ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

GUY DAVID

Opérateurs intégraux singuliers sur certaines courbes du plan complexe

Annales scientifiques de l'É.N.S. 4e série, tome 17, nº 1 (1984), p. 157-189
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1984_4_17_1_157_0>

Ann. scient. Éc. Norm. Sup.,
4e série, t. 17, 1984, p. 157 à 189.

OPÉRATEURS INTÉGRAUX SINGULIERS SUR CERTAINES COURBES DU PLAN COMPLEXE

PAR GUY DAVID

Introduction

Nous nous proposons de généraliser le résultat suivant, démontré en 1977 par A. P. Calderón [1] : il existe une constante $\delta > 0$ telle que, si Γ est le graphe d'une fonction lipschitzienne $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ avec $\| \varphi' \|_\infty \leqslant \delta$ et si $x \to z(x)$ est une représentation paramétrique de Γ par la longueur d'arc, alors le noyau de Cauchy $\dfrac{1}{z(x)-z(y)}$ définit un opérateur borné sur $L^2(\mathbb{R})$.

R. R. Coifman, A. McIntosh et Y. Meyer ont montré en 1981 ([5] et [6]) que la restriction « $\| \varphi' \|_\infty \leqslant \delta$ » est inutile, et que l'on peut remplacer le noyau de Cauchy par tout noyau $K(z(x)-z(y))$, où K est une fonction impaire, positivement homogène de degré -1, et indéfiniment dérivable définie sur $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{ 0 \}$.

Nous étendrons ce résultat au cas un peu plus général où Γ est une courbe « régulière » (définition 1 plus bas) et donnerons quelques conséquences du résultat obtenu.

La démonstration utilisera le résultat de Calderón (1977) et des méthodes de variable réelle telles que l'utilisation des « inégalités aux bons λ » de Burkholder et Gundy.

Le paragraphe 1 contient la définition et quelques propriétés géométriques des courbes régulières.

Nous définissons au paragraphe 2 des fonctions maximales destinées à remplacer celles de Hardy-Littlewood dans un cadre géométrique un peu différent. On en déduit au paragraphe 3 quelques résultats préliminaires sur les opérateurs maximaux. Le paragraphe 4 montre qu'on peut approcher, en un certain sens, les courbes régulières par les graphes de fonctions lipschitziennes. Le théorème fondamental (théorème 1) n'apparaît qu'au paragraphe 5, où il est montré à partir du théorème de Coifman-McIntosh-Meyer (théorème 0).

Nous montrons au paragraphe 6 que les courbes régulières sont les seules courbes rectifiables Γ pour lesquelles l'intégrale de Cauchy définisse un opérateur borné sur $L^2(\Gamma)$.

Lorsque la courbe régulière Γ est aussi une courbe de Jordan, les deux espaces de Hardy généralisés définis à partir de Γ sont en position de somme directe dans $L^2(\Gamma)$. En particulier, les domaines délimités par Γ sont des domaines de Smirnov (paragraphe 7).

Le paragraphe 8 donne une version matricielle du théorème fondamental.

Le paragraphe 9 donne une démonstration du théorème de Coifman-McIntosh-Meyer à partir du résultat de Calderón (1977).

Enfin, nous donnons au paragraphe 10 une extension du théorème fondamental au cas où Γ est une courbe rectifiable quelconque, non nécessairement régulière.

Je tiens à remercier tout particulièrement R. R. Coifman et J. L. Journé pour leurs suggestions, et Y. Meyer pour ses nombreux conseils et encouragements.

1. Courbes régulières

Nous donnons dans ce paragraphe la définition et quelques propriétés géométriques des courbes régulières (ces propriétés ne seront pas utilisées dans la suite). Ces courbes ont été étudiées dans un contexte différent par L. Ahlfors en 1935 (*cf. Acta Math.*, vol. 65, p. 157-194).

La lettre Γ désignera dans la suite une courbe rectifiable orientée, définie sur un intervalle fermé de $\mathbb{R}$. On supposera que le paramétrage de Γ par la longueur d'arc est admissible, et on le notera $s \to z(s)$.

DÉFINITION 1. — *Nous dirons que* Γ *est régulière s'il existe une constante* C *telle que pour tout* $t>0$ *et tout disque* D *de rayon* r, *la longueur* $\Gamma \cap D$ *soit inférieure à* Cr.

Lorsque Γ est régulière et définie sur un intervalle non borné, on a $\lim\limits_{s \to \infty} |z(s)| = +\infty$. Nous pouvons donc définir sur $\mathbb{C}$ une mesure de Radon positive σ (que nous appellerons encore longueur d'arc) par $\int_{\mathbb{C}} f(z)d\sigma(z) = \int_{\mathbb{R}} f(z(s))ds$ pour f continue à support compact dans $\mathbb{C}$.

Une courbe Γ est dite « corde-arc » s'il existe une constante C telle que pour tout couple $(s, s') \in \mathbb{R}^2$, on ait $|s'-s| \leqslant C|z(s')-z(s)|$ (c.à.d. que la longueur d'arc entre $z(s)$ et $z(s')$ est inférieure à C fois la corde entre ces deux points). Les courbes corde-arc sont des cas particuliers de courbes régulières ; la réciproque est fausse, comme le montre le cas d'une parabole.

Contrairement aux courbes corde-arc, les courbes régulières peuvent avoir des points doubles. Cette propriété permet de prolonger une courbe régulière définie sur un intervalle compact en une courbe régulière définie sur $\mathbb{R}$: on peut par exemple recoller une demi-droite à chaque extrémité de la courbe. Ceci nous permettra de supposer, dans les paragraphes 2 et suivants, que Γ est définie sur $\mathbb{R}$, la généralisation des résultats démontrés à des courbes définies sur des intervalles compacts est évidente.

PROPOSITION 1 [11]. — *Soit* μ *une mesure de Radon positive sur* $\mathbb{C}$, *de support* E, *et vérifiant la propriété :*

(1) *il existe* $\gamma>0$ *tel que pour tout* $z_0 \in E$ *et tout* $r>0$, $\mu\{z ; |z-z_0|<r\} \geqslant \gamma r$.

Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

(2) *il existe* $C>0$ *telle que pour tout* z_0 *et tout* $r>0$, $\mu\{z\,;\,|z-z_0|<r\}\leqslant Cr$,

(3) *il existe* $C_1>0$ *telle que pour tout* z_0 *hors de* E, $\displaystyle\int |z-z_0|^{-2}d\mu(z)\leqslant \frac{C_1}{d(z_0, E)}$.

La partie directe est facile (et n'utilise pas (1)). Soient $z_0\notin E$ et $d=d(z_0, E)$; alors

$$\begin{aligned}\int |z-z_0|^{-2}d\mu(z) &= \sum_{k=0}^{\infty}\int_{2^k d\leqslant|z-z_0|<2^{k+1}d}|z-z_0|^{-2}d\mu(z)\\ &\leqslant \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2^{2k}d^2}\mu\{z\,;\,2^k d\leqslant|z-z_0|<2^{k+1}d\}\leqslant\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2^{2k}d^2}\mu\{z\,;\,|z-z_0|<2^{k+1}d\}\\ &\leqslant\sum_{k=0}^{\infty}\frac{C2^{k+1}d}{2^{2k}d^2}=\frac{4C}{d}.\end{aligned}$$

Pour montrer la réciproque, prenons un carré quelconque P, de côté $2r$; soit $M=\dfrac{\mu(P)}{r}$.

LEMME 1. — *Pour tout* $z_0\in P$, $d(z_0, E)\leqslant\dfrac{8C_1 r}{M}$.

En effet, si $z_0\notin E$, $\displaystyle\frac{C_1}{d(z_0, E)}\geqslant\int_P|z-z_0|^{-2}d\mu(z)\geqslant\frac{1}{8r^2}\int_P d\mu(z)=\frac{Mr}{8r^2}=\frac{M}{8r}$.

Soit maintenant m un entier tel que $\dfrac{1}{m}\leqslant\dfrac{8C_1}{M}<\dfrac{1}{m-1}$; nous voulons montrer que m ne peut pas dépasser une certaine valeur. Découpons P en m^2 carrés $Q_{j,k}$ de côté $\dfrac{2r}{m}$. Pour chaque couple (j, k), soit $R_{j,k}$ le carré de même centre que $Q_{j,k}$, et de côté $\dfrac{4r}{m}$. Comme $\dfrac{r}{m}\leqslant\dfrac{8C_1 r}{M}$, tout $Q_{j,k}$ rencontre E et il s'ensuit à cause de (1) que $\mu(R_{j,k})\geqslant\dfrac{\gamma r}{m}$.

LEMME 2. — *Pour tout* $z_0\in P$, $d(z_0, E)\leqslant\dfrac{1\,000C_1 r}{\gamma m\operatorname{Log} m}$ *si* $m\geqslant 100$.

Notons $F(z_0)$ l'ensemble des couples (j, k) tels que la distance de z_0 à $R_{j,k}$ soit inférieure à $\dfrac{2r}{m}$. Alors, si $z_0\notin E$,

$$\frac{9C_1}{d(z_0, E)}\geqslant 9\int|z-z_0|^{-2}d\mu(z)\geqslant\sum_j\sum_k\int_{R_{j,k}}|z-z_0|^{-2}d\mu(z)$$

et comme dès que $(j, k)\notin F(z_0)$, les valeurs minimale et maximale de $|z-z_0|$ dans $R_{j,k}$ sont dans un rapport inférieur à 4, on a

$$\begin{aligned}\frac{9C_1}{d(z_0, E)} &\geqslant\frac{1}{16}\sum_{(j,k)\notin F(z_0)}\!\!\sum\frac{\mu(R_{j,k})}{|R_{j,k}|}\int_{R_{j,k}}|z-z_0|^{-2}dx\,dy\\ &\geqslant\frac{1}{16}\frac{\gamma r}{m}\frac{m^2}{4r^2}\sum_{(j,k)\notin F(z_0)}\!\!\sum\int_{R_{j,k}}|z-z_0|^{-2}dx\,dy=\frac{\gamma m}{64r}\sum_{(j,k)\notin F(z_0)}\!\!\sum\int_{R_{j,k}}|z-z_0|^{-2}dx\,dy.\end{aligned}$$

D'autre part,

$$\sum\sum_{(j,k)\notin F(z_0)} \int_{R_{j,k}} |z-z_0|^{-2} dx\,dy \geqslant \int_{\substack{z\in P \\ |z-z_0|\geqslant \frac{10r}{m}}} |z-z_0|^{-2} dx\,dy$$

$$\geqslant \iint_{\substack{\frac{10r}{m}\leqslant \rho\leqslant r \\ 0\leqslant \theta\leqslant \pi/2}} \rho^{-2}\rho\, d\rho\, d\theta \geqslant \frac{\pi}{2} \operatorname{Log} m/10 \geqslant \frac{\pi}{4} \operatorname{Log} m \qquad \textit{dès que} \quad m\geqslant 100.$$

On a donc $\dfrac{9C_1}{d(z_0, E)} \geqslant \dfrac{\gamma m}{64r} \dfrac{\pi}{4} \operatorname{Log} m$, $d(z_0, E) \leqslant \dfrac{3\,000 C_1 r}{\gamma \pi m \operatorname{Log} m}$ et le lemme 2 est démontré. Ainsi, tout carré T de côté $\dfrac{4\,000 C_1 r}{\gamma m \operatorname{Log} m}$ est tel que $\mu(T) \geqslant \dfrac{2\,000 C_1 r \gamma}{\gamma m \operatorname{Log} m}$ à cause du lemme 2 et de (1). Comme on peut trouver dans P plus de $\left(\dfrac{\gamma m \operatorname{Log} m}{5\,000 C_1}\right)^2$ tels carrés disjoints, on en déduit que $Mr = \mu(P) \geqslant \dfrac{\gamma^2 r m \operatorname{Log} m}{12\,500 C_1}$ ce qui est incompatible avec $\dfrac{8C_1}{M} \leqslant \dfrac{1}{m-1}$ dès que m est assez grand. La proposition 1 est démontrée.

Nous noterons G le groupe des homographies du plan complexe : les éléments g de G sont de la forme $g : z \mapsto \dfrac{az+b}{cz+b}$, avec $ad-bc \neq 0$; Γ désignera une courbe rectifiable orientée, et ds la longueur d'arc sur Γ.

PROPOSITION 2 [11]. — *Pour une courbe rectifiable orientée Γ, les trois propriétés suivantes sont équivalentes :*

(4) Γ *est régulière,*

(5) *il existe $C_1 > 0$ telle que pour tout $z_0 \notin \Gamma$,* $\displaystyle\int_\Gamma |z-z_0|^{-2} ds(z) \leqslant \frac{C_1}{d(z_0, \Gamma)}$,

(6) *il existe $C_2 > 0$ telle que pour tout $g \in G$, la longueur totale de $g(\Gamma)$ soit inférieure à C_2 fois le diamètre de $g(\Gamma)$, quand celui-ci est fini.*

Notons comme corollaire immédiat que la notion de courbe régulière est invariante par homographie.

L'équivalence de (4) et (5) résulte de la proposition 1. Supposons que (4) soit vraie, et soit $g \in G$. La propriété (6) est évidente si g est une similitude, et comme le problème n'est pas changé si nous composons g par une similitude, nous pouvons supposer que g est de la forme $z \mapsto \dfrac{1}{z-z_0}$. On peut aussi supposer que $z_0 \notin \Gamma$. Soit alors $d = d(z_0, \Gamma) > 0$. Supposons qu'il existe $z \in \Gamma$ tel que $|z-z_0| \geqslant 2d$. Alors le diamètre de $g(\Gamma)$ est supérieur à $\dfrac{1}{d} - \dfrac{1}{|z-z_0|} \geqslant \dfrac{1}{2d}$. Par ailleurs, la longueur de $g(\Gamma)$ est $\displaystyle\int_\Gamma \frac{ds(z)}{|z-z_0|^2} \leqslant \frac{C_1}{d}$ à cause de (5), ce qui établit (6) dans ce cas.

Si par contre Γ est contenue dans l'anneau $d \leqslant |z-z_0| < 2d$, et si z_2 et z_2 sont deux points de Γ maximisant $|z_2-z_1|$, on a $\left|\frac{1}{z_0-z_2}-\frac{1}{z_0-z_1}\right| \geqslant \frac{|z_2-z_1|}{4d^2}$; la longueur de $g(\Gamma)$ est $\int_\Gamma \frac{ds(z)}{|z-z_0|^2} \leqslant \frac{1}{d^2}\int_\Gamma ds(z) \leqslant \frac{1}{d^2} \mathrm{C}\,|z_2-z_1|$ car la courbe Γ est régulière. La propriété (6) est donc établie dans les deux cas.

Enfin, si (6) est vraie et si $z_0 \notin \Gamma$, la longueur de $g(\Gamma)$, avec $g: z \mapsto \frac{1}{z-z_0}$ est $\int_\Gamma |z-z_0|^{-2} ds(z)$ et est inférieure à C_2 fois le diamètre de $g(\Gamma)$ qui lui-même est inférieur à $2/d(z_0, \Gamma)$; la proposition 2 est donc démontrée.

Donnons une dernière caractérisation des courbes régulières. Munissons l'ensemble des droites du plan de la mesure de Lebesgue. Si Γ est une courbe, disons de classe C^∞, et si D est un disque de rayon r, la longueur de $\Gamma \cap \mathrm{D}$ est πr fois le nombre moyen d'intersections avec $\Gamma \cap \mathrm{D}$ d'une droite rencontrant D (*cf.* [13], p. 107). Les courbes régulières sont donc celles pour lesquelles ce nombre moyen d'intersections reste borné quand le disque varie.

2. Inégalités maximales

Définition 2. — *Nous noterons Δ l'ensemble des mesures de Radon μ positives sur $\mathbb{C}$ telles qu'il existe une constante* $\mathrm{C}=\mathrm{C}(\mu)\geqslant 0$ *vérifiant :*

(7) Pour tout $z_0 \in \mathbb{C}$ et tout $r>0$, on a $\mu\{z\,;\,|z-z_0|<r\} \leqslant \mathrm{C}r$.

Définition 3. — *Soit μ une mesure de Radon positive sur $\mathbb{C}$, et soit $f \in \mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(d\mu)$. On note* $\mathrm{M}_\mu f : \mathbb{C} \to [0, +\infty]$ *la fonction semi-continue inférieurement définie par*

$$\mathrm{M}_\mu f(z) = \sup_{r>0}\left\{\frac{1}{r}\int_{|z-w|<r} |f(w)|\, d\mu(w)\right\}. \tag{8}$$

Avec ces notations, on a la généralisation du théorème classique de Hardy et Littlewood sur la fonction maximale.

