Annales scientifiques de l'É.N.S.

Paul Koosis

Fonctions entières de type exponentiel comme multiplicateurs. Un exemple et une condition nécessaire et suffisante

Annales scientifiques de l'É.N.S. 4e série, tome 16, nº 3 (1983), p. 375-407

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1983_4_16_3_375_0>

Ann. scient. Éc. Norm. Sup.
4e série, t. 16, 1983, p. à

FONCTIONS ENTIÈRES DE TYPE EXPONENTIEL COMME MULTIPLICATEURS. UN EXEMPLE ET UNE CONDITION NÉCESSAIRE ET SUFFISANTE (1)

PAR PAUL KOOSIS

Soit $W(x) \geqq 1$ une fonction paire; quelles propriétés le poids W doit-il avoir pour qu'il existe des fonctions entières φ non nulles, de type exponentiel arbitrairement petit, rendant $W(x)\,\varphi(x)$ *borné* sur l'axe réel ? Les éléments de l'analyse montrent que l'une de ces propriétés doit être celle-ci :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\log W(x)}{1+x^2}\,dx \quad < \quad \infty. \tag{0.1}$$

Cette condition nécessaire, portant sur la grandeur globale de W, est loin d'être suffisante toute seule; il semble que W doit en outre jouir d'une certaine régularité dont on n'a pas une idée bien claire. On peut toutefois essayer d'y parvenir en faisant des exemples; c'est le chemin suivi dans [1] et maintenant dans cet article.

La régularité en question ne semble pas admettre une description simple qui se rapporterait directement au comportement local de la fonction $W(x)$. Si, en effet, il y a des $\varphi \not\equiv 0$ entières de type exponentiel rendant $W(x)\,\varphi(x)$ borné, ces mêmes φ font l'affaire pour n'importe quel poids $W_1(x) \leqq W(x)$, quelles que soient ses irrégularités locales. De là vient l'idée de chercher à lier les propriétés dont nous parlons au comportement d'un *majorant* du poids W qui lui serait associé de façon convenable, plutôt qu'à celui de W lui-même. Tel est le point de vue que nous adoptons ici.

(1) Research partially supported by NSF Grant MCS 80-02955.

On se bornera cependant à la considération des poids soumis à *une* condition de régularité minimale. Cette restriction, bien naturelle pour des raisons énumérées au début de [1], peut être formulée ainsi :

Il existe trois constantes positives α, l *et* C *telles qu'à tout* x_0 *réel corresponde un intervalle* J_0 *de longueur* l *avec* $x_0 \in J_0$ *et*

$$(0.2) \qquad \mathrm{CW}(x) \geqq [\mathrm{CW}(x_0)]^\alpha \qquad \textit{pour} \quad x \in J_0.$$

La constante C ne joue pas un rôle important ici; on peut toujours la faire remplacer par 1 en abaissant α à une valeur $\leqq 1$, puis en prenant, au lieu de W, un multiple de celui-ci par un nombre supérieur à l'unité.

Afin d'éviter des répétitions lourdes, convenons de dire qu'un poids W *admet des multiplicateurs s'il existe des fonctions entières* $\varphi \not\equiv 0$ *de type exponentiel arbitrairement petit telles que* $W(x)\,\varphi(x)$ *soit borné sur l'axe réel.* (L'expression « W admet des multiplicateurs de type exponentiel arbitrairement petit » serait plus précise ici, mais nous la trouvons trop longue.)

Soit W un poids quelconque satisfaisant aux conditions (0.1) et (0.2). Il possède alors des majorants Ω satisfaisant, eux aussi, à (0.1) et ayant, à la place de (0.2) un comportement un peu plus régulier :

$$(0.3) \qquad |\log\log\Omega(x) - \log\log\Omega(x')| \leqq \mathrm{C}|x-x'|.$$

On peut, par exemple, prendre

$$\Omega(x) = \exp\left\{\mathrm{K}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\log W(t)}{(x-t)^2+1}\,dt\right\}$$

avec une constante convenable K; ce majorant $\Omega(x)$ est d'ailleurs *infiniment dérivable*.

La première question est de savoir si (0.1) (pour Ω) et (0.3) suffisent, *à elles seules*, pour que Ω (et donc W) admette des multiplicateurs. Or, l'exemple construit dans [1] montre qu'il n'en est rien. On sait, pourtant, que Ω *admet* des multiplicateurs s'il satisfait à (0.1) et à la condition

$$(0.4) \qquad |\log\Omega(x) - \log\Omega(x')| \leqq \mathrm{C}|x-x'|$$

plus forte que (0.3) (*voir* [2], [3]). Cela nous amène à penser qu'il s'agirait ici d'une condition de régularité intermédiaire entre (0.3) et (0.4) portant sur un majorant convenable de W.

Ici intervient la notion de *l'énergie*. Étant donné un poids W satisfaisant à (0.1) et (0.2), prenons un de ses majorants Ω *pairs* et *infiniment dérivables* satisfaisant à (0.1) et à (0.3); la transformée de Hilbert

$$\pi\omega(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}{}' \left(\frac{1}{x-t} + \frac{1}{t^2+1}\right)\log\Omega(t)\,dt$$

sera, elle aussi, infiniment dérivable. Dans des circonstances assez générales — ne nous y arrêtons point ici — on a la formule

$$(0.5) \qquad \log\left(\frac{\Omega(x)}{\Omega(0)}\right) = x\int_0^\infty \log\left|\frac{x+t}{x-t}\right| d\left(\frac{\omega(t)}{t}\right).$$

Sans le facteur x, l'intégrale de droite est un *potentiel de Green* pour le demi-plan droit du plan complexe. Pour de tels potentiels on peut définir une fonctionnelle quadratique positive (la valeur $+\infty$ n'y étant *pas* exclue) en posant :

$$(0.6) \qquad \left\|\frac{1}{x}\log\left(\frac{\Omega(x)}{\Omega(0)}\right)\right\|_{\mathrm{E}}^2 = \int_0^\infty\int_0^\infty \log\left|\frac{x+t}{x-t}\right| d\left(\frac{\omega(t)}{t}\right) d\left(\frac{\omega(x)}{x}\right),$$

pourvu que certaines conditions de convergence soient remplies.

L'expression (0.6) se nomme *l'énergie* de $(1/x)\log(\Omega(x)/\Omega(0))$. Un résultat célèbre de Beurling et Malliavin [2] montre que *si, pour un poids* Ω *remplissant* (0.1) *et* (0.3), *l'énergie* (0.6) *est finie*, Ω *admet des multiplicateurs*. Dans le même article, Beurling et Malliavin démontrent que (0.1) (pour Ω) et (0.4) *entraînent* la finitude de (0.6); voilà donc une condition, déjà suffisante, qui est plus forte que (0.3) et moins forte que (0.4).

On se demande maintenant si la finitude de l'énergie joue un rôle *essentiel* dans cette affaire. Pour le premier résultat cité de Beurling et Malliavin on dispose actuellement de *deux* démonstrations différentes, celle publiée d'abord dans [2] et puis celle de [3]. La démonstration de [2] est reprise, de manière différente, dans [4]; c'est en lisant cet article-ci (je remercie Peter Jones de me l'avoir signalé) que l'on saisit au mieux ses idées. Là, on voit que la notion de l'énergie ne joue qu'un rôle auxiliaire (quoique indispensable). Dans [3], par contre, l'énergie paraît à cause de l'emploi de l'inégalité de Schwarz, relation qui, on le sait, ne peut être améliorée. Cette circonstance fait penser que son apparence est essentielle. Lorsqu'on étudie [3] de près, l'idée vient de *forcer* l'inégalité de Schwarz là où elle joue de façon critique, et de chercher ainsi à parvenir à l'affirmation suivante :

Soit $W(x)$ *un poids pair satisfaisant à* (0.1) *et à* (0.2). *Si* W *admet des multiplicateurs, il possède un majorant pair* Ω *tel que*

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{\log\Omega(x)}{1+x^2}\mathrm{d}x < \infty \qquad et \qquad \left\|\frac{1}{x}\log\left(\frac{\Omega(x)}{\Omega(0)}\right)\right\|_{\mathrm{E}}^2 < \infty.$$

Le but des deux premiers paragraphes de cet article est de montrer que cette affirmation est *fausse*. Cela se fait au moyen de l'exemple construit au § 2. Cet exemple ressemble assez à un autre, donné dans [1], qui fournit un poids satisfaisant à (0.1) et à (0.2) *sans admettre de multiplicateurs*. En comparant les deux exemples, on entrevoit ce à quoi une condition *nécessaire et suffisante* (pour qu'un poids admette des multiplicateurs) pourrait ressembler.

C'est ainsi qu'on arrive au théorème du § 3, qui fournit un critère nécessaire et suffisant où il s'agit de l'existence pour W d'un majorant ayant certaines propriétés. La condition obtenue de cette façon a une apparence compliquée; je pense, pourtant, qu'on pourra la simplifier, la transformer pour aboutir à un résultat qui aurait une forme satisfaisante. Dans cette possibilité réside, je crois, l'intérêt du § 3. Ce paragraphe est indépendant des §§ 1-2, et celui ou celle qui le voudrait peut y passer directement.

1. Comparaison d'énergies

Dans ce §, on démontre une généralisation de l'inégalité bien connue de Cartan pour les énergies des potentiels *purs*. Cela nous oblige à faire appel à quelques notions appartenant aux éléments de la théorie du potentiel; elles sont traitées de façon plus qu'adéquate dans [5], chap. 11 ou bien aux endroits correspondants des autres livres semblables. Je remercie John Taylor de l'Université McGill pour nos conversations sur la matière de ce paragraphe.

NOTATIONS. — Si m est une mesure réelle (de signe *variable*) sur $(0, \infty)$ on pose, pour $x>0$,

$$\mathrm{G}_m(x) = \int_0^\infty \log\left|\frac{x+t}{x-t}\right| dm(t), \tag{1.1}$$

pourvu que l'intégrale de droite converge absolument pour presque tout x.

Soit $\mathscr{M}$ l'ensemble des mesures réelles m sur $(0, \infty)$ pour lesquelles

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \log\left|\frac{x+t}{x-t}\right| |dm(t)|\ |dm(x)| < \infty;$$

pour deux fonctions G_m, G_s données par (1.1) avec m et $s \in \mathscr{M}$ on écrit

$$\langle \mathrm{G}_m, \mathrm{G}_s \rangle_{\mathrm{E}} = \int_0^\infty \int_0^\infty \log\left|\frac{x+t}{x-t}\right| dm(t)\, ds(x). \tag{1.2}$$

On démontre en théorie du potentiel ([5], p. 228-229) que la forme bilinéaire symétrique $\langle\ ,\ \rangle_{\mathrm{E}}$ est *positive définie* sur l'espace vectoriel composé des G_m, $m \in \mathscr{M}$. En faisant le complété de cet espace vectoriel par rapport à la norme

$$\| \mathrm{G}_m \|_{\mathrm{E}} = \sqrt{\langle \mathrm{G}_m, \mathrm{G}_m \rangle_{\mathrm{E}}},$$

on obtient un *espace de Hilbert* qui sera noté $\mathscr{D}$ dans ce qui suit.

