Annales scientifiques de l'É.N.S.

J. Pichaud

G-homologie et $(\mathfrak{g}, K)$-homologie dans la catégorie des G-modules différentiables

Annales scientifiques de l'É.N.S. 4e série, tome 16, nº 2 (1983), p. 219-236

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1983_4_16_2_219_0>

Ann. scient. Éc. Norm. Sup.,
4e série, t. 16, 1983, p. 219 à 236.

G-HOMOLOGIE ET $(\mathfrak{g}, K)$-HOMOLOGIE DANS LA CATÉGORIE DES G-MODULES DIFFÉRENTIABLES

PAR J. PICHAUD

Introduction

L'objet de ce travail est d'obtenir un théorème type « théorème de Van Est en cohomologie » pour l'homologie d'un groupe de Lie réel G et celle de son algèbre de Lie $\mathfrak{g}$.

Pour cela, on se place dans la catégorie $\underline{C}_G^\infty$ des G-modules différentiables, dans laquelle l'homologie est définie sans ambiguïté. En effet, si E est un espace localement convexe complet, U une représentation continue de G dans E, et si E_G (resp. $\underline{E}_G$) désigne le quotient de E par le sous-espace (resp. le sous-espace fermé) engendré par les $U_g . a - a$ lorsque g décrit G et a décrit E, on peut *a priori* envisager deux théories de l'homologie continue, l'une relative aux foncteurs dérivés à gauche du foncteur $E \mapsto E_G$ l'autre relative aux foncteurs dérivés à gauche du foncteur $E \mapsto \underline{E}_G$. Cependant, si P est un objet relativement projectif de la catégorie $\underline{C}_G^\infty$, on a $P_G = \underline{P}_G$ ceci étant une conséquence facile du théorème de [2] (§ 2), lequel exprime ce résultat lorsque P est l'espace C_c^∞ (G, E) muni de la représentation régulière droite (ou gauche). Il en résulte que dans la catégorie $\underline{C}_G^\infty$, les foncteurs $E \mapsto E_G$ et $E \mapsto \underline{E}_G$ ont même foncteurs dérivés à gauche et qu'il n'y a qu'une théorie de l'homologie différentiable.

Dans les deux premières parties on suppose donc que E est un objet de $\underline{C}_G^\infty$. Ces deux parties sont consacrées à l'étude du complexe $\Omega_c^{n-*}(G/K, E)$ des formes différentielles à support compact sur G/K et à valeurs dans E, où K est un sous-groupe compact de G et $n = \dim G/K$. En effet lorsque G a un nombre fini de composantes connexes et lorsque K est un sous-groupe compact maximal, le complexe $\Omega_c^{n-*}(G/K, E)$ muni de la différentielle extérieure est une résolution forte relativement projective de E, et dans ce cas l'homologie de $\Omega_c^{n-*}(G, E)_G$ est $H_*(G, E)$.

En supposant seulement que G est un groupe de Lie et K un sous-groupe compact on explicite, au paragraphe 1, un isomorphisme topologique du complexe $\Omega_c^{n-*}(G/K, E)_G$ avec le complexe $\mathrm{Hom}_K(\Lambda^{n-*}\mathfrak{g}/\mathfrak{k}, E\otimes\mathbb{R}_{\Delta^{-1}})$ où Δ est le module de G. On en déduit que lorsque G a un nombre fini de composantes connexes et lorsque K est un sous-groupe compact maximal, $H_*(G, E)$ est topologiquement isomorphe à $H^{n-*}(\mathfrak{g}, K, E\otimes\mathbb{R}_{\Delta^{-1}})$.

Au paragraphe 2, on construit, en supposant d'abord K connexe, un isomorphisme du complexe $\Omega_c^{n-*}(G/K, E)_G$ sur le complexe $\Lambda^*\mathfrak{g}/\mathfrak{k}\underset{\mathscr{U}(\mathfrak{k})}{\otimes} E$ qui sert à définir l'homologie de $\mathfrak{g}$ relative à $\mathfrak{k}$. Il en résulte un isomorphisme de $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{k}}(\Lambda^{n-*}\mathfrak{g}/\mathfrak{k}, E\otimes\mathbb{R}_{\Delta^{-1}})$ avec $\Lambda^*\mathfrak{g}/\mathfrak{k}\underset{\mathscr{U}(\mathfrak{k})}{\otimes} E$, qui conduit à un isomorphisme de Poincaré entre $H^{n-*}(\mathfrak{g}, \mathfrak{k}, E\otimes\mathbb{R}_{\Delta^{-1}})$ et $H_*(\mathfrak{g}, \mathfrak{k}, E)$. On étudie ensuite le cas où K n'est pas connexe et on obtient, lorsque G a un nombre fini de composantes connexes et lorsque K est un compact maximal, un isomorphisme de type Van Est entre $H_*(G, E)$ et $H_*(\mathfrak{g}, \mathfrak{k}, E)^{K/K^0}$ où K^0 est la composante connexe de e dans K et où l'action de K/K^0 provient de la représentation $k\mapsto \det \mathrm{Ad}\, k^{-1}.\Lambda^*\mathrm{Ad}\, k\otimes U_k$.