Proposition 3. — *Soient μ_1 et μ_2 deux éléments de Δ. Alors, pour tout $p \in]1, +\infty]$, il existe une constante* $\mathrm{C}=\mathrm{C}(\mu_1, \mu_2, p)$ *telle que, pour toute fonction $f \in \mathrm{L}^p(d\mu_1)$, on ait*

$$\|\mathrm{M}_{\mu_1} f\|_{\mathrm{L}^p(d\mu_2)} \leqslant \mathrm{C}\, \|f\|_{\mathrm{L}^p(d\mu_1)}. \tag{9}$$

Nous utiliserons au paragraphe 10 un énoncé un peu plus précis, que nous donnons maintenant.

Définition 4. — *Soit μ une mesure de Radon positive. Nous noterons $\bar{\mu}$ la fonction* $\mathbb{C} \to [0, +\infty]$ *définie par*

$$\bar{\mu}(z) = \sup_{\mathrm{D} \ni z} \frac{1}{r(\mathrm{D})}\int_{\mathrm{D}} d\mu = \sup_{\mathrm{D} \ni z} \frac{\mu(\mathrm{D})}{r(\mathrm{D})}, \tag{10}$$

où la borne supérieure est prise sur tous les disques contenant z, et où $r(\mathrm{D})$ est le rayon du disque D.

PROPOSITION 4. — *Pour tout* $p \in]1, +\infty]$, *il existe une constante* C_p *telle que, si* μ_1 *et* μ_2 *sont deux mesures de Radon positives, et* f *une fonction mesurable sur* $\mathbb{C}$, *on ait les inégalités*

$$\| M_{\mu_1} f \|_{L^p(d\mu_2)} \leqslant C_p \| (1+\overline{\mu}_1)(1+\overline{\mu}_2) f \|_{L^p(d\mu_1)} \tag{11}$$

et

$$\left\| \frac{1}{(1+\overline{\mu}_1)(1+\overline{\mu}_2)} M_{\mu_1} f \right\|_{L^p(d\mu_2)} \leqslant C_p \| f \|_{L^p(d\mu_1)} ; \tag{12}$$

si de plus $\mu_1 = \mu_2 = \mu$, *on a*

$$\| M_\mu f \|_{L^p(d\mu)} \leqslant C_p \| \overline{\mu} f \|_{L^p(d\mu)} \tag{13}$$

et

$$\left\| \frac{1}{\overline{\mu}} M_\mu f \right\|_{L^p(d\mu)} \leqslant C_p \| f \|_{L^p(d\mu)} . \tag{14}$$

La proposition 3 découle de la proposition 4 car, lorsque $\mu \in \Delta$, la fonction $\overline{\mu}$ est bornée. La démonstration de la proposition 4 ne présente pas de difficulté particulière ; nous la donnons pour la commodité du lecteur.

Compte tenu du théorème d'interpolation de Marcinkiewicz (*voir* p. ex. [12]) il suffit de montrer les inégalités suivantes :

$$\left\| \frac{1}{\overline{\mu}_1} M_{\mu_1} f \right\|_{L^\infty(d\mu_2)} \leqslant \| f \|_{L^\infty(d\mu_1)}, \quad \| M_{\mu_1} f \|_{L^\infty(d\mu_2)} \leqslant \| \overline{\mu}_1 f \|_{L^\infty(d\mu_1)},$$

$$\left\| \frac{1}{\overline{\mu}_2} M_{\mu_1} f \right\|_{L^1_{\text{faible}}(d\mu_2)} \leqslant C \| f \|_{L^1(d\mu_1)} \quad \text{et} \quad \| M_{\mu_1} f \|_{L^1_{\text{faible}}(d\mu_2)} \leqslant C \| \overline{\mu}_2 f \|_{L^1(d\mu_1)}.$$

Les deux premières inégalités sont des conséquences immédiates des définitions.

Pour montrer la troisième, choisissons $f \in L^1(d\mu_1)$, et posons $\nu_1 = |f| \mu_1$. Soient $\lambda > 0$, $m \in \mathbb{N}$ et Ω l'ensemble ouvert borné défini par $|z| \leqslant m$ et $\overline{\mu}_2(z)^{-1} M_{\mu_1} f(z) > \lambda$. Pour tout z de Ω, il existe un disque compact D_z de centre z et de rayon $r(z)$, tel que $\nu_1(D_z) \geqslant \lambda r(z) \overline{\mu}_2(z)$. Le théorème de Besicovitch ([7], p. 2) nous donne une suite (peut-être finie) de disques $D_k = D_{z_k}$, choisis parmi les D_z, telle que Ω soit contenu dans l'union des D_k et que pour tout $z \in \mathbb{C}$, $\sum_k \mathbb{1}_{D_k}(z) \leqslant C_0$, où C_0 est une constante. On a alors

$$\mu_2(\Omega) \leqslant \sum_k \mu_2(D_k) \leqslant \sum_k r(z_k) \overline{\mu}_2(z_k) \leqslant \sum_k \frac{1}{\lambda} \nu_1(D_{z_k})$$

$$\leqslant \frac{1}{\lambda} \int \Big[\sum_k \mathbb{1}_{D_k}(z)\Big] d\nu_1(z) \leqslant \frac{C_0}{\lambda} \| \nu_1 \| = \frac{C_0}{\lambda} \| f \|_{L^1(d\mu_1)}.$$

On en déduit bien la troisième inégalité en faisant tendre m vers $+\infty$.

Pour monter notre quatrième résultat, on procède pareillement : on se donne f telle que $\overline{\mu}_2 f$ soit dans $L^1(d\mu_1)$, on pose $\nu_1 = |f| \mu_1$, on définit $\Omega = \{ z \in \mathbb{C} ; |z| \leqslant m$ et $M\mu_1 f(z) > \lambda \}$. Le théorème de Besicovitch nous permet de recouvrir Ω par des disques

$D_k = D_{z_k}$, de centres z_k et de rayons $r(z_k)$ de façon que $\sum_k \mathbb{1}_{D_k} \leqslant C_0$, et $\nu_1(D_k) \geqslant \lambda r(z_k)$.

Alors, on a les inégalités $\mu_2(\Omega) \leqslant \sum_k \mu_2(D_k) \leqslant \sum_k \left(\inf_{z \in D_k} \bar{\mu}_2(z)\right) r(z_k)$ car pour chaque $z \in D_k$, $\bar{\mu}_2(z) \geqslant \frac{1}{r(z_k)} \mu_2(D_k)$. Donc

$$\mu_2(\Omega) \leqslant \sum_k \left(\inf_{z \in D_k} \bar{\mu}_2(z)\right) \frac{1}{\lambda} \nu_1(D_k) \leqslant \frac{1}{\lambda} \sum_k \left(\inf_{z \in D_k} \bar{\mu}_2(z)\right) \int \mathbb{1}_{D_k}(t) d\nu_1(t)$$
$$\leqslant \frac{1}{\lambda} \sum_k \int \mathbb{1}_{D_k}(t) \bar{\mu}_2(t) \, | \, f(t) \, | \, d\mu_1(t) \leqslant \frac{C_0}{\lambda} \int \bar{\mu}_2(t) \, | \, f(t) \, | \, d\mu_1(t),$$

ce qui termine notre démonstration.

Remarque. — Dans la démonstration de la troisième inégalité, notons que tous les disques D_z rencontrent le support de μ_1 car ils vérifient $\nu_1(D_z) > 0$. On peut donc remplacer dans cette troisième inégalité la fonction $\bar{\mu}_2(z)$ par la fonction plus petite $\sup_D \frac{\mu_2(D)}{r(D)}$, où la borne supérieure est prise sur l'ensemble des disques contenant z et rencontrant le support de μ_1, et $r(D)$ est le rayon de D.

Par conséquent, la proposition 3 est encore vraie si la mesure μ_2 vérifie la condition

(15) il existe une constante $C \geqslant 0$ telle que, pour tout disque compact D de rayon r et rencontrant le support μ_1, on ait $\mu_2(D) \leqslant Cr$.

3. Opérateurs maximaux

Soit $\mathbb{C}^*$ le plan complexe privé de 0 et $K : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$ une fonction impaire, positivement homogène de degré -1 et indéfiniment dérivable ; le noyau K sera fixé dans toute la suite. L'exemple typique (et primordial) est $K(z) = \frac{1}{z}$.

On désigne par $\mathscr{B}$ l'algèbre des fonctions boréliennes bornées dans le plan complexe et à valeurs complexes. A toute mesure $\mu \in \Delta$ et à tout $\varepsilon > 0$, on associe l'opérateur tronqué $T_\mu^\varepsilon : L^2(d\mu) \to \mathscr{B}$ défini par

$$T_\mu^\varepsilon f(z) = \int_{|z-w| \geqslant \varepsilon} K(z-w) f(w) d\mu(w)$$

On pose encore $T_\mu^* f(z) = \sup_{\varepsilon > 0} | T_\mu^\varepsilon f(z) |$.

Appelons Σ l'ensemble des mesures qui vérifient les conditions de la proposition 1 (un bon exemple de telle mesure est la mesure de longueur d'arc associée à une courbe régulière) :

DÉFINITION 5. — *Une mesure $\sigma \in \Delta$ est dans Σ s'il existe une constante $\gamma > 0$ telle que pour tout $r > 0$ et tout élément z_0 du support de σ, on ait $\sigma \{ z ; | z - z_0 | < r \} \geqslant \gamma r$.*

Le but du paragraphe est d'établir la proposition suivante.

PROPOSITION 5. — *Soient* $\mu\in\Delta$, $\sigma\in\Sigma$ *deux mesures et* K *un noyau ayant les propriétés ci-dessus. Supposons que pour tout* $p\in]1, +\infty[$, T_σ^* *soit borné de* $L^p(d\sigma)$ *dans* $L^p(d\sigma)$ *Alors, pour tout* $p\in]1, +\infty[$,

(16) *l'opérateur* T_σ^* *envoie continûment* $L^p(d\sigma)$ *dans* $L^p(d\mu)$, *et*

(17) *l'opérateur* T_μ^* *envoie continûment* $L^p(d\mu)$ *dans* $L^p(d\sigma)$.

Nous appliquerons plus tard ce résultat dans le cas particulier où σ est la mesure de longueur d'arc associée au graphe d'une fonction lipschitzienne ; la continuité de T_σ^* sur $L^p(d\sigma)$ sera alors donnée par [5] et [6].

La démonstration qui suit est une adaptation facile des méthodes de variable réelle de A. P. Calderón et A. Zygmund au cas qui nous occupe.

LEMME 3. — *Il existe une constante* $C>0$ *telle que si* μ *est une mesure de Radon positive sur* $\mathbb{C}$, z_0 *un point de* $\mathbb{C}$ *et* $r>0$, *on ait*

$$r\int_{|z-z_0|\geqslant r} |f(z)|\,|z-z_0|^{-2}d\mu(z)\leqslant CM_\mu f(z_0) \quad \text{pour} \quad f\in L^1_{loc}(d\mu). \tag{18}$$

La preuve est immédiate : on décompose $\{\,|z-z_0|\geqslant r\,\}$ en la réunion des couronnes dyadiques $\{\,2^k r\leqslant |z-z_0|\leqslant 2^{k+1}r\,\}$; la $k^{\text{ième}}$ intégrale peut être majorée par

$$\frac{1}{2^{2k}r}\int_{|z-z_0|\leqslant 2^{k+1}r} |f(z)|\,d\mu(z)\leqslant 2^{1-k}M_\mu f(z_0),$$

ce qui démontre le lemme avec $C=4$.

LEMME 4. — Soient $\sigma\in\Sigma$, $z_0\in\mathbb{C}$ *et* d *la distance de* z_0 *au support* E *de* σ. *Alors, si* $r\geqslant 2d$, *on a*

$$\sigma\{\,z\,;\,|z-z_0|\leqslant r\,\}\geqslant\frac{\gamma}{2}r. \tag{19}$$

La démonstration est immédiate et laissée au lecteur.

LEMME 5. — *Soient* $\sigma\in\Sigma$ *et* K *comme ci-dessus. Il existe une constante* $C>0$ *telle que pour toute fonction continue à support compact* $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$, *on ait*

$$T_\sigma^* f(z)\leqslant CM_\sigma(T_\sigma^* f)(z)+CM_\sigma f(z) \quad \textit{pour tout } z\in\mathbb{C}. \tag{20}$$

La constante C *ne dépend en fait que de* γ *et de* K.

Avant de démontrer ce lemme, notons que $M_\sigma g$ dépend uniquement des valeurs de g sur le support de σ. L'inégalité (20) signifie donc que les valeurs de $T_\sigma^* f$ dans $\mathbb{C}$ sont « dominées » par leur restriction au support de σ.

Pour démontrer le lemme 5, il s'agit de majorer $|T_\sigma^\varepsilon f(z_0)|$ (indépendamment de ε, bien sûr). Appelons $D(\varepsilon)$ le disque ouvert de centre z_0 et de rayon ε et $D(\varepsilon/2)$ le disque moitié. On écrit $f=f_1+f_2$, où f_1 est le produit de f par la fonction indicatrice de $D(\varepsilon)$. Alors $T_\sigma^\varepsilon f(z_0)=T_\sigma f_2(z_0)=\int K(z_0-w)f_2(w)d\sigma(w)$.

LEMME 6. — *Il existe* $C>0$ *tel que pour tout* $z\in D(\varepsilon/2)$, *on ait*

$$|T_\sigma^\varepsilon f(z_0)| \leqslant T_\sigma^* f(z) + CM_\sigma f(z_0). \tag{21}$$

Si $z\in D(\varepsilon/2)$ *et* $w\notin D(\varepsilon)$, alors $|K(z_0-w)-K(z-w)| \leqslant \dfrac{C^{te}|z-z_0|}{|z_0-w|^2} \leqslant \dfrac{C^{te}\varepsilon}{2|z_0-w|^2}$.

Il résulte du lemme 3 que $\int |K(z_0-w)-K(z-w)|\,|f_2(w)|\,d\sigma(w) \leqslant C\ M_\sigma f(z_0)$, ce qui signifie que $|T_\sigma f_2(z_0)-T_\sigma f_2(z)| \leqslant C^{te} M_\sigma f(z_0)$. De même, on a

$$|T_\sigma f_2(z)-T_\sigma^\varepsilon f(z)| \leqslant C^{te} M_\sigma f(z_0) \qquad \text{(démonstration évidente).}$$

En regroupant ces deux inégalités, $|T_\sigma f_2(z_0)| \leqslant |T_\sigma^\varepsilon f(z)| + C^{te}M_\sigma f(z_0)$, ce qui implique bien (21).

Nous allons maintenant envisager trois cas en relation avec la distance $d=d(z_0, E)$, où E est le support de σ.

Supposons d'abord que $\varepsilon \geqslant 4d$. On prend alors la moyenne des inégalités (21) par rapport à la mesure σ et pour z décrivant $D(\varepsilon/2)$. Grâce au lemme 4, il vient

$$|T_\sigma^\varepsilon f(z_0)| \leqslant \frac{2}{\gamma} M_\sigma(T_\sigma^* f)(z_0) + CM_\sigma f(z_0), \tag{22}$$

ce qui est bien l'inégalité (20).

Supposons maintenant que $\dfrac{d}{2} \leqslant \varepsilon < 4d$. On voit que dans ce cas

$$|T_\sigma^\varepsilon f(z_0) - T_\sigma^{4d} f(z_0)| \leqslant CM_\sigma f(z_0),$$

et on est ramené au cas précédent.

Supposons enfin que $\varepsilon < d/2$. Alors $T_\sigma^\varepsilon f(z_0) = T_\sigma^{d/2} f(z_0)$, ce qui nous ramène encore au cas précédent. En fin de compte, le lemme 5 est démontré. Il entraîne la propriété (16) car si T_σ^* envoie $L^p(d\sigma)$ dans lui-même, et si $f\in L^p(d\sigma)$, alors $M_\sigma(T_\sigma^* f)$ et $M_\sigma f$ sont dans $L^p(d\mu)$ à cause de la proposition 3.

