ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

H. CARAYOL

Représentations cuspidales du groupe linéaire

Annales scientifiques de l'É.N.S. 4e série, tome 17, nº 2 (1984), p. 191-225
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1984_4_17_2_191_0>

Ann. Scient. Éc. Norm. Sup.,
4^e série, t. 17, 1984, *p.* 191 *à* 225

REPRÉSENTATIONS CUSPIDALES DU GROUPE LINÉAIRE

PAR H. CARAYOL

Introduction

Soit F un corps local non archimédien. Les conjectures énoncées par Langlands [32] prédisent en particulier l'existence d'une bijection naturelle entre l'ensemble $\mathfrak{g}_n$ des représentations φ-semi-simples de degré n du groupe de Weil-Deligne W'_F de F, et l'ensemble $\mathfrak{a}_n$ des représentations admissibles irréductibles du groupe localement compact $GL_n(F)$. Cette bijection conjecturale doit en particulier préserver les facteurs L et ε qu'on sait définir tant du côté « galoisien » que du côté « automorphe ». Nous renvoyons à un exposé de Henniart [21] pour plus de précisions sur cette conjecture.

Par la correspondance cherchée entre $\mathfrak{g}_n$ et $\mathfrak{a}_n$, les sous-ensembles $\mathfrak{g}_n^0 \subset \mathfrak{g}_n$ — constitué des représentations *irréductibles* de W'_F — et $\mathfrak{a}_n^0 \subset \mathfrak{a}_n$ — constitué des représentations *cuspidales* de $GL_n(F)$ — doivent se correspondre. Réciproquement, on sait classifier les éléments de $\mathfrak{g}_n$ en termes des $\mathfrak{g}_m^0$ (pour $m \leqq n$) et il résulte des travaux de Bernstein et Zelevinsky (*cf.* [1], [42]) qu'on sait aussi classifier les éléments de $\mathfrak{a}_n$ en termes des $\mathfrak{a}_m^0$ (pour $m \leqq n$); on en déduit que, s'il existe une bijection « naturelle » (*cf.* [21]) entre les ensembles $\mathfrak{g}^0 = \bigcup_{n \geqq 1} \mathfrak{g}_n^0$ et $\mathfrak{a}^0 = \bigcup_{n \geqq 1} \mathfrak{a}_n^0$, alors on peut la prolonger en une bijection « naturelle » entre les ensembles $\mathfrak{g} = \bigcup_{n \geqq 1} \mathfrak{g}_n$ et $\mathfrak{a} = \bigcup_{n \geqq 1} \mathfrak{a}_n$. L'étude des représentations cuspidales de $GL_n(F)$ constitue donc une question fondamentale tant pour l'analyse harmonique sur ce groupe que pour la conjecture de Langlands locale.

Dans cet article, nous ne nous intéressons qu'au côté automorphe : nous montrons que certaines représentations « très cuspidales » de sous-groupes ouverts et compacts modulo le centre s'induisent en des représentations irréductibles cuspidales de $GL_n(F)$ et que, pour n premier, toute la série cuspidale est ainsi obtenue (avec la restriction provisoire que F est de caractéristique nulle).

L'idée de construire ainsi, par induction à partir d'un sous-groupe ouvert compact modulo le centre, des représentations cuspidales de $GL_n(F)$, remonte à Shintani [38]. Puis Gérardin ([15], [16]) a généralisé les méthodes de Shintani à d'autres groupes, tandis que Howe [23] les a développées dans le cas du groupe GL_n. Hormis le cas de GL_2 (où l'on dispose de la représentation de Weil), et certaines tentatives cohomologiques de Lusztig [33], cette méthode d'induction demeure à l'heure actuelle la seule méthode purement locale dont nous disposons pour construire des représentations cuspidales de GL_n.

La question de savoir si toutes les représentations cuspidales sont ainsi obtenues par induction a été résolue affirmativement dans le cas de GL_2 par Kutzko [29], en utilisant des résultats de Casselman ([7], [8]) : cela lui a permis d'analyser les représentations « exceptionnelles » de GL_2 (celles non obtenues par la représentation de Weil) et de démontrer la conjecture de Langlands locale pour GL_2 [31].

L'idée fondamentale que nous utilisons ici, pour montrer que toute la série cuspidale est obtenue, est de faire usage d'un théorème (th. 7.2) comparant la série discrète de GL_n et l'ensemble des représentations du groupe multiplicatif d'une algèbre à division; ce théorème a été obtenu, en utilisant des méthodes globales, par Deligne et Kazhdan. Nous l'utilisons pour dénombrer les représentations obtenues.

Dans le travail de Gérardin et dans celui de Howe, aussi bien que dans l'article de Shintani, les représentations du sous-groupe compact modulo le centre provenaient d'un tore elliptique de $GL_n(F)$, autrement dit du groupe multiplicatif d'une extension de degré n de F, et d'un caractère de ce tore; la donnée fondamentale était donc celle d'une paire (T, θ) formée d'un tore et d'un caractère de ce tore, vérifiant certaines conditions.

Le point de vue que nous adoptons ici, au contraire, est de ne pas introduire *a priori* une telle donnée, mais de partir d'un sous-groupe compact modulo le centre maximal, et d'imposer des conditions à une représentation de ce sous-groupe, pour qu'elle s'induise en une représentation irréductible cuspidale de $GL_n(F)$. Cela nous a semblé préférable pour trois raisons : pour dénombrer plus facilement les représentations obtenues, parce que la construction de Howe ne fonctionne que dans le cas *modéré* où n est premier à la caractéristique résiduelle de F, et enfin parce que la donnée (T, θ) présente une relation tortueuse avec la représentation du groupe de Weil qui doit être associée à notre représentation cuspidale (*cf.* [30]). Toutefois nous devons signaler deux travaux récents :

1) Henniart [20] a utilisé notre construction dans sa preuve de la conjecture de Langlands locale pour GL_3 : son travail fournit une construction explicite des représentations « très cuspidales » et cela lui permit de définir explicitement un changement de base modéré pour GL_3 (cette partie du travail de Henniart est en fait valide pour GL_n, n premier).

2) Moy [34] a démontré, par une méthode de dénombrement analogue à celle du présent article, que les représentations construites par Howe dans le cas modéré (mais sans l'hypothèse que n est premier) épuisent la série cuspidale de GL_n. Utilisant ce fait, Moy exhibe ensuite une correspondance entre $\mathfrak{a}_n^0$ et $\mathfrak{g}_n^0$ (toujours dans le cas modéré) qui préserve les facteurs ε locaux et qui est compatible à la torsion par des quasi-caractères.

Signalons enfin que Kazhdan vient de construire par voie globale les représentations de $GL_n(F)$ qui doivent correspondre aux représentations du groupe de Weil qui sont induites à partir d'un quasi-caractère du groupe de Weil d'une extension cyclique de degré n de F. Utilisant ce résultat, Henniart sait faire marcher pour GL_n, n premier, les arguments de sa thèse.

Le cas où n, non premier, est divisible par la caractéristique résiduelle de F, présente des difficultés pour l'instant insurmontables. Nous renvoyons à Corwin ([9], [10]) et Koch-Zink [28] pour l'étude du cas analogue des algèbres à division.

Ce travail a été annoncé dans [4], écrit au début de 1982 et légèrement remanié en mai 1983. Nous présentons ici une construction unifiée des représentations obtenues à partir des divers sous-groupes compacts modulo le centre maximaux. Nous donnons des renseignements plus précis sur l'arithmétique de $GL_n(F)$ relativement à ces sous-groupes qui sont l'analogue de résultats de Koch [27], sur l'arithmétique des algèbres à division; nos dénombrements sont aussi plus explicites que dans [4]. Bien que plus long, j'espère que ce travail en devient plus agréable et peut être plus utile.

Le contenu en est le suivant : le paragraphe 1 est consacré à des généralités sur l'induction, le paragraphe 2 à des généralités sur les sous-groupes de $GL_n(F)$ compacts modulo le centre. Au paragraphe 3 nous développons des résultats sur l'arithmétique de $GL_n(F)$ relativement à ces sous-groupes, et nous les utilisons au paragraphe 4 pour construire des représentations cuspidales. Au paragraphe 5 nous calculons les degrés formels de ces représentations. Le paragraphe 6 est consacré au calcul du degré de certaines représentations, dites générales, du groupe multiplicatif d'une algèbre à division; je le dois à Deligne, que je remercie de m'avoir communiqué ces résultats et de m'autoriser à les utiliser ici. Au paragraphe 7 nous énonçons les résultats permettant de comparer les représentations de $GL_n(F)$ et celles du groupe multiplicatif d'une algèbre à division. Nous les utilisons au paragraphe 8 où nous dénombrons les représentations que nous avons obtenues.

Je remercie en particulier P. Cartier et G. Henniart pour l'intérêt porté à ce travail et l'aide qu'ils m'ont parfois fournie, et le premier pour m'avoir incité à rédiger cet article.

0. Notations

F désigne un corps local non archimédien. On note $\mathcal{O}$ son anneau d'entiers, ϖ une uniformisante, **k** le corps résiduel, q le cardinal de **k**.

$v : F^* \to \mathbb{Z}$ est la valuation, normalisée par $v(\varpi)=1$, et $|\ \ | = q^{-v}$ la valeur absolue.

ψ est un caractère additif de F choisi une fois pour toutes. On suppose que le conducteur de ψ est $\mathcal{O}$: le noyau de ψ contient $\mathcal{O}$, mais ne contient pas $\varpi^{-1}\mathcal{O}$.

G désigne le groupe $GL_n(F)$, et Z son centre, qu'on identifie à F^*.

Tous les groupes que nous considérerons seront « de type t. d. » (*voir* [6]). Leurs représentations seront supposées lisses. Pour fixer les choses, nous supposerons ces représentations à valeurs dans des espaces vectoriels complexes; cependant, la topologie du corps de définition n'intervient pas, et il ne changerait rien de remplacer le corps des complexes par un quelconque corps algébriquement clos de caractéristique nulle.

Un quasi-caractère d'un groupe est une représentation de dimension 1.

Si H est un sous-groupe de G et χ un quasi-caractère de F^*, nous noterons encore χ, lorsque cela n'introduira pas de confusion, le quasi-caractère de H obtenu en composant χ avec le déterminant $H \xrightarrow{\det} F^*$. Pour π une représentation de H, on considérera en particulier ses « tordues » $\pi \otimes \chi$.

Si π est une représentation lisse de H, $\tilde{\pi}$ est la représentation *contragrédiente.* Elle est lisse. Soit v un vecteur de l'espace de π, $\tilde{v}$ un vecteur de l'espace de $\tilde{\pi}$. Le coefficient correspondant est alors la fonction sur H : $h \to \langle \pi(h) v, \tilde{v} \rangle$.

Si H est un sous-groupe de K et ρ une représentation de H, pour tout élément k de K on note ${}^k\rho$ la représentation de $k\,H\,k^{-1}$ déduite de ρ de façon évidente : ${}^k\rho(khk^{-1}) = \rho(h)$.

1. Généralités sur l'induction

Soit H un sous-groupe ouvert de G, contenant Z, et tel que H/Z soit compact. Soit ρ une représentation lisse de H sur un espace W. On définit alors deux représentations de G, l'induite compacte notée $\mathrm{ind}_H^G\, \rho$ et l'induite (non compacte) $\mathrm{Ind}_H^G\, \rho$. On renvoie à ([1], [6]) pour les définitions et les propriétés de ces foncteurs. Rappelons seulement ici que ind_H^G se réalise comme la représentation, par translations à droite dans l'espace des fonctions $f : G \to W$ vérifiant les deux conditions suivantes :

1° $f(hg) = \rho(h) f(g)$ pour tous $h \in H$, $g \in G$.

2° Le support de f est contenu dans la réunion d'un nombre fini de translatés de $H\gamma$ de H.

Soit $\pi = \mathrm{ind}_H^G\, \rho$. On vérifie aussitôt les assertions suivantes :

1.1. $\mathrm{ind}_H^G(\rho \otimes \chi) = \pi \otimes \chi$ pour tout quasi-caractère (lisse) χ de F^*.

1.2. Si ρ est préunitaire, π l'est aussi.

1.3. Si φ est un coefficient de ρ, la fonction $\tilde{\varphi}$ obtenue en prolongeant φ de H à G par 0 en dehors de H est un coefficient de π.

En effet, supposons que φ soit le coefficient associé à un vecteur $w \in W$ et à une forme linéaire $l \in \tilde{W}$.

On vérifie que la fonction suivante sur G est dans l'espace de π :

$$g \to f_w(g) = \begin{cases} \rho(g)\, w & \text{si } g \in H \\ 0 & \text{si } g \notin H. \end{cases}$$

On vérifie que la forme linéaire suivante sur W est dans l'espace de $\tilde{\pi}$:

$$f \to l(f(1)).$$

Et on voit que le coefficient correspondant est bien $\tilde{\varphi}$.

On suppose désormais que ρ est irréductible, et donc de dimension finie. En général, π n'est pas admissible. Cependant il résulte d'un théorème de Jacquet [24] que si π est irréductible, elle est admissible. En vertu de (1.3) elle est alors *cuspidale.*

En tous cas, il résulte facilement de la définition de ind ρ que sa restriction à H est donnée par;

$$(1.4)\qquad \pi\,|_{\mathrm{H}} = \bigoplus_{g} \mathrm{Ind}^{\mathrm{H}}_{\mathrm{H}\cap g\mathrm{H}g^{-1}} ({}^{g}\rho\,|_{\mathrm{H}\cap g\mathrm{H}g^{-1}})$$

g décrivant un système de représentants des doubles classes de G modulo H.

Le critère suivant permet de vérifier que π est irréductible pour ρ convenable :

1.5. PROPOSITION (*voir* [23]). — (1) *Soit* ρ *une représentation lisse irréductible de* H *et soit* $\pi = \mathrm{ind}^{\mathrm{G}}_{\mathrm{H}}\,\rho$. *Supposons que pour tout* $g \in \mathrm{G}-\mathrm{H}$ *les représentations* $\rho\,|_{\mathrm{H}\cap g\mathrm{H}g^{-1}}$ *et* ${}^{g}\rho\,|_{\mathrm{H}\cap g\mathrm{H}g^{-1}}$ *soient disjointes (i. e. n'aient pas de constituant commun). Alors* π *est admissible irréductible cuspidale.*

(2) *Soient* ρ_1 *et* ρ_2 *satisfaisant les hypothèses de* (1) *et soient* π_1 *et* π_2 *les induites correspondantes. Supposons que pour tout* $g \in \mathrm{G}$ *les représentations* $\rho_1\,|_{\mathrm{H}\cap g\mathrm{H}g^{-1}}$ *et* ${}^{g}\rho_2\,|_{\mathrm{H}\cap g\mathrm{H}g^{-1}}$ *soient disjointes. Alors* π_1 *et* π_2 *ne sont pas équivalentes.*

Faute de connaître une référence convenable, je donne ci-dessous un argument prouvant 1.5.

Pour prouver (1), il suffit d'après une remarque précédente de montrer que π est irréductible.

D'après (1.4) et l'hypothèse faite sur ρ, on voit que dans la restriction $\pi\,|_{\mathrm{H}}$, ρ apparaît avec multiplicité 1.