L'interprétation de $H_*(\mathfrak{g}, \mathfrak{k}, E)^{K/K^0}$ en termes de $(\mathfrak{g}, K)$-homologie fait l'objet du paragraphe 3. En effet, en ce qui concerne l'isomorphisme de Poincaré au niveau des algèbres de Lie et pour des G-modules non intégrables la catégorie adéquate est celle des $(\mathfrak{g}, K)$-modules dans laquelle on définit la $(\mathfrak{g}, K)$-homologie.

Alors l'isomorphisme de Poincaré exprime que l'espace $H^{n-*}(\mathfrak{g}, K, E\otimes\mathbb{R}_{\Delta^{-1}})$ est isomorphe avec $H_*(\mathfrak{g}, K, E\otimes\mathbb{R}_\varepsilon)$ où $\mathbb{R}_\varepsilon$ désigne l'espace $\mathbb{R}$ muni de la structure de $(\mathfrak{g}, K)$-module pour laquelle l'action de $\mathfrak{g}$ est triviale et celle de K est donnée par la représentation $\varepsilon : k\mapsto \det \mathrm{Ad}\, k$.

En conclusion, on obtient, si G a un nombre fini de composantes connexes et si K est un sous-groupe compact maximal, un isomorphisme de Van Est entre $H_*(G, E)$ et $H_*(\mathfrak{g}, K, E\otimes\mathbb{R}_\varepsilon)$.

0. Notations

G est un groupe de Lie réel, K un sous-groupe compact, d'algèbres de Lie respectives $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{k}$.

$n = \dim G/K$.

Si $0\leqq q\leqq n$ et si F est un espace localement convexe complet, $\Omega_c^q(G/K, F)$ est l'espace des q-formes différentielles sur G/K à support compact, à valeurs dans F, muni de la topologie limite inductive naturelle.

Si α_1 (resp. α_2) est une q_1-forme (resp. q_2-forme) à valeurs dans F_1 (resp. F_2), $\alpha_1\wedge\alpha_2$ est une (q_1+q_2)-forme à valeurs dans le produit tensoriel projectif complété $F_1\hat{\otimes}F_2$ et l'application $(\alpha_1, \alpha_2)\mapsto\alpha_1\wedge\alpha_2$ est continue de $\Omega^{q_1}(G/K, F_1)\times\Omega^{q_2}(G/K, F_2)$ dans $\Omega^{q_1+q_2}(G/K, F_1\hat{\otimes}F_2)$. E désigne un G-module réel différentiable, localement convexe complet; U est l'action de G dans E, et E_G (resp. $\underline{E}_G$) est le quotient de E par le sous-espace (resp. le sous-espace fermé) engendré par les $U_g.a-a$ lorsque g décrit G et a décrit E.

Si $g\in G$, on note L_g l'application $x\mapsto gx$ de G dans G, et R_g l'application $x\mapsto xg$ de G dans G.

$\dot{L}_g$ désigne l'application $\dot{x} \mapsto (gx)^{\cdot}$ de G/K dans G/K. ω est la forme de Maurer-Cartan à gauche de G, i. e. $\forall g \in G, \omega(g) = D_g L_{g^{-1}}$. $C_c^\infty(G, E)$ est l'espace des fonctions C^∞ de G dans E, à support compact, muni de la topologie limite inductive usuelle.

Si X est un élément de $\mathfrak{g}$, on note $\tilde{X}$ le champ invariant à gauche associé à X; alors si φ est un élément de $C^\infty(G, E) \# \tilde{X}$ φ est la fonction

$$g \mapsto \frac{d}{dt} \varphi(g \exp tX)|_{t=0}.$$

On note dg une mesure de Haar à gauche sur G et dk la mesure de Haar normalisée de K.