A chaque élément de $\mathscr{D}$ correspond, de façon naturelle, une *fonction mesurable* (au sens de Lebesgue) définie p. p. sur $[0, \infty)$. Rappelons brièvement comment cela se voit. Soient les $m_j \in \mathscr{M}$ telles que $\| \mathrm{G}_{m_j} - \mathrm{G}_{m_k} \|_{\mathrm{E}} \xrightarrow[j,k]{} 0$ et soit K un compact $\subseteq [0, \infty)$; montrons que les fonctions $\mathrm{G}_{m_j}(x)$ convergent dans $\mathrm{L}_1(\mathrm{K})$. Prenons une paire quelconque (j, k) et posons $f(x) = \operatorname{sgn} \{ \mathrm{G}_{m_j}(x) - \mathrm{G}_{m_k}(x) \}$ pour $x \in \mathrm{K}$; pour $x \notin \mathrm{K}$ on pose $f(x)=0$. En appliquant l'inégalité de Schwarz à la forme bilinéaire $\langle\ ,\ \rangle_{E'}$ on trouve

$$\int_K |G_{m_j}(x)-G_{m_k}(x)|\,dx =$$

$$\int_0^\infty \{G_{m_j}(x)-G_{m_k}(x)\}\,f(x)\,dx \quad \leqq \quad \|G_{m_j}-G_{m_k}\|_E\,\|G_s\|_E \qquad \text{où} \quad ds(x)=f(x)\,dx.$$

Ici,

$$\|G_s\|_E^2 \quad \leqq \quad \int_K\int_K \log\left|\frac{x+t}{x-t}\right| dx\,dt,$$

un nombre fini dépendant seulement de K, et non de la paire (j, k), ce qui nous permet de conclure.

Désignons par $V(x)$ la fonction localement sommable que le procédé qu'on vient d'esquisser fait associer à un élément V de $\mathscr{D}$. Si $g \in L_\infty(0, \infty)$ est de *support compact* notre argument montre que la mesure p telle que $dp(x)=g(x)\,dx$ *appartient* à $\mathscr{M}$, et que

$$(1.3) \qquad \langle V, G_p\rangle_E \quad = \quad \int_0^\infty V(x)\,dp(x)$$

pour tout $V \in \mathscr{D}$. On n'a en effet que de prendre une suite de $m_j \in \mathscr{M}$ avec $\|G_{m_j}-V\|_E \underset{j}{\to} 0$ et d'utiliser la convergence des $G_{m_j}(x)$ vers $V(x)$ dans $L_1(K)$, K étant le support de g. La correspondance entre *éléments* V de $\mathscr{D}$ et *fonctions* $V(x)$ est *biunivoque*. Ce fait ne joue guère de rôle dans la suite; remarquons, toutefois, qu'il découle aisément de (1.3). Il suffit, en effet, de se rappeler que les G_p dont il s'agit sont *denses* (en norme $\|\ \ \|_E$) dans l'ensemble des G_m, $m \in \mathscr{M}$. Cette densité, bien connue d'ailleurs, est fournie par une légère modification du théorème 11.10 de [5]. Puisqu'il s'agit de potentiels (1.1), on peut simplement remplacer les moyennes employées pour la démonstration de ce théorème par des convolutions multiplicatives sur $(0, \infty)$.

Voici maintenant quelques formules :

$$(1.4) \qquad \int_0^\infty \log\left|\frac{x+t}{x-t}\right|\frac{dt}{t} \quad = \quad \frac{\pi^2}{2}, \qquad x>0;$$

$$(1.5) \qquad \int_0^A\int_A^\infty \log\left|\frac{x+t}{x-t}\right|\frac{dt}{t}\,\frac{dx}{x} \quad = \quad 2+\frac{2}{3^3}+\frac{2}{5^3}+\ldots, \qquad A>0;$$

$$(1.6) \qquad \frac{d}{dx}\int_A^\infty \log\left|\frac{x+t}{x-t}\right|\frac{dt}{t} \quad = \quad \frac{1}{x}\log\left|\frac{x+A}{x-A}\right|, \qquad 0<x<A;$$

$$(1.7) \qquad \frac{d}{dx}\int_0^A \log\left|\frac{x+t}{x-t}\right|\frac{dt}{t} \quad = \quad -\frac{1}{x}\log\left|\frac{x+A}{x-A}\right|, \qquad A<x<\infty.$$

Les deux dernières relations viennent directement en prenant $\tau=t/x$ comme variable d'intégration. Pour obtenir (1.5) on peut poser $\xi=x/A$, $\tau=t/A$ et ensuite développer

$\log|(\xi+\tau)/(\xi-\tau)|$ en série de puissances de ξ/τ. On arrive finalement à (1.4) en posant $\tau=t/x$ dans l'intégrale de gauche, puis en remarquant que l'expression donnée par cette substitution vaut $2\int_{-1}^{1}\log|1-\tau|(d\tau/\tau)$. Pour le calcul de celle-ci on peut se servir du théorème de Cauchy.

Nous allons employer trois lemmes. Le premier est connu ([4], p. 75); un raisonnement tauberien y conduit à partir de (1.1) et (1.4).

LEMME 1. — *Soit s une mesure sur* $[0,\infty)$ *telle que*

$$ds(t) \geqq -C\frac{dt}{t}, \tag{1.8}$$

$$\int_0^\infty G_s(x)\frac{dx}{x} < \infty, \tag{1.9}$$

(1.10) $G_s(x)\geqq -x\,Q(x)$ *avec une fonction continue* $Q>0$ *à support compact.*

Alors, $s(t)=\int_0^t ds(\tau)$ *tend vers* $(2/\pi^2)\int_0^\infty G_s(x)\,dx/x$ *lorsque* $t\to\infty$.

COROLLAIRE. — *Sous l'hypothèse du lemme,* $s(t)$ *reste borné pour* $0\leqq t<\infty$.

Dans la suite, seul le corollaire sera utilisé. On peut même s'en passer pour la construction du § 2, car là il s'agit d'une fonction bornée $s(t)$ *donnée explicitement.*

LEMME 2. — *Soit s une mesure telle que* $s(t)=\int_0^t ds(\tau)$ *soit borné sur* $[0,\infty)$. *Alors, pour* $A>0$ *les expressions*

$$\int_0^A\int_A^\infty \log\left|\frac{x+t}{x-t}\right|\frac{dt}{t}\,ds(x),$$

$$\int_0^A\int_A^\infty \log\left|\frac{t+x}{t-x}\right|ds(x)\frac{dt}{t},$$

sont bornées par des constantes indépendantes de A.

Preuve. — La *deuxième* expression est la limite, pour $M\to\infty$, de

$$\int_0^A\int_A^M \log\left|\frac{t+x}{t-x}\right|ds(x)\frac{dt}{t}.$$

Là, changeons l'ordre des intégrations et intégrons ensuite la variable x par parties. Avec l'aide de (1.7), on trouve :

$$s(x)\int_0^A \log\left|\frac{x+t}{x-t}\right|\frac{dt}{t}\Bigg]_A^M + \int_A^M s(x)\log\left|\frac{x+A}{x-A}\right|\frac{dx}{x}.$$

Si $|s(x)|\leqq K$ on voit par (1.4) que cela est en valeur absolue $\leqq 3\pi^2 K/2$, borne indépendante de A et de M.

La première expression se traite de manière analogue.

Si $A>0$, notons $\chi_A(t)$ la fonction caractéristique de l'intervalle $[0, A]$. Pour une mesure réelle s sur $[0, \infty)$ on note s_A la mesure donnée par la formule :

$$(1.11) \qquad ds_A(t)=\chi_A(t)\, ds(t).$$

LEMME 3. — *Soit s une mesure absolument continue sur $[0, \infty)$ avec $ds(t)/dt$ borné sur chaque intervalle fini $[0, A]$. Supposons que s satisfasse à (1.8) et qu'il y ait un $V \in \mathscr{D}$ et deux fonctions positives continues P, Q, aux supports compacts, tels que*

$$(1.12) \qquad \int_0^\infty V(x)\frac{dx}{x} \quad < \quad \infty,$$

$$(1.13) \qquad -x\,Q(x) \quad \leqq \quad G_s(x) \quad \leqq \quad V(x)+x\,P(x) \quad \text{p. p. } (^2), \quad x>0.$$

Alors, pour les mesures s_A données par (1.11) *on a* $\|G_{s_A}\|_E \leqq$ *une constante indépendante de* A.

Remarque. — La première restriction sur s assure que les $s_A \in \mathscr{M}$; elle pourrait être affaiblie.

Démonstration du lemme. — On a, par (1.11) et (1.13),

$$(1.14) \qquad G_{s_A}(x) \quad \geqq \quad -x\,Q(x)-\int_A^\infty \log\left|\frac{x+t}{x-t}\right| ds(t), \qquad x>0.$$

Sans restreindre la généralité on peut prendre $C=1$ dans (1.8) et de là, par (1.13),

$$(1.15) \qquad G_{s_A}(x) \quad \leqq \quad V(x)+x\,P(x)+\int_A^\infty \log\left|\frac{x+t}{x-t}\right|\frac{dt}{t}, \qquad x>0.$$

Posons $d\sigma(t)=ds(t)+(dt/t)$, $d\sigma_A(t)=\chi_A(t)\, d\sigma(t)$; on a $d\sigma(t)\geqq 0$, $d\sigma_A(t)\geqq 0$, donc, par (1.14) et (1.15),

$$(1.16) \qquad \|G_{s_A}\|_E^2 \quad = \quad \int_0^\infty G_{s_A}(x)\, ds_A(x) \quad \leqq \quad \int_0^\infty V(x)\, d\sigma_A(x)$$
$$+\int_0^A x\,P(x)\, d\sigma(x)+\int_0^A Q(x)\, dx+\int_0^A\int_A^\infty \log\left|\frac{x+t}{x-t}\right|\frac{dt}{t}\, d\sigma(x)$$
$$+\int_0^A\int_A^\infty \log\left|\frac{x+t}{x-t}\right| ds(t)\frac{dx}{x},$$

puisque $s_A \in \mathscr{M}$.

Les deuxième et troisième termes du membre de droite sont bornés pour $0<A<\infty$ — ils sont même constants pour A assez grand, vu que P et Q ont des supports compacts.

(^{2}) Désormais, on n'écrira plus « p. p. » dans les relations comme (1.13). Mais ce qualificatif sera toujours sous-entendu lorsqu'il s'agira des fonctions $V(x)$, $V \in \mathscr{D}$, qui, de façon générale, sont définies *presque partout* et non partout.

Ici, les conditions (1.8), (1.9) et (1.10) du lemme 1 sont remplies; la fonction $s(t)$ est donc bornée par le corollaire de ce lemme. On peut alors appliquer le lemme 2, et on voit que le dernier terme de droite dans (1.16) est borné pour $0<A<\infty$. Il en est de même de l'avant-dernier terme, qui vaut

$$\int_0^A \int_A^\infty \log\left|\frac{x+t}{x-t}\right| \frac{dt}{t} ds(x) + \int_0^A \int_A^\infty \log\left|\frac{x+t}{x-t}\right| \frac{dt}{t}\,\frac{dx}{x};$$

là, à la première intégrale on applique le lemme 2 et à la deuxième la formule (1.5).

Reste le premier terme de droite dans (1.16); il est égal à

$$\int_0^\infty V(x)\, ds_A(x) + \int_0^A V(x) \frac{dx}{x}.$$

La deuxième de ces deux intégrales-ci est bornée pour $0<A<\infty$ par (1.12) et (1.13). On voit que (1.16) se réduit finalement à

$$\|G_{s_A}\|_E^2 \leqq \int_0^\infty V(x)\, ds_A(x) + M \tag{1.17}$$

avec une constante M indépendante de A.

En vertu des propriétés de s, (1.3) s'applique à l'intégrale de droite dans (1.17), donnant

$$\|G_{s_A}\|_E^2 \leqq \langle V, G_{s_A}\rangle_E + M.$$

De là, par l'inégalité de Schwarz,

$$\|G_{s_A}\|_E^2 \leqq \|V\|_E \|G_{s_A}\|_E + M,$$

et par conséquent, $\|G_{s_A}\|_E \leqq (1/2)(\|V\|_E + \sqrt{\|V\|_E^2 + 4M})$. Cela achève la démonstration.