Pour démontrer (17), remarquons d'abord que si $p\in]1, +\infty[$ et si q est l'exposant conjugué de p, la continuité de $T_\sigma^* : L^p(d\sigma) \to L^p(d\mu)$ implique l'existence d'une constante C_p telle que

$$\left| \iint_{|z-w|\geqslant\varepsilon} K(z-w) f(z) g(w) d\sigma(z) d\mu(w) \right| \leqslant C_p \|f\|_p \|g\|_q \tag{23}$$

pour tout $\varepsilon>0$, tout $f\in L^p(d\sigma)$ et tout $g\in L^q(d\mu)$. Alors (23) fournit la continuité de $T_\mu^\varepsilon : L^q(d\mu) \to L^q(d\sigma)$, et $\|T_\mu^\varepsilon\| \leqslant C_p$ pour la norme correspondante. Il existe donc une suite ε_j tendant vers 0 telle que la suite des opérateurs $T_\mu^{\varepsilon_j} : L^q(d\mu) \to L^q(d\sigma)$ converge faiblement vers un opérateur que nous noterons T_μ (l'opérateur T_μ n'est pas toujours unique, mais cela n'a pas d'importance).

LEMME 7. — *Soient* $r\in]1, p[$, $\mu\in\Delta$ *et* $\sigma\in\Sigma$. *Il existe deux constantes* C *et* C_r *telles que,* *pour toute fonction continue à support compact* $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *et tout* z_0 *appartenant au support* E *de* σ, *on ait*

$$\mathrm{T}_\mu^* f(z_0) \leqslant \mathrm{CM}_\sigma(\mathrm{T}_\mu f)(z_0) + \mathrm{CM}_\mu f(z_0) + \mathrm{C}_r [\mathrm{M}_\mu(|f|^r)(z_0)]^{1/r}. \tag{24}$$

Avant de démontrer ce lemme, voyons pourquoi il implique la continuité de $\mathrm{T}_\mu^* : \mathrm{L}^p(d\mu) \to \mathrm{L}^p(d\sigma)$. Si $f \in \mathrm{L}^p(d\mu)$, alors $\mathrm{T}_\mu f \in \mathrm{L}^p(d\sigma)$ et, grâce à la proposition 3, $\mathrm{M}_\sigma(\mathrm{T}_\mu f) \in \mathrm{L}^p(d\sigma)$.

De même, $\mathrm{M}_\mu f \in \mathrm{L}^p(d\sigma)$. Enfin, $|f|^r \in \mathrm{L}^{p/r}(d\mu)$, donc $\mathrm{M}_\mu(|f|^r) \in \mathrm{L}^{p/r}(d\sigma)$, ce qui implique bien que $\mathrm{T}_\mu^* f \in \mathrm{L}^p(d\sigma)$.

Il nous reste à démontrer (24). Pour majorer $|\mathrm{T}_\mu^\varepsilon f(z_0)|$, on reprend les notations et la décomposition $f = f_1 + f_2$ utilisées au lemme 5. On a $|\mathrm{T}_\mu^\varepsilon f(z_0) - \mathrm{T}_\mu f_2(z)| \leqslant \mathrm{CM}_\mu f(z_0)$ pour tout $z \in \mathrm{D}(\varepsilon/2)$ (démonstration comme au lemme 6). Compte tenu de $f_2 = f - f_1$, cela donne

$$|\mathrm{T}_\mu^\varepsilon f(z_0)| \leqslant |\mathrm{T}_\mu f(z)| + |\mathrm{T}_\mu f_1(z)| + \mathrm{CM}_\mu f(z_0). \tag{25}$$

Prenons la moyenne des inégalités (25) sur $\mathrm{D}(\varepsilon/2)$ par rapport à $\sigma \in \Sigma$:

$$|\mathrm{T}_\mu^\varepsilon f(z_0)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2\sigma(\mathrm{D}(\varepsilon/2))} \mathrm{M}_\sigma(\mathrm{T}_\mu f)(z_0) + \frac{1}{\sigma(\mathrm{D}(\varepsilon/2))} \int_{\mathrm{D}(\varepsilon/2)} |\mathrm{T}_\mu f_1(z)|\, d\sigma(z) + \mathrm{CM}_\mu f(z_0).$$

On majore le second terme par

$$\left[\frac{1}{\sigma(\mathrm{D}(\varepsilon/2))} \int_{\mathrm{D}(\varepsilon/2)} |\mathrm{T}_\mu f_1(z)|^r d\sigma(z)\right]^{1/r} \leqslant \frac{\|\mathrm{T}_\mu f_1\|_{\mathrm{L}^r(d\sigma)}}{\sigma[\mathrm{D}(\varepsilon/2)]^{1/r}}$$

ce qui, compte tenu de $\sigma(\mathrm{D}(\varepsilon/2)) \geqslant \dfrac{\gamma\varepsilon}{2}$, donne

$$|\mathrm{T}_\mu^\varepsilon f(z_0)| \leqslant \mathrm{CM}_\sigma(\mathrm{T}_\mu f)(z_0) + \mathrm{CM}_\mu f(z_0) + \frac{\mathrm{C}\,\|\mathrm{T}_\mu f_1\|_{\mathrm{L}^r(d\sigma)}}{\varepsilon^{1/r}}. \tag{26}$$

Notons au passage que nous n'avons pas encore utilisé le fait que $\mu \in \Delta$.

L'inégalité (24), et donc la proposition 5, découlent de

$$\|\mathrm{T}_\mu f_1\|_{\mathrm{L}^r(d\sigma)} \leqslant \mathrm{C}^{te} \|f_1\|_{\mathrm{L}^r(d\mu)} \leqslant [\varepsilon \mathrm{M}_\mu(|f|^r)]^{1/r}.$$

Le reste du paragraphe est maintenant destiné à montrer la proposition 6, qui ne sera d'ailleurs utilisée qu'au paragraphe 10.

PROPOSITION 6. — *Soient* μ *une mesure de Radon positive (non nécessairement dans* Δ), $\sigma \in \Sigma$ *et* K *comme dans la proposition 5 (en particulier, l'opérateur* T_σ^* *est borné de* $\mathrm{L}^p(d\sigma)$ *dans lui-même pour tout* $p \in]1, +\infty[$).

Pour tout $p \in]1, +\infty[$, *il existe une constante* C *indépendante de* μ *telle que, pour* f *continue à support compact, on ait les inégalités*

$$\left\| \frac{1}{1+\bar{\mu}} \mathrm{T}_\sigma^* f \right\|_{\mathrm{L}^p(d\mu)} \leqslant \mathrm{C} \|f\|_{\mathrm{L}^p(d\sigma)}, \quad et \tag{27}$$

$$\| T_\mu^* f \|_{L^p(d\sigma)} \leqslant C \| (1+\overline{\mu})^2 f \|_{L^p(d\mu)} \tag{28}$$

(*la fonction* $\overline{\mu}$ *est toujours celle de la définition 4*).

Reprenons la démonstration de la proposition 5. Les lemmes 3, 4 et 5 sont encore valides, et l'inégalité (27) découle du lemme 5 et de l'inégalité (12) de la proposition 4.

Nous pouvons remplacer (23) par l'inégalité suivante, qui découle de (27) : si q est l'exposant conjugué de p,

$$\left| \iint_{|z-w|>\varepsilon} K(z-w) f(z) \frac{1}{1+\overline{\mu}(w)} g(w) d\sigma(z) d\mu(w) \right| \leqslant C_p \| f \|_{L^p(d\sigma)} \| g \|_{L^q(d\mu)}. \tag{29}$$

Si l'on fait $g=(1+\overline{\mu})h$ dans cette inégalité, on trouve que l'opérateur qui à $(1+\overline{\mu})h$ associe $T_\mu^\varepsilon h$ est borné de $L^q(d\mu)$ dans $L^q(d\sigma)$ de manière indépendante de ε. Cela nous permet d'extraire une suite convergente, et de définir T_μ tel que l'opérateur qui à $(1+\overline{\mu})h$ associe $T_\mu h$ soit la limite des opérateurs précédents, et bien sûr soit borné de $L^q(d\mu)$ dans $L^q(d\sigma)$.

Avec ces notations, on a l'inégalité suivante.

LEMME 8. — *Pour tout* $r \in]1, p[$, *il existe deux constantes* C *et* C_r *indépendantes de* μ *et de* f *telles que pour tout* z_0 *dans le support* E *de* σ, *on ait*

$$T_\mu^* f(z_0) \leqslant C M_\sigma(T_\mu f)(z_0) + C M_\mu f(z_0) + C_r [M_\mu(|f|^r (1+\overline{\mu})^r)(z_0)]^{1/r}. \tag{30}$$

On voit en reprenant la démonstration de la proposition 5 que l'inégalité (26) est encore valable. Par ailleurs, nous savons que l'opérateur $(1+\overline{\mu})f \mapsto T_\mu f$ est borné de $L^r(d\mu)$ dans $L^r(d\sigma)$.

On en déduit que

$$\varepsilon^{-1/r} \| T_\mu f_1 \|_{L^r(d\sigma)} \leqslant C_r' \left[\frac{1}{\varepsilon} \int (1+\overline{\mu})^r |f_1|^r d\mu \right]^{1/r},$$

ce qui nous donne (30) avec $C_r = CC_r'$.

Nous pouvons maintenant utiliser le lemme 8 pour montrer l'inégalité (28).

Notons que si $(1+\overline{\mu})f \in L^p(d\mu)$, $T_\mu f$ est dans $L^p(d\sigma)$, et donc $M_\sigma(T_\mu f) \in L^p(d\sigma)$ grâce à la proposition 3 ; $M_\mu f$ est aussi dans $L^p(d\sigma)$ à cause de l'inégalité (11) de la proposition 4. Il ne reste plus qu'à majorer $[M_\mu(|f|^r(1+\overline{\mu})^r)]^{1/r}$.

Posons $g = |f|^r(1+\overline{\mu})^r$; si $(1+\overline{\mu})^2 f \in L^p(d\mu)$, alors

$$g^{p/r}(1+\overline{\mu})^{p/r} = |f|^p (1+\overline{\mu})^{p+p/r} \leqslant |f|^p (1+\overline{\mu})^{2p}$$

est intégrable. En vertu de la proposition 4, inégalité (11), $M_\mu g$ est dans $L^{p/r}(d\sigma)$, ce qui implique que $(M_\mu g)^{1/r}$ est dans $L^p(d\sigma)$ et prouve (28).

4. Décomposition de Calderón-Zygmund des courbes régulières

Dans ce paragraphe, Γ représentera une courbe rectifiable dans $\mathbb{C}$, et $z(s)$ un paramétrage de Γ par la longueur d'arc.

DÉFINITION 6. — *Soit* $M \geqslant 0$ *un réel ; nous dirons que* $\Gamma \in \Lambda(M)$ *s'il existe un déplacement* *du plan* T (*de la forme* $z \mapsto \alpha z+\beta$ *avec* $|\alpha| = 1$) *tel que* T(Γ) *soit le graphe d'une fonction lipschitzienne* $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *vérifiant* $\|\varphi'\|_\infty \leqslant \mathrm{M}$.

PROPOSITION 7. — *Si* Γ *est une courbe régulière, il existe deux constantes* $\mathrm{M} \geqslant 1$ *et* $\nu \in]0, 1]$ *telles que, pour tout intervalle compact* I *de nombres réels, il existe une partie compacte* $\mathrm{E} \subset \mathrm{I}$ *et une courbe* $\tilde{\Gamma} \in \Lambda(\mathrm{M})$ *admettant le paramétrage par la longueur d'arc* $\tilde{z}(s)$ *de sorte que*

$$|\mathrm{E}| \geqslant \nu |\mathrm{I}| \quad et \tag{31}$$

$$z(s) = \tilde{z}(s) \quad pour\ tout \quad s \in \mathrm{E}. \tag{32}$$

La proposition 7 est une conséquence immédiate de la proposition suivante, dont la démonstration occupera le reste de ce paragraphe.

PROPOSITION 8. — *Soit* $z : [a, b] = \mathrm{I} \to \mathbb{C}$ *la représentation paramétrique par la longueur d'arc d'une courbe* Γ *de longueur finie* $|\mathrm{I}| = b-a$, *non réduite à un seul point. Soit* $0 < \gamma \leqslant 1$ *tel que le diamètre du compact* $z(\mathrm{I})$ *soit supérieur à* $\gamma |\mathrm{I}|$. *Alors il existe un compact* $\mathrm{E} \subset \mathrm{I}$ *et une courbe* $\tilde{\Gamma} \in \Lambda\left(\frac{2}{\gamma}\right)$ *admettant la représentation paramétrique par la longueur d'arc* $\tilde{z}(s)$ *tels que*

$$|\mathrm{E}| \geqslant \frac{\gamma}{2} |\mathrm{I}| \quad et \tag{33}$$

$$z(s) = \tilde{z}(s) \quad pour\ tout\ s \in \mathrm{E}. \tag{34}$$

Nous pourrons nous contenter de montrer cette proposition lorsque $|z(b)-z(a)| \geqslant \gamma |\mathrm{I}|$. En effet, supposons que cela soit fait, et donnons-nous une courbe Γ vérifiant les hypothèses de la proposition 8. Si c et d sont deux points de I tels que $|z(d)-z(c)| \geqslant \gamma |\mathrm{I}|$, on peut appliquer la proposition à l'intervalle $[c, d]$, et avec la constante $\gamma' = \gamma \dfrac{|\mathrm{I}|}{d-c}$. La même courbe Γ que l'on obtient pour $[c, d]$ convient parfaitement pour $[a, b]$ et le compact E vérifie

$$|\mathrm{E}| \geqslant \frac{\gamma'}{2}(d-c) = \frac{\gamma}{2} |\mathrm{I}|.$$

Nous pouvons aussi supposer que $z(a)=0$ et $z(b)=l>0$ avec $l \geqslant \gamma |\mathrm{I}|$ car le problème est invariant par déplacement.

Nous utiliserons le « rising sun lemma » de F. Riesz (*cf.* [14], p. 31) que nous rappelons.

LEMME 9. — *Soient* $\mathrm{I} = [a, b]$ *un intervalle compact et* $g : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ *une fonction continue. Posons* $h(x) = \sup \{ g(t) ; t \in \mathrm{I}$ *et* $t \leqslant x \}$ *et désignons par* E *l'ensemble compact défini par* $g(x) = h(x)$.

Soient $\Omega = [a, b] \setminus \mathrm{E}$, *et* $]a_k, b_k[$ *une composante connexe ouverte de* Ω. *Alors h est constante sur* $[a_k, b_k]$, *on a* $h(a_k) = g(a_k) = h(b_k)$, *et* $g(x) < g(a_k)$ *pour* $x \in]a_k, b_k[$.

De même, si $b \in \Omega$ *et si* $]\beta, b]$ *est sa composante connexe dans* Ω, *on a* $g(x) < g(\beta)$ *pour* $x \in]\beta, b]$.

Le « rising sun lemma » nous permet de démontrer le lemme suivant :

LEMME 10. — *Soient* $I=[a, b]$, $l>0$, *et* $f: I \to \mathbb{R}$ *une fonction continue telle que* $f(a)=0$ *et* $f(b)=l$. *Il existe alors une partie compacte* E *de* I *et un homéomorphisme* $q: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *tels que*

$$q(x')-q(x) \geqslant \frac{l}{2|I|}(x'-x) \quad si \quad x \leqslant x', \tag{35}$$

$$f(x)=q(x) \quad pour \quad x \in E, \quad et \tag{36}$$

$$|f(E)| \geqslant l/2. \tag{37}$$

Appliquons le lemme 9 à la fonction auxiliaire $g(x)=f(x)-\frac{l}{2|I|}x$. Gardons les notations du lemme 9 et définissons sur I la fonction q par $q(x)=h(x)+\frac{l}{2|I|}x$.

La fonction h étant croissante, si x et $x' \geqslant x$ sont deux éléments de I, on aura $q(x')-q(x) \geqslant \frac{l}{2|I|}(x'-x)$.

Le fait que $q(x)=f(x)$ pour $x \in E$ découle de la définition même de E : si $x \in E$, $h(x)=g(x)$.

Il nous reste à montrer que $|f(E)| \geqslant l/2$. Soit $[0, m]$ l'image de I par l'homéomorphisme q, la fonction h étant supérieure à g, on a $m=q(b) \geqslant f(b)=l$. La fonction h étant constante sur chaque composante connexe de Ω, la dérivée de q y est constante égale à $\frac{l}{2|I|}$; la mesure de Lebesgue de $q(\Omega)$ est donc $|q(\Omega)|=\frac{l}{2|I|}|\Omega| \leqslant \frac{l|I|}{2|I|}=\frac{l}{2}$. Alors,

$$|f(E)|=|q(E)|=m-|q(\Omega)| \geqslant l/2.$$

On en déduit le lemme 10 en prolongeant la fonction q à $\mathbb{R}$ tout entier, ce qui ne présente aucune difficulté.