Enfin Δ est le module de G, autrement dit on a, pour toute fonction continue à support compact f, l'égalité

$$\int f(gx)\, dg = \Delta(x^{-1}) \int f(g)\, dg.$$

1. Étude du complexe des formes différentielles à support compact dans G/K

Dans toute la suite l'espace $\Omega_c^q(G/K, E)$ est muni de la structure de G-module suivante :

$$\forall g \in G, \quad \forall \alpha \in \Omega_c^q(G/K, E), \qquad g.\alpha = U_g \circ (\dot{L}_{g^{-1}})^*(\alpha),$$

autrement dit

$$\forall \dot{x} \in G/K, \quad (g.\alpha)(\dot{x}) = U_g \circ \alpha(g^{-1}\dot{x}) \circ \Lambda^q D_{\dot{x}} \dot{L}_{g^{-1}}.$$

Si p désigne l'application canonique de G sur G/K, p^* identifie $\Omega_c^q(G/K, E)$ à un sous-espace de $\Omega_c^q(G, E)$, à savoir

$$\{\beta \in \Omega_c^q(G, E) \mid \forall k \in K, \quad R_k^*(\beta) = \beta, \quad \forall X \in \mathfrak{k}, \quad i_X(\beta) = 0\}.$$

Or $\Omega_c^q(G, E)$ est topologiquement isomorphe au G-module $\operatorname{Hom}(\Lambda^q \mathfrak{g}, C_c^\infty(G, E))$, l'action de G étant triviale sur $\Lambda^q \mathfrak{g}$ et donnée sur $C_c^\infty(G, E)$ par :

$$\forall g \in G, \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(G, E), \qquad g.\varphi = U_g \circ \varphi(g^{-1}.).$$

Les isomorphismes sont les suivants :

(*a*)
$$\Omega_c^q(G, E) \to \operatorname{Hom}(\Lambda^q \mathfrak{g}, C_c^\infty(G, E)),$$
$$\alpha \mapsto f_\alpha,$$

où

$$f_\alpha(X_1 \wedge \ldots \wedge X_q)(g) = \langle \alpha(g), (\tilde{X}_1(g), \ldots, \tilde{X}_q(g)) \rangle;$$

(*b*)
$$\operatorname{Hom}(\Lambda^q \mathfrak{g}, C_c^\infty(G, E)) \to \Omega_c^q(G, E),$$
$$f \mapsto \alpha_f,$$

où, pour tous champs différentiables $Y_1, \ldots, Y_q$ sur G, on a

$$\langle \alpha_f(g), (Y_1(g), \ldots, Y_q(g)) \rangle = f(\Lambda^q D_g L_{g^{-1}}(Y_1(g) \wedge \ldots \wedge Y_q(g)))(g).$$

En ce qui concerne $\Omega_c^q(G/K, E)$, il est alors topologiquement isomorphe au G-module $\mathrm{Hom}_K(\Lambda^q \mathfrak{g}/\mathfrak{k}, C_c^\infty(G, E))$, K opérant dans $\Lambda^q \mathfrak{g}/\mathfrak{k}$ par la puissance extérieure q-ième de l'action adjointe et dans $C_c^\infty(G, E)$ par la représentation régulière droite.

De façon précise, on a les isomorphismes suivants :

(*a*)
$$\Omega_c^q(G/K, E) \to \mathrm{Hom}_K(\Lambda^q \mathfrak{g}/\mathfrak{k}, C_c^\infty(G, E)),$$
$$\alpha \mapsto f_\alpha,$$

où

$$f_\alpha(\dot{X}_1 \wedge \ldots \wedge \dot{X}_q)(g) = \langle \alpha(\dot{g}), \Lambda^q D_g p(\tilde{X}_1(g) \wedge \ldots \wedge \tilde{X}_q(g)) \rangle,$$

X_i étant un représentant quelconque de $\dot{X}_i$ dans $\mathfrak{g}$.