Supposons que π ne soit pas irréductible. Soient alors V et V′ des représentations lisses non nulles de G qui s'insèrent dans une suite exacte :

$$0 \to \mathrm{V} \to \pi \to \mathrm{V}' \to 0.$$

Des propriétés données dans [1] concernant les foncteurs d'induction, le passage à la contragrédiente, et la réciprocité de Frobenius, il résulte que :

(*a*) $\mathrm{Hom}_{\mathrm{H}}(\mathrm{V}\,|_{\mathrm{H}}, \rho) \neq 0,$ parce que $\mathrm{V} \subsetneq \mathrm{Ind}^{\mathrm{G}}_{\mathrm{H}}\,\rho.$

(*b*) $\mathrm{Hom}_{\mathrm{H}}(\tilde{\mathrm{V}}'\,|_{\mathrm{H}}, \tilde{\rho}) \neq 0,$ parce que $\tilde{\mathrm{V}}' \subsetneq \mathrm{Ind}^{\mathrm{G}}_{\mathrm{H}}\,\tilde{\rho}.$

De la semi-simplicité des représentations lisses de groupes compacts modulo le centre « de type t. d » (cf. [6], p. 119, pour le cas des groupes compacts, l'extension au cas des groupes compacts modulo le centre étant facile), il résulte que (*b*) entraîne que ρ intervient dans la restriction $\mathrm{V}'\,|_{\mathrm{H}}$. Toujours par semi-simplicité, ce dernier fait et (*a*) contredisent le fait que ρ apparaît dans π avec multiplicité 1, et cette contradiction prouve donc que π est irréductible.

Pour prouver (2) on remarque que l'hypothèse faite, et (1.4), entraînent que ρ_1 apparaît dans $\pi_1\,|_{\mathrm{H}}$ mais pas dans $\pi_2\,|_{\mathrm{H}}$.

1.6. *Remarque.* — Si ρ satisfait aux hypothèses de 1.5 alors $\tilde{\rho}$ aussi. Par suite ind $\tilde{\rho}$ est admissible irréductible. Il en est de même pour sa contragrédiente Ind ρ. On en déduit que dans ce cas :

$$\mathrm{ind}^{\mathrm{G}}_{\mathrm{H}}\,\rho = \mathrm{Ind}^{\mathrm{G}}_{\mathrm{H}}\,\rho.$$

1.7. *Remarque.* — La décomposition (1.4) admet une généralisation évidente au cas où on restreint π à un autre sous-groupe H′ ouvert compact modulo Z. De même l'énoncé 1.5 (2) au cas où l'on suppose que ρ_1 et ρ_2 sont des représentations de deux sous-groupes distincts H_1 et H_2.

2. La structure des groupes compacts modulo Z maximaux

Soit V l'espace vectoriel $\mathbb{F}^n$. Supposons donnée une décomposition de n en deux facteurs $n = rs$.

Un *réseau* dans V est un sous $\mathcal{O}$-module de rang n.

Considérons dans V une suite indexée par $\mathbb{Z}$, décroissante, de réseaux, vérifiant les propriétés suivantes :

$$L_{i+s} = \varpi L_i$$
$$\dim_{\mathbf{k}} (L_i/L_{i+1}) = r.$$

Considérons aussi un élément z_s de G qui vérifie :

$$z_s L_i = L_{i+1}$$
$$(z_s)^s = \varpi \text{ (Z étant identifié à } F^*).$$

Alors on introduit *le sous-groupe compact* K_s de G formé des g qui vérifient la condition :

$$g L_i = L_i \quad \text{pour tout } i.$$

On note Z_s le groupe cyclique engendré par z_s; Z_s normalise K_s. Le groupe engendré dans G par Z_s et K_s, qui s'identifie donc au produit semi-direct de ces deux groupes, est noté $Z_s K_s$. Ce sont ces groupes $Z_s K_s$ qui vont nous être utiles à la construction de représentations cuspidales de G.

2.1. *Exemple.* — $e_1 \ldots e_n$ désignant la base canonique de F^n on considère la suite de réseaux :

$$L_0 = \mathcal{O} e_1 \oplus \mathcal{O} e_2 \oplus \ldots \oplus \mathcal{O} e_n$$
$$L_1 = \mathcal{O} e_1 \oplus \ldots \oplus \mathcal{O} e_{n-r} \oplus \varpi \mathcal{O} e_{n-r+1} \oplus \ldots \oplus \varpi \mathcal{O} e_n$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$L_{s-1} = \mathcal{O} e_1 \oplus \ldots \oplus \mathcal{O} e_r \oplus \varpi \mathcal{O} e_{r+1} \oplus \ldots \oplus \varpi \mathcal{O} e_n$$

prolongée à $\mathbb{Z}$ en posant $L_{i+\alpha s} = \varpi^\alpha L_i$ pour $\alpha \in \mathbb{Z}$, $i = 0, \ldots, s-1$.

Le groupe K_s correspondant est l'ensemble des matrices $n \times n$ décomposées en blocs $r \times r$:

vérifiant les propriétés

$$\begin{cases} a_{ij} \in \mathrm{M}_r(\mathcal{O}) & \text{si} \quad j>i \\ a_{ii} \in \mathrm{GL}_r(\mathcal{O}) & \\ a_{ij} \in \varpi\, \mathrm{M}_r(\mathcal{O}) & \text{si} \quad j<i. \end{cases}$$

Un choix de z_s est :

$$z_s = \begin{pmatrix} 0_r & \mathbf{1}_r & \cdots & 0_r \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \mathbf{1}_r \\ \varpi\, \mathbf{1}_r & \cdots & 0_r & 0_r \end{pmatrix}$$

2.2. Il est standard de vérifier que deux suites (L_i) et (L'_i) vérifiant les conditions imposées se déduisent l'une de l'autre par l'action d'un élément de G. De plus, la suite (L_i) étant fixée, un élément z_s vérifiant les conditions imposées est unique modulo un élément de K_s.

Par suite, à conjugaison par un élément de G *près, le couple* $(\mathrm{K}_s, \mathrm{Z}_s \mathrm{K}_s)$ *ne dépend pas des choix de* (L_i) *et de* z_s.

$\mathrm{Z}_s \mathrm{K}_s$ *est l'ensemble des éléments de* G *qui laissent globalement invariante la suite* (L_i), i. e. les éléments g tels qu'il existe une application μ de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}$ vérifiant $g\,\mathrm{L}_i = \mathrm{L}_{\mu(i)}$. (En effet la suite (L_i) étant décroissante et vérifiant $|\mathrm{L}_i/\mathrm{L}_{i+1}| = q^r$, on voit qu'une telle μ est nécessairement une translation; modifiant g par une puissance convenable de z_s, on obtient donc un élément de K_s).

Nous supposerons dans la suite que les L_i et z_s sont choisis comme en 2.1.

2.3. $\mathrm{Z}_s \mathrm{K}_s$ contient Z, et le quotient est compact.

2.4. *Cas particuliers.* — $\mathrm{K}_1 = \mathrm{GL}_n(\mathcal{O})$, $\mathrm{Z}_1 \mathrm{K}_1 = \mathrm{ZGL}_n(\mathcal{O})$; K_n est un sous-groupe d'Iwahori [39].

2.5. Il est connu, et facile de vérifier en interprétant en termes de réseaux la structure de l'immeuble de Bruhat-Tits de G [39] que tout sous-groupe de G compact modulo Z est conjugué à un sous-groupe d'un tel $\mathrm{Z}_s \mathrm{K}_s$. Ces derniers n'étant pas conjugués, ils constituent un système de représentants des classes de conjugaison des sous-groupes compacts modulo Z maximaux. Nous n'utiliserons pas cette propriété.

2.6. Nous allons introduire des *filtrations* des groupes K_s, dont nous ferons un usage constant dans ce qui suit.

Commençons par définir une *filtration décroissante de l'espace vectoriel* End $\mathrm{V} = \mathrm{M}_n(\mathrm{F})$:

Soit $m \in \mathbb{Z}$. On définit :

$$\mathrm{A}_s^m = \{ f \in \mathrm{End}\, \mathrm{V} / f(\mathrm{L}_i) \subset \mathrm{L}_{i+m} \ \text{pour tout} \ i \}.$$

Ce sont des *réseaux* de $\mathrm{M}_n(\mathrm{F})$. Ils sont stables par conjugaison sous $\mathrm{Z}_s \mathrm{K}_s$.

Ils constituent une filtration décroissante de type $\mathbb{Z}$ de $\mathrm{M}_n(\mathrm{F})$.

A_s^0 est une *sous-algèbre* de $M_n(F)$, et K_s en est le groupe des éléments inversibles. Pour $m \geqq 1$, les A_s^m sont des idéaux bilatères de cette algèbre.

On a : $A_s^m = z_s^m A_s^0$.

Pour $m \geqq 1$, on pose $K_s^m = 1 + A_s^m$. Les K_s^m sont des sous-groupes de K_s distingués dans $Z_s K_s$.

2.7. Le produit $A_s^m A_s^{m'}$ est égal à $A_s^{m+m'}$. Il en résulte que pour des entiers m et p vérifiant $2p \geqq m \geqq p \geqq 1$, le groupe quotient K_s^p/K_s^m est *abélien* et naturellement isomorphe au groupe additif A_s^p/A_s^m.

2.8. L'accouplement : $M_n(F) \times M_n(F) \to \mathbf{C}^*$

$$(x, y) \to \psi(\mathrm{Tr}(xy))$$

(où Tr désigne la trace)
met en autodualité le groupe abélien localement compact $M_n(F)$.

Pour cet accouplement, un petit calcul nous permet de vérifier que :

$$\underline{\text{l'orthogonal de } A_s^m \text{ est } A_s^{-m+1-s}}.$$

Par suite, le groupe des caractères de K_s^p/K_s^m, pour des entiers p et m comme en 2.7, s'identifie à $A_s^{-m+1-s}/A_s^{-p+1-s}$.

2.9. Notons aussi le lemme suivant qui nous sera utile :

LEMME. — *Pour* $m \geqq 1$: dét $K_s^m = 1 + \varpi^{[(m-1)/s]+1} \mathcal{O}$, *où* [ ] *désigne la partie entière.*

En effet, écrivons $m - 1 = \lambda s + \mu$ avec $0 \leqq \mu < s$. Alors $K_s^m = 1 + \varpi^\lambda A_s^{\mu+1}$; $A_s^{\mu+1}$ est l'ensemble des matrices $n \times n$ décomposées en blocs $r \times r$:

$$g = (a_{ij})_{1 \leqq i \leqq s, 1 \leqq j \leqq s} \qquad a_{ij} \in M_r(F)$$

vérifiant les propriétés

$$\begin{cases} a_{ij} \in M_r(\mathcal{O}) & \text{si } j - i > \mu \\ a_{ij} \in \varpi\, M_r(\mathcal{O}) & \text{si } \mu \geqq j - i > \mu - s \\ a_{ij} \in \varpi^2\, M_r(\mathcal{O}) & \text{si } \mu - s \geqq j - i. \end{cases}$$

En particulier la réduction modulo $\varpi^{\lambda+1}$ d'un élément de K_s^m est unipotente. D'où l'inclusion det $K_s^m \subset 1 + \varpi^{\lambda+1} \mathcal{O}$. L'inclusion inverse se voit en considérant par exemple les matrices diagonales dans $A_s^{\mu+1}$.

(Remarquer aussi que : det $K_s = \mathcal{O}^*$).

3. La multiplication par ϖ induit un isomorphisme entre les $\mathbf{k}$-vectoriels L_i/L_{i+1} et L_{i+s}/L_{i+s+1}, par lequel nous identifions ces deux espaces. Un élément de A_s^0 induit pour chaque i un endomorphisme de L_i/L_{i+1}, d'où un homomorphisme d'anneaux : R : $A_s^0 \to \prod_{i \in \mathbb{Z}/s\mathbb{Z}} \mathrm{End}_{\mathbf{k}}(L_i/L_{i+1})$.

On voit, d'après les définitions du paragraphe précédent, et la description explicite 2.1, que le noyau de R est A_s^1. Nous obtenons donc un isomorphisme d'anneaux, noté encore R :

$$R : A_s^0/A_s^1 \to \prod_{i \in \mathbb{Z}/s\mathbb{Z}} \operatorname{End}_{\mathbf{k}}(L_i/L_{i+1}).$$

Nous pouvons utiliser aussi l'action de z_s pour identifier L_i/L_{i+1} et L_{i+1}/L_{i+2}, donc pour identifier entre eux tous les L_i/L_{i+1}, d'une façon compatible à l'identification que nous avons déjà entre L_i/L_{i+1} et L_{i+s}/L_{i+s+1}, parce que $z_s^s = \varpi$. Avec ces conventions, les algèbres $\operatorname{End}_{\mathbf{k}}(L_i/L_{i+1})$ se trouvent identifiées à une même algèbre de matrices $r \times r$ sur $\mathbf{k}$, que nous notons E. L'action par conjugaison de z_s sur A_s^0/A_s^1 se transforme *via* R en une permutation circulaire :

$$(3.1)\qquad \begin{cases} \text{Si} \\ R(a) = (\alpha_0, \ldots, \alpha_{s-1}), \qquad \alpha_i \in E \\ \text{alors :} \\ R(z_s a z_s^{-1}) = (\alpha_{s-1}, \alpha_0, \ldots, \alpha_{s-2}). \end{cases}$$

Nous noterons σ l'automorphisme ainsi défini de $E^{\mathbb{Z}/s\mathbb{Z}}$. Considérons maintenant l'application

$$\begin{aligned} A_s^m/A_s^{m+1} &\to A_s^0/A_s^1 \\ u &\to \varpi^{-m} u^s. \end{aligned}$$

Si l'on écrit $u = z_s^m u_0$, avec $u_0 \in A_s^0$, (3.1) nous permet d'exprimer $R(\varpi^{-m} u^s)$. Posant $\tau = \sigma^{-m}$, on a la formule :

$$R(\varpi^{-m} u^s) = \tau^{s-1}(R(u_0)) \ldots \tau(R(u_0))\, R(u_0).$$

Ou, plus explicitement, si $R(u_0) = (\alpha_0, \ldots, \alpha_{s-1})$ alors $R(\varpi^{-m} u^s) = (\beta_0, \ldots, \beta_{s-1})$ avec :

$$\beta_i = \alpha_{i+(s-1)m} \cdot \ldots \cdot \alpha_{i+m}\, \alpha_i.$$

Dans le cas particulier où *m est premier à s*, la permutation circulaire d'ordre m engendre le groupe des permutations circulaires. On voit alors que les β_i sont des endomorphismes *simultanément tous inversibles ou tous non inversibles, et que dans le premier cas ils sont conjugués entre eux deux à deux.*

La définition suivante sera fondamentale dans toute la suite :

3.2. DÉFINITION. — *Un élément u de* A_s^m/A_s^{m+1} *est (s-) cuspidal si m est premier à s, et si* $R(\varpi^{-m} u^s)$ *est un s-uple d'endomorphismes réguliers elliptiques (i. e. de polynôme caractéristique irréductible sur* $\mathbf{k}$*).*

Dans le cas où u est cuspidal, le s-uple en question est donc constitué de matrices deux à deux conjuguées.

Nous dirons aussi qu'un élément u de $M_n(F)$ est (s-)cuspidal s'il existe m tel que $u \in A_s^m$ et que sa réduction modulo A_s^{m+1} soit cuspidale. On voit qu'un tel m est alors bien déterminé (u ne devant pas appartenir à A_s^{m+1}) de sorte qu'aucune confusion n'est possible.

Faisons deux remarques évidentes :

— la conjugaison par le groupe $Z_s K_s$ préserve l'ensemble des éléments cuspidaux.

— Un élément cuspidal est inversible dans $M_n(F)$ [celà résulte du fait plus général qu'un élément de A_s^0 de réduction sur A_s^0/A_0^1 inversible, est inversible dans A_s^0 et donc aussi dans $M_n(F)$].

Le reste de ce paragraphe est consacré à étudier les propriétés des éléments cuspidaux.

3.3. PROPOSITION. — *Soit u un élément (s-)cuspidal de* $M_n(F)$. *Alors u est un élément régulier elliptique de* $M_n(F)$. *Le corps* $F(u)$ *est une extension de* F *d'indice de ramification s et de degré résiduel r. La filtration induite sur* $F(u)$ *par les* A_s^m *coïncide avec la filtration définie par les puissances de l'idéal premier. Le groupe multiplicatif* $F(u)^*$ *est contenu dans* $Z_s K_s$ *et la filtration habituelle de* $F(u)^*$ *est la trace de la filtration de* $Z_s K_s$ *que nous avons définie, soit* $Z_s K_s \supset K_s \supset K_s^1 \ldots$

Preuve. — Soit m tel que $u \in A_s^m$, $u \notin A_s^{m+1}$, et posons $a_0 = \varpi^{-m} u^s$. Par définition m est premier à s et $R(a_0)$ est un s-uple de matrices cuspidales.