THÉORÈME. — *Soit s une mesure satisfaisant à l'hypothèse du lemme* 3, *en particulier*, *à la relation*

$$ds(t) \geqq -C\, dt/t.$$

Supposons qu'il y ait un $V \in \mathscr{D}$ *et deux fonctions* P *et* Q *comme dans l'énoncé du lemme* 3, *pour lesquels* (1.12) *et* (1.13) *sont valables.*

Il y a alors un $W \in \mathscr{D}$ *tel que* $W(x) = G_s(x)$ p.p., $x>0$, *et que*

$$\|W\|_E^2 = \int_0^\infty G_s(x)\, ds(x),$$

l'intégrale étant absolument convergente. On a

$$\sqrt{\int_0^\infty G_s(x)\, ds(x)} \leqq \frac{1}{2}\{\|V\|_E + \sqrt{\|V\|_E^2 + 4L}\} \tag{1.18}$$

avec

$$(1.19) \qquad L = \int_0^\infty x\,P(x)\,ds(x) + C\int_0^\infty (x\,P(x)+V(x)-G_s(x))\frac{dx}{x}.$$

Démonstration. — De (1.1), (1.11), (1.8) et (1.4) il est évident que $G_{s_A}(x) \to G_s(x)$ pour $x>0$ lorsque $A\to\infty$. On voit d'autre part par (1.12) et (1.13) que $\int_0^\infty |G_s(x)|\,dx/x<\infty$; selon (1.13) et (1.8) l'expression

$$\int_0^\infty G_s(x)\,ds(x)$$

a donc un sens (la valeur $+\infty$ étant possible *a priori*), et elle est égale à $\lim_{A\to\infty}\int_0^A G_s(x)\,ds(x)$.

Faisons maintenant emploi du lemme 3. Grâce à lui, on peut prendre *une suite de valeurs de* A *tendant vers l'infini* pour laquelle les G_{s_A} tendent faiblement, dans $\mathscr{D}$, vers un de ses éléments, soit W. On voit d'abord que $W(x)=G_s(x)$ p. p., $x>0$.

La formule (1.3) s'applique aux s_A, et donne

$$(1.20) \qquad \int_0^A G_s(x)\,ds(x) = \int_0^\infty W(x)\,ds_A(x) = \langle W, G_{s_A}\rangle_E.$$

En faisant parcourir par A la suite qu'on vient de nommer, le dernier membre de droite dans (1.20) tend vers $\|W\|_E^2<\infty$ tandis que le membre de gauche tend vers $\int_0^\infty G_s(x)\,ds(x)$; cette intégrale est donc *finie* (même absolument convergente) et égale à $\|W\|_E^2$.

Venons-en à (1.18). Posons $d\sigma(x)=ds(x)+C(dx/x)$ de sorte que $d\sigma(x)\geqq 0$ sur $[0,\infty)$ par (1.8). De (1.13) il vient alors

$$(1.21) \qquad \begin{aligned}\int_0^\infty G_s(x)\,ds(x) &\leqq \int_0^\infty (V(x)+x\,P(x))\,d\sigma(x) - C\int_0^\infty G_s(x)\frac{dx}{x}\\ &= \int_0^\infty V(x)\,ds(x) + C\int_0^\infty (V(x)-G_s(x))\frac{dx}{x} + \int_0^\infty x\,P(x)\,d\sigma(x).\end{aligned}$$

D'après (1.12) et (1.13) on a

$$\int_0^\infty |V(x)|\frac{dx}{x} < \infty,$$

d'où

$$\int_0^\infty V(x)\,ds(x) = \lim_{A\to\infty}\int_0^A V(x)\,ds(x)$$

par (1.8). Selon (1.3) et (1.11) on a d'autre part $\int_0^A V(x)\,ds(x) = \langle V, G_{s_A} \rangle_E$, ce qui tend vers $\langle V, W \rangle_E$ lorsque A tend vers l'infini par notre suite de valeurs spéciales. Dans (1.21), le dernier membre de droite est donc égal à $\langle V, W \rangle_E + L$, où L est donné par (1.19). En même temps, le membre de gauche de (1.21) vaut $\| W \|_E^2$, comme on l'a vu tout à l'heure. Après emploi de l'inégalité de Schwarz, (1.21) devient donc $\| W \|_E^2 \leqq \| V \|_E \| W \|_E + L$, ce qui entraîne (1.18).

Le théorème est démontré.

2. L'exemple

Nous allons maintenant construire un poids pair $W(x) \geqq 1$ satisfaisant aux conditions (0.1) et (0.2), et même à (0.3), et jouissant des propriétés suivantes :

A. W *admet des multiplicateurs.*

B. *Il n'y a aucun* $V \in \mathscr{D}$ (voir § 1) *avec* $V(x)/x$ *borné* (3) *pour* $x \to 0$ *et* $\int_0^\infty V(x)\,dx/x < \infty$ *tel que* $W(x) \leqq C \exp(x V(x))$, $x \geqq 0$.

La construction utilise quelques formules, établies dans [6], concernant les logarithmes des produits canoniques de type exponentiel. Ces résultats sont faciles à vérifier; celui ou celle qui voudrait le faire sans consultation de [6] trouvera des indications brèves mais suffisantes au fil de la discussion.

On commence, comme dans [1], § 2, en posant

$$x_p = \exp(p^{1/3}), \qquad p \geqq 8, \tag{2.1}$$

$$\Delta_8 = x_8, \qquad \Delta_p = x_p - x_{p-1}, \qquad p \geqq 9. \tag{2.2}$$

Notons que

$$\Delta_p \sim \frac{1}{3} p^{-2/3} x_p = \frac{1}{3} (\log x_p)^{-2} x_p, \qquad p \to \infty, \tag{2.3}$$

d'où

$$\sum_8^\infty \frac{\Delta_p^2}{x_p^2} < \infty \tag{2.4}$$

tandis que

$$\sum_8^\infty \frac{\Delta_p^2}{x_p^2} \log \Delta_p = \infty. \tag{2.5}$$

(3) Cette restriction aux fonctions $V(x)$ avec $V(x)/x$ borné près de 0 est faite pour alléger un détail dans ce qui va suivre. Elle n'a rien d'essentiel et on peut la supprimer complètement. Voir la remarque à la fin de ce paragraphe.

Soit $\{\lambda_p\}$ une suite de nombres positifs <1 tendant vers 1 en croissant – l'allure de cette croissance sera spécifiée à la fin de ce paragraphe. Prenons la fonction croissante $\nu(t)$, $t \geqq 0$, définie de la manière suivante :

$$\nu(t) = \begin{cases} \lambda_8 t, & 0 \leqq t < x_8, \\ x_{p-1} + \lambda_p(t - x_{p-1}), & x_{p-1} \leqq t < x_p \quad \text{et} \quad p > 9. \end{cases} \tag{2.6}$$

On a alors

$$\nu(t) \leqq t, \qquad t \geqq 0, \tag{2.7}$$

et, par (2.3),

$$\nu(t) \geqq t - \frac{t}{(\log t)^2} \quad \text{pour } t \text{ assez grand.} \tag{2.8}$$

Posons

$$F_1(z) = \int_0^\infty \log\left|1 - \frac{z^2}{t^2}\right| d\nu(t). \tag{2.9}$$

A l'aide de l'intégration par parties, on trouve, après deux changements de variable ([6], p. 127-128 et 136),

$$F_1(x) = 2\int_0^1 \left(\frac{\nu(x\tau)}{\tau} - \tau\nu\left(\frac{x}{\tau}\right)\right)\frac{d\tau}{1-\tau^2}, \qquad x > 0, \tag{2.10}$$

d'où, puisque ν croît,

$$F_1(x) \leqq 2\nu(x)\log\frac{1}{\gamma} + 2\int_0^\gamma \left(\frac{\nu(x\tau)}{\tau} - \tau\nu\left(\frac{x}{\tau}\right)\right)\frac{d\tau}{1-\tau^2}, \qquad x > 0, \tag{2.11}$$

quel que soit $\gamma \in (0, 1)$.

Si $x > 0$ est *grand*, portons (2.7) et (2.8) dans (2.11) et posons $\gamma = 1 - (\log x)^{-2}$ là-dedans. Il vient

$$F_1(x) \leqq A\frac{x \log\log x}{(\log x)^2} \quad \text{pour } x \text{ grand,} \tag{2.12}$$

A étant une constante. Fixons un très grand nombre l et prenons :

$$T(x) = \begin{cases} 0, & 0 < x < l, \\ A\dfrac{x \log\log x}{(\log x)^2}, & x \geqq l. \end{cases} \tag{2.13}$$

Notons que $T(x)$ *croît*, que

$$\int_0^\infty \frac{T(x)}{x^2}dx < \infty, \tag{2.14}$$

et enfin que

$$F_1(x) \leqq T(x)+\text{Cte}, \qquad x>0, \tag{2.15}$$

grâce à (2.12), (2.13) et (2.9), vu que $\nu(t)$ est croissant.

Selon la recette de [6], p. 146-147, on construit maintenant une fonction $F_2(z)$ à partir de $T(x)$. Prenons

$$\mu(t) = Bt\int_t^\infty \frac{T(\tau)}{\tau^2}d\tau \tag{2.16}$$

avec une constante B qu'on précisera tout à l'heure, et posons

$$F_2(z) = \int_0^\infty \log\left|1-\frac{z^2}{t^2}\right|d\mu(t). \tag{2.17}$$

Pour $x>0$, $F_2(x)$ est donné par une formule comme (2.10) avec ν remplacé par μ. Là, on fait encore une intégration par parties, et après l'introduction d'une nouvelle variable on trouve ([6], p. 137)

$$F_2(x) = -x\int_0^\infty \log\left|\frac{x+t}{x-t}\right| d\left(\frac{\mu(t)}{t}\right). \tag{2.18}$$

En y portant (2.16) on voit, puisque $T(x)$ croît, que

$$F_2(x) \geqq BT(x)\int_1^\infty \log\left|\frac{1+\tau}{1-\tau}\right|\frac{d\tau}{\tau^2},$$

c'est-à-dire, *si* B *est choisi assez grand*,

$$F_2(x) \geqq 2T(x). \tag{2.19}$$

Soit alors $F(z)=F_1(z)-F_2(z)$; on a, par (2.15) et (2.19),

$$F(x) \leqq \text{Cte}, \qquad x \text{ réel}, \tag{2.20}$$

et

$$F(x) = \int_0^\infty \log\left|1-\frac{z^2}{t^2}\right| d(\nu(t)-\mu(t)). \tag{2.21}$$

Examinons la fonction $\nu(t)-\mu(t)$ figurant dans (2.21). De (2.7), (2.8), (2.14) et (2.16) on tire d'abord

$$\frac{\nu(t)-\mu(t)}{t} \to 1, \qquad t\to\infty. \tag{2.22}$$

On a, d'autre part, pour $x_{p-1}<t<x_p$,

$$\nu'(t)-\mu'(t) = \lambda_p + B\frac{T(t)}{t} - B\int_t^\infty \frac{T(\tau)}{\tau^2}d\tau,$$

et, B étant donné, cela est >0 si le nombre l dans (2.13) est choisi assez grand. On peut donc faire la construction de sorte que $\nu(t)-\mu(t)$ soit une *fonction croissante*.

Nous arrivons à la définition de notre poids $W(x)$. Comme $\nu(t)-\mu(t)$ croît, on voit, par (2.21) et (2.22) que $F(z) \leqq \pi|z|+o(|z|)$, d'où, par (2.20) et un théorème de Phragmén-Lindelöf,

$$F(z) \leqq \pi|y|+\text{Cte}. \tag{2.23}$$

Cette inégalité et le fait, évident d'après (2.21), que $F(z)$ soit *harmonique* dans chacun des demi-plans $\mathscr{I} z>0$, $\mathscr{I} z<0$, entraînent que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(t)}{1+t^2}\,dt > -\infty,$$

et, vu (2.22), que la représentation de Poisson

$$F(z) = \pi|y|+\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|y|\,F(t)\,dt}{(x-t)^2+y^2} \tag{2.24}$$

soit valable. Si la constante $K>0$ est assez grand on déduit en dérivant (2.24) par rapport à x que

$$\left|\frac{d(K-F(x+i))}{dx}\right| \leqq K-F(x+i), \tag{2.25}$$

compte tenu de (2.23). Nous prenons alors

$$W(x) = \exp(K-F(x+i)); \tag{2.26}$$

$W(x)$ est *pair* [par (2.21)], $\geqq 1$ [par (2.23)], et satisfait aux conditions (0.1) [par (2.24)] et (0.3) [par (2.25)].