(*b*)
$$\mathrm{Hom}_K(\Lambda^q \mathfrak{g}/\mathfrak{k}, C_c^\infty(G, E)) \to \Omega_c^q(G/K, E)$$
$$f \mapsto \alpha_f$$

avec, si $Y_1, \ldots, Y_q$ sont des champs C^∞ sur G/K,

$$\langle \alpha_f(\dot{g}), (Y_1(\dot{g}), \ldots, Y_q(\dot{g})) \rangle = f(\Lambda^q D_{\dot{g}} L_{g^{-1}}(Y_1(\dot{g}) \ldots Y_q(\dot{g})))(g),$$

g étant un représentant quelconque de $\dot{g}$;

La dimension de G/K étant n, on note $\Omega_c^{n-*}(G/K, E)$ le complexe

$$0 \to \Omega_c^0(G/K, E) \xrightarrow{d} \Omega_c^1(G/K, E) \xrightarrow{d} \ldots \xrightarrow{d} \Omega_c^n(G/K, E) \xrightarrow{\lambda} E \to 0,$$

où d est la différentielle extérieure et λ l'intégrale.

L'intérêt de ce complexe tient au fait que si G a un nombre fini de composantes connexes et si K est un sous-groupe compact maximal, $\Omega_c^{n-*}(G/K, E)$ est une résolution forte relativement projective de E dans la catégorie $\underline{C}_G^\infty$ des G-modules différentiables. En effet, dans ce cas il existe un difféomorphisme ψ de G/K sur $\mathbb{R}^n$ et le complexe $\Omega_c^{n-*}(G/K, E)$ est l'image par ψ^* du complexe $\Omega_c^{n-*}(\mathbb{R}^n, E)$ lequel d'après [2] est une résolution forte de E. Le fait que les $\Omega_c^q(G/K, E)$ soient des objets relativement projectifs dans $\underline{C}_G^\infty$ se démontre comme dans [1] pour $C_c(G, E)$: si on a un diagramme

$$\begin{array}{c} \Omega_c^q(G/K, E) \\ \Big\downarrow f \\ U \underset{s}{\overset{\pi}{\leftrightarrows}} V \end{array}$$

où π est une G-surjection forte, s une application linéaire continue telle que $\pi \circ s = \mathrm{Id}_V$, et f un G-morphisme, on définit un G-morphisme $\bar{f}$ de $\Omega_c^q(G/K, E)$ dans U, tel que $\pi \circ \bar{f} = f$, en posant

$$\bar{f}(\alpha) = \int g.s.g^{-1}.f(\alpha_g)\,dg,$$

où $\alpha_g = \alpha . \theta(.^{-1} g)$, θ étant une fonction de $C_c^\infty(K \diagdown G)$ [donc s'identifiant à une fonction de $C_c^\infty(G)$ invariante par l'action à gauche de K] d'intégrale 1 pour la mesure dg.

PROPOSITION 1. — *Le complexe* $\Omega_c^{n-*}(G/K, E)_G$ *est topologiquement isomorphe au complexe* $\mathrm{Hom}_K(\Lambda^{n-*}\mathfrak{g}/\mathfrak{k}, E \otimes \mathbb{R}_{\Delta^{-1}})$, *muni de la différentielle usuelle, lequel donne la* $(\mathfrak{g}, K)$-*cohomologie du* G-*module* $E \otimes \mathbb{R}_{\Delta^{-1}}$.

Démonstration. — Par transport, la différentielle d du complexe $\Omega_c^{n-*}(G/K, E)$ devient

$$d : \mathrm{Hom}_K(\Lambda^q \mathfrak{g}/\mathfrak{k}, C_c^\infty(G, E)) \to \mathrm{Hom}_K(\Lambda^{q+1}\mathfrak{g}/\mathfrak{k}, C_c^\infty(G, E)),$$

avec

$$(df)(\dot{X}_1 \wedge \ldots \wedge \dot{X}_{q+1})(g) = \sum_{i=1}^{q+1} (-1)^{i+1} (\tilde{X}_i f(\dot{X}_1 \wedge \ldots \wedge \hat{\dot{X}}_i \wedge \ldots \wedge \dot{X}_{q+1})(g)$$
$$+ \sum_{i<j} (-1)^{i+j} f(\dot{\overline{[X_i, X_j]}} \wedge \dot{X}_1 \wedge \ldots \wedge \hat{\dot{X}}_i \wedge \ldots \wedge \hat{\dot{X}}_j \wedge \ldots \wedge \dot{X}_{q+1})(g).$$

Pour déterminer $\mathrm{Hom}_K(\Lambda^q \mathfrak{g}/\mathfrak{k}, C_c^\infty(G, E))_G$ on utilisera le lemme suivant :

LEMME. — *Si* F *est un* K-*module différentiable l'application* $a \mapsto \int U_k . a\, dk$ *de* F *dans* F^K *définit, par passage au quotient, un isomorphisme de* F_K *avec* F^K.