Soit $P = \Sigma \alpha_i x^i$ un polynôme non nul de degré inférieur à n. Nous allons montrer que $x = P(u)$ est alors une matrice inversible, ce qui établira le fait que u est régulier elliptique.

Si v désigne la valuation sur F, considérons l'ensemble I des i tels que $v(\alpha_i) s + mi$ soit minimum. L'hypothèse que m est premier à s entraîne que deux tels i sont congrus modulo s. Si i_0 désigne le plus petit élément de I, et J l'ensemble des $(i - i_0)/s$ lorsque i parcourt I, on peut écrire l'élément $x' = \sum_{i \in I} \alpha_i u^i$ sous la forme :

$$x' = u^{i_0} \sum_{j \in J} \alpha_{i_0 + sj} \varpi^{mj} a_0^j.$$

Les $\beta_{i_0 + sj} = \alpha_{i_0 + sj} \varpi^{mj}$ sont de même valuation, qu'on peut supposer nulle quitte à multiplier P par une constante. L'hypothèse faite sur a_0 entraîne que la réduction modulo A_s^1 de $\sum_{j \in J} \beta_{i_0 + sj} a_0^j$ est inversible (car le degré de ce polynôme en a_0 est inférieur à r). De la remarque finale de 3.2, on en conclut que x' est produit de u^{i_0} et d'un élément inversible de A_s^0, soit k. Alors :

$$k^{-1} u^{-i_0} x - 1 = \sum_{i \notin I} k^{-1} u^{-i_0} \alpha_i u^i.$$

u étant de la forme $z^m k'$, avec $k' \in K_s$, on voit que le second membre est dans A_s^1 (car pour $i \notin I$, $mi + v(\alpha_i) s$ est strictement supérieur à $mi_0 + v(\alpha_{i_0}) s = mi_0$).

L'élément x apparaît alors comme le produit de $u^{i_0} k$ par un élément de K_s^1. Il est donc inversible, comme annoncé. Parce que u est dans $Z_s K_s$, on voit de plus qu'il en est de même de x. D'où l'inclusion :

$$F(u)^* \subset Z_s K_s.$$

Définissons maintenant une application $w : M_n(F) \to \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ par $w(x) = \sup\{\lambda;\ x \in A_s^\lambda\}$; on voit que $w(u) = m$ et que $w(\lambda) = sv(\lambda)$ si $\lambda \in F^*$. On constate aussi l'égalité $w(xy) = w(x) + w(y)$ si x ou y est dans $Z_s K_s$.

La restriction de w à $F(u)^*$ est donc un homomorphisme, surjectif parce que $w(u)$ et $w(\varpi)$ sont premiers entre eux. C'est une valuation; c'est donc la valuation de $F(u)$ qui prolonge celle de F.

La valeur de l'indice de ramification en découle, ainsi que les énoncés sur les filtrations de $F(u)$ et de $F(u)^*$, et cela achève la démonstration.

Avec les notations de la proposition 3.3, V est un $F(u)$-vectoriel de dimension 1 et les L_i sont des réseaux stables par $\mathcal{O}_{F(u)}$, l'anneau des entiers de $F(u)$. Une telle propriété détermine la suite des L_i à une translation sur i près. On aurait pu procéder de manière inverse, se donner *a priori* l'extension $F(u)$ et en déduire le compact K_s, ce qui est plus habituel (*cf.* [23]), mais pour des raisons expliquées dans l'introduction notre démarche est préférable pour les buts que nous poursuivons.

Ces remarques vont cependant nous être utiles pour établir la proposition suivante qui constitue la clé de notre construction de représentations cuspidales :

3.4. PROPOSITION. — *Soient u et u' deux éléments* (s-) *cuspidaux de* $M_n(F)$ *et g un élément de* G *qui conjugue u en u'. Alors g est dans $Z_s K_s$.*

Preuve. — Puisque $u'=gug^{-1}$, la conjugaison par g induit un isomorphisme F-linéaire entre les corps $F(u)$ et $F(u')$. Désignant par $\mathcal{O}_u$ et $\mathcal{O}_{u'}$ leurs anneaux d'entiers respectifs, on voit que la conjugaison par g induit un isomorphisme entre $\mathcal{O}_u$ et $\mathcal{O}_{u'}$. Il en résulte que les réseaux $g L_i$ sont stables par $\mathcal{O}_{u'}$. En effet :

$$\mathcal{O}_{u'}\, g\, L_i = g\, \mathcal{O}_u\, L_i = g\, L_i.$$

Étant stables par $\mathcal{O}_{u'}$, ils sont, d'après les remarques précédentes, de la forme L_j. Il existe donc une application μ de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}$ telle que :

$$g\, L_i = L\, \mu_{(i)}.$$

Mais cela entraîne, d'après 2.2, que g est dans $Z_s K_s$.

3.5. LEMME. — *Soit $u \in A_s^m$ tel que sa réduction dans A_s^m/A_s^{m+1} soit cuspidale, et soit x un élément de A_s^l. Supposons que $ux-xu \in A_s^{m+l+1}$. Alors $x \in F(u)+A_s^{l+1}$.*

Remarque. — Ce lemme est l'analogue d'un résultat de Koch [27] relatif aux algèbres à division, que nous utiliserons au paragraphe 6.

Démonstration. — Écrivons $u=z_s^m u_0$, $x=z_s^l x_0$. L'hypothèse faite sur $ux-xu$ se récrit, d'après (3.1) :

$$\sigma^{-l}(R(u_0))\, R(x_0) = \sigma^{-m}(R(x_0))\, R(u_0).$$

Posons $R(u_0)=(\alpha_0, \ldots, \alpha_{s-1})$ et $R(x_0)=(\beta_0, \ldots, \beta_{s-1})$. L'ensemble d'indices étant identifié au groupe $\mathbb{Z}/s\mathbb{Z}$, cette égalité signifie que, pour tout i : $\alpha_{i+l}\beta_i=\beta_{i+m}\alpha_i$. Ou encore, les α_i étant inversibles (parce que u est cuspidale) :

(*a*) $$\beta_{i+m}=\alpha_{i+l}\,\beta_i\,\alpha_i^{-1}.$$

Appliquant s fois cette relation, on trouve :

(*b*) $$\beta_i=\beta_{i+ms}=A_{i+l}\,\beta_i\,A_i^{-1}$$

où l'on a posé : $A_i=\alpha_{i+(s-1)m}\ldots\alpha_{i+m}\alpha_i$. Parce que m est premier à s, il existe un unique entier k dans $[0, s-1]$ tel que km soit congru à l modulo s.

Posons $c_i=\alpha_{i+(k-1)m}\ldots\alpha_{i+m}\alpha_i$; on voit alors que :

$$c_i A_i c_i^{-1}=A_{i+l}.$$

Comme d'après (b) : $\beta_i A_i=A_{i+l}\beta_i$, on voit que $c_i^{-1}\beta_i$ commute avec A_i. Mais A_i est régulière elliptique par hypothèse, son commutant est donc le corps qu'elle engendre, il existe par suite un polynôme P_i à coefficients dans $\mathbf{k}$ tel que :

$$\beta_i=c_i P_i(A_i).$$

On peut même prendre P_i indépendant de i. En effet si la relation précédente est vraie pour i, on trouve en appliquant (a) :

$$\beta_{i+m}=\alpha_{i+l}c_i P_i(A_i)\alpha_i^{-1}.$$

Or $\alpha_{i+l}c_i=c_{i+m}\alpha_i$, et $\alpha_i P_i(A_i)\alpha_i^{-1}=P_i(A_{i+m})$. Par itération ($m$ étant premier à s, tout élément de $\mathbb{Z}/s\mathbb{Z}$ est de la forme $i+\lambda m$) on voit qu'il existe un polynôme P tel qu'on ait pour tout i :

$$\beta_i=c_i P(A_i).$$

Mais cela est équivalent à la conclusion du lemme. En effet écrivons $P=\sum p_\lambda X^\lambda$. Désignons encore par p_λ un relèvement dans $\mathcal{O}$ de p_λ. Soit μ l'entier tel que $mk=l+\mu s$.

Considérons alors le polynôme $\tilde{P}=\varpi^{-\mu}\sum_\lambda \varpi^{-m\lambda}p_\lambda X^{k+\lambda s}$. Si $\tilde{\sigma}$ désigne l'automorphisme $\alpha\to z_s\alpha z_s^{-1}$ de A_s^0, on calcule :

$$\tilde{P}(u)=\varpi^{-\mu}\sum\varpi^{-m\lambda}p_\lambda(z_s^m u_0)^{k+\lambda s}=\varpi^{-\mu}\sum\varpi^{-m\lambda}p_\lambda z_s^{m(k+\lambda s)}U_\lambda$$

où l'on a posé : $U_\lambda=\tilde{\sigma}^{-m(k+\lambda s-1)}(u_0)\ldots\tilde{\sigma}^{-m}(u_0)u_0$.

D'où $\tilde{P}(u)=z_s^l\sum p_\lambda U_\lambda$.

On vérifie aussi que $R(\sum p_\lambda U_\lambda)$ est le s-uple $(\gamma_0,\ldots,\gamma_{s-1})$ avec $\gamma_i=c_i P(A_i)$. C'est-à-dire :

$$R(\sum p_\lambda U_\lambda)=R(x_0).$$

$x_0-\sum p_\lambda U_\lambda$ appartient donc à A_s^1. Par conséquent, $x-\tilde{P}(u)\in A_s^{l+1}$, et le lemme est prouvé.

3.6. Proposition. — *Soit $u\in A_s^m$, $u\notin A_s^{m+1}$, un élément cuspidal. Soit p un entier ($p\geqq 1$) et considérons la classe $\dot{u}$ de u dans A_s^m/A_s^{m+p}. Pour l'action par conjugaison de $Z_s K_s$ sur A_s^m/A_s^{m+p}, le stabilisateur de $\dot{u}$ est le groupe $F(u)^*.K_s^p$ engendré par $F(u)^*$ et K_s^p.* [*Noter que $F(u)^*$ normalise K_s^p, ce qui justifie la notation.*]

Preuve. — Soit S le stabilisateur en question, et $S'=F(u)^*K_s^p$. L'inclusion $S'\subset S$ est claire. Considérons la trace sur S de la filtration de Z_sK_s, soit :

$$S^{-1}=S,\qquad S^0=S\cap K_s,\ \ldots,\ S^i=S\cap K_s^i,\ \ldots$$

et de même pour S'.

Pour $i \geqq p$, nous avons : $S'^i = S^i = K_s^i$. L'égalité entre S et S′ sera obtenue si nous montrons que pour $i < p$, l'inclusion de S'^i/S'^{i+1} dans S^i/S^{i+1} est un isomorphisme. Pour un tel i, S'^i/S'^{i+1} s'identifie à U^i/U^{i+1}, où (U^i) est la filtration de $F(u)^*$ (*cf.* la proposition 3.3). Distinguons trois cas :

(*a*) Si $i = -1$, soit $x \in S$, et soit l l'entier tel que $x \in z_s^l K_s$. Choisissons un élément y de $F(u)^*$ de valuation l. On voit alors que $x^{-1} y$ appartient à $S \cap K_s$. L'inclusion de S'^{-1}/S'^0 dans S^{-1}/S^0 est donc un isomorphisme.

(*b*) Si $i = 0$, soit $x \in S^0$. Par définition de S^0, on voit que $ux - xu$ appartient à A_s^{m+1}. Appliquant le lemme précédent, on voit que x s'écrit :

$$x = x' + x'' \qquad \text{avec} \quad x' \in F(u), \qquad x'' \in A_s^1.$$

En fait, x' appartient à $F(u) \cap K_s = U^0$ [car $x' = x(1 - x^{-1} x'')$, x étant dans K_s et $x^{-1} x''$ dans A_s^1]. Il en résulte la surjectivité de l'inclusion $S'^0/S'^1 \to S^0/S^1$.

(*c*) Cas où $p > i > 0$. Écrivons $x \in S^i$ sous la forme $x = 1 + \alpha$, $\alpha \in A_s^i$.

On voit que $x^{-1} u x - u \equiv -\alpha u + u \alpha$ modulo A_s^{m+i+1}. L'élément $\alpha u - u \alpha$ de A_s^{m+1} appartient donc en fait à A_s^{m+i+1}, et nous pouvons appliquer le lemme précédent. On en conclut que α modulo A_s^{i+1} provient de $F(u)$. L'inclusion de S'^i/S'^{i+1} dans S^i/S^{i+1} est donc surjective, et cela achève la preuve de la proposition.

3.7. L'application : $A_s^m/A_s^{m+1} \to A_s^0/A_s^1$ qui envoie u sur $\varpi^{-m} u^s$ induit, lorsque m est premier à s, une application entre $Z_s K_s$-classes de conjugaison cuspidales de A_s^m/A_s^{m+1} et $Z_s K_s$-classes de conjugaison de A_s^0/A_s^1. *Via* R et compte tenu des remarques du début de ce paragraphe, on obtient en définitive une application des $Z_s K_s$-classes de conjugaison cuspidales dans A_s^m/A_s^{m+1} vers les classes de conjugaison du groupe $GL_r(\mathbf{k})$ qui sont elliptiques régulières.

LEMME. — *Si m est premier à s, l'application naturelle des $Z_s K_s$-classes de conjugaison cuspidales de A_s^m/A_s^{m+1} vers les classes de conjugaison elliptiques régulières du groupe $GL_r(\mathbf{k})$ est une bijection.*

Preuve. — Soit u un élément de A_s^m/A_s^{m+1}, écrivons le $u = z_0^m u_0$, avec $u_0 \in A_s^0/A_s^1$; u_0 est déterminé par $R(u_0) = (\alpha_0, \ldots, \alpha_{s-1})$. u est cuspidal si et seulement si $\alpha_{(s-1)m} \ldots \alpha_m \alpha_0$ est elliptique régulier, et alors l'application associe à u la classe de conjugaison de cet élément. Tout élément elliptique régulier de $GL_r(\mathbf{k})$ pouvant évidemment s'écrire sous la forme d'un tel produit de s éléments de $GL_r(\mathbf{k})$, on voit que l'application du lemme est surjective.

Plutôt que d'étudier l'effet de la $Z_s K_s$-conjugaison sur A_s^m/A_s^{m+1}, nous allons prouver que l'application est bijective en montrant que les deux ensembles ont même cardinal : Notons g le cardinal de $GL_r(\mathbf{k})$ et e le cardinal de l'ensemble de ses éléments elliptiques réguliers. Avec les mêmes notations que plus haut, un élément cuspidal est déterminé par $s-1$ matrices inversibles $\alpha_0, \ldots, \alpha_{s-2}$ et une matrice régulière elliptique $\alpha_0 \ldots \alpha_{s-1}$. Le cardinal de l'ensemble des éléments cuspidaux de A_s^m/A_s^{m+1} est donc $g^{s-1} e$.