Montrons maintenant que W *admet des multiplicateurs*. A cette fin, nous allons d'abord construire une fonction positive croissante $\sigma(t)$, $t \geqq 0$, telle que $\sigma(t)/t \leqq \eta$, *un nombre positif arbitraire*, et que

$$\int_{0}^{\infty} \log\left|1-\frac{x^2}{t^2}\right| d\sigma(t)-F(x) \leqq \text{Cte pour } x \text{ assez grand}. \tag{2.27}$$

La quantité $\eta>0$ étant donnée, prenons un p_0 assez grand pour que $\lambda_p>1-(\eta/2)$ si $p>p_0$, et posons

$$\sigma_1(t)=\begin{cases} 0, & t<x_{p_0}, \\ \dfrac{\eta}{2}x_{p-1}+\left\{\lambda_p-\left(1-\dfrac{\eta}{2}\right)\right\}(t-x_{p-1}), & x_{p-1}\leqq t<x_p \quad \text{et} \quad p>p_0. \end{cases} \tag{2.28}$$

La fonction $\sigma_1(t)$ croît, on a $\sigma_1(t) \leqq (\eta/2)\, t$, et, par (2.28) et (2.6),

$$\sigma_1(t) - \nu(t) = -\left(1 - \frac{\eta}{2}\right) t, \qquad t \geqq x_{p_0}. \tag{2.29}$$

Soit

$$G_1(z) \quad = \quad \int_0^\infty \log\left|1 - \frac{z^2}{t^2}\right| d\sigma_1(t); \tag{2.30}$$

à la différence des *membres de droite* de (2.30) et de (2.9) on peut appliquer un analogue de la formule (2.18). On trouve ainsi, pour $x > 0$,

$$G_1(x) - F_1(x) \quad = \quad -x \int_0^\infty \log\left|\frac{x+t}{x-t}\right| d\left(\frac{\sigma_1(t) - \nu(t)}{t}\right),$$

et ceci est *borné* pour les grandes valeurs de x à cause de (2.29).

Nous avons affaire à la fonction $F_2(x)$ aussi. Selon (2.16) et (2.18) on a

$$F_2(x) \quad = \quad Bx \int_0^\infty \log\left|\frac{x+t}{x-t}\right| \frac{T(t)}{t^2}\, dt, \qquad x > 0. \tag{2.31}$$

Notons $\Theta(x)$ l'expression de droite. Comme $T(x) \geqq 0$ on peut employer le théorème de Fubini pour déduire, de (2.14) et (1.4),

$$\int_0^\infty \frac{\Theta(x)}{x^2}\, dx \quad < \quad \infty. \tag{2.32}$$

Un changement de variable donne

$$\Theta(x) \quad = \quad B \int_0^\infty \log\left|\frac{1+\tau}{1-\tau}\right| \frac{T(x\tau)}{\tau^2}\, d\tau,$$

ce qui montre que $\Theta(x)$, tout comme $T(x)$, est croissant pour $x \geqq 0$.

A partir de $\Theta(x)$ on construit une fonction $G_2(z)$ selon le procédé suivi ci-dessus pour passer de $A(x \log\log x/(\log x)^2)$ à $F_2(z)$. Fixons un grand nombre m, et posons

$$\Theta_0(x) = \begin{cases} 0, & 0 < x < m, \\ \Theta(x), & x \geqq m. \end{cases} \tag{2.33}$$

Écrivons

$$\sigma_2(t) \quad = \quad \frac{\eta}{2}\, t - Bt \int_t^\infty \frac{\Theta_0(\tau)}{\tau^2}\, d\tau. \tag{2.34}$$

Si m est assez grand on voit comme lors de l'examen de $\nu(t)-\mu(t)$ que $\sigma_2(t)$ est *croissant*. Soit

$$(2.35)\qquad G_2(z) = \int_0^\infty \log\left|1-\frac{z^2}{t^2}\right| d\sigma_2(t).$$

Un raisonnement semblable à celui suivi pour arriver à (2.19) fait voir que $G_2(x) < -2\Theta_0(x)$, $x \geqq 0$, c'est-à-dire que

$$(2.36)\qquad G_2(x)+F_2(x) \leqq 0 \qquad \text{pour} \quad x \geqq m$$

selon (2.31) et (2.33).

Pour $\sigma(t)$ on prend la somme $\sigma_1(t)+\sigma_2(t)$. La fonction $\sigma(t)$ est croissante et $\sigma(t) \leqq \eta t$ par (2.28) et (2.34). Puisque $F(z)=F_1(z)-F_2(z)$, (2.27) est une conséquence de (2.30), (2.35), (2.36), et du fait que $G_1(x)-F_1(x)$ soit borné pour x grand.

Posons

$$(2.37)\qquad G(z) = \int_0^\infty \log\left|1-\frac{z^2}{t^2}\right| d\sigma(t)$$

de sorte que

$$(2.38)\qquad G(z)-F(z) = \{G_1(z)-F_1(z)\}+\{G_2(z)+F_2(z)\}.$$

Le premier terme de droite entre accolades est sommable sur les intervalles finis de l'axe réel — il n'a que des singularités logarithmiques aux points $\pm x_p$, $p \leqq p_0$. Il est en outre borné sur un ensemble réel de la forme $(-\infty, -a) \cup (a, \infty)$ comme on l'a vu tout à l'heure. On voit donc par (2.9), (2.30) et (2.29) que la représentation de Poisson

$$G_1(z)-F_1(z) = -\pi\left(1-\frac{\eta}{2}\right)|y|+\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^\infty \frac{|y|\{G_1(t)-F_1(t)\}}{|z-t|^2}\,dt$$

est valable. En regardant (2.16), (2.17), (2.34) et (2.35) et en tenant compte de (2.36) on se convainc aisément de la justesse d'une représentation analogue pour $G_2(z)+F_2(z)$. En portant les formules ainsi fournies dans (2.38), on obtient

$$(2.39)\qquad G(z)-F(z) = -\pi(1-\eta)|y|+\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^\infty \frac{|y|\{G(t)-F(t)\}}{|z-t|^2}\,dt.$$

Or, $G(t)-F(t)$ est *sommable* sur les intervalles finis et *borné* supérieurement pour $|t|$ grand par (2.27) et (2.37). Par conséquent, (2.39) entraîne

$$(2.40)\qquad G(x+i)-F(x+i) \leqq \text{Cte}, \qquad -\infty < x < \infty.$$

Désignons par $[\sigma(t)]$ le plus grand *entier* $\leqq \sigma(t)$. Comme $\sigma(t) \leqq \eta t$, on peut définir une *fonction entière* $h(z)$ *de type exponentiel* $\pi\eta$ par la formule

$$(2.41)\qquad \log|h(z)| = \int_0^\infty \log\left|1-\frac{z^2}{t^2}\right| d[\sigma(t)].$$

En retranchant (2.37) de (2.41) et en intégrant la différence par parties, on voit facilement ([6], p. 133-134) que

$$(2.42)\qquad \log|h(x+i)| \leqq G(x+i)+k\log(|x|+2)$$

avec une constante k.

L'établissement de la propriété A s'achève maintenant. Posons

$$\varphi(z) = \left(\frac{1}{z}\sin\frac{\pi\eta z}{n}\right)^n h(z+i)$$

avec un entier $n>k$ et la fonction h donnée par (2.41). La fonction φ est *entière*, *de type exponentiel* $2\pi\eta$, *et non-nulle*, et par (2.26), (2.40) et (2.42) on a

$$W(x)|\varphi(x)| \leqq \mathrm{Cte}, \qquad -\infty<x<\infty.$$

Comme $\eta>0$ est arbitraire, W *admet des multiplicateurs*.

Nous arrivons *à la propriété* B. Pour sa vérification on se sert du théorème du § 1.

Raisonnant par l'absurde, supposons qu'il y *ait* un $V\in\mathscr{D}$ tel que

$$(2.43)\qquad \log W(x) \leqq xV(x)+\mathrm{Cte}, \qquad x\geqq 0,$$

$$(2.44)\qquad V(x)/x=O(1), \qquad x\to 0,$$

et

$$(2.45)\qquad \int_0^\infty V(x)\frac{dx}{x} < \infty.$$

Notons d'abord que le facteur 2 dans le membre de droite de (2.19) assure, avec (2.13) et (2.15), que $F(x)=F_1(x)-F_2(x)\to-\infty$ pour $x\to\infty$. Par (2.24) et (2.26) on a donc $W(x)\to\infty$ pour $x\to\pm\infty$, et (2.43) peut être remplacé par

$$(2.46)\qquad \log W(x)-\log W(0) \leqq 2xV(x) \text{ pour } x \text{ grand}.$$

On peut maintenant trouver deux fonctions positives continues P, Q, aux supports compacts, telles que

$$(2.47)\qquad -x^2Q(x) \leqq F(i)-F(x+i) \leqq 2xV(x)+x^2P(x), \qquad x\geqq 0.$$

Cette relation sera vraie, en effet, quelles que soient les fonctions P et Q positives, dès que $x\geqq$ un certain nombre b, en vertu de (2.46) et de la formule (2.26). On a, d'autre part,

$$F(x+i) = F(i)+Cx^2+O(x^4)$$

pour x au voisinage de 0, $F(x+i)$ étant *paire* et *infiniment dérivable* comme fonction de x. Ce fait et (2.44), pris ensemble, permettent d'obtenir des fonctions P et Q ayant les propriétés susdites telles que (2.47) reste vraie pour $0\leqq x\leqq b$.

L'expression $F(i)-F(x+i)$ peut s'écrire $xG_s(x)$ avec une fonction G_s définie par (1.1). En effet, à l'aide de l'identité,

$$\log\left|1-\frac{x+i}{t}\right| = \log\left|1-\frac{x}{t-i}\right|+\log\left|1-\frac{i}{t}\right|$$

on tire, de (2.21),

$$F(x+i)-F(i) = \int_0^\infty \log\left|\left(1-\frac{x}{t-i}\right)\left(1+\frac{x}{t+i}\right)\right| d(\nu(t)-\mu(t)),$$

d'où, par la formule de Poisson (*voir* [3], p. 286-287 pour plus de détails),

$$F(x+i)-F(i) = \int_0^\infty \log\left|1-\frac{x^2}{t^2}\right| dp(t), \tag{2.48}$$

où

$$\frac{dp(t)}{dt} = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \left\{\frac{1}{(t-\tau)^2+1}+\frac{1}{(t+\tau)^2+1}\right\} d(\nu(\tau)-\mu(\tau)). \tag{2.49}$$

Prenons $p(0)=0$. Comme la fonction $\nu(t)-\mu(t)$ *croît*, il en est de même de $p(t)$, et un analogue de (2.18) donne, appliqué à (2.48),

$$F(i)-F(x+i) = x\int_0^\infty \log\left|\frac{x+t}{x-t}\right| d\left(\frac{p(t)}{t}\right). \tag{2.50}$$

On voit par (2.22) et (2.49) que $p(t)/t$ est borné, de sorte que

$$d\left(\frac{p(t)}{t}\right) \geqq -C\frac{dt}{t}.$$

L'hypothèse du théorème du § 1 est donc satisfaite pour la fonction $G_s(x)$ formée à partir de $s(t)=p(t)/t$, et par ce théorème on conclut que

$$\int_0^\infty \frac{F(i)-F(x+i)}{x}\, d\left(\frac{p(x)}{x}\right) < \infty. \tag{2.51}$$

Or, c'est cette relation, justement, qu'on va mettre *en défaut*. Notons, en premier lieu, que (2.23), (2.24) et la parité de $F(i)-F(x+i)$ entraînent

$$\int_0^\infty \frac{|F(i)-F(x+i)|}{x^2}\, dx < \infty,$$

d'où, $p(x)/x$ étant borné,

$$\int_0^\infty \frac{p(x)}{x^3}\,|F(i)-F(x+i)|\, dx < \infty.$$

Si (2.51) *est vrai*, il faut donc que

$$(2.52) \qquad \int_1^\infty \frac{F(i)-F(x+i)}{x^2}\, dp(x) \quad < \quad \infty,$$

$(F(i)-F(x+i))/x^2$ étant borné au voisinage de 0. On a $\int_1^\infty dp(x)/x^2 < \infty$ puisque $p(x)$ croît et $p(x)/x$ est borné. Ce fait et l'inégalité (2.23) montrent qu'il est suffisant, pour mettre (2.52) [et donc (2.51)] *en défaut*, de vérifier que

$$(2.53) \qquad \sum_p \frac{1}{x_p^2} \int_{x_p-1}^{x_p+1} F(x+i)\, dp(x) \quad = \quad -\infty,$$

les x_p étant donnés par (2.1).

