i\,\Gamma_0\,\varphi'(x_0)}}$$

est donc invariant par changement de coordonnées.

En outre, comme :

$$C^{[1]}_{2m-2} = \Gamma_0(-\varphi''(x_0))\,\overline{\frac{\partial(H_{\varphi_0}(p_m))}{\partial \xi}}\,\frac{\partial(H_{\varphi_0}(p_m))}{\partial \xi} + \mathrm{Im}\,\overline{\frac{\partial}{\partial \xi}(H_{\varphi_0}(p_m))}\cdot\frac{\partial}{\partial x}(H_{\varphi_0}(p_m)),$$

si $\tilde{\varphi}(x) = \tilde{\varphi}(x_0)$ est une autre équation de la même hypersurface orientée on obtient, compte tenu du fait que $H^2_{\varphi_0}(p_m) = 0$, $\tilde{C}^{[1]}_{2m-2} = a^2\,C^{[1]}_{2m-2}$, le résultat.

3. Conjugaison et quantification de Weyl

Soit P un opérateur différentiel de symbole de Weyl p : on a la formule :

$$\mathrm{P}u(x) = (2\pi)^{-n} \iint e^{i\langle x-y,\, \xi\rangle}\, p\left(\frac{x+y}{2}, \xi\right) u(y)\,dy\,d\xi. \tag{3.1}$$

Si ψ est quadratique [au sens $\psi^{(\alpha)}(x)\equiv 0$ pour $|\alpha|>2$], on a, pour γ réel :

$$(e^{-\gamma\psi}\,\mathrm{P}\,e^{\gamma\psi})\,u(x)=(2\pi)^{-n}\iint e^{i\langle x-y,\,\xi\rangle}\,p\left(\frac{x+y}{2},\,\xi\right)e^{\gamma(\psi(y)-\psi(x))}\,dy\,d\xi.$$

Or $\psi(y)-\psi(x)=\psi'((x+y)/2)(y-x)$ car ψ est quadratique et donc :

$$(e^{-\gamma\psi}\,\mathrm{P}\,e^{\gamma\psi})\,u(x)=(2\pi)^{-n}\iint e^{i\langle x-y,\,\xi+i\gamma\psi'((x+y)/2)\rangle}\,p\left(\frac{x+y}{2},\,\xi\right)u(y)\,dy\,d\xi.$$

Donc, posant $\mathrm{P}_\gamma=e^{-\gamma\psi}\,\mathrm{P}\,e^{\gamma\psi}$, et utilisant le fait que P est un opérateur différentiel donc que p est polynomial en ξ, il vient :

$$(\mathrm{P}_\gamma u)(x)=(2\pi)^{-n}\iint e^{i\langle x-y,\,\xi\rangle}\,p\left(\frac{x+y}{2},\,\xi-i\gamma\psi'\left(\frac{x+y}{2}\right)\right)u(y)\,dy\,d\xi;$$

de sorte que, pour ψ quadratique, γ scalaire, le symbole de Weyl de $e^{-\gamma\psi}\,\mathrm{P}\,e^{\gamma\psi}$ est *exactement* $p(x,\,\xi-i\gamma\psi'(x))$ où $p(x,\,\xi)$ est le symbole de Weyl de P.

Remarquons qu'il ne s'agit en fait que d'un cas particulier de la formule de Segal (Segal [20], Hörmander [13], Unterberger [23]). Comme par ailleurs si a est le symbole de Weyl de l'opérateur A, $\bar{a}$ est le symbole de Weyl de A^*, on obtient que le symbole (de Weyl) de $(\mathrm{P}_\gamma)^*=(\mathrm{P}^*)_{-\gamma}$ est $\overline{p(x,\,\xi-i\gamma\psi'(x))}$.

Rappelons en outre la formule de composition dans la quantification de Weyl :

$$(a\# b)(x,\,\xi)=\sum_{\alpha,\,\beta}\frac{1}{\alpha!}\,\frac{1}{\beta!}\left(\frac{1}{2}\right)^{|\alpha|}\left(-\frac{1}{2}\right)^{|\beta|}\mathrm{D}_\xi^\alpha\,\partial_x^\beta\,a\,\mathrm{D}_\xi^\beta\,\partial_x^\alpha\,b. \tag{3.2}$$

En particulier si $a(x,\,\xi)$, $b(x,\,\xi)$ sont des polynômes (non nécessairement homogènes) de degré respectivement p, q, on a :

$$a\# b=ab+\frac{1}{2i}\{a,\,b\}+\frac{1}{2!}\left(\frac{1}{2i}\right)^2\{\{a,\,b\}\}+\Gamma_{p+q-3}, \tag{3.3}$$

où $\{a,\,b\}$ est le crochet de Poisson :

$$\frac{1}{2!}\{\{a,\,b\}\}=\sum_{|\alpha|+|\beta|=2}\frac{1}{\alpha!}\,\frac{(-1)^{|\beta|}}{\beta!}\,\partial_\xi^\alpha\,\partial_x^\beta\,a\,\partial_\xi^\beta\,\partial_x^\alpha\,b,$$

Γ_{p+q-3} est un polynôme de degré $\leqq p+q-3$.

Calculons maintenant le symbole de Weyl $c(x,\,\xi,\,\gamma)$ de $(\mathrm{P}_\gamma)^*\,\mathrm{P}_\gamma$.

On a, d'après (3.1) et (3.2) :

$$c(x, \xi, \gamma)=\overline{p(x, \xi-i\gamma\psi'(x))}\,.\,p(x, \xi-i\gamma\psi'(x)$$
$$+\frac{1}{2i}\{\overline{p(x, \xi-i\gamma\psi'(x))}, p(x, \xi-i\gamma\psi'(x))\}$$
$$+\frac{1}{2!}\left(\frac{1}{2i}\right)^2\{\{\overline{p(x, \xi-i\gamma\psi'(x))}, p(x, \xi-i\gamma\psi'(x))\}\}$$
$$+\sum_{|\alpha|+|\beta|\geqq 3}\frac{1}{\alpha!}\frac{1}{\beta!}\left(\frac{1}{2}\right)^{|\alpha|}\left(-\frac{1}{2}\right)^{|\beta|}$$
$$\times \mathrm{D}_\xi^\alpha \partial_x^\beta\,\overline{[p(x, \xi-i\gamma\psi'(x))]}\,\mathrm{D}_\xi^\beta \partial_x^\alpha [p(x, \xi-i\gamma\psi'(x))].$$

Remarquons que si $q_k(x, \xi)$ est un polynôme homogène en ξ de degré k on a :

$$\frac{\partial}{\partial\xi}[q_k(x, \xi-i\gamma\psi'(x))]=\frac{\partial q_k}{\partial\xi}(x, \xi-i\gamma\psi'(x)),$$

homogène de degré $(k-1)$ en ξ, γ, et en outre :

$$\frac{\partial}{\partial x}[q_k(x, \xi-i\gamma\psi'(x))]=\frac{\partial q_k}{\partial x}(x, \xi-i\gamma\psi'(x))+\frac{\partial q_k}{\partial\xi}(x, \xi-i\gamma\psi'(x))\frac{\gamma}{i}\psi''(x),$$

qui est homogène de degré k en (ξ, γ).

Par suite, si le symbole de Weyl de P est $p=p_m+p_{m-1}+p_{m-2}+\ldots$ et si C_{2m-k} est la partie homogène d'ordre $2m-k$ en (ξ, γ) de $c(x, \xi, \gamma)$, il vient :

$$\mathrm{C}_{2m}(x, \xi, \gamma)=|p_m(x, \xi-i\gamma\psi'(x))|^2, \tag{3.4}$$

$$\mathrm{C}_{2m-1}(x, \xi, \gamma)=\frac{1}{2i}\{\overline{p_m(x, \xi-i\gamma\psi'(x))}, p_m(x, \xi-i\gamma\psi'(x))\}$$
$$+2\,\mathbb{R}\mathrm{e}\,\overline{p_m(x, \xi-i\gamma\psi'(x)}\,p_{m-1}(x, \xi-i\gamma\psi'(x)), \tag{3.5}$$

$$\mathrm{C}_{2m-2}(x, \xi, \gamma)=\frac{1}{2!}\left(\frac{1}{2i}\right)^2\{\{\overline{p_m(x, \xi-i\gamma\psi'(x))}, p_m(x, \xi-i\gamma\psi'(x))\}\}$$
$$+\mathrm{Im}\{\overline{p_m(x, \xi-i\gamma\psi'(x))}, p_{m-1}(x, \xi-i\gamma\psi'(x)\}$$
$$+2\,\mathbb{R}\,e\,\overline{p_m(x, \xi-i\gamma\psi'(x))}\,p_{m-2}(x, \xi-i\gamma\psi'(x))+|p_{m-1}(x, \xi-i\gamma\psi'(x))|^2. \tag{3.6}$$

Donc, en notant $\zeta=\xi-i\gamma\psi'(x)$, il vient :

$$\mathrm{C}_{2m}=|p_m(x, \zeta)|^2, \tag{3.7}$$

$$(3.8)\quad C_{2m-1}=\operatorname{Im}\sum_j \overline{\frac{\partial p_m}{\partial \xi_j}(x,\zeta)}\frac{\partial p_m}{\partial \xi_j}(x,\zeta)+2\,\mathbb{R}e\,\overline{p_m(x,\zeta)}\,p_{m-1}(x,\zeta)$$
$$+\gamma\sum_{j,k}\frac{\partial^2(-\psi)}{\partial x_j\partial x_k}\overline{\frac{\partial p_m}{\partial \xi_j}(x,\zeta)}\frac{\partial p_m}{\partial \xi_k}(x,\zeta).$$