En effet, si $\int U_k . a\, dk = 0$, la fonction $k \mapsto U_k . a$ qui est C^∞ est de la forme

$$\sum_{i=1}^{p} (\varphi_i(.k_i) - \varphi_i(.)) \text{ où } \varphi_i \in C^\infty(K, F) (\textit{cf.}\ [2], \S\, 2, \text{p. } 5),$$

donc $\forall k \in K$,

$$a = \sum_{i=1}^{p} (U_{k^{-1}} . \varphi_i(kk_i) - U_{k^{-1}} . \varphi_i(k)) = \sum_{i=1}^{p} (U_{k_i} . U_{(kk_i)^{-1}} . \varphi_i(kk_i) - U_{k^{-1}} . \varphi_i(k)) = \sum_{i=1}^{p} (U_{k_i} . a_i - a_i),$$

où

$$a_i = \int U_{k^{-1}} . \varphi_i(k)\, dk.$$

Remarque. — Lorsque F est seulement un G-module continu on obtient, grâce au théorème des bipolaires, un isomorphisme du séparé $\underline{F}_K$ de F_K avec F^K.

Suite de la démonstration de la proposition 1 :

Alors $\mathrm{Hom}_K(\Lambda^q \mathfrak{g}/\mathfrak{k}, C_c^\infty(G, E))_G$ est isomorphe à $(\mathrm{Hom}(\Lambda^q \mathfrak{g}/\mathfrak{k}, C_c^\infty(G, E))_K)_G$ lequel est égal à $(\mathrm{Hom}(\Lambda^q \mathfrak{g}/\mathfrak{k}, C_c^\infty(G, E))_G)_K$ car les actions de G et de K commutent. Mais $\Lambda^q \mathfrak{g}/\mathfrak{k}$ étant de dimension finie, $\mathrm{Hom}(\Lambda^q \mathfrak{g}/\mathfrak{k}, C_c^\infty(G, E))_G$ est $\mathrm{Hom}(\Lambda^q \mathfrak{g}/\mathfrak{k}, C_c^\infty(G, E)_G)$.

On obtient finalement :

$$\mathrm{Hom}_K(\Lambda^q \mathfrak{g}/\mathfrak{k}, C_c^\infty(G, E))_G = \mathrm{Hom}_K(\Lambda^q \mathfrak{g}/\mathfrak{k}, C_c^\infty(G, E)_G).$$

D'autre part, si on note $\overline{C}_c^\infty(G, E)$ l'espace $C_c^\infty(G, E)$ muni de la représentation régulière gauche, l'application $\varphi \mapsto \bar{\varphi}$ de $C_c^\infty(G, E)$ dans $\overline{C}_c^\infty(G, E)$ définie par $\forall g \in G$, $\bar{\varphi}(g) = U_{g^{-1}} . \varphi(g)$, est un G-isomorphisme topologique, et on sait que $\overline{C}_c^\infty(G, E)_G$ s'identifie topologiquement à E par l'application classe de $\varphi \mapsto \int \varphi(g)\, dg$ (*cf.* [2], 4.3). Il en résulte que $C_c^\infty(G, E)_G$ est isomorphe à E par l'application Classe de $\varphi \mapsto \int U_{g^{-1}} . \varphi(g)\, dg$.

La structure de K-module de $C_c^\infty(G, E)_G$ devient sur E la restriction de U à K, puisque

$$\int U_{g^{-1}} . \varphi(gk)\, dg = U_k . \int U_{g^{-1}} . \varphi(g)\, dg.$$

Il reste enfin à calculer la différentielle ∂ du complexe

$$\mathrm{Hom}_K(\Lambda^{n-*} \mathfrak{g}/\mathfrak{k}, C_c^\infty(G, E))_G \simeq \mathrm{Hom}_K(\Lambda^{n-*} \mathfrak{g}/\mathfrak{k}, E).$$