Revenons maintenant à la démonstration de la proposition 8. Appliquons le lemme 10 à la fonction $f(s)=\operatorname{Re} z(s)$; le compact obtenu vérifie bien sûr l'inégalité (33). Il nous reste à définir une fonction $\tilde{z}(s)$, coïncidant avec $z(s)$ pour $s \in E$, et qui soit un paramétrage d'une courbe lipschitzienne : nous devons aussi trouver une fonction $\frac{2}{\gamma}$-lipschitzienne φ telle que pour tout s, $\varphi(\operatorname{Re} \tilde{z}(s))=\operatorname{Im} \tilde{z}(s)$. Il ne faudra pas oublier la condition $|\tilde{z}'|=1$. Nous prendrons $\operatorname{Re} \tilde{z}(s)=q(s)$.

Pour $s \in E$, on doit bien sûr prendre $\operatorname{Im} \tilde{z}(s)=\operatorname{Im} z(s)$, et par conséquent, si $x \in q(E)=f(E)=\operatorname{Re} z(E)$, il faut que $\varphi(x)=\operatorname{Im} z[q^{-1}(x)]$.

Soit $]s_j, s'_j[$ une composante connexe bornée du complémentaire de E dans $\mathbb{R}$. Soient $z_j=x_j+iy_j=z(s_j)$ et $z'_j=x'_j+iy'_j=z(s'_j)$. Nous allons définir φ sur $]x_j, x'_j[$ de façon que $\varphi(x_j)=y_j$, $\varphi(x'_j)=y'_j$, et surtout que la longueur du graphe de φ entre z_j et z'_j soit s'_j-s_j. Soit donc M_j tel que $s'_j-s_j=(x'_j-x_j)\sqrt{1+M_j^2}$.

De l'inégalité (35), on déduit $M_j \leqslant \frac{2}{\gamma}$.

Par ailleurs $|z'_j - z_j| = |z(s'_j) - z(s_j)| \leqslant s'_j - s_j$, ce qui prouve que

$$|y'_i - y_i|^2 \leqslant (s'_j - s_j)^2 - (x'_j - x_j)^2 = \mathrm{M}_j^2 (x'_j - x_j)^2 .$$

Ceci nous permet de définir $x''_j \in [x_j, x'_j]$ tel que $\varphi : [x_j, x'_j] \to \mathbb{R}$ définie par

$$\varphi(x) = y_j + \mathrm{M}_j (x - x_j) \quad \text{pour} \quad x_j \leqslant x \leqslant x''_j$$

et

$$\varphi(x) = \varphi(x''_j) - \mathrm{M}_j (x - x''_j) \quad \text{pour} \quad x''_j \leqslant x \leqslant x'_j$$

vérifie $\varphi(x'_j) = y'_j$ (faire un dessin). On a donc bien défini une fonction φ $\frac{2}{\gamma}$-lipschitzienne sur $[x_j, x'_j]$, qui coïncide avec celle définie pour $x \in q(\mathrm{E})$ aux points x_j et x'_j. On prend maintenant, pour $s \in [s_j, s'_j]$, $\mathrm{Im}\ \tilde{z}(s) = \varphi(q(s))$.

La définition de $\tilde{z}$ sur les composantes connexes non bornées du complémentaire de E ne pose pas de problème. Pour la composante de $-\infty$, par exemple, on pose $\tilde{z}(s) = s - a$ pour $s \leqslant a$, et $\varphi(x) = 0$ pour $x \leqslant 0$.

Il ne nous reste plus maintenant qu'à montrer que la fonction $\tilde{z}(s)$ que nous venons de définir vérifie bien les conditions demandées.

Le fait que $\tilde{z}(s) = z(s)$ pour $s \in \mathrm{E}$, ainsi que l'égalité $\varphi(\mathrm{Re}\ \tilde{z}) = \mathrm{Im}\ \tilde{z}$, découlent des définitions. La fonction φ est $\frac{2}{\gamma}$-lipschitzienne car sa restriction à chaque composante connexe est $\frac{2}{\gamma}$-lipschitzienne $\left(\text{les } \mathrm{M}_j \text{ sont inférieurs à } \frac{2}{\gamma}\right)$, ainsi que sa restriction à $q(\mathrm{E})$ (en effet, sur $q(\mathrm{E})$, $\varphi = \mathrm{Im}\ z \circ q^{-1}$).

Pour finir, on démontre facilement (par exemple en revenant à la définition de la longueur d'arc avec des subdivisions) que la longueur de la courbe $\tilde{\Gamma}$ entre $\tilde{z}(s)$ et $\tilde{z}(s')$ est bien $|s' - s|$, ce qui termine la preuve de la proposition 8.

5. Opérateurs intégraux singuliers sur les courbes régulières

Commençons par rappeler le théorème suivant, dû à R. R. Coifman, A. McIntosh et Y. Meyer, et dont on pourra trouver la démonstration dans [5] et [6] (voir aussi le paragraphe IX).

THÉORÈME 0. — *Soit* $\mathrm{K} : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$ *une fonction indéfiniment dérivable, impaire et homogène de degré* -1. *Pour* $\mathrm{M} \geqslant 0$ *et* $p \in]1, +\infty[$, *il existe une constante* $\mathrm{C} = \mathrm{C}(\mathrm{K}, \mathrm{M}, p)$ *telle que, pour toute courbe* $\Gamma \in \Lambda(\mathrm{M})$ (*définition 6*), *on ait*

$$\|\mathrm{T}^*_\sigma f\|_{\mathrm{L}^p(d\sigma)} \leqslant \mathrm{C} \|f\|_{\mathrm{L}^p(d\sigma)}, \tag{38}$$

en posant $\mathrm{T}^*_\sigma f(z) = \sup_{\varepsilon > 0} \left| \int_{|z-w| \geqslant \varepsilon} \mathrm{K}(z-w) f(w) d\sigma(w) \right|$, *où* σ *est la mesure de longueur d'arc sur* Γ.

Pour être précis, l'opérateur maximal utilisé dans [5] et [6] n'est pas exactement T^*_σ. Cependant, la différence, qui tient seulement au choix des intervalles d'intégration des $\mathrm{T}^\varepsilon_\sigma$, peut être majorée par une fonction maximale (la vérification est laissée au lecteur).

En combinant ce théorème avec la proposition 5, on obtient le lemme :

LEMME 11. — *Avec les notations précédentes, et pour toute mesure* $\mu \in \Delta$, *il existe une constante* $C = C(K, M, p, \mu)$ *telle que*

(39) $$\| T_\mu^* f \|_{L^p(d\sigma)} \leqslant C \| f \|_{L^p(d\mu)} .$$

Nous nous proposons de démontrer le résultat suivant.

THÉORÈME 1. — *Soient* Γ *une courbe régulière,* σ *la mesure de longueur d'arc sur* Γ, μ *une mesure appartenant à* Δ (*cf. définition* 2), *et* K *un noyau vérifiant les hypothèses du théorème 0. Alors, pour tout* $p \in]1 + \infty[$, *l'opérateur maximal* T_μ^* *est borné de* $L^p(d\mu)$ *dans* $L^p(d\sigma)$.

Si l'on applique le théorème 1 avec $\mu = \sigma$ et la proposition 5, on obtient le résultat suivant.

COROLLAIRE. — *Avec les notations et les hypothèses du théorème 1, l'opérateur maximal* T_σ^* *est borné de* $L^p(d\sigma)$ *dans* $L^p(d\mu)$.

Nous utiliserons une variante du lemme classique de Burkholder et Gundy (« inégalités aux bons λ »).

LEMME 12. — *Soient* $u : \mathbb{R} \to [0, +\infty]$ *une fonction mesurable coïncidant, en dehors d'un intervalle compact, avec une fonction de* $L^p(\mathbb{R})$ *et* $v : \mathbb{R} \to [0, +\infty]$ *une fonction de* $L^p(\mathbb{R})$.

Supposons l'existence d'un nombre réel $\nu \in]0, 1[$ *tel que, pour tout* $\varepsilon > 0$, *il existe une constante* $\gamma(\varepsilon) > 0$ *de sorte que, pour tout* $\lambda > 0$, *on ait :*

$$| \{ u(x) > \lambda + \varepsilon\lambda \quad \text{et} \quad v(x) < \gamma(\varepsilon)\lambda \} | \leqslant (1-\nu) | \{ u(x) > \lambda \} | .$$

Alors $u \in L^p(\mathbb{R})$, *et* $\| u \|_p \leqslant [(1+\varepsilon)^{-p} - (1-\nu)]^{-1/p} \gamma(\varepsilon)^{-1} \| v \|_p$.

Montrons d'abord que $u \in L^p(\mathbb{R})$.

Soit $\eta > 0$ un nombre assez petit pour que $2^{-\eta p} > 1 - \nu$. Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, posons $\{ E_k = x \in \mathbb{R} ; u(x) > 2^{k\eta} \}$ et $F_k = \{ x \in \mathbb{R} ; v(x) > \gamma(\varepsilon) 2^{k\eta} \}$.

L'hypothèse faite sur u entraîne que $2^{k\eta p} | E_k |$ tend vers 0 lorsque k tend $-\infty$.

Si $\varepsilon > 0$ est assez petit pour que $1 + \varepsilon < 2^\eta$, on a pour tout k

(40) $$| E_{k+1} | \leqslant (1-\nu) | E_k | + | F_k | .$$

On en déduit que, pour $a \in \mathbb{Z}$ et $k \in \mathbb{N}$,

(41) $$| E_{a+k+1} | \leqslant (1-\nu)^k | E_a | + | F_{k+a} | + (1-\nu) | F_{k+a-1} | + \ldots + (1-\nu)^k | F_a | .$$

Si nous posons $x_k = 2^{k\eta p} | E_k |$, $y_k = 2^{k\eta p} | F_k |$, et $\rho = (1-\nu) 2^{\eta p} < 1$, alors (41) s'écrit

$$2^{-\eta p} x_{k+a+1} \leqslant \rho^k x_a + y_{k+a} + \rho y_{k+a-1} + \ldots + \rho^k y_a .$$

On fixe $m \in \mathbb{Z}$, et on fait tendre k vers $+\infty$ et a vers $-\infty$ en gardant la relation $k + a = m$. Alors $\rho^k x_a$ tend vers 0 plus vite que $x_a = 2^{a\eta p} | E_a |$, et on obtient, à la limite,

$$2^{-\eta p} x_{m+1} \leqslant y_m + \rho y_{m-1} + \ldots + \rho^j y_{m-j} + \ldots$$

Nous sommes arrivés à majorer x_m par la convolution de $y_m \in l^1(\mathbb{Z})$ par la suite $\rho^n (n \geqslant 0)$, avec $\rho < 1$. On en déduit bien que $x_m \in l^1(\mathbb{Z})$, c. a. d. que $u \in L^p(\mathbb{R})$ .On en déduit par la même occasion une majoration de la norme de la suite x_m dans $l^1(\mathbb{Z})$, ce qui donne une bonne majoration de $\| u \|_p$ (les détails sont laissés au lecteur, mais ils ne présentent aucune difficulté).

Nous allons maintenant montrer qu'avec un bon choix des fonctions auxiliaires u et v, les hypothèses du lemme 12 sont satisfaites.

LEMME 13. — *Avec les notations du théorème 1, il existe* $\nu \in]0, 1]$ *et, pour tout* $r \in]1, +\infty[$ *et tout* $\varepsilon > 0$ *une constante* $\gamma = \gamma(\varepsilon, r) > 0$ *telle que, pour toute fonction* $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *à support compact on ait, en posant* $u(s) = (T^*_\mu f)(z(s))$ *pour* $-\infty < s < +\infty$ *et*

$$v(s) = [(M_\mu |f|^r)(z(s))]^{1/r} + M_\mu f(z(s)),$$

l'inégalité

$$| \{ s \in \mathbb{R} ; u(s) > \lambda + \varepsilon\lambda \quad \text{et} \quad v(s) \leqslant \gamma\lambda \} | \leqslant (1-\nu) | \{ s \in \mathbb{R} ; u(s) > \lambda \} | . \tag{42}$$

Dès que nous aurons montré ce lemme, nous pourrons en déduire le théorème : étant donné $p \in]1, +\infty[$, on choisit $r = \sqrt{p}$.

Pour que l'on puisse appliquer le lemme 12 et en déduire $\| T^*_\mu f \|_p \leqslant C \| v \|_p \leqslant C' \| f \|_p$ grâce à la proposition 3, il ne nous reste plus qu'à montrer que $u(s) = (T^*_\mu f)(z(s))$ coïncide en dehors d'un compact avec une fonction de $L^p(\mathbb{R})$. Or, si le support de f est contenu dans $\{ z ; | z | \leqslant R \}$ et si $| z(s) | \geqslant 2R$ (ce qui se produit forcément si s est assez grand), on a $(T^*_\mu f)(z(s)) \leqslant C(M_\mu f)(z(s))$ qui est dans $L^p(\mathbb{R})$, toujours à cause de la proposition 3. Il ne nous reste donc plus qu'à établir le lemme 13.

La fonction $u(s)$ étant semi-continue inférieurement et nulle à l'infini, l'ensemble $\Omega = \{ s ; u(s) > \lambda \}$ est un ouvert borné, réunion d'intervalles deux à deux disjoints $]a_j, b_j[$.

Nous voulons montrer (42) intervalle par intervalle. Pour cela, on désigne par E_j l'ensemble des $s \in]a_j, b_j[$ tels que $u(s) > \lambda + \varepsilon\lambda$; on peut se restreindre au cas où il existe un $\xi \in]a_j, b_j[$ tel que $v(\xi) \leqslant \gamma\lambda$, et il suffit de montrer que dans un tel cas, $| E_j | \leqslant (1-\nu)(b_j - a_j)$.

On pose $l_j = b_j - a_j$ et on appelle $\chi_j : \mathbb{C} \to \{ 0, 1 \}$ la fonction indicatrice de

$$\{ z ; | z - z(a_j) | \leqslant 2 l_j \}.$$

On écrit, comme d'habitude, $f = f_1 + f_2$, où $f_1(z) = f(z)\chi_j(z)$. On a alors

$$T^*_\mu f_2(z) \leqslant T^*_\mu f(z(a_j)) + C M_\mu f(z') \quad \text{pour tout couple } (z, z') \tag{43}$$

d'éléments de $\mathbb{C}$ vérifiant $| z - z(a_j) | \leqslant l_j$ et $| z' - z(a_j) | \leqslant l_j$ (la démonstration, analogue à celle du lemme 6, est laissée au lecteur).

Comme a_j n'est pas dans Ω, on a $(T^*_\mu f)(z(a_j)) \leqslant \lambda$ et en prenant $z' = z(\xi)$, on obtient

$$(T^*_\mu f_2)(z(s)) \leqslant \lambda + C\gamma\lambda \tag{44}$$

Il reste encore à majorer $T^*_\mu f_1$. Nous appliquons à notre courbe régulière la proposition 7. Nous obtenons un compact $K_j \subset [a_j, b_j]$ tel que $| K_j | > \nu l_j$ et une courbe $\Gamma_j \in \Lambda(M)$ telle que $z(s)=z_j(s)$ pour tout $s \in K_j$, où z_j est une représentation paramétrique de Γ_j par la longueur d'arc et M une constante qui ne dépend que de Γ.

L'application du lemme 11 à Γ_j nous donne

$$\int_{-\infty}^{\infty} [(T_\mu^* f_1)(z_j(s))]^r ds \leqslant C_r \int |f_1|^r d\mu .$$

Le fait que $\mu \in \Delta$ nous donne, si z' est tel que $|z'-z(a_j)| \leqslant l_j$,

$$\int |f_1|^r d\mu \leqslant C' l_j (M_\mu |f|^r)(z'),$$

et en choisissant $z'=z(\xi_j)$, on obtient

$$\int_{K_j} [T_\mu^* f_1)(z(s))]^r ds \leqslant C_r'' l_j \gamma^r \lambda^r . \tag{45}$$

Choisissons maintenant $\gamma=\gamma(\varepsilon)$ assez petit pour que $C\gamma \leqslant \varepsilon/2$ dans l'inégalité (44) et $C_r''\gamma^r \leqslant \frac{\nu}{2}\left(\frac{\varepsilon}{r}\right)^r$. Soit alors $R_j \subset K_j$ l'ensemble des $s \in K_j$ tels que $(T_\mu^* f_1)(z(s)) \geqslant \frac{\lambda\varepsilon}{2}$. Alors (45) entraîne $|R_j| \leqslant C_r'' l_j \gamma^r \lambda^r \frac{2^r}{\lambda^r \varepsilon^r} \leqslant \frac{\nu}{3} l_j$. Or, pour tout $s \in K_j/R_j$, on a $(T_\mu^* f_1)(z(s)) \leqslant \frac{\lambda\varepsilon}{2}$ *et* $(T_\mu^* f_2)(z(s)) \leqslant \lambda + \frac{\lambda\varepsilon}{2}$, donc $(T_\mu^* f)(z(s)) \leqslant \lambda + \varepsilon\lambda$. Le lemme 13 est démontré (avec $\frac{\nu}{2}$ au lieu de ν) car $E_j^c \subset K_j \backslash R_j$, donc $|E_j| \geqslant \left(1-\frac{\nu}{2}\right) l_j$ pour tout j. On en déduit le théorème 1.