D'après la proposition 3.6, le cardinal de la classe de conjugaison d'un tel élément u est égal à l'indice $(Z_s K_s : F(u)^* K_s^1)$. Si U^0 désigne l'ensemble des unités de $F(u)$ et U^1

l'ensemble de celles qui sont congrues à 1 modulo l'idéal premier, on a :

$$(\mathrm{Z}_s\mathrm{K}_s : \mathrm{F}(u)^*\mathrm{K}_0^1)=(\mathrm{K}_0 : \mathrm{U}^0\mathrm{K}_s^1),$$

et ce dernier indice se calcule par la fibration

$$\mathrm{U}^0/\mathrm{U}^1 \to \mathrm{K}_s/\mathrm{K}_s^1 \to \mathrm{K}_s/\mathrm{U}^0\mathrm{K}_s^1.$$

On trouve donc que l'indice cherché vaut $(\mathrm{K}_s : \mathrm{K}_s^1)(\mathrm{U}^0 : \mathrm{U}^1)^{-1}$, soit $g^s(q^r-1)^{-1}$. On en déduit le nombre de $\mathrm{Z}_s\mathrm{K}_s$-classes de conjugaison cuspidales de $\mathrm{A}_s^m/\mathrm{A}_s^{m+1}$: c'est $g^{s-1}e/(g^s(q^r-1)^{-1})$, soit $e(q^r-1)g^{-1}$.

D'autre part, le centralisateur d'un élément elliptique régulier de $\mathrm{GL}_r(\mathbf{k})$ est le tore elliptique qu'il engendre. Le cardinal de sa classe de conjugaison est par conséquent $g(q^r-1)^{-1}$. Il en résulte que le nombre de classes de conjugaison elliptiques régulières de GL_r est $e(q^r-1)g^{-1}$, et ceci termine la démonstration du lemme.

4. Construction de représentations cuspidales

Soit $m \geqq 2$. D'après 2.7 le groupe quotient $\mathrm{K}_s^{m-1}/\mathrm{K}_s^m$ est abélien et naturellement isomorphe au groupe additif $\mathrm{A}_s^{m-1}/\mathrm{A}_s^m$. Ses caractères s'identifient d'après 2.8 aux éléments de $\mathrm{A}_s^{-m+1-s}/\mathrm{A}_s^{-m+2-s}$. On transporte, *via* cette identification, la notion de cuspidalité introduite au paragraphe précédent. Cela justifie la définition suivante :

4.1. DÉFINITION. — *Une représentation de $\mathrm{Z}_s\mathrm{K}_s$ est très cuspidale de type $m \geqq 2$ si :*

(i) *elle est triviale sur K_s^m*

(ii) *sur $\mathrm{K}_s^{m-1}/\mathrm{K}_s^m$ elle se décompose en caractères (s-) cuspidaux.*

Nous considérerons aussi des représentations du groupe $\mathrm{Z}_1\mathrm{K}_1=\mathrm{ZGL}_n(\mathcal{O})$ triviales sur K_1^1. Ici le groupe quotient $\mathrm{K}_1/\mathrm{K}_1^1$ s'identifie à $\mathrm{GL}_n(\mathbf{k})$. Nous complétons la définition précédente pour prendre en compte ces représentations :

Complément à la définition : Une représentation de $\mathrm{Z}_1\mathrm{K}_1$ est très cuspidale de type 1 *si :*

(i) *elle est triviale sur K_1^1*

(ii) *elle induit sur $\mathrm{K}_1/\mathrm{K}_1^1 \simeq \mathrm{GL}_n(\mathbf{k})$ une représentation cuspidale, au sens de la théorie des représentations des groupes réductifs sur un corps fini.*

(Cela signifie que, pour tout sous-groupe parabolique P de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{k})$, différent de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{k})$, la représentation n'admet aucun vecteur fixe non nul sous le radical unipotent de P; *cf.* par exemple [14].)

Par définition, les représentations très cuspidales de type m de $\mathrm{Z}_s\mathrm{K}_s$ n'existent que si $m-1$ est premier à s. Lorsqu'elles sont irréductibles, elles sont de dimension finie. Les définitions données ici coïncident pour $s=1$ ou $s=n$ avec celles de la note [4], qu'elles généralisent donc aux $\mathrm{Z}_s\mathrm{K}_s$ intermédiaires. Nous allons aussi généraliser les résultats (propositions 1 et 2) de cette note.

Rappelons que le *conducteur* d'une représentation π admissible irréductible de G est l'entier c tel que le facteur $\varepsilon(s, \pi, \psi)$ de Jacquet-Godement [18] soit de la forme aq^{-cs} (ψ

est de conducteur $\mathcal{O}$). π est de *conducteur minimal* si on ne peut pas abaisser ce conducteur en tordant π par une représentation de degré 1.

4.2. THÉORÈME. — *Soit ρ une représentation irréductible très cuspidale de type m de $Z_s K_s$. Alors l'induite compacte de ρ de $Z_s K_s$ à G est une représentation π_ρ de G admissible cuspidale irréductible de conducteur minimal. La valeur de ce conducteur est $r(m-1)+n$. Les représentations ainsi obtenues sont deux à deux inéquivalentes.*

Démonstration. — Écrivons $H_s = Z_s K_s$ pour alléger la notation.

(a) Supposons $m \geqq 2$ et soient ρ_1 et ρ_2 deux représentations très cuspidales de type m de H_s. Montrons que si $g \in G - H_s$ $\rho_1 | H_s \cap g H_s g^{-1}$ et ${}^g\rho_2 | H_s \cap g H_s g^{-1}$ sont disjointes. Il suffit pour cela de montrer que $\rho_1 | K_s^{m-1} \cap g K_s^{m-1} g^{-1}$ et ${}^g\rho_2 | K_s^{m-1} \cap g K_s^{m-1} g^{-1}$ sont disjointes. Mais dans le cas contraire il existerait des caractères cuspidaux χ_1 et χ_2 de K_s^{m-1}/K_s^m tels que χ_1 et ${}^g\chi_2$ coïncident sur $K_s^{m-1} \cap g K_s^{m-1} g^{-1}$.

Soient alors u_1 et u_2 les éléments cuspidaux de $A_s^{-m+1-s}/A_s^{-m+2-s}$ associés à χ_1 et χ_2, et désignons encore par u_1 et u_2 des relèvements de u_1 et u_2 dans A_s^{-m+1-s} : pour $\lambda \in A_s^{m-1}$, on a :

$$\chi_i(1+\lambda) = \psi(\operatorname{Tr}(u_i \lambda))$$

et pour $\lambda \in g A_s^{m-1} g^{-1}$

$${}^g\chi_2(1+\lambda) = \psi(\operatorname{Tr}(u_2 g^{-1} \lambda g)) = \psi(\operatorname{Tr}(g u_2 g^{-1} \lambda)).$$

Si χ_1 et ${}^g\chi_2$ coïncident sur $K_s^{m-1} \cap g K_s^{m-1} g^{-1}$, alors $u_1 - g u_2 g^{-1}$ est orthogonal (pour $\psi \circ \operatorname{Tr}$) à $A_s^{m-1} \cap g A_s^{m-1} g^{-1}$. L'orthogonal de cette intersection est la somme $A_s^{-m+2-s} + g A_s^{-m+2-s} g^{-1}$. Il existe donc u_1', u_2' dans A_s^{-m+2-s} tels que :

$$u_1 - g u_2 g^{-1} = u_1' - g u_2' g^{-1};$$

cela signifie que les éléments cuspidaux $u_i - u_i'$ sont conjugués par g, ce qui est impossible d'après la proposition 3.4.

(b) Prouvons le même résultat que (a) dans le cas « complémentaire » $s=1$, $m=1$. L'assertion ne dépend que de la double classe de g modulo ZK_1, et l'on peut donc supposer que g est une matrice diagonale :

$$g = \begin{pmatrix} \varpi^{\alpha_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \varpi^{\alpha_n} \end{pmatrix} \qquad \alpha_1 \leqq \alpha_2 \leqq \ldots \leqq \alpha_n.$$

g n'est pas dans $Z_1 K_1$, les α_i ne sont donc pas tous égaux; soit i tel que $\alpha_i < \alpha_{i+1}$ et considérons le sous-groupe unipotent U de G formé des matrices :

$$\left(\begin{array}{c|c} \mathbf{1}_i & * \\ \hline 0 & \mathbf{1}_{n-i} \end{array}\right).$$

On vérifie que : $g(U \cap K_1^1) g^{-1}$ contient $U \cap K_1$.

Sur $U \cap K_1$, ${}^g\rho_2$ est donc triviale. Mais par définition d'une représentation cuspidale de $GL_n(\mathbf{k})$, ρ_1 n'a pas de vecteur fixe sous $U \cap K_1$. Cela prouve donc bien que ρ_1 et ${}^g\rho_2$ sont disjointes sur $U \cap K_1$, et *a fortiori* sur $H_1 \cap g H_1 g^{-1}$.

(*c*) D'après la proposition 1.5, il résulte de (*a*) et (*b*) que les induites sont irréductibles cuspidales et que deux telles induites provenant de deux représentations inéquivalentes d'un même $Z_s K_s$ et de même type sont inéquivalentes. Du calcul du conducteur résultera alors que deux induites provenant de deux représentations inéquivalentes sont inéquivalentes : En effet la formule donnant le conducteur : $c = r(m-1)+n$ montre que c détermine r (comme le PGCD de c et n), donc détermine s, puis m.

Il ne nous reste donc qu'à vérifier les assertions relatives au conducteur.

(*d*) Considérons de façon plus générale une représentation ρ de $Z_s K_s$ triviale sur K_s^m et telle que $\pi = \operatorname{ind} \rho$ soit irréductible cuspidale. Soit φ la fonction caractéristique de K_s^m et soit f un coefficient de ρ que nous prolongeons en une fonction sur G nulle en dehors de $Z_s K_s$; d'après 1.3 on obtient ainsi un coefficient de π. En utilisant les notations de Jacquet-Godement ([18], § 3), on voit alors que $Z(\varphi, f, s)$ est une constante (non nulle). $Z(\hat{\varphi}, s, \check{f})$ est alors de la forme a q^{cs} où c est le conducteur de π.

Utilisons la notation $\sim$ pour désigner l'égalité à une constante multiplicative près de deux fonctions de s [nous faisons donc nos calculs dans $\mathbf{C}(q^{-s})/\mathbf{C}^*$ parce que seuls les conducteurs nous intéressent, pas la valeur des facteurs ε]. Calculons $\hat{\varphi}$:

$$\hat{\varphi}(x) = \int_{K_s^m} \psi(\operatorname{Tr}(xy))\, dy,$$

où dy désigne une mesure de Haar additive.

D'où

$$\hat{\varphi}(x) = \int_{A_s^m} \psi(\operatorname{Tr}(x(1+t))\, dt.$$

$$\hat{\varphi}(x) = \psi(\operatorname{Tr}(x)) \int_{A_s^m} \psi(\operatorname{Tr}(xt))\, dt.$$

Cette dernière intégrale est nulle sauf si x est dans A_s^{-m+1-s}. Donc :

$$\hat{\varphi}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \notin A_s^{-m+1-s} \\ \operatorname{vol}(A_s^m)\, \psi(\operatorname{Tr}(x)) & \text{si} \quad x \in A_s^{-m+1-s} \end{cases}$$

D'où :

$$Z(\hat{\varphi}, s, \check{f}) \sim \int_{Z_s K_s \cap A_s^{-m+1-s}} \psi(\operatorname{Tr}(x))\, \check{f}(x)\, |\det x|^s\, d^* x$$

$d^* x$ désignant cette fois une mesure de Haar multiplicative. On sait que cette dernière intégrale converge absolument si la partie réelle de s est assez grande. On peut alors écrire :

$$Z(\hat{\varphi}, s, \check{f}) \sim \sum_{i=-m+1-s}^{\infty} \int_{z_s^i K_s} \psi(\operatorname{Tr}(x))\, \check{f}(x)\, |\det x|^s\, d^* x$$

soit, puisque $|\det z_s| = |\varpi^r| = q^{-r}$:

$$Z(\hat{\varphi}, s, \check{f}) \sim \sum_{i=-m+1-s}^{\infty} q^{-ris} \int_{K_s} \psi(\operatorname{Tr}(z_s^i x))\, \check{f}(z_s^i x)\, d^* x$$

Nous savons *a priori* que dans cette somme, tous les termes sont nuls sauf un, correspondant à un indice i tel que $-ri$ soit le conducteur de π.

(*e*) Débarassons-nous du cas $s=m=1$. Dans ce cas, pour $i \geqq 0$, $\psi \circ \operatorname{Tr}$ est égal à 1 sur $z_s^i K_s$, et si χ désigne le caractère de Z que définit ρ :

$$\check{f}(z_s^i x) = \check{f}(\varpi^i x) = \chi^{-1}(\varpi^i)\, f(x^{-1}).$$

$f(x)$ ne dépend que de la classe de x dans K_1/K_1^1, et $\int_{K_1} f(x)\, dx^*$ est égal à une constante (dépendant de la mesure de Haar choisie) multipliée par la somme :

$$\sum_{K_1/K_1^1} f(x) = \sum_{GL_n(\mathbf{k})} f(x).$$

Cette somme sur $GL_n(\mathbf{k})$ d'un coefficient d'une représentation cuspidale est nulle (parce qu'une représentation cuspidale n'admet pas de vecteur fixe) et nous voyons donc que dans la somme donnant $Z(\hat{\varphi}, s, \check{f})$ tous les termes sont nuls sauf celui correspondant à $i=-1$. Le conducteur de π est donc bien n.

(*f*) Supposons désormais $m \geqq 2$. Calculons les intégrales qui figurent dans la somme en partitionnant K_s suivant ses classes modulo K_s^{m-1}; soit Λ un système de représentants pour les classes K_s/K_s^{m-1}. Alors $I(i) = \sum_{\lambda \in \Lambda} I(i, \lambda)$, où

$$I(i) = \int_{K_s} \psi(\operatorname{Tr}(z_s^i x))\, \check{f}(z_s^i x)\, d^* x$$

et

$$I(i, \lambda) = \int_{K_s^{m-1}} \psi(\operatorname{Tr}(z_s^i \lambda x))\, \check{f}(z_s^i \lambda x)\, d^* x.$$

Nous pouvons choisir pour simplifier le coefficient f correspondant à un vecteur K_s^{m-1}-propre : En effet ρ se décompose sur K_s^{m-1} en caractères; f vérifie alors :

$$f(xk) = f(x)\, \chi(k) \qquad \text{pour} \quad k \in K_s^{m-1}$$

où χ est l'un des caractères qui figurent dans la restriction de ρ à K_s^{m-1}. Nous pouvons écrire en utilisant les invariances de la mesure de Haar :

$$I(i, \lambda) = \int_{K_s^{m-1}} \psi(\operatorname{Tr}(x \lambda z_s^i))\, f(z_s^{-i} \lambda^{-1} x^{-1})\, d^* x.$$

Soit, en posant $x=1+t$, dt désignant une mesure de Haar additive :

$$I(i, \lambda) \sim f(z_s^{-i}\lambda^{-1}) \int_{A_s^{m-1}} \psi(\mathrm{Tr}(t\lambda z_s^i))\chi^{-1}(t)\,dt.$$

Pour $i>-m+1-s$, $\psi(\mathrm{Tr}(t\lambda z_s^i))$ est constant égal à 1 lorsque $t \in A_s^{m-1}$. On voit donc que si χ est non trivial, toutes les intégrales ci-dessus sont nulles pour $i>-m+1-s$.

Donc, avec les notations précédentes, *si χ est non trivial, le conducteur de π est* $r(m-1+s)$. Cela s'applique en particulier au cas où ρ est « très cuspidale de type m » et nous donne la valeur du conducteur.

(g) Montrons enfin que ces conducteurs sont minimaux. Soit χ un quasi-caractère de F^*. On a vu en (1.1) que :

$$\pi' = \pi \otimes \chi = \mathrm{ind}\,\rho' \qquad \text{où} \quad \rho' = \rho \otimes \chi.$$

Soit $a(\chi)$ le conducteur de χ. Distinguons plusieurs cas :

— Supposons $a(\chi) \leqq [(m-2)/s]+1$. Alors d'après 2.9, ($\chi \circ$ dét) est trivial sur K_s^{m-1}, et donc ρ' est encore très cuspidale de type m; le conducteur de π' est donc égal à celui de π.