Pour $f \in \mathrm{Hom}_K(\Lambda^q \mathfrak{g}/\mathfrak{k}, C_c^\infty(G, E))$, $\int U_{g^{-1}} . (df)(\dot{X}_1 \wedge \ldots \wedge \dot{X}_{q+1})(g)\, dg$ est égal à

$$\sum_{i=1}^{q+1} (-1)^{i+1} \int U_{g^{-1}} . (\tilde{X}_i f(\dot{X}_1 \wedge \ldots \wedge \hat{\dot{X}}_i \wedge \ldots \wedge \dot{X}_{q+1}))(g)\, dg$$
$$+ \sum_{i<j} (-1)^{i+j} \int U_{g^{-1}} . f(\dot{\widehat{[X_i, X_j]}} \wedge \dot{X}_1 \wedge \ldots \wedge \hat{\dot{X}}_i \wedge \ldots \wedge \hat{\dot{X}}_j \wedge \ldots \wedge \dot{X}_{q+1})(g)\, dg.$$

Or, si $\varphi \in C_c^\infty(G, E)$ et si $X \in \mathfrak{g}$, on a

$$\int U_{g^{-1}} . (\tilde{X}\varphi)(g)\, dg = \int U_{g^{-1}} . \frac{d}{dt} \varphi(g \exp tX)|_{t=0}\, dg = \frac{d}{dt}\left(\int U_{g^{-1}} . \varphi(g \exp tX)\, dg \right)\Big|_{t=0}$$
$$= \frac{d}{dt}\left(\int \Delta^{-1}(\exp tX)\, U(\exp tX)\, U_{g^{-1}} . \varphi(g)\, dg \right)\Big|_{t=0} = (U\Delta^{-1})(X) . \int U_{g^{-1}} . \varphi(g)\, dg$$
$$= (U(X) - \Delta(X)) \int U_{g^{-1}} . \varphi(g)\, dg.$$

On en déduit l'expression de $\partial : \mathrm{Hom}_K(\Lambda^q \mathfrak{g}/\mathfrak{k}, E) \to \mathrm{Hom}_K(\Lambda^{q+1} \mathfrak{g}/\mathfrak{k}, E)$,

$$(\partial l)(\dot{X}_1 \wedge \ldots \wedge \dot{X}_{q+1}) = \sum_{i=1}^{q+1} (-1)^{i+1} (U(X_i) - \Delta(X_i)) . l(\dot{X}_1 \wedge \ldots \wedge \hat{\dot{X}}_i \wedge \ldots \wedge \dot{X}_{q+1})$$
$$+ \sum_{i<j} (-1)^{i+j} l(\dot{\widehat{[X_i, X_j]}} \wedge \dot{X}_1 \wedge \ldots \wedge \hat{\dot{X}}_i \wedge \ldots \wedge \hat{\dot{X}}_j \wedge \ldots \wedge \dot{X}_{q+1}).$$

On obtient la différentielle usuelle, à condition de munir E de la structure de G-module définie par la représentation $U\Delta^{-1}$, d'où le résultat annoncé.

COROLLAIRE. — *Si* G *a un nombre fini de composantes connexes et si* K *est un sous-groupe compact maximal, les espaces* $H_*(G, E)$ *et* $H^{n-*}(\mathfrak{g}, K, E\otimes\mathbb{R}_{\Delta^{-1}})$ *sont topologiquement isomorphes.*

Remarque. — D'après le théorème de Van Est en cohomologie, $H^*(\mathfrak{g}, K, E\otimes\mathbb{R}_{\Delta^{-1}})$ est isomorphe à $H^*(G, E\otimes\mathbb{R}_{\Delta^{-1}})$. On retrouve ainsi l'isomorphisme de Poincaré de $H_*(G, E)$ avec $H^{n-*}(G, E\otimes\mathbb{R}_{\Delta^{-1}})$ lequel a été établi dans [2] sans passer par l'intermédiaire de la $(\mathfrak{g}, K)$-cohomologie.

2. Comparaison de $H_*(G, E)$ et de $H_*(\mathfrak{g}, \mathfrak{k}, E)$

Rappelons (*cf.* [5], n° 2.9.1) que $H_*(\mathfrak{g}, \mathfrak{k}, E)$ est l'homologie du complexe

$$0 \to \Lambda^n \mathfrak{g}/\mathfrak{k} \underset{\mathscr{U}(\mathfrak{k})}{\otimes} E \xrightarrow{\delta} \ldots \xrightarrow{\delta} \mathfrak{g}/\mathfrak{k} \underset{\mathscr{U}(\mathfrak{k})}{\otimes} E \xrightarrow{\delta} E/\mathfrak{k}E \to 0,$$