Regardons d'abord la croissance de p sur $[x_p-1, x_p+1]$. La fonction croissante $\nu(t)-\mu(t)$ a un *saut* égal à $(1-\lambda_p)\Delta_p$ au point x_p d'après (2.6) et (2.16). Donc, par (2.49),

$$(2.54) \qquad \int_{x_p-1}^{x_p+1} dp(t) \quad \geqq \quad \frac{1}{2}(1-\lambda_p)\Delta_p.$$

Afin de trouver une borne supérieure pour $F(x+i)$ sur $[x_p-1, x_p+1]$, appliquons la formule de Jensen à la fonction $F(z)$. Pour $x_p-1 \leqq \xi \leqq x_p+1$ et $r>0$, posons

$$N(\xi, r) = \int_J d(\nu(t)-\mu(t)),$$

où J est l'intersection de l'axe réel avec le disque de rayon r autour du point $\xi+i$. On a, par (2.21), pour tout $R>0$,

$$(2.55) \qquad F(\xi+i) \quad \leqq \quad \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(\xi+i+Re^{i\theta})\, d\theta - \int_0^R \frac{N(\xi, r)}{r}\, dr.$$

Si $x_p-1 \leqq \xi \leqq x_p+1$ on a $N(\xi, r) \geqq (1-\lambda_p)\Delta_p$ dès que $r \geqq \sqrt{2}$ à cause du saut de $\nu(t)-\mu(t)$ au point x_p. Portons cette inégalité et (2.23) dans (2.55) et prenons $R=\sqrt{2}\Delta_p$; on trouve

(2.56)
$$F(\xi+i) \quad \leqq \quad \mathrm{Cte}+2\sqrt{2}\Delta_p-(1-\lambda_p)\Delta_p\log\Delta_p \quad \text{pour} \quad x_p-1 \leqq \xi \leqq x_p+1.$$

On n'a maintenant qu'à joindre (2.56) et (2.54). Grâce à (2.4), la divergence de (2.53) est équivalente à celle de

$$(2.57) \qquad \sum_8^\infty (1-\lambda_p)^2 \frac{\Delta_p^2}{x_p^2} \log \Delta_p.$$

Or, nous avons la relation (2.5). Donc, si les λ_p croissent *assez lentement* vers leur limite 1, (2.57) sera divergente comme (2.5) l'est. Cela entraînera (2.53) qui, on l'a vu, est en contradiction avec l'existence d'un $V \in \mathcal{D}$ satisfaisant à (2.43), (2.44) et (2.45). Notre poids W jouira alors de la propriété B.

Remarque. — En faisant davantage appel à la théorie du potentiel, on peut voir que la fonction $W(x)$ construite ci-dessus jouit d'une propriété un peu plus forte que B, à savoir :

$$\textit{Il n'y a aucun } V \in \mathcal{D} \textit{ avec } \qquad \int_0^\infty \frac{|V(x)|}{x} dx < \infty$$

$$\textit{tel que } W(x) \leqq C \exp(x V(x)), \quad x \geqq 0.$$

Ici, il n'est plus question de la condition $V(x) = O(x)$, $x \to 0$.

Supposons, raisonnant par l'absurde, qu'il y *ait* un $V \in \mathcal{D}$ avec $W(x) \leqq C\exp(x V(x))$ pour $x \geqq 0$ et $\int_0^\infty (|V(x)|/x)\, dx < \infty$, et montrons comment construire, à partir de ce V, un autre $V_1 \in \mathcal{D}$ ayant les mêmes propriétés avec, en outre, $V_1(x)/x$ borné près de l'origine. Comme l'existence d'un tel V_1 est incompatible avec la propriété B déjà établie, cette construction mettra en défaut celle de V.

Considérons le sous-espace fermé $\mathcal{D}_1$ de $\mathcal{D}$ engendré par les G_m avec $m \in \mathcal{M}$ *portée* par $[1, \infty)$. Si, dans (1.1), on remplace x par la variable complexe z, on obtient une fonction impaire $G_m(z)$ harmonique dans $\mathbb{C} \sim (-\infty, -1] \sim [1, \infty)$. Dans ce cas, $\|G_m\|_E^2$ est égale à l'intégrale de Dirichlet de G_m sur $\mathbb{C} \sim (-\infty, -1] \sim [1, \infty)$. Les $U \in \mathcal{D}_1$ sont donc *infiniment dérivables* sur $[0, 1)$ et *nuls* au point 0, tout comme les G_m susdites.

Soit alors V_1 la projection de V sur $\mathcal{D}_1$ dans l'espace hilbertien $\mathcal{D}$; on a $V_1(x) = O(x)$ près de 0, et $V_1(x)$ est borné inférieurement sur $[0, \infty)$ puisque $V(x)$ l'est. On a finalement $V_1(x) = V(x)$ p. p. pour $x \geqq 1$, car si f est une fonction quelconque mesurable, bornée et à support compact $\subseteq [1, \infty)$, on a $G_m \in \mathcal{D}_1$ pour $dm(x) = f(x)\, dx$, d'où $\int_1^\infty (V(x) - V_1(x)) f(x)\, dx = 0$. La fonction $V_1(x)$ a donc les propriétés voulues.

On peut aussi procéder de la manière suivante. Étant donné un $V \in \mathcal{D}$ comme ci-dessus, posons $V_2(x) = |V(x)|$, $x \geqq 0$. Il est alors évident que $W(x) \leqq C\exp(x V_2(x))$ pour $x \geqq 0$ et que $\int_0^\infty (V_2(x)/x)\, dx < \infty$. Comme la fonction $V_2(x)$ est une *contraction* de $V(x)$, V_2 appartient aussi à $\mathcal{D}$. Pour V_2, un analogue de (2.47) est obtenu facilement en employant la *positivité* de $V_2(x)$ au lieu de la relation (2.44). A partir de là, on raisonne comme dans la démonstration du théorème.

3. Une condition nécessaire et suffisante

La comparaison des exemples de [1] et du § 2 nous conduit à la réflexion suivante. Soit $W(x) \geqq 1$ un poids pair satisfaisant à (0.1) et à (0.2) et supposons qu'il admette la représentation

$$(3.1) \qquad \log W(x) = C + \int_0^\infty \log\left|1 - \frac{x^2}{t^2}\right| d\rho(t)$$

avec une mesure réelle ρ. Si ρ est *positive*, on peut déduire (par exemple, du lemme 1, § 1, joint à un analogue de (2.18), ou bien du lemme 3 ci-dessous) que $\rho(t)/t$ est *borné* pour les grandes valeurs de t, ce qui permet d'invoquer le théorème de Beurling et Malliavin (*voir* [2], [3] ou [4]) et d'en conclure que W *admet* des multiplicateurs. L'affaire ne marche plus de cette façon si la mesure ρ est *négative*; cela se voit par l'exemple de [1]. Pourtant, l'exemple du § 2 montre qu'avec *certaines* mesures négatives ρ, (3.1) *peut* fournir des poids admettant des multiplicateurs.

Ces circonstances suggèrent que, pour les poids W satisfaisant à (0.1) et à (0.2), représentés par (3.1), l'existence des multiplicateurs dépendrait d'une condition portant sur la *partie négative* de la mesure ρ. A regarder de près la différence entre les exemples de [1] et du § 2, on en vient à penser que cette condition s'exprimerait en termes d'un critère déjà employé par Beurling et Malliavin dans l'étude des systèmes d'exponentielles imaginaires (*voir* [7], p. 56 et seq.). Nous allons voir que cette idée est bien fondée.

Il nous faut quelques lemmes.

LEMME 1. — *Soit* $\nu(t)$ *une fonction impaire et croissante avec* $\nu(t)/t$ *borné, posons*

$$(3.2) \qquad F(x) = \int_0^\infty \log\left|1-\frac{x^2}{t^2}\right| d\nu(t),$$

et supposons que

$$(3.3) \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|F(x)|}{x^2}\, dx < \infty.$$

On a alors

$$(3.4) \qquad \nu(x) = -Kx - \frac{1}{\pi^2} \fint_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{x-t}+\frac{t}{t^2+1}\right) F(t)\, dt$$

avec une constante K.

Preuve. — Notre hypothèse nous permet d'intégrer (3.2) par parties. On trouve ainsi

$$F(x) = \fint_0^\infty \frac{2x^2}{x^2-t^2}\,\frac{\nu(t)}{t}\, dt,$$

ou bien, $\nu(t)/t$ étant pair,

$$(3.5) \qquad \frac{F(x)}{x} = \fint_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{x-t}+\frac{t}{t^2+1}\right)\frac{\nu(t)}{t}\, dt.$$

Comme $\nu(x)/x$ est borné, on voit par (3.5) et (3.3) que $((F(x)/x)-i\pi(\nu(x)/x))(x+i)^{-2}$ appartient à H_1 (pour le demi-plan supérieur). Par conséquent,

$$\begin{aligned}\frac{\nu(x)}{x} &= -\frac{1}{\pi^2}\fint_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{x-t}+\frac{t}{t^2+1}\right)\frac{F(t)}{t}\, dt + \mathrm{Cte} \\ &= -\frac{1}{\pi^2}\fint_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{(x-t)\,t}\,F(t)\, dt - \frac{1}{\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{F(t)}{t^2+1}\, dt + \mathrm{Cte},\end{aligned}$$

d'où

$$\nu(x) = -Kx - \frac{1}{\pi^2} \fint_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{x-t}+\frac{1}{t}\right) F(t)\,dt$$

avec une constante K. Puisque $F(t)$ est pair, cette formule est équivalente à (3.4).

NOTATION. — *Si* $\int_{-\infty}^{\infty} |F(t)|\,dt/(t^2+1) < \infty$, *on écrit :*

$$\tilde{F}(x) = \frac{1}{\pi} \fint_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{x-t}+\frac{t}{t^2+1}\right) F(t)\,dt; \tag{3.6}$$

$\tilde{F}(x)$ *est une transformée de Hilbert de* $F(x)$.

LEMME 2. — *Soit* $F(x)$ *une fonction paire, trois fois dérivable, telle que*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|F(x)|}{x^2+1}\,dx < \infty,$$

et supposons que $\tilde{F}(x)$ *soit la différence de deux fonctions croissantes, chacune étant* $O(x)$ *pour* $0 \leqq x < \infty$. *Alors*

$$F(x) = F(0) - \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \log\left|1-\frac{x^2}{t^2}\right| d\tilde{F}(t). \tag{3.7}$$

Preuve. — Il résulte des propriétés de F que $F(x)-F(0)=O(x^2)$ au voisinage de 0, d'où

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|F(x)-F(0)|}{x^2}\,dx < \infty, \tag{3.8}$$

grâce à l'hypothèse. Si, dans le membre de droite de (3.6) on met $F(t)-F(0)$ à la place de $F(t)$, on obtient encore la valeur $\tilde{F}(x)$. Comme $F(t)$ est pair, $\tilde{F}(x)$ est impair, donc $\tilde{F}(0)=0$. On voit ainsi que

$$\tilde{F}(x) = \frac{1}{\pi} \fint_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{x-t}+\frac{1}{t}\right)(F(t)-F(0))\,dt,$$

c'est-à-dire,

$$\frac{\tilde{F}(x)}{x} = \frac{1}{\pi} \fint_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x-t}\,\frac{F(t)-F(0)}{t}\,dt. \tag{3.9}$$

Selon l'hypothèse, $\tilde{F}(x)/x$ est borné, donc $[((F(x)-F(0))/x)+i(\tilde{F}(x)/x)]\ (x+i)^{-2}$ appartient à H_1 par (3.9) et (3.8). Par conséquent, $(F(x)-F(0))/x$ étant impair et $\tilde{F}(t)/t$ pair,

$$\frac{F(x)-F(0)}{x} = -\frac{1}{\pi} \fint_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{x-t}+\frac{t}{t^2+1}\right)\frac{\tilde{F}(t)}{t}\,dt = -\frac{1}{\pi} \fint_0^{\infty} \frac{2x}{x^2-t^2}\,\frac{\tilde{F}(t)}{t}\,dt.$$

De là, il vient

$$\mathrm{F}(x) \quad = \quad \mathrm{F}(0)-\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{2x^2}{x^2-t^2}\,\frac{\tilde{\mathrm{F}}(t)}{t}\,dt.$$

Les propriétés de $\tilde{\mathrm{F}}$ nous permettent finalement d'intégrer le deuxième terme de droite par parties, et on obtient (3.7).