— Supposons $a(\chi) > [(m-1)/s]+1$. Alors ($\chi \circ$ dét) est non trivial sur K_s^m. Soit $m'>m$ le plus petit entier tel que ρ' soit trivial sur $K_s^{m'}$. D'après (f) le conducteur de π' est alors $r(m'-1+s)$, strictement supérieur à celui de π [on voit facilement qu'en fait c'est $na(\chi)$].

— Puisque $m-1$ est premier à s, $[(m-1)/s]$ est égal à $[(m-2)/s]$ sauf si $s=1$. Le dernier cas que nous avons à considérer est donc : $s=1$, $a(\chi)=m$.

Mais alors on voit que $\rho \otimes \chi$ est encore très cuspidale de type m : en effet, si $m=1$, cela résulte du fait que la tordue d'une représentation cuspidale de $GL_n(\mathbf{k})$ est encore cuspidale (parce que, sur les unipotents, det est trivial); si $m \geqq 2$, le caractère de K_1^{m-1}/K_1^m défini par χ est défini par une matrice scalaire de A_1^{-m}/A_1^{-m+1}, et la somme d'une matrice scalaire de $M_n(\mathbf{k})$ et d'une matrice elliptique régulière est encore elliptique régulière.

Le conducteur de π' est alors égal à celui de π, et cela achève la démonstration du théorème 4.2.

5. Calcul du degré formel

Soit ρ une représentation irréductible très cuspidale de type m de $Z_s K_s$. Nous allons montrer dans ce paragraphe qu'il est possible de calculer en fonction de s et de m le degré de ρ; nous en déduirons une relation simple entre les degrés formels et les conducteurs des représentations que nous avons construites au paragraphe précédent.

Commençons par quelques rappels de la théorie de Clifford-Mackey, pour lesquels on renvoie par exemple à Koch-Zink [28].

5.1. Soit G un groupe profini, H un sous-groupe normal, γ une représentation irréductible continue de H. Soit G_γ le stabilisateur de γ pour l'action de G par conjugaison sur $\hat{H}$, ensemble des représentations irréductibles continues de H. Alors toute représentation continue ρ de G, irréductible, dont la restriction à H contient γ, est induite d'une représentation de G_γ (dont, évidemment, la restriction à H contient γ).

5.2. GROUPE D'HEISENBERG. — Considérons un groupe fini H, extension centrale d'un groupe abélien P par un groupe abélien A :

$$1 \to A \to H \to P \to 1$$

Le commutateur $[h_1, h_2]=h_1 h_2 h_1^{-1} h_2^{-1}$ définit alors une application $\mathbb{Z}$-bilinéaire alternée :

$$[\ \ ] : P \times P \to A$$

Soit χ un caractère de A tel que $\chi([p_1, p_2])$ soit un accouplement non dégénéré sur P. Dans ces conditions, il existe une unique représentation irréductible r_χ de H telle que sa restriction à A contienne χ; le degré de r_χ est $|P|^{1/2}$, $|P|$ désignant le cardinal de P (en fait, $|P|^{1/2} r_\chi = \mathrm{ind}_A^H \chi$).

5.3. Considérons maintenant une extension par le groupe d'Heisenberg d'un groupe abélien B :

$$1 \to H \to H_1 \to B \to 1$$

Supposons aussi que le sous-groupe A de H est encore central dans H_1 : alors H_1 stabilise la représentation r_χ dans l'ensemble des représentations de H. Si r_χ peut s'étendre en une représentation de H_1, alors on voit que toute représentation irréductible de H_1 dont la restriction à A contient χ est équivalente à une telle extension $\tilde{r}_\chi$ (deux telles extensions diffèrent par un caractère de B).

L'obstruction à étendre r_χ de H à H_1 est un élément ω de $H^2(B, \mathbf{C}^*)$. Ce groupe H^2 s'identifie au groupe $X_-(B, \mathbf{C}^*)$ des accouplements antisymétriques sur B. On obtient explicitement cet accouplement de la manière suivante :

— r_χ s'étend en une représentation projective de H_1 : $h_1 \to \pi(h_1)$; $\pi(h_1)$ est bien défini à un scalaire près.

— Soient $b_1, b_2 \in B$ et relevons les en h_1, h_2 dans H_1. Posons :

$$\omega(b_1, b_2)=r_\chi(h_2^{-1} h_1^{-1} h_2 h_1)\, \pi(h_1)^{-1} \pi(h_2)^{-1} \pi(h_1)\, \pi(h_2).$$

On vérifie qu'on obtient ainsi une matrice scalaire — donc un élément de $\mathbf{C}^*$ — qui ne dépend pas des relèvements choisis de b_1, b_2.

ω ainsi défini est la forme bilinéaire antisymétrique d'obstruction.

Nous aurons affaire au cas particulier suivant :

5.4. Soient H une extension comme en 5.2, χ un caractère de A vérifiant les propriétés de 5.2, et H_1 une extension comme en 5.3, telle que A soit central dans H_1. Supposons de plus que B est un produit $\mathbb{Z}/\alpha\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/\beta\mathbb{Z}$ de deux groupes cycliques, et que l'on peut relever dans H_1 un générateur de chacun de ces groupes de sorte que ces relèvements commutent. Supposons enfin que $\mathrm{PGCD}(\alpha, \beta, |P|)=1$. Alors r_χ s'étend en une représentation de H_1, et toute représentation irréductible de H_1 dont la restriction à A contient χ est équivalente à une telle extension $\tilde{r}_\chi$ (en particulier de degré $|P|^{1/2}$).

En effet, si u et v désignent deux relèvements des générateurs, l'obstruction est déterminée par :

$$\omega(u, v) = \pi(u)^{-1}\pi(v)^{-1}\pi(u)\pi(v).$$

Ce dernier commutateur étant de déterminant 1, l'ordre de ω divise le degré de r_χ, soit $|\mathrm{P}|^{1/2}$. Il divise aussi, évidemment, α et β, et donc l'obstruction est triviale.

Remarque. — 5.4 s'applique en particulier au cas où B est un groupe cyclique.

5.5. Nous allons maintenant appliquer ces résultats aux représentations des groupes $Z_s K_s$: soit ρ une représentation très cuspidale de type m de $Z_s K_s$. Supposons $m \geqq 2$. Soit $p' = [m/2]$ et $p = m - p'$. Le groupe K_s^p/K_s^m est abélien et ρ s'y décompose en caractères. Soit χ l'un d'entre eux. Soit Z_χ son stabilisateur. D'après 5.1, ρ est induite par une représentation ρ_1 de Z_χ.

χ est défini par un élément u de $A_s^{-m+1-s}/A_s^{-p+1-s}$ de réduction cuspidale modulo A_s^{-m+2-s}. La proposition 3.6 nous calcule Z_χ : u désignant un élément cuspidal de A_s^{-m+1-s} qui définit χ, nous obtenons :

$$Z_\chi = F(u)^* K_s^{p'}.$$

Soit $N \subset K_s^p \subset K_s^{p'}$ le noyau de χ; ρ_1 peut être considérée comme une représentation de Z_χ/N.

5.6. Cas où m est pair : $p = p' = m/2$.

Alors Z_χ/N *est abélien.* — Il suffit en effet de voir que pour $x \in A_s^p$, $\chi(x) = \chi(uxu^{-1})$; mais cela revient à l'égalité $\psi(\mathrm{Tr}(ux)) = \psi(\mathrm{Tr}(u^2 xu^{-1}))$. ρ_1 est donc de dimension 1, et le degré de ρ est l'indice $(Z_s K_s : F(u)^* K_s^p)$. Nous avons calculé dans la preuve du lemme 3.7 l'indice $(Z_s K_s : F(u)^* K_s^1)$. Remarquant que pour $i \geqq 1$:

$$(F(u)^* K_s^i : F(u)^* K_s^{i+1}) = (K_s^i : K_s^{i+1})/(U^i : U^{i+1}) = q^{r^2 s - r},$$

nous obtenons :

$$\underline{\dim \rho = g_r^s (q^r - 1)^{-1} q^{(p-1)(r^2 s - r)}}$$

où $p = m/2$ et g_r est le cardinal de $\mathrm{GL}_r(\mathbf{k})$.

5.7. Cas où m est impair : $p = (m+1)/2$, $p' = (m-1)/2$. Considérons la suite de sous-groupes emboîtés :

$$H_1 = F(u)^* K_s^{p'}/N \supset H = F^* U' K_s^{p'}/N \supset A = F^* U' K_s^p/N.$$

Par le même argument qu'en 5.6, on voit que A est abélien. Il est aussi central dans H_1, parce que le commutateur $[K_s^p, K_s^{p'}]$ est inclus dans K_s^m. Le quotient $B = H_1/H$ s'identifie à $F(u)^*/F^* U^1$, un produit de deux groupes cycliques d'ordres respectifs s et $(q^r - 1)/(q - 1)$. Avec les notations précédentes, P s'insère dans une suite exacte :

$$1 \to U^{p'}/U^p \to K_s^{p'}/K_s^p \to P \to 1$$

d'où : $|P| = q^{r^2 s - r}$. Noter que $r^2 s - r$ est pair parce que s est premier à $m - 1$, donc impair. Nous serons dans la situation décrite en 5.4, parce que $|P|$ et $(q^r - 1)/(q - 1)$ sont premiers entre eux, après avoir démontré :

LEMME. — $\chi([h_1, h_2])$ *définit sur* P *un accouplement non dégénéré.*

Preuve. — Soit $x \in K_s^{p'}$ tel que $\chi([x, y]) = 1$ pour tout $y \in K_s^{p'}$. Il faut voir que $x \in U^{p'} K_s^p$.

Écrivons $x = 1 + t$, $y = 1 + t'$. On calcule le commutateur modulo K_s^m, et on trouve :

$$[x, y] = 1 + tt' - t' t.$$

L'hypothèse est que, pour tout $t' \in A_s^{p'}$:

$$\psi(\mathrm{Tr}(u(tt' - t' t)) = 1.$$

Cela s'écrit aussi :

$$\psi(\mathrm{Tr}((ut - tu) t')) = 1.$$

Donc $ut - tu$ est dans l'orthogonal de $A_s^{p'}$, soit $A_s^{-p'+1-s}$. On vérifie que cela signifie que x stabilise la classe de tout élément de $A_s^{-m+1-s}/A_s^{-p'+1-s}$ relevant u. D'après la proposition 3.6, x est alors dans $F(u)^* K_s^p$, ce qui démontre le lemme.

Nous pouvons donc appliquer 5.4. ρ_1 est de dimension $|P|^{1/2}$ et l'indice $(Z_s K_s : F(u)^* K_s^{p'})$ a déjà été calculé. On obtient :

$$\underline{\dim \rho = g_r^s (q^r - 1)^{-1} q^{(r^2 s - r)(p' - 1/2)}}.$$

5.8. La formule :

$$\underline{\dim \rho = g_r^s (q^r - 1)^{-1} q^{(r^2 s - r)(m/2 - 1)}}$$

donne, dans tous les cas que nous avons considérés, le degré d'une représentation très cuspidale de type m : celà résulte de 5.6 et 5.7 si m est supérieur ou égal à 2. Dans le cas $m = 1$ ($r = n$, $s = 1$), on connaît la dimension des représentations cuspidales de $GL_n(\mathbf{k})$, et on peut vérifier que cette dimension est encore donnée par 5.8 (*cf.* par exemple [14]).

5.9. Le degré formel d'une représentation cuspidale dépend du choix d'une mesure de Haar sur G/Z.

Si une telle mesure a été choisie, et si π est une représentation irréductible cuspidale induite d'une représentation lisse de dimension finie ρ de $Z_s K_s$, il résulte de la définition du degré formel (*voir* par exemple [6]), et de 1.3, que le degré formel de π est donné par :

$$d(\pi) = [\mathrm{vol}(Z_s K_s/Z)]^{-1} \dim \rho.$$

5.10. *Nous allons maintenant normaliser la mesure de Haar sur* G/Z *de sorte que la représentation spéciale de* G *soit de degré formel* 1. Nous verrons dans la suite l'intérêt de cette normalisation.

On renvoie à Jacquet-Godement [18] pour la définition de la représentation spéciale. Le centre Z de G agit trivialement sur l'espace de cette représentation, qui se factorise donc par une représentation de $G/Z = PGL_n(F)$, en fait la représentation spéciale de PGL_n. Le degré formel de la représentation spéciale de G, égal au degré formel de la représentation spéciale de $PGL_n(F)$, est calculé dans un cadre plus général par Borel ([2], 5.3 et 5.7). Jacquet et Godement ([18], p. 89 et 96) le calculent aussi, sans le dire. Le résultat est le suivant : si σ désigne la représentation spéciale et si la mesure de Haar de G/Z est normalisée de sorte que le sous-groupe d'Iwahori, projection sur G/Z de K_n, soit de mesure 1, alors :

$d(\sigma)^{-1} = n \sum q^{-l(w)}$, w décrivant le groupe de Weyl affine et $l(w)$ désignant la longueur d'un élément de ce groupe.

La somme ci-dessus est calculée dans ([3], p. 231). On trouve en définitive :

$$d(\sigma)^{-1} = n \frac{q^n - 1}{(q-1)^n}.$$

Nous normalisons désormais, dans tout ce qui suit, la mesure de Haar sur G/Z *de sorte que* ZK_n/Z *ait pour mesure* $n^{-1}(q^n-1)^{-1}(q-1)^n$. Alors $d(\sigma) = 1$.

5.11. Avec cette normalisation, nous allons calculer les degrés formels de nos représentations. Il nous suffit d'après 5.9 de calculer les mesures des $Z_s K_s/Z$.

Or

$$(Z_s K_s/Z : ZK_n/Z) = (Z_s : Z)(K_s : K_n) = s(K_s : K_n).$$

Par l'application de réduction $K_s \to K_s/K_s^1 \simeq [GL_r(\mathbf{k})]^s$, K_n est l'image réciproque de la puissance cartésienne s-ième du sous-groupe de $GL_r(\mathbf{k})$ formé des matrices triangulaires supérieures.

D'où

$$(K_s : K_n) = (g_r/(q-1)^r q^{r(r-1)/2})^s = g_r^s (q-1)^{-n} q^{-n(r-1)/2}.$$

On en déduit que :

$$\mathrm{vol}(Z_s K_s/Z) = sn^{-1}(q^n-1)^{-1} g_r^s q^{-n(r-1)/2}$$

et donc, d'après 5.8, 5.9 :

$$d(\pi) = \frac{n}{s} \frac{q^n-1}{q^r-1} q^{(r^2 s - r)((m/2)-1) + n(r-1)/2}.$$

D'après 4.2 le conducteur de π est $c = r(m-1) + n$. On a :

$$(r^2 s - r)\left(\frac{m}{2} - 1\right) + \frac{n(r-1)}{2} = \frac{n-1}{2}(c-n-r) + \frac{n(r-1)}{2} = \frac{1}{2}((n-1)(c-n) + r - n)$$

d'où la formule reliant $d(\pi)$ à c :

$$d(\pi) = r \frac{q^n-1}{q^r-1} q^{1/2((n-1)(c-n)+r-n)}.$$

(Noter que r est le PGCD de c et de n. Noter aussi que $(n-1)(c-n)+r-n$ est toujours pair, et que $d(\pi)$ est entier).

6. Représentations d'algèbres à division

6.1. Soit D une algèbre à division de centre F et de degré n^2 sur F. Désignons par D* le groupe multiplicatif de ses éléments non nuls. Le centre de D* s'identifie à F*, et nous l'identifions au centre Z de G.

Nous nous intéressons aux représentations lisses et irréductibles de D*. Parce que D*/Z est compact, une telle représentation est de dimension finie. La torsion par un quasi-caractère admissible de F* se définit de la même façon que pour les représentations de G, en remplaçant le déterminant par la norme réduite $\nu : D^* \to F^*$.

La théorie de Jacquet-Godement s'applique aux représentations lisses irréductibles de D*, et leur attribue des facteurs L et ε, et donc en particulier des conducteurs.