où

$$\delta_q : \Lambda^{q+1}\mathfrak{g}/\mathfrak{k} \underset{\mathscr{U}(\mathfrak{k})}{\otimes} E \to \Lambda^q \mathfrak{g}/\mathfrak{k} \underset{\mathscr{U}(\mathfrak{k})}{\otimes} E,$$

est donnée par :

$$\delta_q(\dot{X}_1 \wedge \ldots \wedge \dot{X}_{q+1} \otimes a) = \sum_{i=1}^{q+1} (-1)^{i+1} (\dot{X}_1 \wedge \ldots \wedge \hat{\dot{X}}_i \wedge \ldots \wedge \dot{X}_{q+1}) \otimes X_i a$$
$$+ \sum_{i<j} (-1)^{i+j} (\dot{\widehat{[X_i, X_j]}} \wedge \dot{X}_1 \wedge \ldots \wedge \hat{\dot{X}}_i \wedge \ldots \wedge \hat{\dot{X}}_j \wedge \ldots \wedge \dot{X}_{q+1}) \otimes a.$$

Si l'on fait opérer K sur $\Lambda^q \mathfrak{g}/\mathfrak{k}\otimes E$ en associant à chaque $k\in K$ l'automorphisme $\Lambda^q \operatorname{Ad} k \otimes U_k$, on a $\Lambda^q \mathfrak{g}/\mathfrak{k} \underset{\mathscr{U}(\mathfrak{k})}{\otimes} E = (\Lambda^q \mathfrak{g}/\mathfrak{k}\otimes E)_{K^0}$ où K^0 est la composante connexe de e dans K.

2.A. CONSTRUCTION D'UN MORPHISME DE $\Omega_c^{n-*}(G/K, E)_G$ DANS $(\Lambda^* \mathfrak{g}/\mathfrak{k}\otimes E)_K$ LORSQUE K EST CONNEXE. — Pour décrire ce morphisme on va être amené à utiliser une autre structure de G-module sur $\Omega_c^q(G, E)$, à savoir celle où l'action de G est l'action « régulière gauche » définie par :

$$\forall g\in G, \quad \forall \alpha\in\Omega_c^q(G, E), \qquad g.\alpha = (L_{g^{-1}})^*(\alpha).$$

Lorsqu'il sera muni de cette structure, $\Omega_c^q(G, E)$ sera noté $\overline{\Omega}_c^q(G, E)$. Il est immédiat que l'application $\alpha \mapsto \overline{\alpha}$ de $\Omega_c^q(G, E)$ dans $\overline{\Omega}_c^q(G, E)$ définie par $\forall g\in G$, $\alpha(g) = U_{g^{-1}}.\alpha(g)$, est un G-isomorphisme topologique.

Par cet isomorphisme le complexe $\Omega_c^{n-*}(G, E)$, muni de d, devient le complexe $\overline{\Omega}_c^{n-*}(G, E)$ muni de la différentielle $\overline{d}$ définie de la façon suivante : si $\beta \in \overline{\Omega}_c^q(G, E)$ et si $(X_1, \ldots, X_{q+1})$ sont des champs de vecteurs C^∞ sur G, on a

$$\langle \overline{d}\beta, (X_1, \ldots, X_{q+1}) \rangle = \sum_{i=1}^{q+1} (-1)^{i+1} \langle \omega, X_i \rangle . \langle \beta, (X_1, \ldots, \hat{X}_i, \ldots, X_{q+1}) \rangle + \langle d\beta, (X_1, \ldots, X_{q+1}) \rangle,$$

où ω est la forme de Maurer-Cartan (à gauche) de G.

Soit maintenant $\alpha \in \Omega_c^{n-q}(G/K, E)$.

On pose $\beta = \overline{p^* \alpha}$; β est donc un élément de $\overline{\Omega}_c^{n-q}(G, E)$.

Notons $\overline{\omega}$ l'élément de $\Omega^1(G, \mathfrak{g}/\mathfrak{k})$ défini par $\forall g \in G, \overline{\omega}(g) = D_e p \circ \omega(g)$. La forme $\overline{\omega}$ est G-invariante à gauche et a les propriétés suivantes :

(i) $\forall X \in \mathfrak{g}, i_X(\overline{\omega}) = D_e p(X) = \dot{X}$,

(ii) $\forall k \in K, (R_k)^*(\overline{\omega}) = \operatorname{Ad} k^{-1} \circ \overline{\omega}$,

(iii) $d\overline{\omega} = -D_e p \circ [\omega, \omega] = -\overset{\bullet}{\overline{[\omega, \omega]}}$.