6. Caractérisation des courbes rectifiables Γ du plan complexe telles que l'intégrale de Cauchy définisse un opérateur borné sur $L^2(\Gamma)$

Soit Γ une courbe régulière paramétrée par la longueur d'arc, notée s. Pour toute fonction $f \in L^2(\mathbb{R})$, on pose pour tout t réel,

$$T_* f(t) = \sup_{\varepsilon > 0} \left| \int_{|z(t)-z(s)| \geqslant \varepsilon} [z(t)-z(s)]^{-1} f(s) ds \right| . \tag{46}$$

THÉORÈME 2. — *Pour toute courbe régulière* Γ, *l'opérateur sous-linéaire* T_* *défini par* (46) *est borné sur* $L^2(\mathbb{R})$.

Réciproquement, soit Γ *une courbe rectifiable du plan complexe. Supposons qu'il existe un opérateur linéaire continu* $T : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ *tel que, pour toute fonction continue à support compact* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *et tout réel* t *tel que* $z(t)$ *ne soit pas dans l'image par* z *du support de* f, *on ait* $Tf(t) = \int (z(t)-z(s))^{-1} f(s) ds$. *Alors* Γ *est une courbe régulière.*

La partie directe est une traduction du théorème 1 lorsque $K(z) = \frac{1}{z}$; il suffit donc de prouver la réciproque.

Soient donc Γ vérifiant les hypothèses de la réciproque, et $s \to z(s)$ un paramétrage de Γ par la longueur d'arc.

LEMME 14. — *On a* $\lim_{s \to +\infty} |z(s)| = +\infty$.

Sinon, on peut trouver une suite s_k tendant vers $+\infty$ telle que $\lim_{k \to +\infty} z(s_k)$ soit un complexe α. Alors, pour tout $l > 0$, la longueur totale de la portion de Γ située dans le disque de centre α et de rayon l est infinie. On choisit un point $b \in \mathbb{R}$ tel que $z(b) \neq \alpha$, et on pose $l = \frac{1}{4} |z(b) - \alpha|$.

On choisit pour fonction f la fonction dont le graphe est un triangle isocèle de base $[b-l, b+l]$ et de hauteur 1. Alors, si t est tel que $|z(t) - \alpha| \leqslant l$, on a

$$|Tf(t)| = \left| \int \frac{f(s)}{z(s) - z(t)} ds \right| \geqslant \frac{1}{10}, \quad \text{et } Tf \text{ ne peut être dans } L^2(\mathbb{R}),$$

car cette inégalité est vraie pour t dans un ensemble de mesure infinie.

Montrons maintenant que Γ est régulière. Soient $r > 0$, $z_0 \in \mathbb{C}$, et E l'ensemble des $s \in \mathbb{R}$ tels que $|z(s) - z_0| \leqslant r$. Supposons que cet ensemble n'est pas vide. Alors on peut trouver $a \in \mathbb{R}$ tel que $|z_0 - z(a)| = 4r$, car la fonction $s \mapsto |z_0 - z(s)|$ est continue et tend vers $+\infty$. On choisit encore pour f une fonction continue à support dans $[a-r, a+r]$ dont le graphe est un triangle isocèle de base $[a-r, a+r]$ et de hauteur 1. Pour tout $t \in E$, on a

$$\left| \int \frac{f(s) ds}{z(t) - z(s)} \right| \geqslant \frac{1}{10}, \quad \text{donc } \| Tf \|_2 \geqslant \frac{|E|^{1/2}}{10}, \quad \text{alors que } \| f \|_2 = \left(\frac{2}{3} r \right)^{1/2}.$$

Le théorème est démontré.

Notons que le même théorème est valable en remplaçant $L^2(\Gamma)$ par $L^p(\Gamma)$, pour $1 < p < +\infty$.

Remarque. — Si Γ est régulière, et si $f \in L^2(\Gamma)$, la limite

$$Tf(t) = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|z(t) - z(s)| \geqslant \varepsilon} [z(t) - z(s)]^{-1} f(s) ds$$

existe presque partout. Le noyau de Cauchy définit donc un opérateur de valeur principale.

Vérifions d'abord ce résultat lorsque $f(s)$ est le produit par $z'(s)$ d'une fonction de classe C^1 à support compact. Fixons un $t \in \mathbb{R}$. Soient $t = t_0, t_1, \ldots, t_{n-1}$ n points distincts de $\mathbb{R}$ tels que $z(t_j) = z(t)$.

Alors on a $n \leqslant C/2$ car toute boule de centre $z(t)$ et de rayon r plus petit que le minimum des $\frac{1}{2} |t_j - t_k|$ (pour $j \neq k$) contient une longueur de Γ supérieure à $2nr$. Soient donc $t = t_0, t_1, \ldots, t_{n-1}$ tous les points de $\mathbb{R}$ tels que $z(t_j) = z(t)$. Supposons que z est dérivable en chacun de ces points, ce qui est vrai pour presque tout t. Soit $\varepsilon_0 > 0$ tel que pour chaque j

et tout s tel que $|s-t_j| \leqslant \varepsilon_0$ on ait $\frac{9}{10}|s-t_j| \leqslant |z(t)-z(s)| \leqslant |s-t_j|$. Si d est la distance de $z(t)$ à l'ensemble compact $\{z(s) ; |z(s)-z(t)| \leqslant 1$ et $|s-t_j| \geqslant \varepsilon_0$ pour tout $j\}$, alors on a $d>0$ et pour ε inférieur à ε_0 et à d, l'ensemble $\{s ; |z(t)-z(s)| \leqslant \varepsilon\}$ est la réunion de n segments contenant chacun un t_i, et de longueurs équivalentes à 2ε. On en déduit qu'au point t, $\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|z(t)-z(s)| \geqslant \varepsilon} [z(t)-z(s)]^{-1} f(s) ds$ existe (intégrer par parties).

Soit maintenant f quelconque dans $L^2(\mathbb{R})$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on pose

$$\omega_f(t) = \limsup_{\substack{0<\varepsilon<\varepsilon' \\ \varepsilon' \to 0}} \left| \int_{\varepsilon \leqslant |z(t)-z(s)| \leqslant \varepsilon'} [z(t)-z(s)]^{-1} f(s) ds \right|.$$

Écrivons $f = g + h$, où $g(s)/z'(s)$ est dans $C_c^1(\mathbb{R})$ et $\|h\|_{L^2(\mathbb{R})} \leqslant \delta$. Alors $\omega_f(t) \leqslant \omega_g(t) + \omega_h(t) \leqslant \omega_h(t)$ presque partout, et $\omega_h(t) \leqslant 2T_* h(t)$, de sorte que $\|\omega_f\|_{L^2(\mathbb{R})} \leqslant C^{te}\delta$ (à cause de la continuité de l'opérateur maximal) est aussi petit qu'on veut. Donc $\omega_f(t) = 0$ presque partout, et on peut définir $Tf(t)$ presque partout.

7. Espaces de Hardy généralisés

Nous nous proposons de donner du théorème 2 une interprétation géométrique en termes d'espaces de Hardy.

Soit Γ une courbe de Jordan rectifiable orientée. Nous supposerons pour simplifier que Γ est une courbe fermée de longueur 1 (les résultats énoncés plus bas s'étendent au cas où Γ n'est pas bornée).

On notera $z(s)$ $(0 \leqslant s \leqslant 1)$ une représentation paramétrique de Γ par la longueur d'arc. Pour $p \in]1, +\infty[$, on pose $L^p(\Gamma) = L^p(\Gamma, ds)$, que l'on identifiera à $L^p([0, 1])$.

Soit D_1 (resp. D_2) la composante connexe bornée (resp. non bornée) de $\mathbb{C} \setminus \Gamma$.

Suivant Keldysh, Lavrentiev et Smirnov (voir [8] ou [10]), on désignera par $H^p(D_1) \subset L^p(\Gamma)$ la fermeture dans $L^p(\Gamma)$ de l'ensemble des polynômes en z; on notera $\mathscr{H}^p(D_1)$ l'espace, éventuellement plus grand, formé des $f \in L^p(\Gamma)$ telles que $\int_\Gamma z^k f(z) dz = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Si $f \in \mathscr{H}^p(D_1)$, alors la fonction $F : D_1 \to \mathbb{C}$ définie par

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} = \frac{1}{2\pi i} \int_{[0,1]} \frac{f[z(s)] z'(s)}{z(s) - z}$$

est holomorphe sur D_1, et f est la trace de F sur Γ au sens que pour presque tout $z_0 \in \Gamma$, $f(z_0)$ est la limite non tangentielle de $F(z)$ quand z tend vers z_0. On se reportera à ce sujet à [8], théorème 10.4, p. 170.

On peut aussi se placer sur la sphère de Riemann et définir $H^p(D_1)$ comme l'espace fermé de $L^p(\Gamma)$ engendré par les fractions rationnelles dont les pôles sont dans D_2. En appelant q l'exposant conjugué de p, $\mathscr{H}^p(D_1)$ est l'espace des $f \in L^p(\Gamma)$ telles que

$$\int_\Gamma f(z)g(z)dz = 0 \qquad \text{pour} \qquad g \in H^q(D_1).$$

Enfin on définit pareillement $H^p(D_2)$ comme la fermeture de l'ensemble des polynômes sans coefficient constant en $\frac{1}{z}$ (si on suppose que $0 \in D_1$) et $\mathscr{H}^p(D_2)$ comme l'espace fermé de $L^p(\Gamma)$ constitué des fonctions f telles que $\int_\Gamma f(z)\frac{1}{z^k}dz=0$ pour k entier $\geqslant -1$ (on a ajouté -1 pour supprimer les constantes dans $\mathscr{H}^p(D_2)$).

Alors, toute fraction rationnelle $r(z)$ dont les pôles n'appartiennent pas à Γ s'écrit de manière unique

$$(47) \qquad r(z)=r_1(z)+r_2(z), \quad \text{avec} \quad r_1 \in H^p(D_1) \quad \text{et} \quad r_2 \in H^p(D_2).$$

Nous désignerons par $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ les opérateurs linéaires définis par $\mathscr{C}_1(r)=r_1$ et $\mathscr{C}_2(r)=r_2$. Nous voulons savoir si $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ se prolongent par continuité en deux opérateurs envoyant $L^p(\Gamma)$ dans $H^p(D_1)$ et $H^p(D_2)$.

THÉORÈME 3. — *Gardons les notations précédentes. Pour une courbe de Jordan rectifiable orientée* Γ, *les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(48) Γ *est régulière ;*

(49) *Il existe une constante* $C \geqslant 1$ *telle que, pour toute fonction rationnelle r dont les pôles n'appartiennent pas à* Γ, *on ait*

$$\| r_1 \|_{L^2(\Gamma)} \leqslant C \| r \|_{L^2(\Gamma)}, \quad \textit{où } r_1 \textit{ est définie par } (47);$$

$$(50) \qquad L^2(\Gamma)=H^2(D_1)+H^2(D_2) \quad (\textit{somme directe});$$

$$(51) \qquad L^2(\Gamma)=\mathscr{H}^2(D_1)+\mathscr{H}^2(D_2);$$

(52) *Pour tout* $p \in]1, +\infty[$, $L^2(\Gamma)=H^p(D_1)+H^p(D_2)=\mathscr{H}^p(D_1)+\mathscr{H}^p(D_2)$.

REMARQUE. — La condition (52) montre que les domaines limités par une courbe de Jordan régulière sont de Smirnov.

Notons que la décomposition (47) n'est pas sans rapport avec l'opérateur du paragraphe précédent :

$$(53) \qquad r_1(z_0)-r_2(z_0)=\frac{1}{\pi i}\text{ v. p.}\int_\Gamma \frac{r(z)dz}{z-z_0}=\frac{1}{\pi i}\text{ v. p.}\int_{[0,1]}\frac{r(z(s))z'(s)ds}{z(s)-z_0}$$

pour presque tout $z_0 \in \Gamma$. Si nous identifions Γ avec l'intervalle $[0, 1]$, cela signifie que $(\mathscr{C}_1-\mathscr{C}_2)(r)=\frac{i}{\pi}T(\tilde{r})$, où $\tilde{r}(s)=r(s)z'(s)$, et où T est l'opérateur de valeurs principales défini au paragraphe précédent.

Si Γ est régulière, le théorème 2 nous permet de prolonger $\mathscr{C}_1-\mathscr{C}_2$ (donc aussi $\mathscr{C}_1$ car $\mathscr{C}_1+\mathscr{C}_2=Id$) en un opérateur continu sur $L^p(\Gamma)$. Soit $\mathscr{E}$ l'ensemble des fonctions rationnelles dont les pôles sont hors de Γ, le théorème de Hartogs-Rosenthal (voir par exemple [9]) et le fait que Γ est de mesure planaire nulle font que $\mathscr{E}$ est dense dans $L^p(\Gamma)$, ce qui d'ailleurs montre que $\mathscr{H}^p(D_1)\cap\mathscr{H}^p(D_2)=\{0\}$. L'image de $L^p(\Gamma)$ par l'opérateur prolongé $\mathscr{C}_1$ sera donc contenue dans $H^p(D_1)$. On peut aussi prolonger $\mathscr{C}_2=Id-\mathscr{C}_1$ en un opérateur continu : $L^p(\Gamma)\to H^p(D_2)$. De $\mathscr{C}_1+\mathscr{C}_2=Id$, on déduit que $L^p(\Gamma)$ est la somme (topologique) des $H^p(D_i)$; cette somme est directe car $H^p(D_1)\cap H^p(D_2)\subset\mathscr{H}^p(D_1)\cap\mathscr{H}^p(D_2)=\{0\}$. Le fait que $L^p(\Gamma)=H^p(D_1)+H^p(D_2)$ implique les égalités $\mathscr{H}^p(D_i)=H^p(D_i)$.

Nous avons montré que (48) entraîne (52). Il est clair que (52) implique (50), qui implique (51), dont on déduit (49). La réciproque du théorème 2, et le fait que les $\mathscr{C}_i$ sont donnés par la formule (53), font que (49) entraîne (48), et que le théorème est vrai.

Soit Γ une courbe de Jordan régulière. Soit D_1 l'une des composantes connexes du complémentaire de Γ dans $\mathbb{C}$. Nous noterons C_{D_1} l'ensemble des mesures de Radon positives μ sur $\overline{D}_1$ pour lesquelles il existe une constante $C\geqslant 0$ telle que pour tout $r>0$ et tout disque D de rayon r rencontrant Γ on ait $\mu(D\cap\overline{D}_1)\leqslant Cr$. Lorsque Γ est la droite réelle, C_{D_1} est l'ensemble des mesures de Carleson.

PROPOSITION 9. — *Soient Γ une courbe de Jordan régulière, D_1 une des composantes connexes de $\mathbb{C}\setminus\Gamma$, $\mu\in C_{D_1}$ et $1<p<+\infty$. Alors il existe $C\geqslant 0$ tel que, pour $f\in H^p(D_1)$, on ait $\|f\|_{L^p(d\mu)}\leqslant C\|f\|_{H^p(D_1)}$, en notant encore f le prolongement de f à D_1.*

Notons que les valeurs de f dans D_1 sont obtenues à partir de celles de f sur Γ en appliquant l'opérateur de Cauchy : si T est la limite de T_ε définis au paragraphe 3 avec $K(z)=\dfrac{1}{z}$ et $d\sigma$ la mesure de longueur d'arc sur Γ, on a $f(z)=\dfrac{i}{2\pi}T\tilde{f}(z)$, où $\tilde{f}$ est le produit de f par la fonction unimodulaire $\dfrac{dz}{ds}$. Ainsi, lorsque $\mu\in\Delta$, la proposition 9 est une simple traduction du corollaire au théorème 1.

Dans le cas général où $\mu\in C_{D_1}$, il s'agit en fait de démontrer la propriété (16) de la proposition 5. On peut encore appliquer le lemme 5, qui est toujours valable pour $\mu\in C_{D_1}$. L'inégalité

$$T_\sigma^* f(z)\leqslant CM_\sigma(T_\sigma^*\tilde{f})(z)+CM_\sigma\tilde{f}(z), \tag{20}$$

valable pour tout $z\in\overline{D}_1$, et le fait que M_σ définit un opérateur borné de $L^p(d\sigma)$ dans $L^p(d\mu)$ à cause de la remarque du paragraphe 2 (la mesure μ vérifie bien les inégalités (15)) permettent de conclure car T_σ^* est borné sur $L^p(d\sigma)$.