Désignons par $\mathcal{O}_D$ l'anneau des entiers de D et par $\mathcal{P}_D$ son idéal maximal. Définissons de la manière suivante une suite décroissante $(U_D^i)_{i \in \mathbb{N}}$ de sous-groupes distingués de D* :

– U_D^0 est le groupe des unités de $\mathcal{O}_D$

– pour $i \geqq 1$, $U_D^i = 1 + \mathcal{P}_D^i$.

Soit π une représentation lisse et irréductible de D*. Lorsque i est assez grand, la restriction de π à U_D^i est triviale. Si $i(\pi)$ désigne le plus petit entier tel qu'il en soit ainsi, alors il est bien connu (*cf.* [28]) et facile de vérifier que le conducteur de π est égal à $i(\pi)+n-1$. En particulier, les quasi-caractères admissibles de D* se factorisent via ν et admettent pour conducteur $n-1$.

Rappelons aussi que si Tr désigne la trace réduite de D vers F, l'accouplement sur $D \times D$ défini par $(x, y) \to \psi(\mathrm{Tr}(xy))$ est non dégénéré, et que l'orthogonal de $\mathcal{P}_D^i$, relativement à cet accouplement, est égal à $\mathcal{P}_D^{-i+1-n}$.

Rappelons enfin que le corps résiduel $\mathbf{d} = \mathcal{O}_D/\mathcal{P}_D$ est une extension de $\mathbf{k}$ de degré n. Si ϖ_D désigne une uniformisante de D (i. e. un générateur de l'idéal $\mathcal{P}_D$), la conjugaison par $\varpi_D : x \to \varpi_D\, x\, \varpi_D^{-1}$ induit un automorphisme φ de $\mathbf{d}$; φ est un générateur de $\mathrm{Gal}(\mathbf{d}/\mathbf{k})$. Il est possible, si on le désire, de choisir ϖ_D tel que $\varpi_D^n = \varpi$.

6.2. Soit m un entier, soit r le P.G.C.D. de m et de n, et soit s le quotient n/r. L'élévation à la puissance s induit une application de $\mathcal{P}_D^m/\mathcal{P}_D^{m+1}$ vers $\mathcal{P}_D^{ms}/\mathcal{P}_D^{ms+1}$. L'entier $ms = n.m/r$ est multiple de n, et le quotient précédent s'identifie, *via* $\varpi^{-m/r}$, à $\mathbf{d}$. Nous noterons $u \to \varpi^{-m/r} u^s$ l'application ainsi définie de $\mathcal{P}_D^m/\mathcal{P}_D^{m+1}$ vers $\mathbf{d}$. *Remarquons que le degré sur* $\mathbf{k}$ *de* $\varpi^{-m/r} u^s$ *est au plus égal à* r. En effet, si l'on écrit $u = \varpi_D^m u_0$, avec $u_0 \in \mathbf{d}$, alors on voit que :

$$\varpi^{-m/r} u^s = \varphi^{-(s-1)m}(u_0) \ldots \varphi^{-2m}(u_0) \, . \, \varphi^{-m}(u_0) \, . \, u_0$$

et nous reconnaissons là la norme $N_{\mathbf{d}/\mathbf{d}'}(u_0)$ où $\mathbf{d}'$ désigne la sous extension de $\mathbf{d}$ de degré r sur $\mathbf{k}$.

DÉFINITION. — *Nous dirons que* $u \in \mathcal{P}_D^m/\mathcal{P}_D^{m+1}$ *est général si* u *est non nul et si* $\varpi^{-m/r} u^s$ *est de degré* r *sur* $\mathbf{d}$.

Remarquons que l'action de D^* par conjugaison sur $\mathscr{P}_D^m/\mathscr{P}_D^{m+1}$ préserve l'ensemble des éléments généraux, que si m est premier à n un élément non nul de $\mathscr{P}_D^m/\mathscr{P}_D^{m+1}$ est automatiquement général. Remarquons aussi que n est premier et m multiple de n, un élément de $\mathscr{P}_D^m/\mathscr{P}_D^{m+1}$ est non général si et seulement si il est de la forme $\varpi^{n/m} u_0$, avec $u_0 \in \mathbf{k}$ (car il n'existe pas alors d'extension intermédiaire entre $\mathbf{k}$ et $\mathbf{d}$).

6.3. Soit π une représentation lisse irréductible de D^* de conducteur c supposé strictement supérieur à n. Cela signifie que π est triviale sur U_D^{c-n+1} mais pas sur U_D^{c-n}. Le groupe U_D^{c-n}/U_D^{c-n+1} est abélien et s'identifie à $\mathscr{P}_D^{c-n}/\mathscr{P}_D^{c-n+1}$ et la représentation π s'y décompose donc en caractères deux à deux conjugués par l'action de D^*. *Via* la dualité décrite en 6.1, un tel caractère est défini par un élément de $\mathscr{P}_D^{-c}/\mathscr{P}_D^{-c+1}$. Cette identification nous permet de transporter la définition 6.2 et de donner un sens, pour un caractère de U_D^{c-n}/U_D^{c-n+1}, au fait d'être général ou non.

DÉFINITION. — *Nous dirons que π est générale si sa restriction à U_D^{c-n}/U_D^{c-n+1} se décompose en caractères généraux.*

Dans le cas où $c=n$, U_D^0/U_D^1 s'identifie à $\mathbf{d}^*$. Nous dirons encore que π, de conducteur n, est générale si le stabilisateur dans $\mathrm{Gal}(\mathbf{d}/\mathbf{k})$ de chacun des caractères de $\mathbf{d}^*$ qu'elle définit, est réduit à l'élément neutre.

Remarquons que, d'après les remarques qui suivent la définition 6.2, si le conducteur c de π est premier à n, alors π est générale.

6.4. De même que pour les représentations de G, nous dirons qu'une représentation π de D^* est de conducteur minimal s'il est impossible d'abaisser ce conducteur en tordant π par un quasi-caractères de F^*.

Nous avons (*cf.* par exemple [28]) :

$$\nu(U_D^0)=\mathcal{O}_F^*,$$

pour $i \geqq 1$

$$\nu(U_D^i)=F \cap U_D^i=1+\varpi^{[(i+n-1)/n]}\,\mathcal{O}_F.$$

Nous en déduisons que si χ est un quasi-caractère (admissible) de F^* de conducteur $a(\chi)$, alors le quasi-caractère $\chi\circ\nu$ de D^* a pour conducteur $na(\chi)$.

Il en résulte que pour toute représentation π de D^* de conducteur $c(\pi)$, nous avons l'inégalité :

$$c(\pi\otimes\chi) \leqq \mathrm{Max}(c(\pi), na(\chi))$$

avec égalité si $c(\pi) \neq na(\chi)$.

En particulier π est de conducteur minimal dès que son conducteur n'est pas multiple de n.

Soit maintenant π de conducteur na, non minimal, avec $a \geqq 2$. Cela signifie que sur $U_D^{n(a-1)}/U_D^{n(a-1)+1}$, π se décompose en un certain nombre de copies du caractère $\chi\circ\nu$, où χ est un quasi-caractère de F^* de conducteur a. Or il est facile de vérifier que si $x \in \mathscr{P}_D^{n(a-1)}$, alors :

$$\nu(1+x)=1+\mathrm{Tr}\,x \ \text{ modulo } \ (1+\varpi^a\,\mathcal{O}_F).$$

Si χ est associé sur $(1+\varpi^{a-1}\mathcal{O}_F)/(1+\varpi^a\mathcal{O}_F)$ à un élément y de $\varpi^{-a}\mathcal{O}_F/\varpi^{-a+1}\mathcal{O}_F$, alors l'image de y dans $\mathcal{P}_D^{-na}/\mathcal{P}_D^{-na+1}$ est associée à π au sens de 6.3, et non générale, car $\varpi^a y \in \mathbf{k}$. Donc π est non générale — et il en est de même, comme on le voit aussitôt, si $a=1$.

La réciproque est vraie dans le cas où n est premier, parce qu'alors il n'existe pas d'extension intermédiaire entre $\mathbf{k}$ et $\mathbf{d}$. Si π est non générale, les éléments associés dans $\mathcal{P}_D^{-na}/\mathcal{P}_D^{-na+1}$ proviennent de $\mathbf{k}$, sont tous égaux car D^* opère trivialement sur $\mathbf{k}$: on peut alors trouver χ tel que $\pi\otimes\chi$ ait un conducteur strictement plus petit que celui de π.

En résumé. — Les représentations générales sont de conducteur minimal, et la réciproque est vraie dans le cas où *n est premier.*

6.5. Les notions d'élément général et de représentation générale que nous venons d'introduire présentent une grande analogie avec les définitions, introduites aux paragraphes 3 et 4, d'élément cuspidal et de représentation très cuspidale. La proposition suivante, due à Pierre Deligne [12] (ainsi que toutes les notions introduites dans ce paragraphe) est l'analogue du calcul de degré que nous avons effectué au paragraphe 5 et donne un résultat identique.

PROPOSITION. — *Soit π une représentation lisse irréductible de* D^*. *Supposons π générale, soit c son conducteur, et désignons par r le PGCD de n et c. La dimension de π est alors donnée par la formule suivante :*

$$\underline{\dim \pi = r\,\frac{q^n-1}{q^r-1}\,q^{1/2((n-1)(c-n)+r-n)}}.$$

La fin de ce paragraphe est consacrée à prouver cette proposition. La démonstration est due à Deligne, simplifiée car nous avons fait une partie du travail au paragraphe 5 (lequel a d'ailleurs été largement inspiré par ce travail de Deligne), et simplifiée aussi par l'utilisation de lemmes récents dus à H. Koch sur l'arithmétique des algèbres à division [27].

Remarquons que la formule précédente, dans le cas particulier où c est premier à n, figure dans la thèse de Tunnell [40].

6.6. Dans le cas où $c=n$, π se factorise en une représentation du groupe D^*/U_D^1, qui s'identifie au produit semi-direct de $\mathbf{d}^*$ par $\mathbb{Z}$. Par hypothèse le stabilisateur dans D^* d'un caractère de $\mathbf{d}^*$ figurant dans la restriction de π est égal au produit de $\mathbf{d}^*$ par $n\mathbb{Z}$. On conclut par 5.1 que la dimension de π est n, conformément à la formule annoncée.

Désormais, nous supposons $c>n$. Introduisons comme en 5.5 deux entiers p et p' :

$$p'=\left[\frac{c+1-n}{2}\right] \qquad p=c+1-n-p'.$$

On a

$$p\geqq p'\geqq 1, \qquad p+p'=c+1-n.$$

Le groupe U_D^p/U_D^{c+1-n} est abélien et naturellement isomorphe à $\mathcal{P}_D^p/\mathcal{P}_D^{c+1-n}$. Son dual s'identifie à $\mathcal{P}_D^{-c}/\mathcal{P}_D^{-p+1-n}$. Choisissons un caractère χ de U_D^p/U_D^{c+1-n} qui figure dans π. Soit u un élément de $\mathcal{P}^{-c}$ associé à ce caractère.

6.7. Nous allons déterminer le stabilisateur Z_χ de χ dans D^*.

LEMME. — *Soit u' un élément de $u+\mathscr{P}_D^{-c+1}$. Alors le corps* $F(u')$ *est de degré n sur* F, *de degré résiduel r et d'indice de ramification $s=n/r$.*

En effet, l'hypothèse que π est générale signifie que $\varpi^{c/r}u'^s \in \mathbf{d}$ est de degré r sur $\mathbf{k}$. Cela entraîne que le degré résiduel de $F(u')$ est multiple de r. D'autre part, si v désigne le prolongement à D de la valuation de F (qui prend donc sur D^* des valeurs dans $n^{-1}\mathbb{Z}$), la relation $v(u')=-c/n=-(c/r)/s$ entraîne, parce que s et c/r sont premiers entre eux, que l'indice de ramification est multiple de s.

D'où le lemme.

Dans la terminologie de Koch [27] le lemme précédent signifie que u admet $-c$ comme unique « saut de ramification ». Le théorème 2 de cet article s'énonce dans notre cas :

Soient $x\in\mathscr{P}_D^m$ tel que $x\notin\mathscr{P}_D^{m+1}$ et $l\in\mathbb{Z}$ tels que $l-m>-c$. Alors $xu-ux\in\mathscr{P}_D^l$ si et seulement si $x\in F(u)+\mathscr{P}_D^{l+c}$.

On en déduit Z_χ :

LEMME. — $Z_\chi=F(u)^*.U_D^{p'}$.

En effet la trace de Z_χ sur $\mathscr{P}_D^m-\mathscr{P}_D^{m+1}$ est l'ensemble des $x\in\mathscr{P}_D^m-\mathscr{P}_D^{m+1}$ qui vérifient :

$$xux^{-1}-u\in\mathscr{P}_D^{-p+1-m}.$$

Soit : $xu-ux\in\mathscr{P}_D^{-p+1-n+m}$.

Le résultat précédent s'applique avec $l=-p+1-n+m$ (noter que $-p+1-n=p'-c>-c$) et la relation précédente entraîne :

$$x\in F(u)+\mathscr{P}_D^{p'+m}.$$

Écrivons $x=x'+x''$ avec $x'\in F(u)$, $x''\in\mathscr{P}_D^{p'+m}$; x' est non nul (sa valuation est égale à celle de x) et on peut écrire :

$$x=x'(1+x'^{-1}x'')\in F(u)^*U_D^{p'}.$$

D'où l'inclusion de Z_χ dans $F(u)^*U_D^{p'}$. L'inclusion inverse est évidente.

6.8. CAS OÙ $c-n$ EST IMPAIR : $p=p'=(c+1-n)/2$.

Alors $Z_\chi=F(u)^*U_D^p$. Dans ce cas le noyau $\operatorname{Ker}\chi$ de χ dans U_D^p est normal dans Z_χ et le quotient $Z/\operatorname{Ker}\chi$ est abélien.

Soient en effet $z\in F(u)^*$ et $x\in\mathscr{P}_D^p$ (nous identifions $\mathscr{P}_D^p/\mathscr{P}_D^{c+1-n}$ et U_D^p/U_D^{c+1-n}). Il nous faut voir que la différence $zxz^{-1}-x$ est dans $\ker\chi$, et cela résulte du calcul suivant :

$$\chi(zxz^{-1})=\psi(\operatorname{Tr}(uzxz^{-1}))=\psi(\operatorname{Tr}(z^{-1}uzx))=\psi(\operatorname{Tr}(ux))=\chi(x).$$

On déduit de cela, compte tenu de 5.1, que π est induite d'un quasi-caractère de Z_χ, et par suite :

$$\dim\pi=[D^*:F(u)^*U_D^p].$$

Calculons cet indice suivant les crans de la filtration à quatre termes $D^* \supset U_D^0 \supset U_D^1 \supset U_D^p$. On trouve :

$$\dim \pi = r\,\frac{q^n-1}{q^r-1}\;\frac{|U_D^1/U_D^p|}{|U_D^1 \cap F(u)/U_D^p \cap F(u)|}$$

avec

$$U_D^1 \cap F(u) = U_{F(u)}^1; \quad U_D^p \cap F(u) = U_{F(u)}^{[(p+r-1)/r]} = U_{F(u)}^{(c-n+r)/2r}$$

d'où :

$$\dim \pi = r\,\frac{q^n-1}{q^r-1}\,q^{n(p-1)}\,q^{-r(c-n-r)/2r}$$

ce qui n'est rien d'autre que la formule de la proposition 6.5.

6.9. Cas où $c-n$ est pair : $p=(c-n)/2+1$, $p'=(c-n)/2$.

Comme en 5.7 nous considérons la suite de sous-groupes emboîtés :

$$H_1 = F(u)^*\,U_D^{p'}/\mathrm{Ker}\,\chi \supset H = F^*\,U_{F(u)}^1 . U_D^{p'}/\mathrm{Ker}\,\chi \supset A = F^*\,U_{F(u)}^1 . U_D^p/\mathrm{Ker}\,\chi$$

(noter que Ker χ est normalisé par $F(u)^*$ et que, par conjugaison, $U_D^{p'}$ opère trivialement sur U_D^p/U_D^{c-n+1}).