En outre, on a :

$$C_{2m-2}=\sum_{|\alpha|+|\beta|=2}\frac{1}{\alpha!}\frac{1}{\beta!}\left(\frac{1}{2}\right)^{|\alpha|}\left(-\frac{1}{2}\right)^{|\beta|}D_\xi^\alpha\partial_x^\beta\overline{[p_m(x,\xi-i\gamma\psi'(x))]}$$
$$\times D_\xi^\beta\partial_x^\alpha[p_m(x,\xi-i\gamma\psi'(x)]$$
$$+\operatorname{Im}\sum_j\overline{\frac{\partial p_m}{\partial \xi_j}(x,\zeta)}.\frac{\partial p_{m-1}}{\partial \xi_j}(x,\zeta)+\overline{\frac{\partial p_{m-1}}{\partial \xi_j}(x,\zeta)}\frac{\partial p_m}{\partial x_j}(x,\zeta)$$
$$+2\gamma\,\mathbb{R}e\sum_{j,k}\frac{\partial^2(-\psi)}{\partial x_j\,\partial x_k}\overline{\frac{\partial p_m}{\partial \xi_j}(x,\zeta)}\frac{\partial p_{m-1}}{\partial \xi_k}(x,\zeta)$$
$$+2\,\mathbb{R}e\,\overline{p_m(x,\zeta)}\,p_{m-2}(x,\zeta)+|p_{m-1}(x,\zeta)|^2.$$

Or, on peut remarquer que :

$$\frac{\partial^2}{\partial\xi_j\partial\xi_k}[p_m(x,\xi-i\gamma\psi'(x))]=\frac{\partial^2 p_m}{\partial\xi_j\partial\xi_k}(x,\zeta),$$
$$\frac{\partial^2}{\partial\xi_j\partial x_k}[p_m(x,\xi-i\gamma\psi'(x))]=\frac{\partial^2 p_m}{\partial\xi_j\partial x_k}(x,\zeta)+\frac{\gamma}{i}\sum_p\frac{\partial^2 p_m}{\partial\xi_j\partial\xi_p}\frac{\partial^2\psi}{\partial x_p\partial x_k},$$
$$\frac{\partial^2}{\partial x_j\partial x_k}[p_m(x,\xi-i\gamma\psi'(x))]=\frac{\partial^2 p_m}{\partial x_j\partial x_k}(x,\zeta)+\frac{\gamma}{i}$$
$$\times\sum_p\left(\frac{\partial^2 p_m}{\partial x_j\partial\xi_p}(x,\zeta)\frac{\partial^2\psi}{\partial x_p\partial x_k}+\frac{\partial^2 p_m}{\partial x_k\partial\xi_p}(x,\zeta)\frac{\partial^2\psi}{\partial x_p\partial x_j}\right)$$
$$+\left(\frac{\gamma}{i}\right)^2\sum_{p,q}\frac{\partial^2\psi}{\partial x_j\partial x_p}\frac{\partial^2 p_m}{\partial\xi_p\partial\xi_q}(x,\zeta)\frac{\partial^2\psi}{\partial x_q\partial x_k},$$

et que, de l'expression :

$$\sigma_a=\sum_{|\alpha|+|\beta|=2}\frac{1}{\alpha!}\frac{1}{\beta!}\left(\frac{1}{2}\right)^{|\alpha|}\left(-\frac{1}{2}\right)^{|\beta|}D_\xi^\alpha\partial_x^\beta(\bar a)\,D_\xi^\beta\partial_x^\alpha(a),$$

on obtient :

$$\sigma_a=\left(\frac{1}{2i}\right)^2\left\{\sum_{|\alpha|=2}\frac{1}{\alpha!}\partial_\xi^\alpha(\bar a)\,\partial_x^\alpha(a)-\sum_{|\alpha|=|\beta|=1}\partial_\xi^\alpha\partial_x^\beta(\bar a)\,\partial_\xi^\beta\partial_x^\alpha(a)+\sum_{|\beta|=2}\frac{1}{\beta!}\partial_x^\beta(\bar a)\,\partial_\xi^\beta(a)\right\},$$

soit :

$$\sigma_a=-\frac{1}{4}\left\{2\,\mathbb{R}\,e\left[\sum_{1\leq j<k\leq n}\frac{\partial^2}{\partial\xi_j\,\partial\xi_k}(\bar{a})\frac{\partial^2}{\partial x_j\,\partial x_k}(a)+\frac{1}{2}\sum_{1\leq j\leq n}\frac{\partial^2}{\partial\xi_j^2}(\bar{a})\frac{\partial^2}{\partial x_j^2}(a)\right]\right.$$

$$\left.-\sum_{j,\,k}\frac{\partial^2}{\partial\xi_j\,\partial x_k}(\bar{a})\frac{\partial^2}{\partial x_j\,\partial\xi_k}(a)\right\},$$

et donc :

$$\sigma_a=-\frac{1}{4}\left\{2\,\mathbb{R}\,e\left[\frac{1}{2}\sum_{j,\,k}\frac{\partial^2}{\partial\xi_j\,\partial\xi_k}(\bar{a})\frac{\partial^2}{\partial x_j\,\partial x_k}(a)\right]-\sum_{j,\,k}\frac{\partial^2}{\partial\xi_j\,\partial x_k}(\bar{a})\frac{\partial^2}{\partial x_j\,\partial\xi_k}(a)\right\},$$

ce qui donne :

$$\sigma_a=-\frac{1}{4}\mathbb{R}\,e\sum_{j,\,k}\frac{\partial^2}{\partial\xi_j\,\partial\xi_k}(\bar{a})\frac{\partial^2}{\partial x_j\,\partial x_k}(a)+\frac{1}{4}\sum_{j,\,k}\frac{\partial^2}{\partial\xi_j\,\partial x_k}(\bar{a})\frac{\partial^2}{\partial x_j\,\partial\xi_k}(a)\Bigg\},$$

Pour $a=p_m(x,\,\xi-i\gamma\psi'(x))$ on obtient :

$$\sigma_a=-\frac{1}{4}\mathbb{R}\,e\sum_{j,\,k}\overline{\frac{\partial^2 p_m}{\partial\xi_j\,\partial\xi_k}(x,\,\zeta)}$$

$$\times\left[\frac{\partial^2 p_m}{\partial x_j\,\partial x_k}(x,\,\zeta)+\frac{\gamma}{i}\sum_p\left(\frac{\partial^2 p_m}{\partial x_j\,\partial\xi_p}(x,\,\zeta)\frac{\partial^2\psi}{\partial x_p\,\partial x_k}+\frac{\partial^2 p_m}{\partial x_k\,\partial\xi_p}(x,\,\zeta)\frac{\partial^2\psi}{\partial x_p\,\partial x_j}\right)\right.$$

$$\left.+\left(\frac{\gamma}{i}\right)^2\sum_{p,\,q}\frac{\partial^2\psi}{\partial x_j\,\partial x_p}\,\frac{\partial^2 p_m}{\partial\xi_p\,\partial\xi_q}(x,\,\zeta)\frac{\partial^2\psi}{\partial x_q\,\partial x_k}\right]$$

$$+\frac{1}{4}\sum_{j,\,k}\left[\overline{\frac{\partial^2 p_m}{\partial\xi_j\,\partial x_k}(x,\,\zeta)}+i\gamma\sum_p\overline{\frac{\partial^2 p_m}{\partial\xi_j\,\partial\xi_p}(x,\,\zeta)}\frac{\partial^2\psi}{\partial x_p\,\partial x_k}\right]$$

$$\times\left[\frac{\partial^2 p_m}{\partial\xi_k\,\partial x_j}(x,\,\zeta)+\frac{\gamma}{i}\sum_q\frac{\partial^2 p_m}{\partial\xi_k\,\partial\xi_q}(x,\,\zeta)\frac{\partial^{2q}\psi}{\partial x_j}\right].$$

Par suite, il vient :

$$\sigma_a=-\frac{1}{4}\mathbb{R}\,e\sum_{j,\,k}\overline{\frac{\partial^2 p_m}{\partial\xi_j\,\partial\xi_k}(x,\,\zeta)}\frac{\partial^2 p_m}{\partial x_j\,\partial x_k}(x,\,\zeta)+\frac{1}{4}\sum_{j,\,k}\overline{\frac{\partial^2 p_m}{\partial\xi_j\,\partial x_k}(x,\,\zeta)}\frac{\partial^2 p_m}{\partial\xi_k\,\partial x_j}(x,\,\zeta)$$

$$+\gamma\left[-\frac{1}{4}\mathbb{R}\,e\frac{1}{i}\sum_{j,\,k,\,p}\overline{\frac{\partial^2 p_m}{\partial\xi_j\,\partial\xi_k}(x,\,\zeta)}\left[\frac{\partial^2 p_m}{\partial x_j\,\partial\xi_p}(x,\,\zeta)\frac{\partial^2\psi}{\partial x_p\,\partial x_k}+\frac{\partial^2 p_m}{\partial x_k\,\partial\xi_p}(x,\,\zeta)\frac{\partial^2\psi}{\partial x_p\,\partial x_j}\right]\right.$$

$$+\frac{1}{4}\,\frac{1}{i}\sum_{j,\,k,\,q}\overline{\frac{\partial^2 p_m}{\partial\xi_j\,\partial x_k}(x,\,\zeta)}\frac{\partial^2 p_m}{\partial\xi_k\,\partial\xi_q}(x,\,\zeta)\frac{\partial^2\psi}{\partial x_q\,\partial x_j}$$

$$\left.+\frac{1}{4}i\sum_{j,\,k,\,p}\overline{\frac{\partial^2 p_m}{\partial\xi_j\,\partial\xi_p}(x,\,\zeta)}\frac{\partial^2\psi}{\partial x_p\,\partial x_k}\,\frac{\partial^2 p_m}{\partial\xi_k\,\partial x_j}(x,\,\zeta)\right]$$

$$+\gamma^2\left[+\frac{1}{4}\sum_{j,\,k,\,p,\,q}\overline{\frac{\partial^2 p_m}{\partial\xi_j\,\partial\xi_k}(x,\,\zeta)}\frac{\partial^2\psi}{\partial x_j\,\partial x_p}\,\frac{\partial^2 p_m}{\partial\xi_p\,\partial\xi_q}(x,\,\zeta)\frac{\partial^2\psi}{\partial x_q\,\partial x_k}\right.$$