LEMME 3. — *Soit* $\mathrm{F}(x)$ *une fonction paire, infiniment dérivable, soit*

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{|\mathrm{F}(x)|}{x^2+1}\,dx \quad < \quad \infty,$$

et supposons qu'il y ait une fonction croissante $p(x)$ *avec* $p(x)=\mathrm{O}(x)$ *et* $\tilde{\mathrm{F}}(x)-p(x)$ *décroissant sur* $[0, \infty)$.

Le rapport $\tilde{\mathrm{F}}(x)/x$ *est alors borné sur* $(-\infty, \infty)$.

Démonstration. — La fonction $\tilde{\mathrm{F}}(x)$ est évidemment dérivable; comme elle est en outre impaire, $\tilde{\mathrm{F}}(x)/x$ est borné au voisinage de 0, et il suffit de voir que ce rapport est borné pour les grandes valeurs de x.

L'hypothèse nous permet d'employer une inégalité de Kolmogorov ([8], p. 66) qui, ici, prend la forme

$$\int_{|\tilde{\mathrm{F}}(x)|>\lambda}\frac{dx}{x^2+1} \quad \leqq \quad \frac{\mathrm{M}}{\lambda}, \tag{3.10}$$

M étant une constante. Soit $n\geqq 1$ et posons $\lambda=4\,\mathrm{M}.2^n$ dans (3.10); puisque

$$\int_{2^n}^{2^{n+1}}\frac{dx}{x^2+1} \quad > \quad 2^{-(n+3)},$$

on voit qu'il existe un x_n, $2^n\leqq|x_n|\leqq 2^{n+1}$, tel que

$$|\tilde{\mathrm{F}}(x_n)| \quad \leqq \quad 4\,\mathrm{M}.2^n. \tag{3.11}$$

On peut évidemment prendre tous les x_n positifs.

Soit $2^n\leqq x\leqq 2^{n+1}$; comme $\tilde{\mathrm{F}}-p$ décroît, on a

$$\tilde{\mathrm{F}}(x_{n-1})-p(x_{n-1}) \quad \geqq \quad \tilde{\mathrm{F}}(x)-p(x) \quad \geqq \quad \tilde{\mathrm{F}}(x_{n+1})-p(x_{n+1}).$$

De là, en vertu de (3.11) et du fait que la fonction croissante $p(x)$ soit entre 0 et $\mathrm{K}x$ en valeur, on trouve

$$-(2\,\mathrm{M}+\mathrm{K})\,2^{n+2} \quad \leqq \quad \tilde{\mathrm{F}}(x) \quad \leqq \quad (\mathrm{M}+\mathrm{K})\,2^{n+1}, \qquad 2^n\leqq x\leqq 2^{n+1},$$

c'est-à-dire $|\tilde{\mathrm{F}}(x)/x| \quad \leqq \quad 8\,\mathrm{M}+4\,\mathrm{K}$, $2^n\leqq x\leqq 2^{n+1}$.

LEMME 4. — *Soit* $\nu(t)$ *croissant et* $O(t)$ *pour* $t \geqq 0$, *et soit* $F(x)$ *la fonction donnée par* (3.2). *Soit* $\rho(\xi)$ *une fonction positive, infiniment dérivable, et à support compact* $\subseteq (0, \infty)$.

Alors,

$$\int_0^\infty F(x\xi) \frac{\rho(\xi)}{\xi} d\xi = \int_0^\infty \log \left| 1 - \frac{x^2}{\tau^2} \right| d\nu_\rho(\tau), \tag{3.12}$$

où la fonction

$$\nu_\rho(\tau) = \int_0^\infty \nu(\tau\xi) \frac{\rho(\xi)}{\xi} d\xi \tag{3.13}$$

est croissante et absolument continue sur $[0, \infty)$ *avec* $\nu'_\rho(\tau) \leqq \mathrm{Cte}$.

Preuve. — On obtient l'identité (3.12) avec ν_p donné par (3.13) en portant (3.2) dans le membre de gauche de (3.12), en faisant ensuite le changement de variable $\tau = t/\xi$, et en changeant finalement l'ordre des intégrations.

La fonction $\nu_\rho(t)$ est visiblement croissante; elle peut encore s'écrire

$$\nu_\rho(\tau) = \int_0^\infty \frac{\nu(u)}{u} \rho\left(\frac{u}{\tau}\right) d\mu, \tag{3.14}$$

ce qui met en évidence sa continuité absolue, vu les propriétés de ρ. Comme $\nu(u) \leqq Ku$ et $\rho(\xi) \equiv 0$ pour $\xi > a$, la dérivation de (3.14) donne enfin

$$|\nu'_\rho(\tau)| \leqq \int_0^\infty \frac{\nu(u)}{\tau^2} \left| \rho'\left(\frac{u}{\tau}\right) \right| du \leqq \frac{1}{2} K a^2 \sup_\xi |\rho'(\xi)|,$$

et la preuve est terminée.

Nous sommes maintenant à même d'établir le résultat de ce paragraphe.

THÉORÈME. — *Soit* $W(x) \geqq 1$ *un poids pair, satisfaisant à la condition* (0.2). *Pour que* W *admette des multiplicateurs il faut et il suffit que* W *possède un majorant de la forme* $C \exp \omega(x)$ *avec* $\omega(x)$ *pair, infiniment dérivable, et* 0 *à l'origine, ayant ces propriétés :*

$$\text{(i)} \qquad \int_{-\infty}^\infty \frac{\omega(x)}{x^2} dx < \infty;$$

(ii) *à tout* $\eta > 0$ *correspond un* K *tel que* $\tilde{\omega}'(x) - K \leqq \eta$ *partout, sauf* [4] *sur un ensemble d'intervalles disjoints* I_l *avec* $\sum_l \left(\int_{I_l} dx/x \right)^2 < \infty$ *et tels que*

$$\int_{I_l} [\tilde{\omega}'(x) - K]^+ dx \leqq \eta |I_l|. \tag{3.15}$$

[4] Bien entendu, il est permis d'avoir $\tilde{\omega}'(x) - K \leqq \eta$ pour des x appartenant aux I_l aussi. Il faut donc $[\ ]^+$ dans (3.15) et non $[\ ]$.

Remarque. — Pour la dérivée $\tilde{\omega}'(x)$ la formule

$$\tilde{\omega}'(x) \quad = \quad -\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{\omega(x+t)+\omega(x-t)-2\,\omega(x)}{t^2}\,dt$$

est valable, et, dans les conditions du théorème, facile à vérifier.

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME. — I. *La nécessité.* — Soit $W(x)$ un poids pair et $\geqq 1$ admettant des multiplicateurs; sans restreindre la généralité on peut supposer que $W(x) \to \infty$ pour $x \to \pm\infty$. Il y a une suite de fonctions entières $h_n \not\equiv 0$, h_n de type exponentiel α_n, telles que, pour chaque n,

$$W(x)\,|\,h_n(x)\,| \quad \leqq \quad \text{Cte}, \qquad -\infty < x < \infty$$

et que $\sum_n \alpha_n < \infty$. Nous allons utiliser les h_n pour construire une fonction $\omega(x)$ ayant les propriétés décrites dans l'énoncé.

On peut d'abord supposer que les $h_n(0) \neq 0$; si en effet une fonction h_n s'annule à l'origine, on peut remplacer $h_n(x)$ par $h_n(x)/x^k$ avec un entier k convenable, car le produit de $W(x)$ par ce quotient est, lui aussi, borné sur $\mathbb{R}$.

Comme $W(x)$ est pair, on a pour chaque n une constante C_n telle que

$$(3.16) \qquad 2\log W(x) + \log|\,h_n(x)\,h_n(-x)\,| \quad \leqq \quad C_n, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

La fonction entière *paire*

$$\varphi_n(z) = h_n(z)\,h_n(-z)$$

est de type exponentiel $2\,\alpha_n$ et $\varphi_n(0) \neq 0$; sa factorisation d'Hadamard prend donc la forme

$$(3.17) \qquad \varphi_n(z) \quad = \quad \varphi_n(0)\prod_p\left(1-\frac{z^2}{\lambda_p^2}\right),$$

où les $\mathscr{R}\lambda_p$ sont $\geqq 0$. Dans le membre de droite de (3.17), laissons tomber tous les λ_p purement imaginaires et remplaçons chaque λ_p avec $\mathscr{R}\lambda_p > 0$ par le nombre positif $\tilde{\lambda}_p$ défini par la relation $1/\tilde{\lambda}_p = \mathscr{R}(1/\lambda_p)$; ce procédé fournit une nouvelle fonction de type exponentiel $\leqq 2\,\alpha_n$ qui, sur $\mathbb{R}$, est partout $\leqq |\,\varphi_n(x)\,|$ en valeur absolue. Désignons par $\psi_n(z)$ le quotient de cette nouvelle fonction entière par le nombre $\varphi_n(0)$; ψ_n est *entière, de type exponentiel* $\leqq 2\,\alpha_n$, *et paire. Tous les zéros de* ψ_n *sont réels et* $\psi_n(0) = 1$. En vertu de la construction de ψ_n on a par (3.16)

$$2\log W(x) + \log|\,\psi_n(x)\,| \quad \leqq \quad D_n, \qquad x \in \mathbb{R},$$

avec une constante D_n. Puisque $W(x) \to \infty$ pour $x \to \pm\infty$, la dernière relation peut encore s'écrire

$$(3.18) \qquad \log W(x) \leqq -\log|\,\psi_n(x)\,|, \qquad x \in \mathbb{R}, \quad |\,x\,| \geqq A_n,$$

A_n étant une constante. C'est dans cette forme que nous l'utilisons.

Soit $N_n(t)$ le nombre de zéros de $\psi_n(z)$ entre 0 et t pour $t \geqq 0$. On a

$$\log|\psi_n(z)| = \int_0^\infty \log\left|1-\frac{z^2}{t^2}\right| dN_n(t), \tag{3.19}$$

et

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{N_n(t)}{t} \leqq \frac{2}{\pi}\alpha_n, \tag{3.20}$$

$\psi_n(z)$ étant de type exponentiel $\leqq 2\alpha_n$ et, par (3.18), borné sur l'axe réel. (On peut remplacer la limite supérieure par une limite dans (3.20), mais cela n'a pas d'importance ici.)