On voit de la même façon qu'en 6.8 que A est abélien et qu'il est central dans H_1. Le quotient $B=H_1/H$ est, comme en 5.7, un produit de deux groupes cycliques d'ordre s et $(q^r-1)/(q-1)$. Le quotient $P=H/A$ se calcule par la suite exacte :

$$0 \to U_{F(u)}^{[(p'+r-1)/r]}/U_{F(u)}^{[(p+r-1)/r]} \to U_D^{p'}/U_D^p \to P \to 0.$$

Nous devons distinguer deux cas :

(*a*) $r \mid p'$. Alors $|P|=q^{n-r}$

(*b*) $r \nmid p'$. Alors $|P|=q^n$

(noter que si c et n sont impairs, r aussi, et qu'on est dans le cas (*a*), que si c et n sont pairs r est pair, et qu'on peut être dans le cas (*a*) ou (*b*); dans tous les cas $|P|^{1/2}$ est entier.

Notons [ ] le commutateur $P \times P \to A$.

Lemme. — *$\chi([p_1, p_2])$ définit sur* P *un accouplement non dégénéré.*

Admettons un instant ce lemme. On est alors dans la situation décrite en 5.4 (H_1 est une extension par le groupe d'Heisenberg d'un groupe abélien et π est induite d'une représentation de H_1 de dimension $|P|^{1/2}$). D'où :

$$\dim \pi = |P|^{1/2}\,(D^* : F(u)^*\,U_D^{p'}).$$

Ce dernier indice a été calculé en 6.8 :

$$\dim \pi = |P|^{1/2}.r.\frac{q^n-1}{q^r-1}\,q^{n(p'-1)}\,q^{-r([(p'+r-1)/r]-1)}.$$

Cas (*a*) $$\dim \pi = r\,\frac{q^n-1}{q^r-1}\,q^{(n-r)/2}\,q^{n(p'-1)-r(p'/r-1)}.$$

Cas (*b*) $$\dim \pi = r\,\frac{q^n-1}{q^r-1}\,q^{n/2}\,q^{n(p'-1)-r(p'/r+(1/2)-1)}.$$

Et on voit qu'on obtient dans les deux cas la formule de la proposition 6.5.

Preuve du lemme. — Soit $x \in \mathrm{U}_{\mathrm{D}}^{p'}$ tel que $\chi([x, y]) = 1$ pour tout $y \in \mathrm{U}_{\mathrm{D}}^{p'}$. Il faut voir que $x \in \mathrm{F}(u)^* \, \mathrm{U}_{\mathrm{D}}^{p}$.

Le raisonnement est identique à celui que nous avons déjà fait en 5.7. Écrivons $x = 1 + t$, $y = 1 + t'$. On calcule le commutateur :

$$[x, y] = 1 + tt' - t' t.$$

Notre hypothèse est que pour tout $t' \in \mathscr{P}_{\mathrm{D}}^{p'}$:

$$\psi(\mathrm{Tr}(u(tt' - t' t))) = 1.$$

Soit

$$\psi(\mathrm{Tr}((ut - tu)\, t')) = 1$$

$ut - tu$ est donc dans l'orthogonal $\mathscr{P}_{\mathrm{D}}^{p-c}$ de $\mathscr{P}_{\mathrm{D}}^{p'}$.

On peut supposer que $t \notin \mathscr{P}_{\mathrm{D}}^{p'+1}$, et alors le lemme de Koch mentionné en 6.7 s'applique (avec $m = p'$, $l = p - c$) et nous dit que $t \in \mathrm{F}(u) + \mathscr{P}_{\mathrm{D}}^{p}$. Il en résulte aussitôt que $x \in \mathrm{F}(u)^* \, \mathrm{U}_{\mathrm{D}}^{p}$, ce qui achève la démonstration du lemme et de la proposition 6.5.

7. Une correspondance de Weil généralisée

7.1. Les conjectures énoncées par Langlands [32] prédisent entre autres choses une correspondance, pour deux groupes réductifs sur un corps local qui sont formes intérieures l'un de l'autre, entre les ensembles de représentations admissibles irréductibles de ces deux groupes. Le cas de GL(2) et du groupe multiplicatif d'un corps de quaternions est l'objet des paragraphes 15 et 16 de Jacquet-Langlands [25] (*voir* aussi Gelbart [13], § 10 et Deligne [11], p. 102). Utilisant une version de la formule des traces de Selberg due à Deligne et Kazhdan, il est possible de généraliser ces résultats au cas de $\mathrm{GL}(n)$ et du groupe multiplicatif d'un corps gauche de dimension n^2 sur son centre.

Nous supposons désormais, dans toute la suite de cet article, que F est de caractéristique nulle. En effet au moment où ce texte est écrit (février 1982) les preuves des théorèmes que nous allons énoncer dans ce paragraphe ne sont disponibles que dans ce cas; dans le cas d'un corps local d'égale caractéristique nous manquons en effet de certains ingrédients, en particulier nous ne savons pas encore que les caractères des représentations irréductibles sont des fonctions localement intégrables.

Il ne fait guère de doute cependant que tout reste vrai dans ce cas. Certains travaillent actuellement sur le cas d'égale caractéristique, et j'espère que cela aboutira très prochainement.

Soit comme précédemment $\mathrm{G} = \mathrm{GL}_n(\mathrm{F})$ et D une algèbre à division de centre F et de dimension n^2 sur F. Si π est une représentation admissible irréductible de G (resp. de D*) le centre Z de G (resp. de D*) agit sur l'espace de la représentation par un quasi-caractère, qui est par définition le *caractère central* de π. Si π est une représentation admissible irréductible de G, son caractère, défini *a priori* comme fonction généralisée, est en fait une fonction localement intégrable, localement constante sur l'ouvert des éléments réguliers (*voir* [5]) (dans le cas d'égale caractéristique nous savons seulement pour l'instant que pour π cuspidale la restriction de son caractère à l'ouvert des éléments réguliers elliptiques est une fonction localement constante). Le caractère de π a donc une valeur bien déterminée sur un élément régulier.

D'autre part, les classes de conjugaison d'éléments (elliptiques) de D^* sont en bijection, par le théorème de Skolem-Noether, avec les classes d'éléments elliptiques de G. Le caractère étant invariant par conjugaison, nous pouvons comparer sur les éléments elliptiques réguliers le caractère d'une représentation de D^* avec le caractère d'une représentation de G.

7.2. THÉORÈME (*voir* [26], [36], [41]). — *Il existe une bijection entre la série des représentations admissibles irréductibles de carré intégrable de* G *et la série des représentations admissibles de* D^*, *caractérisée par la propriété suivante : les caractères coïncident sur les éléments réguliers elliptiques au signe* $(-1)^{n-1}$ *près.*

Par cette bijection, les caractères centraux coïncident; les facteurs ε *sont conservés au signe* $(-1)^{n-1}$ *près. Les facteurs* L *coïncident.*

Si π est une représentation de la série discrète de G, nous noterons π', suivant l'usage, la représentation de D^* qui correspond à π.

Notons que les *conducteurs* de π et π' coïncident. Notons aussi que la correspondance décrite dans le théorème est *compatible à la torsion* par un quasi-caractère de F^*, c'est-à-dire que :

$$(\pi\otimes\chi)'=\pi'\otimes\chi.$$

En effet, le caractère de $\pi\otimes\chi$ (resp. de $\pi'\otimes\chi$) se déduit de celui de π (resp. π') par multiplication par la fonction sur G égale à $\chi(\det g)$ [resp. par la fonction sur D^* égale à $\chi(\nu(d)]$; si g et d se correspondent *via* Skolem-Noether, alors $\det g=\nu(d)$.

7.3. CAS PARTICULIERS

(*a*) *Si* σ *est la représentation spéciale de* G *alors* σ' *est la représentation triviale de* D^*.

En effet (*cf.* Harish-Chandra [19], § 15) le caractère de σ est une somme alternée de termes correspondant aux différents sous-groupes paraboliques P de G. On voit que sur les éléments elliptiques, tous les termes sont nuls sauf celui correspondant à $P=G$. On en déduit que le caractère de σ vaut $(-1)^{n-1}$ sur les éléments réguliers elliptiques.

(*b*) Aux tordues $\sigma\otimes\chi$ de la représentation spéciale correspondent les représentations de dimension 1 : $(\chi\circ\nu)$. On obtient ainsi toutes les représentations de D^* de dimension 1.

(*c*) Si π est une représentation cuspidale (donc de carré intégrable) alors π' est une représentation de D^* de conducteur supérieur ou égal à n, d'après (*b*). π est donc de conducteur supérieur ou égal à n.

(*d*) Si n est premier, toute représentation de G de carré intégrable est de la forme (*b*) ou (*c*). Si n n'est pas premier, il en existe d'autres : celà en vertu de résultats de Zelevinsky [42]; nous n'utiliserons pas ces résultats de façon cruciale.

7.4. Rappellons que nous avons normalisé en 5.10 la mesure de Haar de G/Z.

PROPOSITION. — *Soit* π *une représentation de* G *qui est soit tordue de la représentation spéciale, soit cuspidale. Si* π' *est la représentation de* D^* *qui lui correspond par le théorème* 7.2, *alors la dimension de* π' *est égale au degré formel de* π.

Preuve. — Si π est de la forme $\sigma\otimes\chi$, alors par définition de la mesure de Haar que nous avons choisie :

$d(\sigma\otimes\chi)=d(\sigma)=1$, d'où l'assertion dans ce cas parce que π' est de dimension 1.

Si π est cuspidale, il résulte de résultats de Howe ([22], p. 320 et prop. 6, p. 321) que la valeur du caractère Θ_π de π sur les éléments réguliers assez voisins de l'identité d'un tore elliptique T est constante et donnée par :

$$\Theta_\pi=d(\pi)\,\Gamma_n^{\mathrm{T}}$$

où Γ_n^{T} est le germe de Shalika [37] correspondant à l'unipotent 1.

Le germe Γ_n^{T} est calculé par Rogawski dans [35] (l'article de Rogawski est énoncé dans le cas d'un groupe semi-simple, mais on voit que les intégrales orbitales et leurs germes pour GL_n se calculent en fait dans PGL_n). On obtient :

$$\Gamma_n^{\mathrm{T}}=\frac{(-1)^{n-1}}{d(\sigma)}=(-1)^{n-1}.$$

Nous avons donc la valeur du caractère de π sur les éléments réguliers elliptiques au voisinage de 1 :

$$\Theta_\pi=(-1)^{n-1}\,d(\pi).$$

D'où $\Theta_{\pi'}=d(\pi)$ au voisinage de 1, et la proposition en résulte.

Remarques. — (*a*) La preuve ci-dessus utilise des résultats qui ne sont disponibles pour l'instant qu'en caractéristique 0. On s'attend bien sûr à ce qu'ils soient vrais aussi en égale caractéristique.

(*b*) Si π est une représentation discrète de G qui n'est ni cuspidale ni tordue de la représentation spéciale [*cf.* 7.3(*d*)], on s'attend à ce que la conclusion de la proposition 7.4 soit vraie pour π. Mais pour l'instant le résultat de Howe que nous avons utilisé n'est démontré que pour π cuspidale.

(*c*) Il est possible d'énoncer la proposition 7.4 en disant que les degrés formels de π et π' se correspondent si les mesures de Haar de G/Z et D^*/Z se correspondent au sens de Jacquet-Langlands ([25], § 15, p. 475, *voir* aussi Deligne [11], 3.2.8 (*b*)).

8. Dénombrements

Nous allons démontrer le théorème suivant, annoncé dans [4] :

8.1. THÉORÈME. — (i) *Si n est premier, toute représentation irréductible cuspidale de* G *de conducteur mn, minimal, est induite d'une* (*unique*) *représentation très cuspidale de type m de* $Z_1 K_1$.

(ii) *Soit* $m \geqq 2$ *tel que* $m-1$ *soit premier à n. Alors toute représentation irréductible cuspidale de* G *de conducteur* $n+m-1$ *est induite d'une* (*unique*) *représentation très cuspidale de type m de* $Z_n K_n$.

Il résulte de ce théorème que pour n premier, toute représentation cuspidale de G est obtenue par induction à partir d'une représentation de $Z_1 K_1$ ou de $Z_n K_n$ (*cf.* 1.1).

8.2. Nous prouvons le théorème 8.1 par un argument de comptage utilisant la correspondance 7.2. Nous pouvons par torsion par un quasi-caractère non ramifié nous ramener à considérer seulement des représentations dont le caractère central est trivial sur ϖ (il n'y aura alors qu'un nombre fini de telles représentations de conducteur fixé). Le théorème résultera des assertions suivantes :

(i′) si n est premier, le nombre de représentations très cuspidales de type m de $Z_1 K_1$, de caractère central trivial sur ϖ, est égal au nombre de représentations de D^* de conducteur mn, minimal, et de caractère central trivial sur ϖ.

(i′) si $m \geqq 2$ est tel que $m-1$ soit premier à n, alors le nombre de représentations très cuspidales de type m de $Z_n K_n$, de caractère central trivial sur ϖ, est égal au nombre de représentations de D^* de conducteur $m+n-1$ et de caractère central trivial sur ϖ.

Dans [4] j'avais indiqué une démonstration de (i′) et (i′) utilisant la proposition 7.4 mais n'utilisant pas les calculs de dimension que nous avons développés aux paragraphes 5 et 6. Nous allons ici au contraire utiliser ces résultats, mais pas la proposition 7.4; cela afin de ne pas faire dépendre trop lourdement nos preuves de l'hypothèse que F est de caractéristique 0.

Nous démontrerons l'assertion suivante qui englobe (i′) et (i′) (*cf.* 6.4) :

PROPOSITION 8.3. — *Soit c un entier,* $c \geqq n$. *Soit r le PGCD de n et c et soit* $s = n/r$. *Écrivons* $c = r(m-1)+n$ *avec un entier* $m \geqq 1$. *Alors le nombre de représentations très cuspidales de type m de* $Z_s K_s$, *de caractère central trivial sur* ϖ, *est égal au nombre de représentations générales de* D^* *de conducteur c et de caractère central trivial sur* ϖ.

Nous utiliserons le lemme suivant :

8.4. LEMME. — *Soit* G *un groupe fini,* H *un sous-groupe distingué de* G, C *un ensemble de caractères de* H *tel que* C *soit stable par l'action de* G *par conjugaison. Alors la somme des carrés des dimensions des représentations irréductibles de* G, *dont la restriction à* H *se décompose en éléments de* C, *est égale à* (Card C) (Card G/H).

Preuve du lemme. — Soit $\mathcal{R}$ l'ensemble des représentations irréductibles de G qui se décomposent sur H en éléments de C. Si $\rho \in \mathcal{R}$, alors on voit que sa restriction à H se compose d'éléments de C deux à deux conjugués par G, et figurant tous avec la même multiplicité :

$$\rho|_H = \nu . \sum_{\chi \in C_\rho} \chi \qquad \text{où} \quad C_\rho \text{ est une orbite sous G.}$$

Par réciprocité de Frobenius, on voit que ρ figure dans $\mathrm{Ind}_H^G \chi$ avec multiplicité ν si $\chi \in C_\rho$, et n'y figure pas si $\chi \notin C_\rho$.

Considérons $\sum_{\chi \in C} \mathrm{Ind}_H^G \chi$. La représentation ρ y figure avec multiplicité $\nu |C_\rho| = \dim \rho$.

On voit d'autre part que cette représentation $\sum_{\chi \in C} \mathrm{Ind}_H^G \chi$ se décompose en éléments de $\mathscr{R}$.