$$\left.+\frac{1}{4}\sum_{j,\,k,\,p,\,q}\overline{\frac{\partial^2 p_m}{\partial\xi_j\,\partial\xi_p}(x,\,\zeta)}\frac{\partial^2\psi}{\partial x_p\,\partial x_k}\,\frac{\partial^2 p_m}{\partial\xi_k\,\partial\xi_q}(x,\,\zeta)\frac{\partial^2\psi}{\partial x_q\,\partial x_j}\right],$$

soit par suite :

$$\sigma_a = -\frac{1}{4}\mathbb{R}\mathrm{e}\sum_{j,k}\overline{\frac{\partial^2 p_m}{\partial\xi_j\partial\xi_k}(x,\zeta)}\frac{\partial^2 p_m}{\partial x_j\partial x_k}(x,\zeta)+\frac{1}{4}\sum_{j,k}\overline{\frac{\partial^2 p_m}{\partial\xi_j\partial x_k}(x,\zeta)}\frac{\partial^2 p_m}{\partial\xi_k\partial x_j}(x,\zeta)$$

$$+\gamma\left[\mathrm{Im}\sum_{j,k,p}\overline{\frac{\partial^2 p_m}{\partial\xi_j\partial\xi_k}(x,\zeta)}\frac{\partial^2 p_m}{\partial x_j\partial\xi_p}(x,\zeta)\frac{\partial^2(-\psi)}{\partial x_p\partial x_k}\right]$$

$$+\gamma^2\left[\frac{1}{2}\sum_{j,k,p,q}\overline{\frac{\partial^2 p_m}{\partial\xi_j\partial\xi_k}(x,\zeta)}\frac{\partial^2\psi}{\partial x_j\partial x_p}\frac{\partial^2 p_m}{\partial\xi_p\partial\xi_q}(x,\zeta)\frac{\partial^2\psi}{\partial x_q\partial x_k}\right].$$

Finalement, on obtient l'expression suivante pour C_{2m-2} :

$$(3.9)\quad C_{2m-2} = -\frac{1}{4}\mathbb{R}e\sum_{j,k}\overline{\frac{\partial^2 p_m}{\partial\xi_j\partial\xi_k}(x,\zeta)}\frac{\partial^2 p_m}{\partial x_j\partial x_k}(x,\zeta)+\frac{1}{4}\sum_{j,k}\overline{\frac{\partial^2 p_m}{\partial\xi_j\partial x_k}(x,\zeta)}\frac{\partial^2 p_m}{\partial\xi_k\partial x_j}(x,\zeta)$$

$$+\mathrm{Im}\sum_{j}\overline{\frac{\partial p_m}{\partial\xi_j}(x,\zeta)}\frac{\partial p_{m-1}}{\partial x_j}(x,\zeta)+\overline{\frac{\partial p_{m-1}}{\partial\xi_j}(x,\zeta)}\frac{\partial p_m}{\partial x_j}(x,\zeta)$$

$$+2\,\mathbb{R}e\,\overline{p_m(x,\zeta)}\,p_{m-2}(x,\zeta)+|p_{m-1}(x,\zeta)|^2$$

$$+\gamma\left[\mathrm{Im}\sum_{j,k,p}\overline{\frac{\partial^2 p_m}{\partial\xi_j\partial\xi_k}(x,\zeta)}\frac{\partial^2 p_m}{\partial x_j\partial\xi_p}(x,\zeta)\frac{\partial^2(-\psi)}{\partial x_p\partial x_k}\right.$$

$$\left.+2\,\mathbb{R}\mathrm{e}\sum_{j,k}\overline{\frac{\partial p_m}{\partial\xi_j}(x,\zeta)}\frac{\partial p_{m-1}}{\partial\xi_k}(x,\zeta)\frac{\partial^2(-\psi)}{\partial x_j\partial x_k}\right]$$

$$+\gamma^2\left[\frac{1}{2}\sum_{j,k,p,q}\overline{\frac{\partial^2 p_m}{\partial\xi_j\partial\xi_k}(x,\zeta)}\frac{\partial^2(-\psi)}{\partial x_j\partial x_p}\frac{\partial^2 p_m}{\partial\xi_p\partial\xi_q}(x,\zeta)\frac{\partial^2(-\psi)}{\partial x_q\partial x_k}\right].$$

De manière générale, comme d'une part la formule de composition (3.2) peut s'écrire pour α, β entiers en considérant $D_\xi^\alpha\partial_x^\beta a$ comme un tenseur α fois contravariant, β fois covariant (dont le produit avec le tenseur β fois contravariant, α fois covariant $D_\xi^\beta\partial_x^\alpha a$ est un scalaire) et que d'autre part on a les égalités de tenseurs suivantes :

$$(3.10)\quad \frac{1}{k!}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^k\{a(x,\xi-i\gamma\psi'(x))\}$$

$$=\sum_{k_1+k_2=k}\frac{1}{k_1!}\frac{1}{k_2!}(\partial_x^{k_1}\partial_\xi^{k_2}a)(x,\xi-i\gamma\psi'(x))\left(\frac{\gamma}{i}\psi''(x)\right)^{k_2},$$

car ψ est quadratique ($\psi^{(3)}\equiv 0$) [$\zeta=\xi-i\gamma\psi'(x)$, k entier] :

$$\left(\frac{\partial}{\partial\xi}\right)^{k}\{a(x,\,\xi-i\gamma\psi'(x))\}=(\partial_\xi^k a)(x,\,\zeta), \tag{3.11}$$

on obtient l'expression suivante de $c(x,\,\xi,\,\gamma)$ symbole de Weyl de $(\mathrm{P}_\gamma)^*\,\mathrm{P}_\gamma=(e^{-\gamma\psi}\,\mathrm{P}\,e^{\gamma\psi})^*$ $(e^{-\gamma\psi}\,\mathrm{P}\,e^{\gamma\psi})$, où les indices α, α_ν, β, β_ν sont des entiers :

$$c=\sum_{\substack{\alpha,\,\beta\\ \alpha_1+\alpha_2=\alpha\\ \beta_1+\beta_2=\beta}}\frac{1}{\alpha!}\,\frac{1}{\beta!}\left(\frac{1}{2i}\right)^{\alpha+\beta}(-1)^\beta\,\frac{\beta!}{\beta_1!\,\beta_2!}\overline{(\partial_x^{\beta_1}\partial_\xi^{\beta_2+\alpha}p)(x,\,\zeta)\left(\frac{\gamma}{i}\psi''(x)\right)^{\beta_2}}$$
$$\times\frac{\alpha!}{\alpha_1!\,\alpha_2!}(\partial_x^{\alpha_1}\partial_\xi^{\alpha_2+\beta}p)(x,\,\zeta)\left(\frac{\gamma}{i}\psi''(x)\right)^{\alpha_2}, \tag{3.12}$$

soit par conséquent :

$$c=\sum_{\alpha_1,\,\beta_1,\,\alpha_2,\,\beta_2}\frac{1}{\alpha_2!}\,\frac{1}{\beta_2!}\left(\frac{-\gamma\psi''(x)}{2}\right)^{\alpha_2+\beta_2}$$
$$\times\frac{1}{\alpha_1!}\,\frac{1}{\beta_1!}\left(\frac{1}{2i}\right)^{\alpha_1+\beta_1}(-1)^{\beta_1}\,\overline{(\partial_x^{\beta_1}\partial_\xi^{\alpha_2+\beta_2+\alpha_1}p)(x,\,\zeta)}\,(\partial_x^{\alpha_1}\partial_\xi^{\alpha_2+\beta_2+\beta_1}p)(x,\,\zeta), \tag{3.13}$$

où la mise en facteur du tenseur $(\psi''(x))^{\alpha_2+\beta_2}$ se justifie car il y a une manière unique de faire les produits dans le membre de droite de (3.13) qui assure que le résultat soit scalaire.

Remarquons que si $a(x,\,\xi)$ est un polynôme en ξ ($\xi\in\mathbb{R}^n$), on a :

$$(\bar a\#a)(x,\,\xi)=\sum_{\alpha,\,\beta}\frac{1}{\alpha!}\,\frac{1}{\beta!}\left(\frac{1}{2i}\right)^{\alpha+\beta}(-1)^\beta\,\overline{(\partial_\xi^\alpha\partial_x^\beta a)(x,\,\zeta)}\,(\partial_\xi^\beta\partial_x^\alpha a)(x,\,\xi)\quad(\bar a\#a \text{ est réel}),$$

et on peut poser pour $\zeta\in\mathbb{C}^n$:

$$(\bar a\#a)(x,\,\zeta)=\sum_{\alpha,\,\beta}\frac{1}{\alpha!}\,\frac{1}{\beta!}\left(\frac{1}{2i}\right)^{\alpha+\beta}(-1)^\beta\,\overline{(\partial_\xi^\alpha\partial_x^\beta a)(x,\,\zeta)}\,(\partial_\xi^\beta\partial_x^\alpha a)(x,\,\zeta). \tag{3.14}$$

La formule (3.14) est le « bon » prolongement au complexe car $(\bar a\#a)(x,\,\zeta)$ reste réel comme on le vérifie aisément. Remarquons que $(\bar a\#a)(x,\,\zeta)$ n'est pas égal en général à $(\bar a\#a)(x,\,\xi)_{|\,\xi=\zeta}$ car pour $\zeta\in\mathbb{C}^n$ on a posé :

$$(a\#b)(x,\,\zeta)=\sum_{\alpha,\,\beta}\frac{1}{\alpha!}\,\frac{1}{\beta!}\left(\frac{1}{2i}\right)^{\alpha+\beta}(-1)^\beta\,(\partial_\xi^\alpha\partial_x^\beta a)(x,\,\bar\zeta)\times(\partial_\xi^\beta\partial_x^\alpha b)(x,\,\zeta),$$

alors que :

$$(a \# b)(x, \xi)_{|\xi=\zeta} = \sum_{\alpha, \beta} \frac{1}{\alpha!} \frac{1}{\beta!} \left(\frac{1}{2i}\right)^{\alpha+\beta} (-1)^{\beta} (\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta a)(x, \zeta) \times (\partial_\xi^\beta \partial_x^\alpha b)(x, \zeta).$$

Par suite, reconnaissant dans le second membre de (3.13) la formule de composition de $\overline{p^{(\alpha_2+\beta_2)}}$ avec $p^{(\alpha_2+\beta_2)}$ $(p^{(\alpha)} = \partial_\xi^\alpha p)$, on obtient :

$$c = \sum_l \frac{(-\gamma \psi''(x))^l}{l!} (\overline{p^{(l)}} \# p^{(l)})(x, \zeta). \tag{3.15}$$

Remarquons que si on compose deux symboles tenseurs l fois contravariants [comme $p^{(l)}$ et $p^{(l)}$], on obtient un symbole tenseur $2l$ fois contravariant dont le produit avec le tenseur $2l$ fois covariant $(\psi''(x))^l$ est un scalaire.