Posons maintenant, pour chaque n,

$$\mu_n(t)=\begin{cases} 0, & 0\leqq t<A_n/\sqrt{2}, \\ N_n(t), & t\geqq A_n/\sqrt{2}, \end{cases} \tag{3.21}$$

et écrivons

$$F_n(z) = -\int_0^\infty \log\left|1-\frac{z^2}{t^2}\right| d\mu_n(t); \tag{3.22}$$

A_n est le nombre figurant dans (3.18). On voit à partir de (3.21) que $F_n(x)\geqq 0$ pour $-A_n\leqq x\leqq A_n$. Pour $x<-A_n$ ou $x>A_n$ on peut comparer (3.19) et (3.22), et on trouve $F_n(x)\geqq -\log|\psi_n(x)|$, quantité qui à son tour est $\geqq \log W(x)$ par (3.18). Comme $W(x)\geqq 1$, on voit que

$$F_n(x)\geqq 0, \qquad x\in\mathbb{R}, \tag{3.23}$$

et d'ailleurs que

$$F_n(x)\geqq \log W(x), \qquad x\in\mathbb{R}, \quad |x|\geqq A_n. \tag{3.24}$$

Nous pouvons évidemment supposer que $A_{n+1}>2A_n$. Rappelons maintenant la condition de régularité (0.2) satisfaite par $W(x)$. Grâce à cette condition, si $\rho(\xi)\geqq 0$ a pour support un intervalle $[1/\lambda, \lambda]$ et si

$$\int_0^1 \frac{\rho(\xi)}{\xi}d\xi = \int_1^\infty \frac{\rho(\xi)}{\xi}d\xi=1,$$

on a

$$\log W(x) \leqq c\int_0^\infty \frac{\rho(\xi)}{\xi}\log W(x\xi)\,d\xi+k, \qquad 0 \leqq x \leqq \frac{l}{2(\lambda-1)}, \tag{3.25}$$

avec deux constantes c et k, dépendantes de W mais indépendantes de ρ et du nombre λ. Les relations (3.24) et (3.25) nous permettent de prendre une suite de nombres $\lambda_n>1$ *tendant vers*

1 et une suite de fonctions $\rho_n(\xi) \geqq 0$ *infiniment dérivables* telles que ρ_n ait pour support l'intervalle $[1/\lambda_n, \lambda_n]$, que

$$(3.26)\qquad \int_0^1 \frac{\rho_n(\xi)}{\xi} d\xi = \int_1^\infty \frac{\rho_n(\xi)}{\xi} d\xi = 1,$$

et que

$$(3.27)\qquad \log W(x) \leqq c \int_0^\infty F_n(x\xi) \frac{\rho_n(\xi)}{\xi} d\xi + k, \qquad x \in \mathbb{R},\quad 2A_n \leqq |x| \leqq 2A_{n+1}.$$

Soit, pour $x \in \mathbb{R}$,

$$(3.28)\qquad G_n(x) = 2c \int_0^\infty F_n(x\xi) \frac{\rho_n(\xi)}{\xi} d\xi.$$

La fonction $G_n(x)$ est évidemment infiniment dérivable, et, comme $W(x) \to \infty$ pour $x \to \pm\infty$ on a, d'après (3.27),

$$(3.29)\qquad \log W(x) \leqq G_n(x), \qquad x \in \mathbb{R},\quad 2A_n \leqq |x| \leqq 2A_{n+1}$$

dès que n dépasse un certain nombre n_0.

Par (3.23) et (3.28) on a

$$(3.30)\qquad G_n(x) \geqq 0, \qquad x \in \mathbb{R},$$

et par le lemme 4 joint à (3.22), (3.28),

$$(3.31)\qquad G_n(x) = -\int_0^\infty \log\left|1 - \frac{x^2}{t^2}\right| d\nu_n(t),$$

où

$$(3.32)\qquad \nu_n(t) = 2c \int_0^\infty \mu_n(t\xi) \frac{\rho_n(\xi)}{\xi} d\xi.$$

La fonction $\nu_n(t)$ est croissante, et

$$(3.33)\qquad \limsup_{t \to \infty} \frac{\nu_n(t)}{t} \leqq \frac{4}{\pi} c\,\alpha_n \lambda_n$$

par (3.20), (3.21) et (3.32).

Notons $G_n(z)$ la fonction *surharmonique* obtenue en remplaçant x par z dans le membre de droite de (3.31), et désignons par β_n la quantité $\limsup_{t \to \infty} (\nu_n(t)/t)$, de sorte que $\beta_n \leqq (4/\pi) c\,\alpha_n \lambda_n$ par (3.33). On a $G_n(z) \geqq -\pi\beta_n |z| - o(|z|)$, d'où, par (3.30) et un théorème de Phragmén-Lindelöf,

$$(3.34)\qquad G_n(z) \geqq -\pi\beta_n |\mathscr{I} z|.$$

Une représentation de Poisson comme (2.24) est donc valable pour $G_n(z)$. Comme $G_n(iy)$ est $O(y^2)$ au voisinage de 0, on déduit de cette représentation

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{G_n(x)}{x^2}dx = \pi\beta_n. \tag{3.35}$$

Posons finalement

$$\omega(z) = \sum_{n_0}^{\infty} G_n(z), \tag{3.36}$$

où n_0 est le nombre mentionné juste après (3.29). Selon (3.30), on a $\omega(x) \geqq 0$, $x \in \mathbb{R}$. Rappelons que $\sum_n \alpha_n < \infty$, d'où

$$\sum_n \beta_n < \infty, \tag{3.37}$$

donc, par (3.35),

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\omega(x)}{x^2}dx < \infty;$$

c'est la propriété (i) de l'énoncé. D'après (3.29), (3.30) et (3.36) il vient

$$\log W(x) \leqq \omega(x), \qquad |x| \geqq 2A_{n_0},$$

c'est-à-dire que $W(x)$ a un majorant de la forme $C \exp \omega(x)$ sur $\mathbb{R}$.

L'inégalité (3.34) nous permet d'obtenir une borne supérieure *uniforme* pour $\nu_n(t)/t$. D'après (3.31) on a en effet, la formule de Jensen

$$2\int_0^r \frac{\nu_n(t)}{t}dt = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} G_n(re^{i\theta})\,d\theta.$$

Le membre de droite est $\leqq 2\beta_n r$ par (3.34) tandis que celui de gauche est

$$\geqq 2\int_{r/e}^{r}\frac{\nu_n(t)}{t}dt \geqq 2\nu_n(r/e).$$

On trouve donc que

$$\frac{\nu_n(t)}{t} \leqq e\beta_n, \qquad t \geqq 0. \tag{3.38}$$

Grâce à (3.38) et à (3.37), on peut additionner les formules (3.31) dans (3.36), et on obtient

$$\omega(z) = -\int_0^{\infty}\log\left|1-\frac{z^2}{t^2}\right|d\nu(t) \tag{3.39}$$

où

(3.40) $$\nu(t)=\sum_{n_0}^{\infty}\nu_n(t).$$

La fonction $\omega(x)$ est infiniment dérivable. Les formules (3.21) et (3.32) montrent en effet que, pour tout $A>0$, les fonctions $\nu_n(t)$ sont toutes *nulles* sur $[0, A]$ à partir d'une certaine valeur de n dépendant de A. Chaque $\nu_n(t)$ est en outre infiniment dérivable par (3.32). De ces faits, joints à (3.39) et à (3.40), on déduit sans peine la dite régularité de $\omega(x)$.

Il reste à vérifier la propriété (ii) de l'énoncé. Selon (3.37), (3.38) et (3.40), $\nu(t)/t$ est borné pour $t\geqq 0$. Les propriétés de $\omega(x)$ déjà établies permettent d'appliquer le lemme 1 à (3.39); on trouve, par (3.4) et (3.6), que

(3.41) $$\tilde{\omega}(x)=\mathrm{M}\,x+\pi\nu(x), \qquad x\geqq 0,$$

avec une constante M.

Soit $\eta>0$; il y a, par (3.37), un m tel que

(3.42) $$\sum_{n>m} e\beta_n \quad < \quad \eta.$$

Posons

(3.43) $$p(t)=\sum_{n_0}^{m}\nu_n(t),$$

(3.44) $$q(t)=\sum_{n>m}\nu_n(t),$$

et

$$\mathrm{G}(z)=\sum_{n>m}\mathrm{G}_n(z).$$

On a l'analogue de (3.39) :

(3.45) $$\mathrm{G}(z) \quad = \quad -\int_0^{\infty}\log\left|1-\frac{z^2}{t^2}\right|dq(t),$$

et, par (3.34) et (3.42),

(3.46) $$\mathrm{G}(z) \quad \geqq \quad -\frac{\pi}{e}\eta\,|\mathscr{I} z|.$$

Faisons maintenant la construction de F. Riesz en posant

$$\mathcal{O}=\left\{x\geqq 0;\quad \sup_{\xi>x}\frac{q(\xi)-q(x)}{\xi-x}>\eta\right\}.$$

Grâce à (3.38), (3.42) et (3.44), $q(t)/t\leqq$ un nombre $<\eta$ pour $t>0$; *les* $x\geqq 0$ *dans un certain voisinage de* 0 *appartiennent donc tous au complément de* $\mathcal{O}$. On voit (faire un croquis) que $\mathcal{O}$ se compose *d'intervalles* disjoints $I_l=(a_l, b_l)$ avec $b_l>a_l>$ un certain $\gamma>0$ pour tout l, et tels que

$$q(b_l)-q(a_l)=\eta(b_l-a_l), \tag{3.47}$$

et que

$$q'(x)\leqq\eta \qquad \text{pour } x>0 \text{ et } x\notin\mathcal{O}. \tag{3.48}$$

La fonction surharmonique $G(z)$ est harmonique dans chacun des demi-plans $\mathcal{I}\,z>0$, $\mathcal{I}\,z<0$, donc, par (3.46),

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{G(x)}{x^2+1}dx \quad < \quad \infty. \tag{3.49}$$

Suivant un procédé bien connu (*voir* [7], p. 24-25), on applique la formule de Jensen à la fonction $G(z)$ pour certains cercles ayant leurs centres sur les intervalles I_l. En tenant compte de (3.45) on voit, par (3.46), (3.47) et (3.49) que $\sum_l (b_l-a_l)^2/a_l^2<\infty$, vu que tous les a_l sont $\geqq\gamma>0$, c'est-à-dire que

$$\sum_l\left(\int_{I_l}\frac{dx}{x}\right)^2 \quad < \quad \infty. \tag{3.50}$$

La vérification de la propriété (ii) s'achève. On a, d'après (3.41), (3.43) et (3.44),

$$\tilde{\omega}'(x)=M+\pi p'(x)+\pi q'(x), \qquad x\geqq 0. \tag{3.51}$$

Selon (3.43), (3.32) et le lemme 4 il y a une constante L dépendant de m telle que $0\leqq p'(x)\leqq L$ pour $x\geqq 0$. Prenons donc $K=M+\pi L$. On aura alors, par (3.48) et (3.51),

$$\tilde{\omega}'(x)-K\leqq\pi\eta \qquad \text{pour } x\geqq 0 \text{ et } x\notin\mathcal{O}.$$

Si $x\in\mathcal{O}$ on a toutefois $\tilde{\omega}'(x)-K\leqq\pi q'(x)$, *une quantité positive*. Par (3.47) on a donc

$$\int_{I_l}[\tilde{\omega}'(x)-K]^+\,dx \quad \leqq \quad \pi\eta\,|I_l|.$$

Or, le nombre $\eta>0$ était arbitraire, et $\tilde{\omega}(x)$ est une fonction impaire. Les dernières relations, jointes à (3.50), montrent par conséquent que ω a la propriété (ii).

II. *La suffisance*. — Supposons qu'il existe une fonction paire $\omega(x)$ infiniment dérivable jouissant des propriétés (i) et (ii), avec $\omega(0)=0$ et telle que

$$\log W(x) \quad \leqq \quad k+\omega(x), \qquad x\in\mathbb{R}, \tag{3.52}$$

k étant une constante.