Nous obtenons donc en fait l'égalité :

$$\sum_{\chi \in C} \mathrm{Ind}_H^G \chi = \sum_{\rho \in \mathscr{R}} (\dim \rho)\, \rho.$$

Le lemme en découle aussitôt.

8.5. Calcul du nombre de représentations très cuspidales de type m de $Z_s K_s$ de caractère central trivial sur ϖ. — Supposons $m \geqq 2$. Soit N_1 le nombre de ces représentations. D'après la définition 4.1, la formule 5.8 et le lemme précédent, nous avons :

$$N_1 \cdot g_r^{2s} (q^r - 1)^{-2}\, q^{(r^2 s - r)(m-2)} = |C| \cdot \left| \frac{Z_s K_s}{\langle \varpi \rangle K_s^{m-1}} \right|$$

où C désigne l'ensemble des caractères cuspidaux de K_s^{m-1}/K_s^m.

Désignant par g_r le cardinal de $GL_r(\mathbf{k})$ et par e_r le cardinal de l'ensemble des éléments réguliers elliptiques de $GL_r(\mathbf{k})$, on a vu dans la preuve du lemme 3.7 que $|C| = g_r^{s-1} e_r$.

D'autre part

$$\left| \frac{Z_s K_s}{\langle \varpi \rangle K_s^{m-1}} \right| = \left| \frac{Z_s}{\langle \varpi \rangle} \right| \left| \frac{K_s}{K_s^{m-1}} \right| = s g_r^s\, q^{r^2 s(m-2)}.$$

D'où :

$$N_1 = s e_r\, g_r^{-1} (q^r - 1)^2\, q^{r(m-2)}.$$

Nous avons vu aussi dans la preuve du lemme 3.7 que $e_r (q^r - 1)\, g_r^{-1}$ était le nombre a_r de classes de conjugaison elliptiques régulières de $GL_r(\mathbf{k})$. D'où :

$$\underline{N_1 = s a_r (q^r - 1)\, q^{r(m-2)} \qquad (\text{pour } m \geqq 2).}$$

Remarquer que si $\mathbf{k}_{(r)}$ est l'extension de degré r de $\mathbf{k}$, et si $\mathbf{k}_{(r)}^{\mathrm{reg}}$ est le sous-ensemble formé des éléments de degré exactement r, alors :

$$a_r = \left| \mathbf{k}_{(r)}^{\mathrm{reg}} / \mathrm{Gal}(\mathbf{k}_{(r)}/\mathbf{k}) \right| = \frac{1}{r} \left| \mathbf{k}_{(r)}^{\mathrm{reg}} \right|.$$

Dans le cas où $m = 1$, $n = r$, $s = 1$, on sait [14] que les représentations cuspidales sont paramétrées par les caractères réguliers de $\mathbf{k}_{(r)}^*$ modulo l'action du groupe de Galois de $\mathbf{k}_{(r)}$ sur $\mathbf{k}$, et on trouve dans ce cas :

$$\underline{N_1 = a_r \qquad (\text{pour } m = 1,\ n = r,\ s = 1).}$$

8.6. Calcul du nombre de représentations générales de D^* de conducteur c et de caractère central trivial sur ϖ. — Supposons $c > n$, c'est-à-dire $m \geqq 2$. Soit N_2 le nombre cherché. D'après la proposition 6.5 et le lemme 8.4, nous avons :

$$N_2\, r^2 \left(\frac{q^n - 1}{q^r - 1} \right)^2 q^{(n-1)(c-n) + r - n} = |C| \left| \frac{D^*}{\langle \varpi \rangle U_D^{c-n}} \right|$$

où C est l'ensemble des caractères généraux de U_D^{c-n}/U_D^{c-n+1}; C s'identifie à l'ensemble des éléments généraux de $\mathscr{P}_D^{-c}/\mathscr{P}_D^{-c+1}$.

D'après 6.2 on peut encore identifier C (d'une façon non canonique) à l'ensemble des éléments α de $\mathbf{d}$ (le corps résiduel de D) tels que $N_{\mathbf{d}/\mathbf{d}'}(\alpha)$ soit de degré r sur $\mathbf{k}$ (où $\mathbf{d}'$ est la sous-extension de $\mathbf{d}$ de degré r sur $\mathbf{k}$).

La norme $\mathbf{d} \to \mathbf{d}'$ étant surjective avec un noyau d'ordre $(q^n-1)/(q^r-1)$, nous voyons que le cardinal de C est donné par :

$$| C | = \frac{q^n-1}{q^r-1} | \mathbf{k}_{(r)}^{\text{reg}} | = r \frac{q^n-1}{q^r-1} a_r$$

(où nous avons utilisé les notations de 8.5).

D'autre part :

$$\left| \frac{D^*}{\langle \varpi \rangle U_D^{c-n}} \right| = n \, | U_D^0/U_D^{c-n} | = n \, (q^n-1) \, q^{n(c-n-1)}.$$

On en déduit N_2 :

$$N_2 = r^{-1} a_r n \, q^{c-n-r} (q^r-1).$$

Soit

$$\underline{N_2 = s a_r (q^r-1) \, q^{r(m-2)} \qquad (\text{pour } m \geqq 2).}$$

Lorsque $c=n$, une représentation générale s'obtient à partir d'un caractère régulier de $\mathbf{d}^*$. On voit facilement que deux tels caractères correspondent à la même représentation si et seulement si ils sont conjugués par le groupe de Galois.

D'où

$$\underline{N_2 = a_n \ (\text{si } c=n, m=1, r=n).}$$

La comparaison de 8.5 et 8.6 démontre la proposition 8.3 et donc le théorème 8.1.

8.7. *Remarques.* — (*a*) La proposition 8.3 suggère que, par la correspondance 7.2, les représentations cuspidales de G que nous avons construites correspondent exactement aux représentations « générales » considérées par Deligne. C'est probablement vrai. Pour le vérifier, il suffirait, en vertu de 8.3, de vérifier que nos représentations de G ont pour correspondantes des représentations générales de D* : ce dernier point nécessiterait soit le calcul du caractère de nos représentations, soit, utilisant la proposition 7.4, une réponse positive à la question suivante :

(*b*) *Question* : Est-il vrai que la formule 5.5 donnant la dimension d'une représentation générale *caractérise* les représentations générales ?

Ou bien, question plus précise, est-il vrai que si π est une représentation *non générale* de conducteur c, alors :

$$\dim \pi < r \frac{q^n-1}{q^r-1} q^{1/2((n-1)(c-n)+r-n)} ?$$

(avec r le PGCD de c et n).

Nous nous sommes convaincus avec G. Henniart que cette dernière question admettait une réponse positive dans le cas modéré où n est premier à q. J'espère que les spécialistes de représentations d'algèbre à division pourront apporter une réponse.

(c) De toute manière, dans le cas où n n'est pas premier, les représentations que nous avons construites n'épuisent pas la série cuspidale : on peut voir que pour tout conducteur c non premier à n, il existe alors des représentations cuspidales de G, admettant c pour conducteur, et ne figurant pas parmi les induites de représentation « très cuspidales ».

(d) Il semble néanmoins probable que ces représentations manquantes puissent encore s'obtenir par induction à partir des $Z_s K_s$. Il n'est pas clair de voir quelles représentations de $Z_s K_s$ nous devons considérer, parce que les conditions à imposer à une telle représentation ne porteront plus uniquement sur son comportement sur K_s^{m-1}/K_s^m. Je renvoie à Howe [23] et Moy [34] pour la construction de ces représentations dans le cas modéré. Je renvoie à Corwin ([9], [10]) et Koch-Zink [28] pour l'étude analogue des représentations d'une algèbre à division de rang non premier.

BIBLIOGRAPHIE

[1] I. N. BERNSTEIN et A. V. ZELEVINSKY, *Representations of the Group* $GL_n(F)$ *where* F *is a Non Archimedian Local Field* (*Russian Math.*, Surveys, 31, n° 3, 1976, p. 1-68).

[2] A. BOREL, *Admissible Representations of a Semi-Simple Lie Group Over a Local Field with Vectors Fixed Under an Iwahori Subgroup* (*Inventiones Math.*, 35, 1976, p. 233-259).

[3] N. BOURBAKI, *Groupes et algèbres de Lie*, chap. IV, V, VI (*Act. Sc. Ind.*, 1337, Hermann, Paris, 1968).

[4] H. CARAYOL, *Représentations supercuspidales de* GL_n (*C.R. Acad. Sc.* Paris, série A, t. 288, 1979, p. 17-20).

[5] P. CARTIER, *Sur les représentations des groupes réductifs p-adiques et leurs caractères. Séminaire Bourbaki*, 28e année 1975/1976, exp. 471 (*Lecture notes in Math.*, Vol. 567, Springer-Verlag, Berlin, 1977).

[6] P. CARTIER, *Representations of p-Adic Groups. Automorphic Forms, Representations and L-Functions* (*Proc. Sympos. Pure Math.*, vol. 33, part 1, *Amer. Math. Soc.*, Providence RI, 1979, p. 111-155).

[7] W. CASSELMAN, *An Assortment of Results on Representations of* $GL_2(k)$. *Modular Functions of One Variable* II (*Lectures notes in Math.*, vol. 349, Springer-Verlag, Berlin, 1972, p. 3-54).

[8] W. CASSELMAN, *The Restriction of a Representation of* $GL_2(k)$ *to* $GL_2(\mathcal{O})$ (*Math. Annalen*, 206, 1973, p. 311-318).

[9] L. CORWIN, *Representations of Division Algebras Over Local Fields* (*Adv. in Math.*, 13, 1974, p. 259-267).

[10] L. CORWIN, *Representations of Division Algebras Over Local Fields II*, Preprint.

[11] P. DELIGNE, *Formes modulaires et représentations de* GL_2. *Modular Functions of One Variable II* (*Lecture notes in Math.*, vol. 349, Springer-Verlag, Berlin, 1972, p. 55-105).

[12] P. DELIGNE, *Un calcul de dimension, inspiré par Tunnell.* Notes manuscrites non publiées.

[13] S. GELBART, *Automorphic Forms on Adele Groups. Princeton university press*, Princeton, New Jersey, 1975.

[14] S. I. GELFAND, *Representations of the General Linear Group Over a Finite Field. Proc. of the Summer School on Group Representations, Bolyai Janos* [*Math. Soc.* (Budapest 1971). Adam Hilger LDT, London, p. 119-132].

[15] P. GÉRARDIN, *Construction de séries discrètes p-adiques* (*Lectures notes in Math.*, vol. 462, Springer-Verlag, Berlin, 1975).

[16] P. GÉRARDIN, *Cuspidal Unramified Series for Central Simple Algebras Over Local Fields. Automorphic Forms, Representations and* L-*Functions* (*Proc. Sympos. Pure. Math.*, vol. 33, Part 1, *Amer. Math. Soc.*, Providence RI, 1979, p. 157-170).

[17] P. GÉRARDIN et Ph. KUTZKO, *Facteurs locaux pour* GL_2 (*Ann. scient. Éc. Norm. Sup.*, 4e série, t. 13, 1980, p. 349-384).

[18] R. GODEMENT et H. JACQUET, *Zeta Functions of Simple Algebras* (*Lecture Notes in Math.*, vol. 260, Springer-Verlag, New York, 1972).

[19] HARISH-CHANDRA, *Harmonic Analysis on Reductive p-Adic Groups Harmonic Analysis on Homogeneous Spaces* (*Proc. Sympos. Pure Math.*, vol. 26, *Amer. Math. Soc.*, Providence RI, 1973, p. 167-192).

[20] G. HENNIART, *La conjecture de Langlands locale pour* GL_3 (à paraître). Un preprint I.H.E.S. est disponible.

[21] G. HENNIART, *Les conjectures de Langlands locales pour* GL_n. *Journées arithmétiques de Metz* (*Astérisque*, 94, 1982, p. 67-85).

[22] R. HOWE, *The Fourier Transform and Germs of Characters* (*Case of* GL_n *Over a p-Adic Field*) (*Math. Ann.*, 208, 1974, p. 305-322).

[23] R. HOWE, *Tamely Ramified Supercuspidal Representations of* GL_n (*Pacific Journal of Math.*, vol. 73, n° 2, 1977, p. 437-460).

[24] H. JACQUET, *Sur les représentations des groupes réductifs p-adiques* (*C.R. Acad. Sc.*, Paris, série A, t. 280, 1975, p. 1271-1272).

[25] H. JACQUET et R. P. LANGLANDS, *Automorphic Forms on* GL_2 (*Lecture notes in Math.*, vol. 114, Springer-Verlag, Berlin, 1968).

[26] D. KAZHDAN et P. DELIGNE, *On Representations of Local Division Algebras*. Preprint, 1982.

[27] H. KOCH, *Zur Arithmetik in Divisions Algebren Uber Lokalen Körpern* (*Math. Nachr.*, 100, 1981, p. 9-19).

[28] H. KOCH et E. W. ZINK, *Zur Korrespondenz von Darstellungen der Galoisgruppen und der zentralen Divisions algebren über lokalen Körper* (*Der Zahme Fall*) (*Math. Nachr.*, 98, 1980, p. 83-119).

[29] Ph. KUTZKO, *On the Supercuspidal Representations of* $GL(2)$, I, II (*Amer. J. Math.*, vol. 100, 1978, p. 43-60 et 705-716).

[30] Ph. KUTZKO, *The Exceptionnal Representations of* GL_2 (à paraître).

[31] Ph. KUTZKO, *The Langlands Conjecture for* GL_2 *of a Local Field* (*Annals of Math.*, vol. 112, n° 2, septembre 1980, p. 381-412).

[32] R. P. LANGLANDS, *Problems in the Theory of Automorphic Forms. Lectures in Modern Analysis and Applications* (*Lecture Notes in Math.*, vol. 170, Springer, New York, 1970, p. 18-86).

[33] G. LUSZTIG, *Some Remarks on the Supercuspidal Representations of p-Adic Semi-Simple Groups* (*Proc. Sympos. Pure Math.*, vol. 33, part 1, *Amer. Math. Soc.*, Providence RI, 1979, p. 171-178).

[34] A. MOY, *Local Constants and the Tame Langlands Correspondence* (*Thèse, Université de Chicago*, juin 1982).

[35] J. ROGAWSKI, *An Application of the Building to Orbital Integrals* (*Composition Math.*, vol. 42, fasc. 3, 1981, p. 417-423).

[36] J. ROGAWSKI, *Representations of* GL_n *and Division Algebras Over a p-Adic Field* (*Duke Math. Journal*, vol. 50, n° 1, 1983, p. 161-196).

[37] J. A. SHALIKA, *A Theorem on Semi-Simple p-Adic Groups* (*Ann. of Math.*, 95, n° 1, 1972, p. 226-242).

[38] T. SHINTANI, *On Certain Square-Integrable Irreductible Unitary Representations of Some p-Adic Linear Groups* (*J. Math. Soc. Japan*, 20, 1968, p. 522-565).

[39] J. TITS, *Reductive Groups Over Local Fields. Automorphic Forms, Representations and L-Functions* (*Proc. Sympos. Math.*, vol. 33, part 1, *Amer. Math. Soc.*, Providence RI, 1979, p. 29-69).

[40] J. TUNNELL, *On the Local Langlands Conjecture for* $GL(2)$ (*Inv. Math.*, 46, 1978, p. 179-200).

[41] M. F. VIGNERAS, *Représentations des algèbres centrales simples sur un corps local non archimédien*. Notes pour des conférences à Paris-VII.

[42] A. V. ZELEVINSKY, *Induced Representations of Reductive p-Adic Groups II. On Irreductible Representations of* $GL(n)$ (*Ann. scient. Éc. Norm. Sup.*, série 4, 13, fasc. 2, 1980, p. 165-210).

(Manuscrit reçu le 13 juillet 1982,
révisé le 12 juillet 1983).

H. CARAYOL
Université de Paris-VII
U.E.R. de Mathématiques
Tour 45/55, 5e étage
75251 Paris Cedex 05