Si C_{2m-k} désigne la partie homogène d'ordre $2m-k$ [en (ξ, γ)] de $c(x, \xi, \gamma)$ (c est de degré $2m$ car $d^0 p = m$), on a :

$$C_{2m-k} = \sum_l \frac{(-\gamma \psi''(x))^l}{l!} (\overline{p^{(l)}} \# p^{(l)})_{2m-k-l}(x, \zeta),$$

(où a_q désigne la partie homogène d'ordre q du symbole a), soit en fait :

$$C_{2m-k} = \sum_{l=0}^{k} \frac{(-\gamma \psi''(x))^l}{l!} (\overline{p^{(l)}} \# p^{(l)})_{2m-2l-(k-l)}(x, \zeta). \tag{3.16}$$

4. Preuve

Soit $S \equiv \varphi(x) = \varphi(x_0)$ l'hypersurface orientée; on choisit alors le poids quadratique ψ comme suit :

$$\psi(x) = \varphi(x_0) + \varphi'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2!}\varphi''(x_0)(x-x_0)^2 - \frac{1}{2!}A(\varphi'(x_0)(x-x_0))^2 + \frac{\varepsilon}{2!}|x-x_0|^2, \tag{4.1}$$

où A et ε sont des paramètres strictement positifs.

On a, $c(x, \xi, \gamma)$ désignant le symbole de Weyl de $(P_\gamma)^* P_\gamma$, avec $P_\gamma = e^{-\gamma\psi} P e^{\gamma\psi}$, P étant un opérateur différentiel d'ordre m de symbole de Weyl :

$$p = p_m + p_{m-1} + p_{m-2} + \ldots,$$

$p_m(x, \xi)$ symbole principal de P, polynôme homogène en ξ de degré m, p_{m-1} symbole sous-principal de P [c'est également un avantage de la quantification de Weyl, ([2])], polynôme homogène de degré $m-1$, en notant $\zeta=\xi-i\gamma\psi'(x)$:

$$
\begin{aligned}
(4.2)\quad c(x, \xi, \gamma) = {} & |p_m(x, \zeta)|^2+\gamma \sum_{j,k} \overline{\frac{\partial p_m}{\partial \xi_j}(x, \zeta)} \frac{\partial p_m}{\partial \xi_k}(x, \zeta) \\
& \left[A \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(x_0) \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}(x_0) + \frac{\partial^2(-\varphi)}{\partial x_j \partial x_k}(x_0) - \varepsilon \delta_{j,k} \right] \\
& + \operatorname{Im} \sum_j \overline{\frac{\partial p_m}{\partial \xi_j}(x, \zeta)} \frac{\partial p_m}{\partial x_j}(x, \zeta) + 2 \mathbb{R}e\, \overline{p_m(x, \zeta)} p_{m-1}(x, \zeta) \\
& + \frac{\gamma^2}{2} \sum_{j,k,p,q} \overline{\frac{\partial^2 p_m}{\partial \xi_j \partial \xi_k}(x, \zeta)} \frac{{}^2 p_m}{\partial \xi_p \partial \xi_q}(x, \zeta) \\
& \times \left[A \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(x_0) \frac{\partial \varphi}{\partial x_p}(x_0) + \frac{\partial^2(-\varphi)}{\partial x_j \partial x_p}(x_0) - \varepsilon \delta_{j,p} \right] \\
& \times \left[A \frac{\partial \varphi}{\partial x_q}(x_0) \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}(x_0) + \frac{\partial^2(-\varphi)}{\partial x_q \partial x_k} - \varepsilon \delta_{q,k} \right] \\
& + \gamma \left\{ \operatorname{Im} \sum_{j,k,p} \overline{\frac{\partial^2 p_m}{\partial \xi_j \partial \xi_k}(x, \zeta)} \frac{\partial^2 p_m}{\partial x_j \partial \xi_p}(x, \zeta) \left[A \frac{\partial \varphi}{\partial x_p}(x_0) \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}(x_0) + \frac{\partial^2(-\varphi)}{\partial x_p \partial x_k}(x_0) - \varepsilon \delta_{p,k} \right] \right. \\
& \left. + 2 \mathbb{R}e \sum_{j,k} \overline{\frac{\partial p_m}{\partial \xi_j}(x, \zeta)} \frac{\partial p_{m-1}}{\partial \xi_k}(x, \zeta) \left[A \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(x_0) \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}(x_0) + \frac{\partial_2(-\varphi)}{\partial x_j \partial x_k}(x_0) - \varepsilon \delta_{j,k} \right] \right\} \\
& - \frac{1}{4} \mathbb{R}e \sum_{j,k} \overline{\frac{\partial^2 p_m}{\partial \xi_j \partial \xi_k}(x, \zeta)} \frac{\partial^2 p_m}{\partial x_j \partial x_k}(x, \zeta) + \frac{1}{4} \sum_{j,k} \overline{\frac{\partial^2 p_m}{\partial \xi_j \partial x_k}(x, \zeta)} \frac{\partial^2 p_m}{\partial \xi_k \partial x_j}(x, \zeta) \\
& + \operatorname{Im} \sum_j \overline{\frac{\partial p_m}{\partial \xi_j}(x, \zeta)} \frac{\partial p_{m-1}}{\partial x_j}(x, \zeta) + \overline{\frac{\partial p_{m-1}}{\partial \xi_j}(x, \zeta)} \frac{\partial p_m}{\partial x_j}(x, \zeta) \\
& + 2 \mathbb{R}e\, \overline{p_m(x, \zeta)} p_{m-2}(x, \zeta) + |p_{m-1}(x, \zeta)|^2 + \sum_{\substack{k \geq 3 \\ l \leq \varkappa}} r_{2m-k-l}(x, \zeta) \gamma^l \Pi_l(A, \varepsilon),
\end{aligned}
$$

où r_{2m-k-l} est homogène en ζ de degré $2m-k-l$, et $\Pi_l(A, \varepsilon)$ un polynôme en A et ε de degré l.

([2]) Voir Leray [15], Helffer [19], pour les autres invariants.

En effet, de (3.16) il vient :

$$c=c_{2m}+c_{2m-1}+c_{2m-2}+\sum_{\substack{k\geq 3\\ 0\leq l\leq k}}\frac{(-\psi''(x))^l}{l!}\gamma^l(\overline{p^{(l)}}\# p^{(l)})_{2m-k-l}(x,\zeta),$$

soit comme $-\psi''(x)=\mathrm{A}\,\varphi'(x_0)^2-\varphi''(x_0)-\varepsilon$, une expression du « reste » correspondant à celle annoncée en (4.2).

On obtient de (4.2), avec $\varphi_0(x)=\varphi(x_0)+\varphi'(x_0)(x-x_0)$:

$$\begin{aligned}(4.3)\quad c(x,\xi,\gamma)=&|p_m(x,\zeta)|^2\\
&+\Big[\mathrm{A}\,\gamma|\mathrm{H}_{\varphi_0}(p_m)(x,\zeta)|^2+\gamma\sum_{j,k}\overline{\frac{\partial p_m}{\partial\xi_j}(x,\zeta)}\frac{\partial p_m}{\partial\xi_k}(x,\zeta)\frac{\partial^2(-\varphi)}{\partial x_j\partial x_k}(x_0)\\
&+\mathrm{Im}\sum_j\overline{\frac{\partial p_m}{\partial\xi_j}(x,\zeta)}\frac{\partial p_m}{\partial x_j}(x,\zeta)+2\,\mathbb{R}e\,\overline{p_m(x,\zeta)}p_{m-1}(x,\zeta)-\varepsilon\gamma\sum_j\Big|\frac{\partial p_m}{\partial\xi_j}(x,\zeta)\Big|^2\Big]\\
&+\Big[\mathrm{A}^2\frac{\gamma^2}{2}|\mathrm{H}^2_{\varphi_0}(p_m)(x,\zeta)|^2+\mathrm{A}\,\gamma^2\sum_{j,k}\frac{\partial^2(-\varphi)}{\partial x_j\partial x_k}(x_0)\\
&\times\overline{\Big(\frac{\partial}{\partial\xi_j}(\mathrm{H}_{\varphi_0}(p_m))\Big)(x,\zeta)}\Big(\frac{\partial}{\partial\xi_k}(\mathrm{H}_{\varphi_0}(p_m))\Big)(x,\zeta)\\
&+\mathrm{A}\,\gamma\,\mathrm{Im}\sum_j\overline{\Big(\frac{\partial}{\partial\xi_j}(\mathrm{H}_{\varphi_0}(p_m))\Big)(x,\zeta)}\Big(\frac{\partial}{\partial x_j}(\mathrm{H}_{\varphi_0}(p_m))\Big)(x,\zeta)\\
&+\mathrm{A}\,\gamma\,2\,\mathbb{R}e\,\overline{(\mathrm{H}_{\varphi_0}(p_m))(x,\zeta)}(\mathrm{H}_{\varphi_0}(p_{m-1}))(x,\zeta)\Big]\\
&+\mathrm{C}^{[0]}_{2m-2}(x,\zeta,\gamma)+\varepsilon\,\mathrm{A}\,\gamma^2\,\theta^{(1)}_{2m-4}(x,\zeta)+\varepsilon\gamma^2\,\theta^{(2)}_{2m-4}(x,\zeta)+\varepsilon^2\gamma^2\,\theta^{(3)}_{2m-4}(x,\zeta)\\
&+\varepsilon\gamma\theta^{(1)}_{2m-3}(x,\zeta)+\sum_{\substack{k\geq 3\\ l\leq k}}r_{2m-l-k}(x,\zeta)\gamma^l\Pi_l(\mathrm{A},\varepsilon),\end{aligned}$$

où $\mathrm{C}^{[0]}_{2m-2}(x,\zeta,\gamma)$ est homogène en (ζ,γ) de degré $2m-2$, $\theta^{(j)}_{2m-q}(x,\zeta)$ est homogène en ζ de degré $2m-q$, $r_{2m-k-l}(x,\zeta)$ est homogène en ζ de degré $2m-k-l$, $\Pi_l(\mathrm{A},\varepsilon)$ est un polynôme de degré l en A et ε.