8. Une version matricielle du théorème 1

THÉORÈME 4. — *Soit $z_j, j\in\mathbb{Z}$, une suite de nombres complexes vérifiant les conditions suivantes*

(54) *Il existe $C>0$ tel que pour tout $k\in\mathbb{Z}$, $|z_{k+1}-z_k|\leqslant C$.*

(55) *Il existe* $M>0$ *tel que, pour tout* $r>0$ *et tout* $\alpha\in\mathbb{C}$, *le cardinal de l'ensemble des* $k\in\mathbb{Z}$ *tels que* $|z_k-\alpha|\leqslant r$ *ne dépasse pas* $Mr+1$.

Alors, la matrice $\mathcal{M}=(m_{j,k})_{(j,k)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}}$ *définie par* $m_{j,j}=0$ *et* $m_{j,k}=\dfrac{1}{z_j-z_k}$ *si* $j\neq k$ *définit un opérateur borné sur* $l^p(\mathbb{Z})$, *pour* $1<p<+\infty$.

Notons que la condition (55) implique que pour que $j\neq k$, $|z_j-z_k|\geqslant\dfrac{2}{M}$.

On appelle Γ la courbe rectifiable obtenue en joignant par un segment chaque z_k à z_{k+1}. On vérifie sans peine que Γ est régulière.

Soit $x_k\in l^p(\mathbb{Z})$. On lui associe $f\in L^p(\Gamma)$ en posant $f[tz_{k+1}+(1-t)z_k]=x_k$ pour tout k et $0\leqslant t<1$. Comme la longueur du segment $[z_k, z_{k+1}]$ est comprise entre $\dfrac{2}{M}$ et C, les normes $\|x_k\|_p$ et $\|f\|_p$ sont équivalentes.

On considère l'opérateur tronqué T défini par le noyau $\dfrac{1}{z-w}\mathbb{1}_{\{|z-w|>R\}}$, où $R>0$ est choisi assez grand.

Le théorème 1 nous dit que T est continu sur $L^p(\Gamma)$. Par ailleurs, on montre aisément que si $z=tz_{j+1}+(1-t)z_j$, avec $0\leqslant t<1$,

$$\left|Tf(z)-\sum_{k;|z-z_k|>R}\frac{x_k}{z_j-z_k}\right|\leqslant C^{te}\int_{|z(s)-z|\geqslant R}\frac{|f(z(s))|\,ds}{[z-z(s)]^2}.$$

On a aussi $\displaystyle\sum_{k;|z-z_k|\leqslant R}\frac{1}{z_j-z_k}x_k\leqslant C^{te}\int_{|z(s)-z|\leqslant R+C}|f(z(s))|\,ds$. Finalement,

$$|Tf(z)-\mathcal{M}(x_k)(j)|\leqslant E(z),\qquad \text{avec}\qquad E(z)\in L^p(\Gamma)$$

grâce à la proposition 3. On en déduit que $\mathcal{M}(x_k)\in l^p(\mathbb{Z})$.

9. Une preuve du théorème de Coifman-McIntosh-Meyer à partir du théorème de Calderón (1977)

Nous nous proposons de démontrer le théorème 0 à partir du théorème de Calderón (1977), en utilisant des méthodes semblables à celles des paragraphes 3, 4 et 5.

Commençons par quelques rappels sur les opérateurs de Calderón-Zygmund. Soient Δ la diagonale de $\mathbb{R}^2$, et K une fonction continue : $\mathbb{R}^2\setminus\Delta\to\mathbb{C}$ ayant les propriétés suivantes :

(56) $$|K(x,y)|\leqslant\frac{C}{|x-y|}\quad\text{pour tout couple }(x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\Delta,$$

et

(57) $$\left|\frac{\partial K}{\partial x}(x,y)\right|+\left|\frac{\partial K}{\partial y}(x,y)\right|\leqslant\frac{C}{(x-y)^2}\quad\text{pour tout }(x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\Delta$$

(les dérivées sont prises au sens des distributions, et $C\geqslant 0$ est une constante finie).

Pour $\varepsilon>0$, on définit le noyau tronqué $K^\varepsilon(x,y)=K(x,y)\mathbb{1}_{\{|x-y|\geqslant\varepsilon\}}(x,y)$ et l'opérateur T^ε

tel que $T^\varepsilon f(x) = \int K^\varepsilon(x, y) f(y) dy$ pour $f \in L^2(\mathbb{R})$. On pose $T^* f(x) = \sup_{\varepsilon > 0} | T^\varepsilon f(x) |$ pour $f \in L^2(\mathbb{R})$ et $x \in \mathbb{R}$.

(Les définitions du noyau K et de T^* ne sont donc plus celles des premiers paragraphes).

Nous dirons que K est un noyau de Calderón-Zygmund (bien que ce ne soit pas tout-à-fait la définition habituelle) lorsque, en plus des propriétés (56) et (57), on peut prolonger les T^ε en des opérateurs continus sur $L^2(\mathbb{R})$, dont les normes sont uniformément majorées. La norme de Calderón-Zygmund de K, notée $\| K \|_{C.Z.}$, sera la borne supérieure des normes des T^ε, et de la constante C dans (56) et (57).

Nous voulons montrer le théorème suivant :

THÉORÈME 5. — *Soit $z(s)$ le paramétrage par la longueur d'arc d'une courbe $\Gamma \in \Lambda(M)$ pour un $M > 0$. Soit $K(x, y) = \frac{1}{z(x) - z(y)}$ le noyau de Cauchy associé à Γ. Alors K est un noyau de Calderón-Zygmund, et $\| K \|_{C.Z} \leqslant CM^N$, où C et N sont deux constantes.*

Bien sûr, ce théorème est loin d'être aussi fort que celui montré par Coifman, McIntosh et Meyer : il faudrait pour cela que N soit égal à 4 ! Il permet cependant de démontrer le théorème 0 : la démonstration dans [5] ne fait pas intervenir le fait que $N = 4$ et permet donc de passer du noyau de Cauchy à un noyau plus général.

Notre démonstration sera basée sur le lemme de Burkholder et Gundy, et sur une décomposition des graphes de fonctions lipschitziennes semblable à celle du paragraphe 4. La proposition suivante, ainsi d'ailleurs que l'idée même d'obtenir une estimation polynomiale en M est due à J. L. Journé.

PROPOSITION 10. — *Soient $M > 0$, $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction M-lipschitzienne, $z(s)$ une représentation paramétrique de son graphe Γ par la longueur d'arc, et I un intervalle compact de valeurs de s.*

Alors, il existe une partie compacte $E \subset I$ et une courbe $\Gamma_0 \in \Lambda\left(\frac{9}{10} M\right)$ paramétrée par $z_0(s)$ telles que

$$| E | \geqslant \frac{1}{3} | I | \tag{58}$$

$$z_0(s) = z_1(s) \quad \textit{pour tout } s \in E \tag{59}$$

$$\frac{4}{5} \leqslant | z_0'(s) | \leqslant 1 \quad \textit{presque-partout}. \tag{60}$$

Nous nous contenterons de définir z_0 sur l'intervalle I, il serait ensuite facile de l'étendre à $\mathbb{R}$.

Soit $[a, b]$ l'intervalle de $\mathbb{R}$ tel que $z(I)$ soit la portion du graphe de φ comprise entre les points $(a, \varphi(a))$ et $(b, \varphi(b))$.

Nous supposerons que $| \{ s \in I ; \varphi' [\operatorname{Re} z(s)] \geqslant 0 \} | \geqslant \frac{| I |}{2}$; si ça n'était pas le cas, nous ferions notre construction avec la fonction $-\varphi$.

Appliquons le « rising sun lemma » (lemme 9) à la fonction $g(x) = \varphi(x) + \frac{4M}{5} x$.

Nous obtenons une fonction h et un ensemble, que nous appellerons E′, où h coïncide avec g.

Le fait que h est croissante et coïncide avec g sur E′, hors duquel elle est localement constante, montre que $0 \leqslant h'(x) \leqslant \frac{9}{5}\mathrm{M}$ presque partout.

On pose $\psi(x) = h(x) - \frac{4\mathrm{M}}{5}x$, de sorte que ψ coïncide avec φ sur E′, et $-\frac{4\mathrm{M}}{5} \leqslant \psi'(x) \leqslant \mathrm{M}$ presque partout. Il ne nous reste plus qu'à paramétrer le graphe de ψ.

Soient u la fonction réciproque de $s \mapsto \operatorname{Re} z(s)$ et $\mathrm{E} = u(\mathrm{E}')$. Pour tout $s \in \mathrm{E}$, posons $z_0(s) = z(s)$. Soient $]a_k, b_k[$ une composante connexe ouverte de $[a, b] \backslash \mathrm{E}'$, et $]s_k, t_k[$ son image par u ; pour $s \in]s_k, t_k[$, on pose $z_0(s) = z(s_k) + \frac{s - s_k}{t_k - s_k}[z(t_k) - z(s_k)]$.

Enfin, si $b \notin \mathrm{E}'$, et si $]t, u(b)]$ est la composante connexe de $u(b)$ dans $\mathrm{I} \backslash \mathrm{E}$, on pose $z_0(s) = z(t) + s - t$ pour $s > t$.

La fonction z_0 est bien un paramétrage du graphe de ψ, sauf peut-être en ce qui concerne la dernière composante connexe de $\mathrm{I} \backslash \mathrm{E}$; on en déduit que Γ_0 est dans $\Lambda(\mathrm{M}')$ avec

$$\mathrm{M}' = \operatorname{tg}\left[1/2 \operatorname{Arc\,tg} \mathrm{M} + 1/2 \operatorname{Arc\,tg} \frac{4\mathrm{M}}{5}\right], \quad \text{donc} \quad \mathrm{M}' \leqslant \frac{1}{2}\left(\mathrm{M} + \frac{4}{5}\mathrm{M}\right) = \frac{9}{10}\mathrm{M}$$

car la fonction tangente est convexe.

Pour tout point s de E où z est dérivable, et qui est point d'accumulation à gauche (resp. à droite) de E, la dérivée à gauche (resp. à droite) de z_0 est $z'(s)$. Il nous suffit donc de vérifier l'inégalité (60) sur chaque composante connexe ouverte de $\mathrm{I} \backslash \mathrm{E}$. Or, sur la composante $]s_k, t_k[$, on a $z_0'(s) = \frac{z(t_k) - z(s_k)}{t_k - s_k} = \frac{b_k - a_k}{t_k - s_k}\left(1 - \frac{4i\mathrm{M}}{5}\right)$ pour tout s, et (60) découle de $|z(t_k) - z(s_k)| \leqslant t_k - s_k$, et surtout de

$$|z_0'(s)| = \left(1 + \frac{16}{25}\mathrm{M}^2\right)^{1/2} \frac{b_k - a_k}{t_k - s_k} \geqslant \left[\frac{1 + \frac{16}{25}\mathrm{M}^2}{1 + \mathrm{M}^2}\right]^{1/2} \geqslant \frac{4}{5}.$$

Il nous reste à montrer que $|\mathrm{E}| \geqslant \frac{1}{3}|\mathrm{I}|$, ce qui découlera du lemme suivant.

Lemme 15. — *On a* $|(\mathrm{I} \backslash \mathrm{E}) \cap \{s ; \varphi'[\operatorname{Re} z(s)] \geqslant 0\}| \leqslant \frac{1}{5}|\mathrm{I} \backslash \mathrm{E}|$.

Si le lemme est vrai, et si l'on pose $x = \frac{|\mathrm{E}|}{|\mathrm{I}|}$, on a

$$\frac{|\mathrm{I}|}{2} \leqslant |\{s ; \varphi'[\operatorname{Re} z(s)] \geqslant 0\}| \leqslant |\mathrm{E}| + \frac{1}{5}|\mathrm{I} \backslash \mathrm{E}|, \quad \text{c. à. d.} \quad \frac{1}{2} \leqslant x + \frac{1}{5}(1 - x),$$

d'où l'on déduit $x \geqslant \frac{1}{3}$.

Montrons maintenant le lemme composante connexe par composante connexe. Soit $]s_k, t_k[$ une composante ouverte de $I\setminus E$; on a $\dfrac{\varphi(b_k)-\varphi(a_k)}{b_k-a_k} = -\dfrac{4}{5}M$, et comme φ' reste supérieure à $-M$, la dérivée de $\operatorname{Im} z(s)$ est supérieure à $\dfrac{-M}{(1+M^2)^{1/2}}$, de sorte que

$$|\,]s_k, t_k[\cap\{s\,;\varphi'[\operatorname{Re} z(s)]<0\}\,| \geqslant \frac{4}{5}(1+M^2)^{1/2}(b_k-a_k).$$

Comme on a aussi $t_k-s_k \leqslant (1+M^2)^{1/2}(b_k-a_k)$, notre inégalité est vraie pour la composante connexe $]s_k, t_k[$.

Si b n'est pas dans E' et si $]t, u(b)]$ est la composante connexe de $u(b)$ dans $I\setminus E$, on a encore $\dfrac{\varphi(b)-\varphi(\operatorname{Re} z(t))}{b-\operatorname{Re} z(t)} < -\dfrac{4}{5}M$, d'où l'on déduit

$$|\,]t, u(b)]\cap\{s\,;\varphi'[\operatorname{Re} z(s)]\geqslant 0\}\,| \leqslant \frac{1}{5}(u(b)-t).$$

Le lemme et la proposition sont donc démontrés.

Revenons maintenant à notre théorème. Nous utiliserons le lemme suivant, qui est en fait un théorème de A. Calderón, M. Cotlar et A. Zygmund (voir p. ex. [3]).

Lemme 16. — *Pour tout noyau de Calderón-Zygmund* K, *l'opérateur maximal associé* T^* *est borné sur* $L^p(\mathbb{R})$, *et envoie continûment* $L^1(\mathbb{R})$ *dans* $L^1_{\text{faible}}(\mathbb{R})$. *En particulier, il existe* $C_0>0$ *telle que*

$$\| T^* \|_{L^1(\mathbb{R}), L^1_{\text{faible}}(\mathbb{R})} \leqslant C_0 \| K \|_{\text{C.Z.}}\,.$$

Nous dirons qu'un noyau $K : \mathbb{R}^2\setminus\Delta \to \mathbb{C}$ « vérifie la condition H » s'il existe un $\nu\in]0,1]$ et une constante $C_1 \geqslant 0$ tels que, pour tout intervalle I, il existe une partie compacte $E\subset I$ et un noyau $K_I : \mathbb{R}^2\setminus\Delta \to \mathbb{C}$ de Calderón-Zygmund ayant les propriétés suivantes :

(61) $$|E| \geqslant \nu |I|,$$

(62) pour tout $x\in E$, toute composante connexe I_k de $I\setminus E$, et tout $y\in I_k$, on a

$$|K_I(x,y)-K(x,y)| \leqslant C_1 \frac{|I_k|}{(x-y)^2},$$

(63) pour tout $x\in E$ et tout $y\in E$, on a $K_I(x,y)=K(x,y)$,

(64) les noyaux K_I vérifient $\| K_I \|_{\text{C.Z.}} \leqslant C_1$.

On a alors la proposition suivante, qui permet de compléter la proposition 10.

Proposition 11. — *Soit* K *un noyau vérifiant la condition* H *ainsi que les inégalités* (56) *et* (57) *avec la constante* C_1. *Alors* K *est un noyau de Calderón-Zygmund, et* $\| K \|_{\text{C.Z.}} \leqslant C(\nu)C_1$.

Avant de démontrer cette proposition, voyons pourquoi elle permet de démontrer le théorème. Supposons que pour $\Gamma\in\Lambda(M)$, le noyau de Cauchy associé à Γ ait une norme de Calderón-Zygmund qui reste toujours inférieure à $C(M)$(*). Soit $\Gamma\in\Lambda\left(\dfrac{10}{9}M\right)$, et soit

(*) Le théorème de Calderón (1977) nous assure que c'est vrai si M est assez petit (*voir* [1] ou [4]).