Soit $\eta>0$, et prenons un K tel que $\tilde{\omega}'(x)-K\leqq\eta$ sauf sur des intervalles disjoints I_l pour lesquels (3.15) est valable, les I_l satisfaisant à (3.50). Posons, pour $x\geqq 0$,

$$\mu_1(x) = Kx+\int_0^x[\tilde{\omega}'(t)-K]^+\,dt, \tag{3.53}$$

$$\mu_2(x) = \int_0^x[K-\tilde{\omega}'(t)]^+\,dt; \tag{3.54}$$

μ_1 et μ_2 sont croissants et l'on a

$$\tilde{\omega}(x)=\mu_1(x)-\mu_2(x). \tag{3.55}$$

Pour les intervalles $I_l=(a_l, b_l)$ on a, d'après (3.50), $b_l/a_l\leqq A$ avec une constante $A>1$. Donc, comme $\tilde{\omega}'(t)-K\leqq\eta$ en dehors des I_l,

$$\mu_1(x)/x \leqq A\eta+K, \qquad x\geqq 0, \tag{3.56}$$

d'après (3.15) et (3.53). Cette relation et la propriété (i) nous permettent d'appliquer le lemme 3, $\tilde{\omega}(x)-\mu_1(x)$ étant décroissant. On en déduit que $\tilde{\omega}(x)/x$ est borné sur $[0, \infty)$, d'où

$$\mu_2(x)/x \leqq \text{Cte}, \qquad x\geqq 0. \tag{3.57}$$

Grâce à (3.56) et à (3.57) on peut employer le lemme 2. Comme $\omega(0)=0$, on trouve ainsi

$$\omega(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \log\left|1-\frac{x^2}{t^2}\right|(d\mu_2(x)-d\mu_1(x)) \tag{3.58}$$

par (3.7) et (3.55).

Soit $s(x)$ une fonction *positive*, définie d'abord sur chacun des intervalles I_l de sorte que

$$\int_{I_l}\{[\tilde{\omega}'(x)-K]^+ +s(x)\}\,dx = \eta\,|I_l|;$$

cette définition est possible par (3.15). Si $x\geqq 0$ se trouve *en dehors* de tous les I_l, on pose simplement $s(x)=\eta-[\tilde{\omega}'(x)-K]^+$; s est alors positive partout sur $[0, \infty)$. Pour $x\geqq 0$, prenons

$$\nu_1(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^x\{[\tilde{\omega}'(t)-K]^+ +s(t)\}\,dt, \tag{3.59}$$

$$\nu_2(x) = \frac{1}{\pi}\mu_2(x)+\frac{1}{\pi}\int_0^x s(t)\,dt. \tag{3.60}$$

Les fonctions $\nu_1(x)$ et $\nu_2(x)$ sont croissantes et $O(x)$ sur $[0, \infty)$, et on a, par (3.53), (3.54), (3.59) et (3.60), $\nu_2(t)-\nu_1(t)=(1/\pi)(\mu_2(t)-\mu_1(t)+Kt)$. Avec (3.58), cette formule donne

$$\omega(x) = \int_0^\infty \log\left|1-\frac{x^2}{t^2}\right|(d\nu_2(t)-d\nu_1(t)), \qquad x\in\mathbb{R}, \tag{3.61}$$

compte tenu du fait bien connu que $\int_0^\infty \log\left|1-\frac{x^2}{t^2}\right| dt=0$ pour x réel.

Si $x \geqq 0$ se trouve en dehors des intervalles I_l, on a $\nu_1(x)=(\eta/\pi)x$ par (3.59) et la construction de $s(x)$. De même, pour $x \in I_l=(a_l, b_l)$,

$$\frac{\eta}{\pi}a_l \leqq \nu_1(x) \leqq \frac{\eta}{\pi}b_l.$$

Ces relations, jointes à (3.50), entraînent

$$\int_0^\infty \left|\nu_1(t)-\frac{\eta}{\pi}t\right|\frac{dt}{t^2} < \infty. \tag{3.62}$$

La condition (3.62) nous permet de faire appel à un lemme dû à Beurling et Malliavin (*voir* [7], p. 51-53 et la fin du § 23, p. 54). Ce lemme fournit une fonction croissante $\rho(x)$ telle que $0 \leqq \rho(x) \leqq (\eta/\pi)x$, $x \geqq 0$, et que

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{|F_1(x)|}{x^2}dx < \infty, \tag{3.63}$$

où

$$F_1(z) = \int_0^\infty \log\left|1-\frac{z^2}{t^2}\right|(d\nu_1(t)+d\rho(t)). \tag{3.64}$$

Soit

$$F_2(z) = \int_0^\infty \log\left|1-\frac{z^2}{t^2}\right|(d\nu_2(t)+d\rho(t)). \tag{3.65}$$

D'après (3.61), on a

$$\omega(x)=F_2(x)-F_1(x).$$

La fonction $\omega(x)$ jouit de la propriété (i); elle est en outre $O(x^2)$ au voisinage de 0 et $\geqq -k$ par (3.52). De (3.63) il vient donc

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{|F_2(x)|}{x^2}dx < \infty. \tag{3.66}$$

Revenons maintenant à (3.52), qui peut s'écrire

$$\log W(\xi)+F_1(\xi) \leqq k+F_2(\xi), \qquad \xi \in \mathbb{R}. \tag{3.67}$$

On a, par (3.62), (3.57) et (3.60),

$$\nu_1(t)+\rho(t) \leqq \frac{2\eta}{\pi}t+o(t) \text{ pour } t \text{ grand}, \tag{3.68}$$

$$(3.69)\qquad \nu_2(t)+\rho(t) \leqq \mathrm{B}\,t, \qquad t \geqq 0,$$

avec une constante B. De là, par (3.64) et (3.65),

$$(3.70)\qquad \mathrm{F}_1(z) \leqq 2\eta|z|+o(|z|),$$

$$(3.71)\qquad \mathrm{F}_2(z) \leqq \pi\mathrm{B}|z|+o(|z|).$$

Ces inégalités, jointes aux conditions (3.63) et (3.66), entraînent que les fonctions $\mathrm{F}_1(z)$ et $\mathrm{F}_2(z)$, harmoniques dans chacun des demi-plans $\mathscr{I} z>0$, $\mathscr{I} z<0$, admettent, l'une et l'autre, une représentation de Poisson comme (2.24). Cela étant, multiplions (3.67) par $1/\pi((x-\xi)^2+1)$ et intégrons la variable ξ de $-\infty$ à ∞. On trouve alors que

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\log \mathrm{W}(\xi)}{(x-\xi)^2+1}d\xi+\mathrm{F}_1(x+i) \leqq \mathrm{C}+\mathrm{F}_2(x+i)$$

avec une certaine constante C. C'est ici qu'on fait intervenir la condition de régularité (0.2). En portant celle-ci dans la dernière relation trouvée, il vient

$$(3.72)\qquad \log \mathrm{W}(x)+a\,\mathrm{F}_1(x+i) \leqq b+a\,\mathrm{F}_2(x+i), \qquad x\in\mathbb{R},$$

avec deux constantes a et b, a étant indépendante de η.

Rappelons alors un résultat de [6], p. 133-134 déjà utilisé au § 2 (*voir* (2.42)). Notons $[a\nu_1(t)+a\rho(t)]$ resp. $[a\nu_2(t)+a\rho(t)]$ les parties entières de $a\nu_1(t)+a\rho(t)$ resp. $a\nu_2(t)+a\rho(t)$, et prenons les *fonctions entières* $\varphi_1(z)$ et $\varphi_2(z)$ données par les formules

$$(3.73)\qquad \log|\varphi_1(z)| = \int_0^\infty \log\left|1-\frac{z^2}{t^2}\right| d[a\nu_1(t)+a\rho(t)],$$

$$(3.74)\qquad \log|\varphi_2(z)| = \int_0^\infty \log\left|1-\frac{z^2}{t^2}\right| d[a\nu_2(t)+a\rho(t)].$$

Le résultat dont il s'agit ici permet de comparer (3.64) avec (3.73) et (3.65) avec (3.74) pour $z=x+i$. On trouve ainsi que

$$(3.75)\qquad |a\,\mathrm{F}_1(x+i)-\log|\varphi_1(x+i)|| \leqq \mathrm{C}\log(|x|+2),$$

$$(3.76)\qquad |a\,\mathrm{F}_2(x+i)-\log|\varphi_2(x+i)|| \leqq \mathrm{C}\log(|x|+2)$$

pour x réel, C étant une constante. En portant (3.75) et (3.76) dans (3.72), on obtient

$$(3.77)\qquad \log \mathrm{W}(x)+\log|\varphi_1(x+i)| \leqq \log|\varphi_2(x+i)|+2\mathrm{L}\log(|x|+2), \qquad x\in\mathbb{R},$$

avec une constante L.

Nous pouvons évidemment prendre L comme *entier positif*. La fonction $(z^2+4)^{\mathrm{L}}\varphi_2(z+i)$ est alors *entière et de type exponentiel* d'après (3.69) et (3.74). De la représentation de Poisson pour $\mathrm{F}_2(z)$ mentionnée tout à l'heure, de (3.66) et de (3.76) on déduit d'autre part que

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\log^+|(x^2+4)^{\mathrm{L}}\varphi_2(x+i)|}{x^2+1}dx < \infty.$$

Ceci nous donne le droit d'invoquer le *théorème du multiplicateur* dû à Beurling et Malliavin (*voir* [2], [3] ou [4]). Ce résultat *fournit une fonction entière $h \not\equiv 0$ de type exponentiel $\leqq \eta$ telle que*

$$(3.78) \qquad |(x^2+4)^{L}\varphi_2(x+i)h(x)| \leqq \text{Cte}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

De (3.77) et (3.78) il vient finalement

$$W(x)|\varphi_1(x+i)h(x)| \leqq \text{Cte}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Or, $\varphi_1(z)$ est de type exponentiel $2a\eta$ à cause de (3.68) et (3.73). La fonction entière $\varphi_1(z+i)h(z)$ est donc de type exponentiel $\leqq (2a+1)\eta$, $\eta>0$ étant arbitraire et a indépendant de η. Le poids W *admet donc des multiplicateurs*, et la suffisance est établie.

Le théorème est complètement démontré.

Remarque 1. — On voit que la démonstration repose en grande partie sur des résultats déjà connus, dus à Beurling et Malliavin.

Remarque 2. — La condition fournie par le théorème, bien que nécessaire et suffisante, a un aspect pénible. On aimerait avoir une condition portant sur un majorant lié de façon *canonique* au poids W; il serait encore mieux d'en trouver une qui se rapporterait directement au comportement de W. Je pense qu'il vaudrait la peine de chercher des équivalents à notre condition qui répondent à ces critères, et que les méthodes employées dans l'étude de BMO, des fonctions maximales, etc., y seraient utiles.

Laurel, Comté Argenteuil, Québec.

BIBLIOGRAPHIE

[1] P. KOOSIS, *Entire Functions of Exponential Type as Multipliers for Weight Functions* (*Pacific Journal of Math.*, vol. 95, 1981, p. 105-123).

[2] A. BEURLING et P. MALLIAVIN, *On Fourier Transforms of Measures with Compact Support* (*Acta Math.*, vol. 107, 1962, p. 291-309).

[3] P. KOOSIS, *Harmonic Estimation in Certain Slit Regions and a Theorem of Beurling and Malliavin* (*Acta Math.*, vol. 142, 1979, p. 275-304).

[4] P. MALLIAVIN, *On the Multiplier Theorem for Fourier Transforms of Measures with Compact Support* (*Arkiv för Mat.*, vol. 17, 1979, p. 69-81).

[5] L. L. HELMS, *Introduction to Potential Theory*, Wiley-Interscience, New York, 1969.

[6] P. KOOSIS, *Sur la non-totalité de certaines suites d'exponentielles sur des intervalles assez longs* (*Ann. scient. Éc. Norm. Sup.*, Paris, Série 3, 75, 1958, p. 125-152).

[7] R. REDHEFFER, *Completeness of Sets of Complex Exponentials* (*Advances in Math.*, vol. 24, 1977, p. 1-62).

[8] Y. KATZNELSON, *An Introduction to Harmonic Analysis*, Wiley, New York, 1968.

P. KOOSIS, Mc Gill University, Department of Mathematics,
Burnside Hall, 805 Sherbrooke Street West, Montréal, Québec, Canada H3A 2K6.

(Manuscrit reçu le 10 novembre 1981,
révisé le 11 janvier 1983).