De (4.3) il vient, en utilisant (1.1) à (1.5) :

$$\begin{aligned}(4.4)\quad c(x,\xi,\gamma)=&\mathrm{C}^{[0]}_{2m}(x,\zeta)+\mathrm{A}\,\gamma\,\mathrm{C}^{[1]}_{2m-1}(x,\zeta)+\mathrm{C}^{[0]}_{2m-1}(x,\zeta,\gamma)\\
&+2\,\mathbb{R}e\,\overline{p_m(x,\zeta)}p_{m-1}(x,\zeta)-\varepsilon\gamma\Big\|\frac{\partial p_m}{\partial\xi}(x,\zeta)\Big\|^2+\mathrm{A}^2\gamma^2\,\mathrm{C}^{[2]}_{2m-2}(x,\zeta)+\mathrm{A}\,\gamma\,\mathrm{C}^{[1]}_{2m-2}(x,\zeta,\gamma)\\
&+\mathrm{A}\,\gamma\,2\,\mathbb{R}e\,\overline{\mathrm{H}_{\varphi_0}(p_m)(x,\zeta)}\,\mathrm{H}_{\varphi_0}(p_{m-1})(x,\zeta)+\mathrm{C}^{[0]}_{2m-2}(x,\zeta,\gamma)\\
&+\varepsilon\,\mathrm{A}\,\gamma^2\,\theta^{(1)}_{2m-4}(x,\zeta)+\varepsilon\gamma^2\,\theta^{(2)}_{2m-4}(x,\zeta)+\varepsilon^2\gamma^2\,\theta^{(3)}_{2m-4}(x,\zeta)\\
&+\varepsilon\gamma\theta^{(1)}_{2m-3}(x,\zeta)+\sum_{\substack{k\geq 3\\ l\leq k}}r_{2m-l-k}(x,\zeta)\gamma^l\Pi_l(\mathrm{A},\varepsilon).\end{aligned}$$

On verra plus bas que les termes de c se « présentent » par ordre d'homogénéité en (ξ, γ), d'abord $2m$, puis $2m-1$, puis $2m-2$, et que sur une même ligne d'homogénéité les termes sont ordonnés par la puissance du paramètre A qui y figure.

En posant $Z=\zeta/|\zeta|$ ($\zeta\neq 0$ car on peut toujours supposer $\gamma\geqq 1$), $\Gamma=\gamma/|\zeta|$, $\Xi=\xi/|\zeta|$, il vient de (4.4) :

$$(4.5)\quad \gamma^{k_0+1}c(x,\xi,\gamma)|\zeta|^{-2m}=\gamma^{k_0+1}C_{2m}^{[0]}(x,Z)+\gamma^{k_0}$$
$$\times\left\{A[C_{2m-1}^{[1]}(x,Z)\Gamma^2]+[C_{2m-1}^{[0]}(x,Z,\Gamma)\Gamma+2\,\mathbb{R}e\,\overline{p_m(x,Z)}\,p_{m-1}(x,Z)\Gamma]-\varepsilon\Gamma^2\left\|\frac{\partial p_m}{\partial\xi}(x,Z)\right\|^2\right\}$$
$$+\gamma^{k_0-1}\{A^2[C_{2m-2}^{[2]}(x,Z)\Gamma^4]+A[C_{2m-2}^{[1]}(x,Z,\Gamma)\Gamma^3$$
$$+2\,\mathbb{R}e\,\overline{H_{\varphi_0}(p_m)(x,Z)}\,H_{\varphi_0}(p_{m-1})(x,Z)\Gamma^3]$$
$$+C_{2m-2}^{[0]}(x,Z,\Gamma)\Gamma^2+\varepsilon A\Gamma^4\theta_{2m-4}^{(1)}(x,Z)$$
$$+\varepsilon\Gamma^4\theta_{2m-4}^{(2)}(x,Z)+\varepsilon^2\Gamma^4\theta_{2m-4}^{(2)}(x,Z)+\varepsilon\Gamma^3\theta_{2m-3}^{(1)}(x,Z)\}$$
$$+\sum_{\substack{k\geqq 3\\ l\leqq k}}\gamma^{k_0+1-k}r_{2m-l-k}(x,Z)\Gamma^{l+k}\Pi_l(A,\varepsilon).$$

On se propose de démontrer, sous l'hypothèse $H(K_0, l_0)$.

Il existe $A_0\geqq 1$ tel que, pour tout $\gamma\geqq e^{A_0}$, pour tout x, $|x-x_0|<1/A_0^2$, pour tout $\xi\in\mathbb{R}^n$, on ait :

$$(4.6)\qquad \gamma^{k_0+1}c(x,\xi,\gamma)\geqq A_0^{-1}|\zeta|^{2m},$$

$\zeta=\xi-i\gamma\psi'(x)$, $\varepsilon=A_0^{-2}$, $A=A_0$ dans l'expression de ψ de (4.1).

Pour cela il suffit donc de prouver d'après (4.5),

Il existe $A_0\geqq 1$ tel que pour tout $\gamma\geqq e^{A_0}$, pour tout x, $|x-x_0|<A_0^{-2}$, pour tout (Ξ,Γ), $|\Xi|^2+\Gamma^2|\psi'(x)|^2=1$, $\Gamma\geqq 0$ et $Z=\Xi-i\Gamma\psi'(x)$:

$$(4.7)\quad \gamma^{k_0+1}C_{2m}^{[0]}(x,Z)+\gamma^{k_0}\Big[A_0C_{2m-1}^{[1]}(x,Z)\Gamma^2+C_{2m-1}^{[0]}(x,Z,\Gamma).\Gamma$$
$$+2\,\mathbb{R}e\,\overline{p_m(x,Z)}\,p_{m-1}(x,Z)\Gamma-A_0^{-2}\Gamma^2\left\|\frac{\partial p_m}{\partial\xi}(x,Z)\right\|^2\Big]$$
$$+\gamma^{k_0-1}[A_0^2C_{2m-2}^{[2]}\Gamma^4+A_0(C_{2m-2}^{[1]}(x,Z,\Gamma)\Gamma^3$$
$$+2\,\mathbb{R}e\,\overline{H_{\varphi_0}(p_m)(x,Z)}\,H_{\varphi_0}(p_{m-1})(x,Z)\Gamma^3)$$
$$+C_{2m-2}^{[0]}(x,Z,\Gamma)\Gamma^2+A_0^{-1}\Gamma^4\theta_{2m-4}^{(1)}(x,Z)+A_0^{-2}\Gamma^4\theta_{2m-4}^{(2)}(x,Z)$$
$$+A_0^{-4}\Gamma^4\theta_{2m-4}^{(3)}(x,Z)+A_0^{-2}\Gamma^3\theta_{2m-3}^{(1)}(x,Z)]$$
$$+\sum_{\substack{k\geqq 3\\ l\leqq k}}\gamma^{k_0+1-k}r_{2m-l-k}(x,Z)\Gamma^{l+k}\Pi_l(A_0,A_0^{-2})\geqq A_0^{-1}.$$

Raisonnons par l'absurde : sinon pour tout entier $p \geqq 1$, on pourrait trouver $\gamma_p \geqq e^p$, x_p avec :

$$|x_p - x_0| \leqq p^{-2} (\Xi_p, \Gamma_p) \qquad \text{avec} \quad |\Xi_p|^2 + \Gamma_p^2 |\psi_p'(x_p)|^2 = 1,$$

$\Gamma_p \geqq 0$ avec $Z_p = \Xi_p - i\Gamma_p \psi_p'(x_p')$ [ψ_p est la fonction ψ de (4.1) avec $A = p$, $\varepsilon = p^{-2}$], et :

$$(4.8) \quad \gamma_p^{k_0+1} C_{2m}^{[0]}(x_p, Z_p) + \gamma_p^{k_0} \Big[p\, C_{2m-1}^{[1]}(x_p, Z_p)\Gamma_p^2 + C_{2m-1}^{[0]}(x_p, Z_p, \Gamma_p)\Gamma_p$$
$$+ 2\,\mathbb{R}e\, \overline{p_m(x_p, Z_p)}\, p_{m-1}(x_p, Z_p)\Gamma_p - p^{-2} \left\| \frac{\partial p_m}{\partial \xi}(x_p, Z_p) \right\|^2 \Big]$$
$$+ \gamma_p^{k_0-1} [p^2 C_{2m-2}^{[2]}(x_p, Z_p)\Gamma_p^4 + p(C_{2m-2}^{[1]}(x_p, Z_p, \Gamma_p)\Gamma_p^3$$
$$+ 2\,\mathbb{R}e\, \overline{H_{\varphi_0}(p_m)(x_p, Z_p)}\, H_{\varphi_0}(p_{m-1})(x_p, Z_p)\Gamma_p^3)$$
$$+ C_{2m-2}^{[0]}(x_p, Z_p, \Gamma_p)\Gamma_p^2 + p^{-1}\Gamma_p^4 \theta_{2m-4}^{(1)}(x_p, Z_p)$$
$$+ p^{-2}(\Gamma_p^4 \theta_{2m-4}^{(2)}(x_p, Z_p) + \Gamma_p^3 \theta_{2m-3}^{(1)}(x_p, Z_p)) + p^{-4}\Gamma_p^4 \theta_{2m-4}^{(3)}(x_p, Z_p)]$$
$$+ \sum_{\substack{k \geqq 3 \\ l \leqq k}} \gamma_p^{k_0+1-k} r_{2m-l-k}(x_p, Z_p)\Gamma_p^{l+k} \Pi_l(p, p^{-2}) \leqq p^{-1}.$$