$K(x, y) = \dfrac{1}{z(x) - z(y)}$, où z est un paramétrage par la longueur d'arc de Γ. Montrons que K vérifie la condition H avec $\nu = \dfrac{1}{3}$: pour chaque intervalle I, nous utilisons la proposition 10, et nous obtenons un ensemble E, et une fonction z_0. Le noyau $K_I = \dfrac{1}{z_0(x) - z_0(y)}$ est de Calderón-Zygmund, avec $\| K_I \|_{C.Z.} \leqslant \dfrac{5}{4} C(M) + C^{te} M$, car K_I^ε s'obtient à partir du noyau de Cauchy associé à une courbe de $\Lambda(M)$ par composition avec un opérateur de changement de variable, et par une troncature un peu différente (qui explique le « C^{te} M »). Enfin, les inégalités (62) sont vérifiées, tout simplement parce que les fonctions z et z_0 sont 1-lipschitziennes et coïncident sur E. Donc, en vertu de notre proposition, et pour peu que l'on ait $C(M) \geqslant M$, nous avons montré notre théorème pour tout $\Gamma \in \Lambda\left(\dfrac{10}{9} M\right)$, avec la constante $C\left(\dfrac{10 M}{9}\right) \leqslant AC(M)$, où A est une constante indépendante de M. Le théorème est alors démontré : il suffit de choisir N tel que $\left(\dfrac{10}{9}\right)^N \geqslant A$, et d'itérer notre procédé.

Il ne nous reste donc plus qu'à montrer notre proposition. Nous en donnons une démonstration, bien que celle-ci soit très peu différente de celle du théorème 1. Nous utiliserons encore le lemme de Burkholder et Gundy (lemme 12). Nous voulons montrer que, pour tout $f \in L^2(\mathbb{R})$, on a $\| T^* f \|_{L^2(\mathbb{R})} \leqslant C_1 C(\nu) \| f \|_{L^2(\mathbb{R})}$. Il suffit clairement de montrer cette inégalité lorsque $f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. Comme on sait que, pour $f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, $T^* f$ coïncide pour x assez grand avec une fonction de $L^2(\mathbb{R})$ (démonstration évidente déjà faite après l'énoncé du lemme 13 dans des circonstances différentes), le lemme 12 nous permet de réduire la démonstration de la proposition 11 à celle du lemme suivant.

LEMME 17. — *Soient $\nu \in]0, 1[$ défini par la condition « H », et $\varepsilon > 0$. Il existe $\gamma > 0$ de la forme $\dfrac{\gamma(\nu, \varepsilon)}{C_1}$ tel que, pour $f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ et pour tout $\lambda > 0$, on ait*

$$(65) \quad | \{ x \in \mathbb{R} ; T^* f(x) > \lambda + \varepsilon\lambda \text{ et } f^*(x) \leqslant \gamma\lambda \} | \leqslant (1 - \nu/4) \, | \{ x \in \mathbb{R} ; T^* f(x) > \lambda \} | .$$

La fonction f^* est la fonction maximale de Hardy-Littlewood de f, c. à. d. que $f^*(x) = \sup\limits_{I \ni x} \dfrac{1}{|I|} \displaystyle\int_I | f(t) | \, dt$, où le « sup » est pris sur tous les intervalles compacts I contenant x; on a bien entendu $\| f^* \|_2 \leqslant C^{te} \| f \|_2$, par exemple à cause de la proposition 3.

Fixons f et λ. Comme d'habitude, l'ensemble $0 = \{ x \in \mathbb{R} ; T^* f(x) > \lambda \}$ est un ouvert borné, réunion d'intervalles ouverts disjoints I_k, et il suffit de prouver

$$(66) \qquad | \{ x \in I ; T^* f(x) > \lambda + \varepsilon\lambda \} | \leqslant (1 - \nu/4) \, | I |$$

pour tout intervalle compact $I = [a, b]$ tel que $T^* f(a) \leqslant \lambda$ et contenant un ξ vérifiant $f^*(\xi) \leqslant \gamma\lambda$ (tous les $\bar{I}_k$ pour lesquels $I_k \cap \{ x \in \mathbb{R} ; T^* f(x) > \lambda + \varepsilon\lambda \text{ et } f^*(x) \leqslant \gamma\lambda \} \neq \emptyset$ vérifient ces propriétés).

Nous noterons J l'intervalle de même centre que I et de longueur $|J|=10|I|$, $E\subset I$ l'ensemble compact défini par la condition « H », et $\Omega=I\setminus E$.

Écrivons maintenant $f=f_1+f_2+f_3$, avec $f_1=f\mathbb{1}_I$, $f_2=f\mathbb{1}_{J\cap I^c}$ et $f_3=f\mathbb{1}_{J^c}$. Nous majorerons chacune des trois composantes de T^*f ainsi définies, en commençant par T^*f_3.

LEMME 18. — *Pour tout* $x\in I$ *et tout* $\varepsilon>0$, *on a*

$$|T^\varepsilon f_3(x)|-T^*f(a)\leqslant 100\,C_1 f^*(\xi).$$

Pour démontrer ce lemme, on utilise l'inégalité $|T^\varepsilon f_3(x)|-T^*f(a)\leqslant X+Y+Z$, où l'on a posé

$$X=\left|\int_{|y-x|>\varepsilon}K(x,y)f_3(y)dy-\int_{|y-a|>\varepsilon}K(x,y)f_3(y)dy\right|,$$

$$Y=\left|\int_{|y-a|>\varepsilon}K(x,y)f_3(y)dy-\int_{|y-a|>\varepsilon}K(a,y)f_3(y)dy\right|,$$

et

$$Z=\left|\int_{|y-a|>\varepsilon}K(a,y)f_3(y)dy\right|-T^*f(a).$$

Il ne reste plus qu'à majorer X, Y, et Z en fonction de $f^*(\xi)$ en utilisant les propriétés (56) et (57) du noyau K. Cette majoration, un peu semblable à celle du lemme 6 quoique plus longue, est laissée au lecteur.

Occupons-nous de f_2.

LEMME 19. — *Soit* $F_1=\left[a,a+\frac{\nu|I|}{8}\right]\cup\left[b-\frac{\nu|I|}{8},b\right]$.

Si $x\notin F_1$, *alors* $T^*f_2(x)\leqslant\frac{100}{\nu}C_1 f^*(\xi)$.

Là encore, il suffit d'appliquer l'inégalité (56). Pour étudier f_1, nous devons bien sûr utiliser l'hypothèse H. Si nous appliquons le lemme 16 au noyau K_I, nous obtenons, en notant T_I^* l'opérateur maximal associé, $\|T_I^*f_1\|_{L^1_{\text{faible}}(\mathbb{R})}\leqslant C_0C_1\|f_1\|_{L^1(\mathbb{R})}\leqslant C_0C_1|I|f^*(\xi)$, ce qui nous permet d'énoncer le lemme suivant.

LEMME 20. — *Soit* $F_2=\left\{x\in I\,;\,T_I^*f_1(x)\geqslant\frac{4C_0C_1}{\nu}f^*(\xi)\right\}$; *alors* $|F_2|\leqslant\frac{\nu}{4}|I|$.

Il ne nous reste plus qu'à relier les noyaux K et K_I. Soit $\Omega=\bigcup_{k\in N}]a_k,b_k[$, où N est un ensemble au plus dénombrable, la décomposition du complémentaire de E en intervalles ouverts disjoints. Pour tout k, posons $l_k=b_k-a_k$. On note $F_3=(\bigcup_{k\in N}]a'_k,b'_k[)\cap I$, avec $a'_k=a_k-\frac{\nu}{16}l_k$ et $b'_k=b_k+\frac{\nu}{16}l_k$. On a bien sûr

$$|F_3|\leqslant\left(1+\frac{\nu}{8}\right)|\Omega|\leqslant\left(1+\frac{\nu}{8}\right)(1-\nu)|I|\leqslant\left(1-\frac{7\nu}{8}\right)|I|.$$

LEMME 21. — *On a l'inégalité*

$$\int_{x\in \mathrm{I}\backslash \mathrm{F}_3} \sup_{\varepsilon>0} |\mathrm{T}_\mathrm{I}^\varepsilon f_1(x)-\mathrm{T}^\varepsilon f_1(x)|\,dx \leqslant \frac{32\mathrm{C}_1}{\nu}|\mathrm{I}|f^*(\xi).$$

Compte tenu des propriétés (62) et (63), il nous faut majorer

$$\mathrm{X}=\int_{\mathrm{I}\in \mathrm{I}\backslash \mathrm{F}_3}\left[\sum_{k\in\mathrm{N}}\int_{y\in]a_k,b_k[}\frac{\mathrm{C}_1 l_k}{(x-y)^2}|f(y)|\,dy\right]dx,$$

et

$$\mathrm{X}\leqslant \sum_{k\in\mathrm{N}} \mathrm{C}_1 l_k \int_{y\in]a_k,b_k[}|f(y)|\int_{x\in \mathrm{I}\backslash]a'_k,b'_k[}\frac{dx}{(x-y)^2}\,dy,$$

d'où l'on déduit le lemme car $\mathrm{X}\leqslant \dfrac{32\mathrm{C}_1}{\nu}\displaystyle\int_{y\in\Omega}|f(y)|\,dy$.

LEMME 22. — *Soit* $\mathrm{F}_4=\left\{x\in \mathrm{I}\backslash \mathrm{F}_3\,;\ \sup_{\varepsilon>0}|\mathrm{T}_\mathrm{I}^\varepsilon f_1(x)-\mathrm{T}^\varepsilon f_1(x)|\geqslant \dfrac{256}{\nu^2}\mathrm{C}_1 f^*(\xi)\right\}$. *Alors, on a* $|\mathrm{F}_4|\leqslant \dfrac{\nu}{8}|\mathrm{I}|$.

Ce lemme découle du précédent.

Il résulte de la définition de F_1, et des lemmes 20 et 22, que

$$|\mathrm{F}_1\cup \mathrm{F}_2\cup \mathrm{F}_3\cup \mathrm{F}_4|\leqslant\left(\frac{\nu}{4}+\frac{\nu}{4}+1-\frac{7\nu}{8}+\frac{\nu}{8}\right)|\mathrm{I}|=\left(1-\frac{\nu}{4}\right)|\mathrm{I}|.$$

D'autre part, si x n'appartient à aucun des F_i, alors

$$\begin{aligned}\mathrm{T}^* f(x) &\leqslant \mathrm{T}^* f_3(x)+\mathrm{T}^* f_2(x)+|\mathrm{T}_\mathrm{I}^* f_1(x)-\mathrm{T}^* f_1(x)|+\mathrm{T}_\mathrm{I}^* f_1(x)\\ &\leqslant\left(100+\frac{100}{\nu}+\frac{256}{\nu^2}+\frac{4}{\nu}\mathrm{C}_0\right)\mathrm{C}_1 f^*(\xi).\end{aligned}$$

Il ne nous reste plus qu'à choisir γ tel que le produit de la parenthèse par $\mathrm{C}_1\gamma$ soit plus petit que ε ; la démonstration du théorème est terminée.

10. Opérateurs intégraux singuliers sur les courbes rectifiables

Nous nous proposons de donner une généralisation du théorème 1 aux courbes rectifiables suggérée par R. R. Coifman. On se donnera donc une courbe rectifiable Γ, et l'on notera $d\mu$ la mesure de longueur d'arc qui lui est associée. La mesure μ n'étant plus dans Δ, nous serons amenés à utiliser la fonction $\bar{\mu}$ définie au paragraphe 2. On garde les notations des paragraphes 3 et 5 concernant l'opérateur T_μ^*.

THÉORÈME 6. — *Soient* $\mathrm{K}:\mathbb{C}^*\to\mathbb{C}$ *une fonction indéfiniment dérivable, impaire, homogène de degré* -1, *et* $1<p<+\infty$. *Soient* Γ *une courbe rectifiable du plan complexe, et* μ *la mesure de longueur d'arc sur* Γ. *Il existe une constante* C *indépendante de* Γ *et un nombre* N *indépendant de* K *et de* Γ *tels que, pour toute fonction continue à support compact f, on ait*

(66) $$\| T_\mu^* f \|_{L^p(d\mu)} \leqslant C \| (1+\bar{\mu})^N f \|_{L^p(d\mu)}.$$

Utilisons le théorème de Coifman-McIntosh-Meyer (ou, pour être précis, son corollaire exposé dans [6]) : l'opérateur maximal associé une courbe $\tilde{\Gamma} \in \Lambda(M)$ a une norme inférieure à CM^{N_0} pour un certain N_0. Si nous appliquons la proposition 6, nous obtenons le lemme suivant :

LEMME 23. — *Soient* $\tilde{\Gamma} \in \Lambda(M)$ *et* σ *la mesure de longueur d'arc sur* $\tilde{\Gamma}$. *Alors, pour toute fonction f continue à support compact, on a*

(67) $$\| T_\mu^* f \|_{L^p(d\sigma)} \leqslant C_1 M^{N_1} \| (1+\bar{\mu})^2 f \|_{L^p(d\mu)}.$$

Les constantes C_1 et N_1 ne dépendent bien sûr, ni de Γ, ni de M ; N_1 ne dépend pas non plus de K comme le montre le paragraphe 9 où l'on aurait remplacé $\frac{1}{z}$ par K, divisé au besoin par une constante positive.

Nous nous proposons, comme pour le théorème 1, de démontrer notre résultat à partir du lemme 23 et de la proposition 8 en utilisant le lemme de Burkholder et Gundy.

Donnons d'abord quelques notations. Nous noterons $z(s)$ un paramétrage de la courbe Γ par la longueur d'arc. On choisit $1 < r < p$, et on pose $u(s) = T_\mu^* f(z(s))$ et

$$v(s) = M_\mu [| (1+\bar{\mu})^{N-(1/r)} f |^r]^{1/r} (z(s)) + M_\mu ((1+\bar{\mu}) f)(z(s)),$$

de sorte que $v(s) \in L^p(\mathbb{R})$ si $(1+\bar{\mu})^N f \in L^p(d\mu)$, en vertu de l'inégalité (13) de la proposition 4.

Pour tout intervalle compact I de $\mathbb{R}$, on note $\alpha(I) = \frac{1}{|I|}$ diamètre $(z(I))$, et f_I le produit de la fonction f par la fonction caractéristique de l'ensemble $\{ z \in \mathbb{C} ; | z - z(a) | \leqslant 2\alpha(I) | I | \}$, où a est l'extrémité initiale de I.

LEMME 24. — *Soient* I *un intervalle compact de valeurs de s, a l'extrémité initiale de* I, $\alpha_0 \leqslant 1$, $\gamma > 0$ *et* $\lambda > 0$ *trois réels positifs. On suppose que*

(68) *il existe un* $\xi \in I$ *tel que* $v(\xi) \leqslant \gamma\lambda$,

(69) *la fonction* $(1+\bar{\mu})$ *reste supérieure à* $\frac{1}{3\alpha_0}$ *sur le support de f. Alors, on a les inégalités*

(70) $$T_\mu^*(f - f_I)(z(s)) \leqslant T_\mu^* f(z(a)) + C\gamma\lambda\alpha_0 \quad \textit{pour tout} \quad s \in I$$

(71) $$| \{ s \in I, T_\mu^* f_I(z(s)) > C\gamma\lambda\alpha(I) \} | \leqslant \left(1 - \frac{\alpha(I)}{4} \right) | I |.$$

(*La constante* C *ne dépend que de* K, *p*, *et r*).

Les méthodes standard utilisées au lemme 6, par exemple, nous donnent la majoration suivante, valable pour tout $\varepsilon > 0$:

$$| T_\mu^\varepsilon (f - f_I)(z(s)) | \leqslant T_\mu^* f(z(a)) + CM_\mu f(z(\xi)),$$

d'où l'on déduit

$$T_\mu^*(f-f_I)(z(s)) \leqslant T_\mu^* f(z(a)) + 3\alpha_0 C M_\mu((1+\bar{\mu})f)(z(\xi)),$$

ce qui donne l'inégalité (70).

Pour montrer (71), appliquons la proposition 8 à la courbe Γ sur l'intervalle I. On obtient une courbe $\tilde{\Gamma}\in\Lambda\left(\frac{2}{\alpha(I)}\right)$, dont un paramétrage $\tilde{z}(s)$ par la longueur d'arc coïncide avec $z(s)$ sur un ensemble compact $E\subset I$ tel que $|E|\geqslant\frac{\alpha(I)}{2}|I|$.