Comme :

$$\psi_p(x_p) = \varphi(x_0) + \varphi'(x_0)(x_p - x_0) + \frac{1}{2}\varphi''(x_0)(x_p - x_0)^2$$
$$- \frac{1}{2} p (\varphi'(x_0)(x_p - x_0))^2 + \frac{1}{2} p^{-2} |x_p - x_0|^2,$$

et $|x_p - x_0| \leqq p^{-2}$ on obtient $\psi_p'(x_p) \underset{p\to\infty}{\to} \varphi'(x_0)$. En outre, on peut supposer, par compacité que $(\Xi_p, \Gamma_p) \underset{p\to\infty}{\to} (\Xi_0, \Gamma_0)$, avec $Z_0 = \Xi_0 - i\Gamma_0 \varphi'(x_0)$, $|Z_0| = 1$ et remarquer par conséquent que chaque terme $C_{2m-k}^{[l]}(x_p, Z_p)\Gamma_p^{k+l}$ tend vers $C_{2m-k}^{[l]}(x_0, Z_0)\Gamma_0^{k+l}$.

La division de l'inégalité (4.8) par $\gamma_p^{(k_0+1)}$ donne par conséquent :

$$C_{2m}^{[0]}(x_p, Z_p) + \Big[\frac{p}{\gamma_p} C_{2m-1}^{[1]}(x_p, Z_p)\Gamma_p^2 + \frac{1}{\gamma_p} C_{2m-1}^{[0]}(x_p, Z_p, \Gamma_p)\Gamma_p^3$$
$$+ \frac{1}{\gamma_p} 2\,\mathbb{R}e\, \overline{p_m(x_p, Z_p)}\, p_{m-1}(x_p, Z_p)\Gamma_p^3 - \frac{1}{p^2 \gamma_p} \left\| \frac{\partial p_m}{\partial \xi}(x_p, Z_p) \right\|^2 \Big]$$
$$+ \Big[\frac{p^2}{\gamma_p^2} C_{2m-2}^{[2]}(x_p, Z_p)\Gamma_p^4 + \frac{p}{\gamma_p^2} C_{2m-2}^{[1]}(x_p, Z_p, \Gamma_p)\Gamma_p^3$$
$$+ \frac{p}{\gamma_p^2} 2\,\mathbb{R}e\, \overline{H_{\varphi_0}(p_m)(x_p, Z_p)}\, H_{\varphi_0}(p_{m-1})(x_p, Z_p)\Gamma_p^3$$

$$+\frac{1}{\gamma_p^2}C_{2m-2}^{[0]}(x_p, Z_p, \Gamma_p)\Gamma_p^2+\frac{1}{p\gamma_p^2}\Gamma_p^4\theta_{2m-4}^{(1)}(x_p, Z_p)$$

$$\left.+\frac{1}{p^2\gamma_p^2}(\Gamma_p^4\theta_{2m-4}^{(2)}(x_p, Z_p)+\Gamma_p^3\theta_{2m-3}^{(1)}(x_p, Z_p))+\frac{1}{p^4\gamma_p^2}\Gamma_p^4\theta_{2m-4}^{(3)}(x_p, Z_p)\right]$$

$$+\sum_{\substack{k\geqq 3\\ l\leqq k}}\gamma^{-k}r_{2m-l-k}(x_p, Z_p)\Gamma_p^{l+k}\Pi_l(p, p^{-2})\leqq\frac{1}{p\gamma_p^{k_0+1}}.$$

Or comme $\gamma_p\geqq e^p$, il vient $C_{2m}^{[0]}(x_0, Z_0)\leqq 0$ soit $C_{2m}^{[0]}(x_0, Z_0)=|p_m(x_0, Z_0)|^2=0$, et on peut remarquer que, comme $Z_0=\Xi_0-i\Gamma_0\varphi'(x_0)$ avec $\Gamma_0\geqq 0$, l'ellipticité de p_m assure que $\Gamma_0>0$.

La division de l'inégalité (4.8) par $p\gamma_p^{(k_0+1)}$ donne :

$$\frac{\gamma_p}{p}C_{2m}^{[0]}(x_p, Z_p)+C_{2m-1}^{[1]}(x_p, Z_p)\Gamma_p^2+O\left(\frac{1}{p}\right)\leqq\frac{1}{p^2\gamma_p^{k_0}},$$

et comme $C_{2m}^{[0]}\geqq 0$, on obtient $C_{2m-1}^{[1]}(x_0, Z_0)\Gamma_0^2\leqq 0$. Comme d'après ce qui précède $\Gamma_0>0$, on trouve :

$$C_{2m-1}^{[1]}(x_0, Z_0)=|H_{\varphi_0}(p_m)(x_0, Z_0)|^2\leqq 0\quad\text{i.e. } C_{2m-1}^{[1]}(x_0, Z_0)=0,$$

ce qui donne une contradiction si l'hypothèse est H(0,1) (Calderon). Sinon on continue par le même procédé; la division de l'inégalité (4.8) par $\gamma_p^{k_0}$ donne :

$$\gamma_p C_{2m}^{[0]}(x_p, Z_p)+pC_{2m-1}^{[1]}(x_p, Z_p)+C_{2m-1}^{[0]}(x_p, Z_p, \Gamma_p)\Gamma_p$$
$$+2\,\mathbb{R}e\,\overline{p_m(x_p, Z_p)}p_{m-1}(x_p, Z_p)\Gamma_p+O\left(\frac{1}{p}\right)\leqq\frac{1}{p\gamma_p^{k_0}},$$

d'où, comme $C_{2m}^{[0]}(x_p, Z_p)$ et $C_{2m-1}^{[1]}(x_p, Z_p)$ sont positifs, que $p_m(x_0, Z_0)=0$:

$$C_{2m-1}^{[0]}(x_0, Z_0, \Gamma_0)\Gamma_0\leqq 0.$$

Comme $\Gamma_0>0$, il vient $C_{2m-1}^{[0]}(x_0, Z_0, \Gamma_0)\leqq 0$, ce qui donne une contradiction si l'hypothèse est H(0, 0) (Hörmander), car on a déjà :

$$C_{2m}^{[0]}(x_0, Z_0)=C_{2m-1}^{[1]}(x_0, Z_0)=0.$$

Sinon, on a maintenant nécessairement $k_0=1$ et :

$$C_{2m}^{[0]}(x_0, Z_0)=C_{2m-1}^{[1]}(x_0, Z_0)=C_{2m-1}^{[0]}(x_0, Z_0, \Gamma_0)=0,$$
$$Z_0=\Xi_0-i\Gamma_0\varphi'(x_0),\qquad \Gamma_0>0.$$

La division de (4.8) par $p^2 \gamma_p^{k_0-1}$ donne :

$$\frac{\gamma_p^2}{p^2} C_{2m}^{[0]}(x_p, Z_p) + \frac{\gamma_p}{p^2}\Big[p\, C_{2m-1}^{[1]}(x_p, Z_p)\,\Gamma_p^2 + C_{2m-1}^{[0]}(x_p, Z_p, \Gamma_p)\,\Gamma_p$$
$$+ 2\,\mathbb{R}e\,\overline{p_m(x_p, Z_p)}\, p_{m-1}(x_p, Z_p)\,\Gamma_p - \frac{1}{p^2}\Gamma_p^2 \left\| \frac{\partial p_m}{\partial \xi}(x_p, Z_p)\right\|^2\Big]$$
$$+ C_{2m-2}^{[2]}(x_p, Z_p)\,\Gamma_p^4 + O\left(\frac{1}{p}\right) \leqq \frac{1}{p^3 \gamma_p^{k_0-1}}.$$

Or de l'hypothèse $H'(k_0, l_0)$ il vient :

$$\frac{\gamma_p^2}{p^2} |p_m(x_p, Z_p)|^2 + \frac{\gamma_p}{p^2}\Big[p\, C_{2m-1}^{[1]}(x_p, Z_p)\,\Gamma_p^2 - 2\,\mathbb{R}e\,\overline{p_m(x_p, Z_p)}\,\lambda_m(x_p, Z_p, \Gamma_p)$$
$$-\lambda_0\, C_{2m-1}^{[1]}(x_p, Z_p)\,\Gamma_p^2 + 2\,\mathbb{R}e\,\overline{p_m(x_p, Z_p)}\, p_{m-1}(x_p, Z_p)\,\Gamma_p$$
$$-2\,\mathbb{R}e\,\overline{p_m(x_p, Z_p)}\,\frac{1}{p^2}\mu_m(x_p, Z_p, \Gamma_p) - \frac{\mu_0}{p^2} C_{2m-1}^{[1]}(x_p, Z_p)\,\Gamma_p^2\Big]$$
$$+ C_{2m-2}^{[2]}(x_p, Z_p)\,\Gamma_p^4 + O\left(\frac{1}{p}\right) \leqq \frac{1}{p^3},$$

et par suite :

$$\frac{\gamma_p^2}{p^2} |p_m(x_p, Z_p)|^2 + \frac{\gamma_p}{p} C_{2m-1}^{[1]}(x_p, Z_p)\,\Gamma_p^2 \left[1 - \frac{\lambda_0}{p} - \frac{\mu_0}{p^3}\right]$$
$$-2\frac{\gamma_p}{p^2}\mathbb{R}e\,\overline{p_m(x_p, Z_p)}\left[\lambda_m(x_p, Z_p, \Gamma_p) - p_{m-1}(x_p, Z_p)\,\Gamma_p + \frac{1}{p^2}\mu_m(x_p, Z_p, \Gamma_p)\right]$$
$$+ C_{2m-2}^{[2]}(x_p, Z_p)\,\Gamma_p^4 + O\left(\frac{1}{p}\right) \leqq \frac{1}{p^3},$$

et donc, pour $\alpha_p > 0$:

$$|p_m(x_p, Z_p)|^2 \left[\frac{\gamma_p^2}{p^2} - \frac{\gamma_p}{p^2}\alpha_p\right] + \frac{\gamma_p}{p} C_{2m-1}^{[1]}(x_p, Z_p)\,\Gamma_p^2 \left[1 - \frac{\lambda_0}{p} - \frac{\mu_0}{p^3}\right]$$
$$+ C_{2m-2}^{[2]}(x_p, Z_p)\,\Gamma_p^4 - \frac{1}{\alpha_p}\frac{\gamma_p}{p^2}\Big|\lambda_m(x_p, Z_p, \Gamma_p) - p_{m-1}(x_p, Z_p)\,\Gamma_p$$
$$+ \frac{1}{p^2}\mu_m(x_p, Z_p, \Gamma_p)\Big|^2 + O\left(\frac{1}{p}\right) \leqq \frac{1}{p^3}.$$

On prend $\alpha_p = \gamma_p$, et comme λ_m, μ_m sont bornés [et λ_0, μ_0 des constantes : $1 - (\lambda_0/p) - (\mu_0/p^3) \to 1$], que $C_{2m-1}^{[1]}(x_p, Z_p) \geqq 0$, il vient $C_{2m-2}^{[2]}(x_0, Z_0)\,\Gamma_0^4 \leqq 0$, soit, comme $\Gamma_0 \neq 0$:

$$C_{2m-2}^{[2]}(x_0, Z_0) = \frac{1}{2}|H_{\varphi_0}^2(p_m)(x_0, Z_0)|^2 \leqq 0 \quad \text{i.e.} \quad H_{\varphi_0}^2(p_m)(x_0, Z_0) = 0.$$

Ceci donne une contradiction si l'hypothèse est H(1,2).

Sinon la division de (4.8) par $p\,\gamma_p^{k_0-1}$ donne, après avoir utilisé $H'(k_0, l_0)$:

$$\frac{\gamma_p^2}{p}|p_m(x_p, Z_p)|^2+\gamma_p C_{2m-1}^{[1]}(x_p, Z_p)\Gamma_p^2\left[1-\frac{\lambda_0}{p}-\frac{\mu_0}{p^3}\right]$$
$$-2\frac{\gamma_p}{p}\mathbb{R}e\,\overline{p_m(x_p, Z_p)}\left[\lambda_m(x_p, Z_p, \Gamma_p)-p_{m-1}(x_p, Z_p)\Gamma_p+\frac{\mu_m(x_p, Z_p, \Gamma_p)}{p^2}\right]$$
$$+p\,C_{2m-2}^{[2]}(x_p, Z_p)\Gamma_p^4+C_{2m-2}^{[1]}(x_p, Z_p, \Gamma_p)\Gamma_p^3$$
$$+2\,\mathbb{R}e\,\overline{H_{\varphi_0}(p_m)(x_p, Z_p)}\,H_{\varphi_0}(p_{m-1})(x_p, Z_p)\Gamma_p^3+O\left(\frac{1}{p}\right)\leqq\frac{1}{p^2\gamma_p^{k_0-1}}=\frac{1}{p^2}.$$

Donc, pour $\beta_p>0$, on a :

$$\left[\frac{\gamma_p^2}{p}-\beta_p\frac{\gamma_p}{p}\right]|p_m(x_p, Z_p)|^2+\gamma_p|H_{\varphi_0}(P_m)(x_p, Z_p)|^2\Gamma_p^2\left[1-\frac{\lambda_0}{p}-\frac{\mu_0}{p^3}\right]$$
$$+p\frac{1}{2}|H_{\varphi_0}^2(p_m)(x_p, Z_p)|^2\Gamma_p^4+C_{2m-2}^{[1]}(x_p, Z_p, \Gamma_p)\Gamma_p^3$$
$$+2\,\mathbb{R}e\,\overline{H_{\varphi_0}(p_m)(x_p, Z_p)}\,H_{\varphi_0}(p_{m-1})(x_p, Z_p)\Gamma_p^3$$
$$-\frac{1}{\beta_p}\frac{\gamma_p}{p}\left|\lambda_m(x_p, Z_p, \Gamma_p)-p_{m-1}(x_p, Z_p)\Gamma_p+\frac{\mu_m(x_p, Z_p, \Gamma_p)}{p^2}\right|^2+O\left(\frac{1}{p}\right)\leqq\frac{1}{p^2},$$

d'où on obtient, avec $\beta_p=\gamma_p$, $C_{2m-2}^{[1]}(x_0, Z_0, \Gamma_0)\Gamma_0^3\leqq 0$ $(H_{\varphi_0}(p_m)(x_0, Z_0)=0)$ ce qui contredit l'hypothèse H(1,1) et donne l'estimation (4.6).

On termine la preuve par une inégalité de Gårding, donnée en appendice, qui donne le théorème II, duquel on déduit par un argument très classique, rappelé en appendice, le théorème I.

Remarquons en outre qu'on peut espérer écrire un théorème plus général en énonçant des hypothèses $H(k, l)$, avec $1\leqq k\leqq 2m$, le calcul explicite de C_{2m-k} étant fait pour k quelconque en (3.16). Cependant la difficulté à expliciter les hypothèses de recollement compliquerait considérablement l'énoncé d'un tel théorème.

APPENDICE

1. Une inégalité de Gårding

De la formule (3.10) il vient :

$$|\partial_\xi^\alpha(A^{-1}\partial_x)^\beta\partial_\gamma^k\{p(x, \xi-i\gamma\psi'(x)\}|\leqq C_{\alpha\beta k}^{(0)}(x)|\xi-i\gamma\psi'(x)^{m-|\alpha|-k},$$

où $C_{\alpha\beta k}^{(0)}$ est indépendant de A, γ et peut être pris uniforme pour x dans un voisinage *fixé* de x_0 ($|x-x_0|\leqq 1$, par exemple).

Par suite, comme :

$$c(x, \xi, \gamma) = \overline{p(x, \zeta)} \# p(x, \zeta),$$

pour $\mu > 0$, on a :

$$|\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta \partial_\gamma^k \{ c(x, \xi, \gamma\mu) \}| \leqq C_{\alpha\beta k}^{(1)} |\xi - i\gamma\mu\psi'(x)|^{2m-|\alpha|-k} A^{|\beta|} \mu^k,$$

où $C_{\alpha\beta k}^{(1)}$ est indépendant de A, γ, μ.

Or, pour $|x - x_0| \leqq A^{-2}$, $\xi \in \mathbb{R}^n$, $\gamma\mu \geqq e^A$, $A \geqq A_0$, on a d'après (4.6) :

$$c(x, \xi, \gamma\mu) - A^{-1} (\gamma\mu)^{-2} ((\gamma\mu)^2 + |\xi|^2)^m \geqq 0.$$

La démonstration du résultat de Fefferman et Phong [28] fournit ici une inégalité de Gårding avec gain de deux dérivées.

Il vient, pour $u \in C_0^\infty(|x - x_0| \leqq A^{-2})$:

$$(\mathrm{Op}_{1/2}\, c(x, \xi, \gamma\mu) - A^{-1} (\gamma\mu)^{-2} ((\gamma\mu)^2 + |\xi|^2)^m + C_0 ((\gamma\mu)^2 + |\xi|^2)^{m-1} A^2 \mu^2)\, u, u) \geqq 0,$$

avec C_0 indépendant de A, γ, μ comme fonction des $C_{\alpha\beta k}^{(1)}$ pour un nombre fini d'entre eux. On peut donc choisir *a priori* μ tel que $C_0 A^2 \mu^2 \ll A^{-1}$, obtenant ainsi le résultat du théorème II.

2. Le passage de l'inégalité de Carleman a l'unicité de Cauchy

On rappelle ici la preuve, très classique, de l'unicité de Cauchy à partir d'une inégalité de Carleman. Supposons donc que, étant donnés un opérateur P, une hypersurface orientée $S \equiv \varphi(x) = \varphi(x_0)$, un poids ψ, on ait obtenu (comme c'est le cas ici) une estimation du type suivant.

Il existe un voisinage V_0 de x_0, une fonction $C(\gamma) > 0$ à croissance polynômiale en γ tels que, pour tout $v \in C_0^\infty(V_0)$, on ait :

$$\| P_\gamma v \|_{L^2} \geqq C(\gamma)^{-1} \| v \|_{L^2} \qquad \text{avec} \quad P_\gamma = e^{-\gamma\psi} P e^{\gamma\psi}.$$

Soit u une fonction C^∞ telle que supp $u \subset S_+ \equiv \varphi(x) \geqq \varphi(x_0)$, et vérifiant $\chi P u = 0$, $\chi \in C_0^\infty(V_0)$, $\chi \equiv 1$ sur un voisinage V_1 de x_0.

On pose alors $v = e^{-\gamma\psi} \chi u$; il vient, comme $v \in C_0^\infty(V_0)$:

$$\| e^{-\gamma\psi} P \chi u \| \geqq C(\gamma)^{-1} \| e^{-\gamma\psi} \chi u \|.$$

Or $P\chi u = [P, \chi] u$ et le support de $[P, \chi] u$ est inclus dans supp $\chi' \cap S_+$; comme $\chi \equiv 1$ sur un voisinage V_1 de x_0, on en déduit $x_0 \notin \mathrm{supp}\,[P, \chi] u$.