Appliquons le lemme 23. Nous trouvons que

$$\int_E [T_\mu^* f_I(z(s))]^r ds = \int_E [T_\mu^* f_I(\tilde{z}(s))]^r ds \leqslant C_1^r \left(\frac{2}{\alpha(I)}\right)^{N_1 r} \| (1+\bar{\mu})^2 f_I \|_{L^r(d\mu)}^r .$$

Le lemme suivant, qui est une conséquence immédiate des définitions, nous permettra de poursuivre notre majoration :

LEMME 25. — *Sur le support de f_I, on a $\bar{\mu}(z)\geqslant\frac{1}{3\alpha(I)}$.*

Ainsi donc,

$$\| (1+\bar{\mu})^2 f_I \|_{L^r(d\mu)}^r \leqslant 3|I| M_\mu[|(1+\bar{\mu})^2 f|^r](z(\xi)) \leqslant 3|I|(3\alpha(I))^{Nr-1-2r} v(\xi)^r,$$

d'où

$$\int_E [T_\mu^* f_I(z(s))]^r ds \leqslant \frac{C^r}{4}\gamma^r\lambda^r\alpha(I)^{Nr-N_1 r-1-2r}|I|,$$

en posant $C^r = C_1^r 3^{Nr} 2^{N_1 r+2}$. Nous pouvons maintenant choisir N : il suffit en effet que $Nr\geqslant N_1 r+1+3r$ pour que l'on ait

$$|E\cap\{s\in I ; T_\mu^* f_I(z(s)) > C\gamma\lambda\alpha(I)\}| \leqslant \frac{\alpha(I)}{4}|I|.$$

Le lemme 24 est alors vrai, car on a $|E|\geqslant\frac{\alpha(I)}{2}|I|$.

Notons que le lemme 24 reste valable si l'on remplace f par le produit de f par une fonction caractéristique dans les conditions (69), (70) et (71).

Donnons-nous un $\varepsilon>0$, et $\gamma=\gamma(\varepsilon)$ tel que $C\gamma=\varepsilon$ dans le lemme 24.

LEMME 26. — *Soient* I *un intervalle compact de valeurs de s, et $\lambda>0$ tel que $u(s)\leqslant\lambda$ en chaque extrémité de* I. *Alors*

$$|\{s\in I ; u(s)>\lambda+4\varepsilon\lambda \quad \text{et} \quad v(s)\leqslant\gamma\lambda\}| \leqslant \frac{4}{5}|I|.$$

Nous pouvons supposer qu'il existe un $\xi\in I$ tel que $v(\xi)\leqslant\gamma\lambda$.

Nous allons construire par récurrence trois suites $\mathcal{U}_n$, $\mathcal{V}_n$, $\mathcal{W}_n$ d'ouverts contenus dans I.

Commençons notre construction à partir de I. On pose $A(I)=0$, et on définit $\mathcal{O}(I)$ comme l'ouvert $\{ s\in \mathrm{I} ; \mathrm{T}_\mu^* f_\mathrm{I}(z(s)) > \varepsilon\lambda\alpha(\mathrm{I}) \}$. Soit $\mathcal{O}(\mathrm{I}) = \bigcup_p \mathrm{L}_p$ sa décomposition en intervalles ouverts disjoints. Pour chaque p, on pose $\mathrm{A}(\mathrm{L}_p) = \alpha(\mathrm{I})$.

On définit $\mathscr{U}_1$ comme l'union des L_p contenant un ξ tel que $v(\xi) \leqslant \gamma\lambda$, et tels que $\mathrm{A}(\mathrm{L}_p) < 1$ (la seconde condition est vérifiée automatiquement si $z(\mathrm{I})$ n'est pas un segment).

On définit $\mathscr{V}_1$ comme l'union des L_p contenant un ξ tel que $v(\xi) \leqslant \gamma\lambda$, mais tels que $\mathrm{A}(\mathrm{L}_p) \geqslant 1$.

Enfin, $\mathscr{W}_1$ est l'union de L_p tels que $v(s) > \gamma\lambda$ pour tout $s \in \mathrm{L}_p$.

Supposons maintenant définis les ouverts $\mathscr{U}_n, \mathscr{V}_n, \mathscr{W}_n$. Soit $\mathscr{U}_n = \bigcup_k \mathrm{I}_k$ la décomposition de $\mathscr{U}_n$ en intervalles ouverts disjoints ; on suppose aussi définis les $\mathrm{A}(\mathrm{I}_k)$.

Pour tout k, on définit $\mathcal{O}(\mathrm{I}_k) = \{ s \in \mathrm{I}_k ; \mathrm{T}_\mu^* f_{\mathrm{I}_k}(z(s)) > \varepsilon\lambda\alpha(\mathrm{I}_k) \}$. Soit $\mathcal{O}(\mathrm{I}_k) = \bigcup_l \mathrm{L}_l$ sa décomposition en intervalles ouverts disjoints. Pour chaque l, on pose $\mathrm{A}(\mathrm{L}_l) = \mathrm{A}(\mathrm{I}_k) + \alpha(\mathrm{I}_k)$.

On définit maintenant $\mathscr{U}(\mathrm{I}_k)$ comme la réunion des L_l tels qu'il existe au moins un $\xi \in \mathrm{L}_l$ vérifiant $v(\xi) \leqslant \gamma\lambda$ et tels que $\mathrm{A}(\mathrm{L}_l) < 1$.

On définit $\mathscr{V}(\mathrm{I}_k)$ comme la réunion des L_l contenant un ξ qui vérifie $v(\xi) \leqslant \gamma\lambda$, mais tels que $\mathrm{A}(\mathrm{L}_l) \geqslant 1$. Enfin, $\mathscr{W}(\mathrm{I}_k)$ est la réunion des L_l tels que $v(s) > \gamma\lambda$ pour tout $s \in \mathrm{L}_l$.

On pose $\mathscr{U}_{n+1} = \bigcup_k \mathscr{U}(\mathrm{I}_k)$, $\mathscr{V}_{n+1} = \mathscr{V}_n \cup (\bigcup_k \mathscr{V}(\mathrm{I}_k))$, et $\mathscr{W}_{n+1} = \mathscr{W}_n \cup (\bigcup_k \mathscr{W}(\mathrm{I}_k))$.

Nos suites d'ouverts étant maintenant définies, on pose $\mathscr{U} = \bigcap_n \mathscr{U}_n$, $\mathscr{V} = \bigcup_n \mathscr{V}_n$ et $\mathscr{W} = \bigcup_n \mathscr{W}_n$ leurs limites respectives.

LEMME 27. — *$\mathscr{U}$ est de mesure nulle.*

Soit $s \in \mathscr{U}$. Pour tout n, soit I_n l'intervalle de $\mathscr{U}_n$ qui contient s. On a toujours $\mathrm{A}(\mathrm{I}_n) < 1$, donc $\sum_n \alpha(\mathrm{I}_n) \leqslant 1$, et $\lim_{n\to\infty} \alpha(\mathrm{I}_n) = 0$. Par conséquent, $\lim_{n\to\infty}$ (diamètre $(z(\mathrm{I}_n)) = 0$, et cela n'est possible que si $\lim_{n\to\infty} |\mathrm{I}_n| = 0$. Mais dans ce cas, la fonction z ne peut être dérivable au point s, car sinon on aurait $\lim_{n\to\infty} \alpha(\mathrm{I}_n) = 1$. On en déduit le résultat, car l'ensemble des s où $z(s)$ n'est pas dérivable est de mesure nulle.

LEMME 28. — *On a* $|\mathscr{V}| \leqslant \dfrac{4}{5} |\mathrm{I}|$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, écrivons $\mathscr{U}_n = \bigcup_k \mathrm{I}_k$ et $\mathscr{V}_n = \bigcup_l \mathrm{J}_l$ (les I_k et les J_l dépendent bien sûr de n).

Démontrons par récurrence sur n l'inégalité suivante.

$$\sum_k |\mathrm{I}_k| \left(1 + \frac{\mathrm{A}(\mathrm{I}_k)}{4}\right) + \sum_l |\mathrm{J}_l| \left(1 + \frac{\mathrm{A}(\mathrm{J}_l)}{4}\right) \leqslant |\mathrm{I}|. \tag{72}$$

Cette inégalité étant trivialement vraie à l'ordre 0, nous pouvons nous contenter de vérifier que (72) à l'ordre n implique (72) à l'ordre $n+1$. Pour cela, il suffit de voir que pour chaque I_k,

$$\left(1 + \frac{\mathrm{A}(\mathrm{I}_k) + \alpha(\mathrm{I}_k)}{4}\right) |\mathcal{O}(\mathrm{I}_k)| \leqslant \left(1 + \frac{\mathrm{A}(\mathrm{I}_k)}{4}\right) |\mathrm{I}_k| \tag{73}$$

car la valeur commune de A sur les composantes connexes de $\mathcal{O}(\mathrm{I}_k)$ est $\mathrm{A}(\mathrm{I}_k)+\alpha(\mathrm{I}_k)$. Or le lemme 24 nous apprend que $|\mathcal{O}(\mathrm{I}_k)| \leqslant \left(1-\frac{\alpha(\mathrm{I}_k)}{4}\right)|\mathrm{I}_k|$, d'où on déduit aisément (73).

L'inégalité (72) implique que pour tout n, $|\mathcal{V}_n| \leqslant \frac{4}{5}|\mathrm{I}|$ car tous les $\mathrm{A}(\mathrm{J}_l)$ sont supérieurs à 1 ; on en déduit le lemme.

LEMME 29. — *Soient* $n\in\mathbb{N}$, I_n *un intervalle de* $\mathcal{U}_n$, *et* s *un élément de* I_n *n'appartenant pas à* $\mathcal{O}(\mathrm{I}_n)$. *Alors* $u(s)=\mathrm{T}_\mu^* f(z(s)) \leqslant \lambda+4\varepsilon\lambda$.

Appelons $\mathrm{I}_{n-1}, \mathrm{I}_{n-2}, \ldots$ les intervalles de $\mathcal{U}_{n+1}, \ldots, \mathcal{U}_1$ qui contiennent s. Posons $g_0=f-f_{\mathrm{I}}$, $g_1=f_{\mathrm{I}}-f_{\mathrm{I}_1}$, $g_n=f_{\mathrm{I}_{n-1}}-f_{\mathrm{I}_n}$.

Pour tout k, on applique le lemme 24 à l'intervalle I_k et à la fonction $f_{\mathrm{I}_{k-1}}$. Le lemme 25 nous permet de la faire avec $\alpha_0=\alpha(\mathrm{I}_{k-1})$ pour $k\geqslant 1$ (et $\alpha_0=1$ sinon). On obtient les inégalités :

$$\mathrm{T}_\mu^* g_0(z(s)) \leqslant \mathrm{T}_\mu^* f(z(a))+\varepsilon\lambda \leqslant \lambda+\varepsilon\lambda \tag{74}$$

en notant a une extrémité de I, où la fonction u est inférieure à λ ;

$$\mathrm{T}_\mu^* g_k(z(s)) \leqslant \mathrm{T}_\mu^* f_{\mathrm{I}_{k-1}}(z(a_k))+\varepsilon\lambda\alpha(\mathrm{I}_{k-1}) \leqslant 2\varepsilon\lambda\alpha(\mathrm{I}_{k-1}) \tag{75}$$

en notant a_k une extrémité de I_k, qui n'est donc pas dans $\mathcal{O}(\mathrm{I}_{k-1})$.

Enfin, puisque $s\notin\mathcal{O}(\mathrm{I}_n)$, on a

$$\mathrm{T}_\mu^* f_{\mathrm{I}_n}(z(s)) \leqslant \varepsilon\lambda\alpha(\mathrm{I}_n) \leqslant \varepsilon\lambda. \tag{76}$$

Les inégalités (74), (75), (76) nous donnent

$$u(s) \leqslant [\mathrm{T}_\mu^* g_0+\mathrm{T}_\mu^* g_1+\ldots+\mathrm{T}_\mu^* g_n+\mathrm{T}_\mu^* f_{\mathrm{I}_n}](z(s)) \leqslant \lambda+2\varepsilon\lambda+2\sum_{k=0}^{n-1}\alpha(\mathrm{I}_k)\varepsilon\lambda,$$

ce qui est l'inégalité annoncée car $\sum_{k=0}^{n-1}\alpha(\mathrm{I}_k)=\mathrm{A}(\mathrm{I}_k)<1$.

Le lemme 29 étant démontré, le lemme 26 devient évident.

Soit en effet $s\in\{s\in\mathrm{I}\,;u(s)>\lambda+4\varepsilon\lambda$ et $v(s)\leqslant\gamma\lambda\}$ il ne peut être dans aucun $\mathrm{I}_n\backslash\mathcal{O}(\mathrm{I}_n)$ (notations du lemme 29), donc il doit être dans $\mathcal{U}\cup\mathcal{V}\cup\mathcal{W}$. Comme $v(s)\leqslant\gamma\lambda$, il ne peut pas être dans $\mathcal{W}$, et le lemme 26 découle des lemmes 27 et 28.

Compte tenu du lemme de Burkholder et Gundy (lemme 12), le théorème découlera du lemme suivant.

LEMME 30. — *Si* f *est continue à support compact, et si* $(1+\bar{\mu})f\in\mathrm{L}^p(d\mu)$, *alors la fonction* $u(s)=\mathrm{T}_\mu^* f(z(s))$ *coïncide en dehors d'un compact avec une fonction de* $\mathrm{L}^p(d\mu)$.

Si le support de f rencontre Γ, la fonction $\bar{\mu}$ ne peut pas être $+\infty$ sur tout Γ. Soit donc m une valeur finie prise par cette fonction ; alors, si R est assez grand, on a, pour tout $n\geqslant 1$

$$|\{s\in\mathbb{R}\,;2^n\mathrm{R}\leqslant|z(s)|\leqslant 2^{n+1}\mathrm{R}\}|\leqslant 2^{n+1}m\mathrm{R},$$

et comme il est possible de majorer la valeur de $\mathrm{T}_\mu^* f$ sur cet ensemble par $\frac{\mathrm{C}^{\mathrm{te}}}{2^{n-1}\mathrm{R}}$ dès que le support de f est contenu dans $\{ z \in \mathbb{C} ; |z| \leqslant R \}$ la restriction de $T_\mu^* f$ à $\{ z ; |z| > 2R \}$ est bien dans $L^p(d\mu)$.

Remarque. — Le théorème 6 permet de définir un opérateur T_μ continu de $L^p((1+\bar{\mu})^{Np} d\mu)$ dans $L^p(d\mu)$ admettant le noyau K. On en déduit par dualité l'existence d'un opérateur T'_μ continu de $L^p(d\mu)$ dans $L^p\left(\dfrac{d\mu}{(1+\bar{\mu})^{Np}}\right)$. Il est vraisemblable que l'opérateur maximal T'^*_μ correspondant est aussi borné, mais les techniques utilisées ci-dessus ne semblent pas permettre de le montrer.

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. P. Calderón *Cauchy integral on Lipschitz curves and related operators.* (*Proc. Nat. Acad. Sc.*, vol. 74, n° 4, 1977, p. 1324-1327).

[2] A. P. Calderón, *Commutators, singular integrals on Lipschitz curves and applications.* (*Proc. I.C.M.* Helsinski, 1978, p. 85-96).

[3] R. R. Coifman, Y. Meyer, *Au-delà des opérateurs pseudodifférentiels.* (*Astérisque 57, Soc. Math. France*, 1978).

[4] R. R. Coifman, Y. Meyer, *Le théorème de Caldéron par les méthodes de variable réelle.* (*C. R. Acad. Sc.*, Paris, vol. 289, 1979, p. 425-428).

[5] R. R. Coifman, A. McIntosh, Y. Meyer, *L'intégrale de Cauchy définit un opérateur borné sur L^2 pour les courbes lipschitziennes.* (*Ann. of Math.*, vol. 116, 1982, p. 361-387).

[6] R. R. Coifman, G. David, Y. Meyer, *La solution des conjectures de Calderón.* (*Advances in Math.*, vol. 48, n° 2, 1983, p. 144-148).

[7] M. De Guzman, *Differentiation of integrals in* $\mathbb{R}^n$. (*Lecture Notes in Math.*, p. 481).

[8] P. Duren, *Theory of* H^p *spaces.* (*Academic Press*, 1970).

[9] T. W. Gamelin, *Uniform Algebras.* (*Prentice-Hall Inc.*, 1969).

[10] M. V. Keldysh, M. A. Lavrentiev, *Sur la représentation conforme des domaines limités par des courbes rectifiables.* (*Ann. Sci. École Norm. Sup.*, vol. 54, 1937, p. 1-38).

[11] Y. Meyer, *Communication orale.*

[12] E. M. Stein, *Singular integrals and differentiability properties of functions.* (Princeton, 1970).

[13] H. Steinhaus, *Mathématiques en instantanés.* Flammarion.

[14] A. Zygmund, *Trigonometric series* (*Cambridge University Press*, 1968).

(Manuscrit reçu le 7 juin 1983).

G. David
École Polytechnique,
Centre de Mathématiques,
91128 Palaiseau Cedex.