On fait l'hypothèse suivante, reliant φ et ψ :

$$(\mathrm{P}) \qquad \begin{cases} \varphi(x) \geqq \varphi(x_0) \quad \text{et} \quad x \neq x_0 \quad \text{implique} \quad \psi(x) > \psi(x_0) \\ \qquad \text{pour } x \text{ dans un voisinage de } x_0. \end{cases}$$

Donc sur le support (compact) de $[P, \chi]u\, \psi(x) \geqq \psi(x_0)+\varepsilon_0$, avec $\varepsilon_0>0$. Considérons alors l'ouvert :

$$W=\psi(x)<\psi(x_0)+\frac{\varepsilon_0}{2},$$

c'est un voisinage de x_0; soit $\chi_1 \in C_0^\infty(V_1 \cap W)$: on a alors $\chi_1 \chi=\chi_1$. De plus :

$$e^{-\gamma(\psi(x_0)+(\varepsilon_0/2))}\|\chi_1 u\| \leqq \|e^{-\gamma\psi}\chi_1 u\|$$

et :

$$\|e^{-\gamma\psi}\chi_1 u\| \leqq C(\gamma)\|e^{-\gamma\psi}[P, \chi]u\|$$

et :

$$C(\gamma)\|e^{-\gamma\psi}[P, \chi]u\| \leqq C(\gamma)\, e^{-\gamma(\psi(x_0)+\varepsilon_0)}\|[P, \chi]u\|.$$

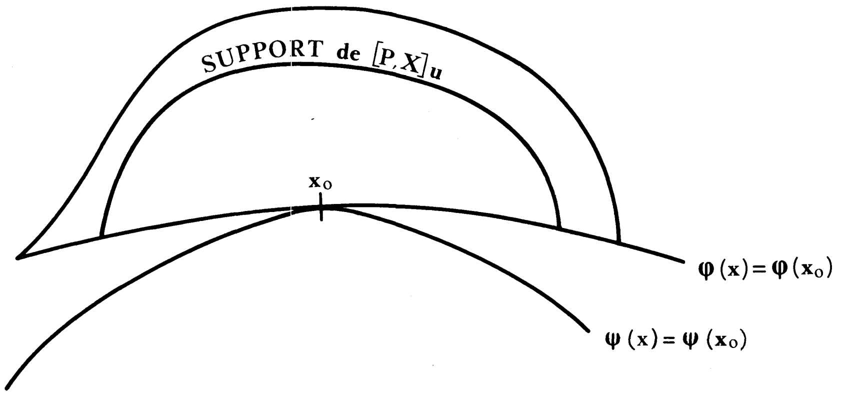
Par suite :

$$\|\chi_1 u\| \leqq C(\gamma)\, e^{-(\gamma\varepsilon_0/2)}\|[P, \chi]u\|,$$

et on obtient le résultat en faisant tendre γ vers l'infini.

L'hypothèse (P) signifie que les surfaces de niveaux du poids ψ et la surface initiale ne peuvent être les mêmes, au moins pour ce type de poids. Pour des inégalités de Carleman avec des poids singuliers ($P=t^{-\gamma}Pt^{\gamma}$, $S\equiv t=0$), on « compense » le fait que les surfaces de niveaux du poids et la surface initiale soient les mêmes par une convexification singulière dite « éclatement » (*voir* Alinhac-Baouendi [3], Alinhac-Zuily [5], Dehman [8], Bahouri [6], Alinhac-Lerner [4] et Lerner [16]).

L'hypothèse (P) donne le dessin suivant :



Le type de poids considéré en (4.1) vérifie l'hypothèse (P). En effet :

$$\psi(x)-\psi(x_0)=\varphi'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2}\varphi''(x_0)(x-x_0)^2-\frac{1}{2}A(\varphi'(x_0)(x-x_0))^2+\frac{\varepsilon}{2}|x-x_0|^2,$$

et donc :

$$\psi(x)-\psi(x_0)=(\varphi(x)-\varphi(x_0)+\lambda(x)(x-x_0)^3)\left(1-\frac{A}{2}\varphi'(x_0)(x-x_0)\right)$$
$$+\left(\frac{\varepsilon}{2}+\frac{A}{4}\varphi''(x_0)\varphi'(x_0)(x-x_0)\right)(x-x_0)^2,$$

$$\psi(x)-\psi(x_0)=(\varphi(x)-\varphi(x_0))\left(1-\frac{A}{2}\varphi'(x_0)(x-x_0)\right)$$
$$+\left[\frac{\varepsilon}{2}+\frac{A}{4}\varphi''(x_0)\varphi'(x_0)(x-x_0)\right.$$
$$\left.+\lambda(x)(x-x_0)-\lambda(x)\frac{A}{2}\varphi'(x_0)(x-x_0)^2\right]\times(x-x_0)^2.$$

Comme la forme quadratique entre crochets vaut $\varepsilon/2$ pour $x=x^0$, elle est définie positive pour x assez proche de x_0, et on obtient le résultat.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Alinhac, *Non unicité du problème de Cauchy pour des opérateurs de type principal* (*Séminaire Goulaouic-Schwartz*, exposé n° 16, École polytechnique, Paris, mars 1981).

[2] Alinhac, *Non unicité du problème de Cauchy pour des opérateurs de type principal* (*Actes des Journées E.D.P.*, Saint-Jean-de-Monts, 1981).

[3] Alinhac-Baouendi, *Uniqueness for the Characteristic Cauchy Problem and Strong Unique Continuation for Higher Order Partial Differential Inequalities* (*Amer. J. Math.*, vol. 102, n° 1, 1980, p. 179-217).

[4] Alinhac-Lerner, *Unicité forte à partir d'une variété de dimension quelconque pour des inégalités différentielles elliptiques* (*Duke Math. J.*, vol. 48, n° 1, p. 49-68).

[5] Alinhac-Zuily, *Unicité et non unicité du problème de Cauchy pour des opérateurs hyperboliques à caractéristiques doubles* [*Comm. in P.D.E.*, vol. 6, (7), 1981, p. 799-828].

[6] Bahouri, *Unicité et non unicité du problème de Cauchy pour des opérateurs à symbole principal réel* (*Thèse 3e cycle*, Orsay, 1982).

[7] Calderoń, *Existence and Uniqueness Theorems for Systems of Partial Differential Equations* (*Proc. Symp. Fluid Dynamics and applied Math.*, Univ. of Maryland, 1961, Gordon and Breach, New-York, 1962, p. 147-195).

[8] Dehman, *Unicité et non unicité du problème de Cauchy pour une classe d'opérateurs quasi-homogènes* (*Thèse 3e cycle*, Orsay, 1982).

[9] Helffer, *Invariants associés à une classe d'opérateurs pseudo-différentiels et applications à l'hypoellipticité* (*Thèse d'État*, Orsay, 1976).

[10] Hörmander, *On the Uniqueness of the Cauchy Problem II* (*Math. Scand.*, vol. 7, 1959, p. 177-190).

[11] Hörmander, *Linear Partial Differential Operators*, Springer Verlag, 1963.

[12] Hörmander, *Non Uniqueness for the Cauchy problem* (*Notes in Math.*, Springer Verlag n° 459, 1975, p. 36-72).

[13] Hörmander, *The Wèyl Calculus of Pseudo-Differential Operators* [*C.P.A.M.*, vol. 32, (3), 1979, p. 359-443].

[14] Lascar-Zuily, *Unicité et non unicité du problème de Cauchy pour une classe d'opérateurs différentiels à caractéristiques doubles* (*Duke Math. J.*, vol. 49, 1982, p. 137-162).

[15] Leray, *Solutions asymptotiques et groupe symplectique* (*Actes du Colloque*, Nice, 1974).

[16] LERNER, *Résultats d'unicité forte pour des opérateurs elliptiques à coefficients Gevrey* [*Comm. P.D.E.*, vol. 6, (10), 1981 p. 1163-1177].

[17] MENIKOFF, *Carleman Estimates for Partial Differential Operators With Real Coefficients* (*Arch. Rat. Mech. Analysis*, vol. 54, 1974, p. 118-133).

[18] MIZOHATA, *Unicité du prolongement des solutions des équations elliptiques du 4e ordre* (*Proc. Japan Acad.*, vol. 34, 1958, p. 687-692).

[19] PLIŠ, *A Smooth Linear Elliptic Differential Equation without any Solution in a Sphere* (*C.P.A.M.*, vol. 14, 1961, p. 599-617).

[20] SAINT-RAYMOND, *L'unicité pour des problèmes de Cauchy caractéristiques en certains points* [*Thèse 3e cycle*, Orsay, 1981 (à paraître)].

[21] SEGAL, *Transforms for Operators and Symplectic Automorphisms over a Locally Compact Abelian Group* (*Math. Scand.*, vol. 13, 1963, p. 31-43).

[22] TRÉVES, *Introduction to Pseudo-Differential and Fourier Integral Operators*, Plenum, New-York, 1981.

[23] UNTERBERGER, *Oscillateur harmonique et opérateurs pseudo-différentiels* [*Ann. Inst. Fourier* (*Grenoble*), vol. 29, n° 3, 1979, xi, p. 201-221].

[24] WATANABE-ZUILY, *On the Uniqueness of the Cauchy Problem for Elliptic Differential Operators with Smooth Characteristics of Variable Multiplicity* [*Comm. P.D.E.*, vol. 2, (8), 1977, p. 835-855].

[25] WEYL, *Gruppen Theorie und Quantenmechanik*, Verlag von S. Hirzel, Leipzig, 1928.

[26] ZUILY, *Unicité du Problème de Cauchy pour une classe d'opérateurs différentiels* [*Comm. P.D.E.*, vol. 6, (2), 1981, p. 153-196].

[27] ZUILY, *Second Order Elliptic Equations and the Uniqueness of the Cauchy Problem* [*Bull. Soc. Math. Brasiliera* (à paraître)].

[28] FEFFERMAN-PHONG, *On Positivity of Pseudo-Differential Operators* (*Proc. Natl. Acad. Sc. U.S.A.*, vol. 75, 1978, p. 4673-4674).

(Manuscrit reçu le 7 novembre 1983).

N. LERNER
Université de Paris-Sud,
Mathématique,
Bât. 425,
91405 Orsay Cedex.