Alors la forme $\gamma = \overline{\omega}^{\wedge q} \wedge \beta$ est un élément de $\overline{\Omega}_c^n(G, \Lambda^q \mathfrak{g}/\mathfrak{k} \otimes E)$, et en composant avec l'application canonique π de $(\Lambda^q \mathfrak{g}/\mathfrak{k} \otimes E)$ sur $(\Lambda^q \mathfrak{g}/\mathfrak{k} \otimes E)_K$ on obtient un élément de $\overline{\Omega}_c^n(G, (\Lambda^q \mathfrak{g}/\mathfrak{k} \otimes E)_K)$.

LEMME. — *La forme* $\pi \circ \gamma$ *s'identifie à un élément de* $\Omega_c^n(G/K, (\Lambda^q \mathfrak{g}/\mathfrak{k} \otimes E)_K)$.

En effet si $k \in K$, on a :

$$\begin{aligned}(R_k)^*(\pi \circ \gamma)(g) &= (\pi \circ \gamma)(gk) \circ \Lambda^n D_g R_k \\ &= \pi \circ (\overline{\omega}^{\wedge q}(gk) \wedge U_{k^{-1}} U_{g^{-1}} p^* \alpha(gk)) \circ \Lambda^n D_g R_k \\ &= \pi \circ (\Lambda^q \operatorname{Ad} k^{-1} \otimes U_{k^{-1}}) \circ (\overline{\omega}^{\wedge q}(g) \wedge U_{g^{-1}} p^* \alpha(g)) = \pi \circ \gamma(g).\end{aligned}$$

D'autre part $\forall X \in \mathfrak{k}$, $i_X(\gamma) = 0$ car $i_X(\overline{\omega}) = 0$ et $i_X(p^* \alpha) = 0$.

Considérons alors l'application :

$$\Sigma_q : \Omega_c^{n-q}(G/K, E) \to (\Lambda^q \mathfrak{g}/\mathfrak{k} \otimes E)_K,$$
$$\alpha \mapsto \int \pi \circ \gamma.$$

Comme l'application $\alpha \mapsto \pi \circ \gamma$ est un G-morphisme de $\Omega_c^{n-q}(G/K, E)$ dans $\overline{\Omega}_c^n(G, (\Lambda^q \mathfrak{g}/\mathfrak{k} \otimes E)_K)$ et comme l'intégrale est invariante à gauche, Σ_q permet de définir une application S_q de $\Omega_c^{n-q}(G/K, E)_G$ dans $(\Lambda^q \mathfrak{g}/\mathfrak{k} \otimes E)_K$.

Remarque. — K étant supposé connexe, $\overline{\omega}^{\wedge n}$ s'identifie à un élément de $\Omega_c^n(G/K, \Lambda^n \mathfrak{g}/\mathfrak{k})$ puisque

$$\forall k \in K, \quad (R_k)^*(\overline{\omega}^{\wedge n}) = \Lambda^n \operatorname{Ad} k^{-1} \circ \overline{\omega}^{\wedge n} = \det \operatorname{Ad} k^{-1} \circ \overline{\omega}^{\wedge n} = \overline{\omega}^{\wedge n},$$

car $\det \operatorname{Ad} k^{-1} = 1$.

Ainsi, à condition d'identifier $\Lambda^n \mathfrak{g}/\mathfrak{k}$ à $\mathbb{R}$, on peut considérer $\bar{\omega}^{\wedge n}$ comme une forme volume sur G/K. Autrement dit, on peut choisir une base $(\dot{e}_1, \ldots, \dot{e}_n)$ de $\mathfrak{g}/\mathfrak{k}$ (que l'on aura fixée dans la suite) telle que, toute n-forme α sur G/K à valeurs dans un espace localement convexe complet F s'écrivant

$$\alpha = \varphi \,.\, \frac{\bar{\omega}^{\wedge n}}{\dot{e}_1 \wedge \ldots \wedge \dot{e}_n},$$

où $\varphi \in C^\infty(G/K, F)$, on ait si α est intégrable

$$\int \alpha = n! \int \varphi(g)\, dg = \int \langle f_\alpha, (\dot{e}_1, \ldots, \dot{e}_n) \rangle (g)\, dg.$$

Si $(\dot{f}_1, \ldots, \dot{f}_n)$ est une autre base, on a :

$$\int \langle f_\alpha, (\dot{f}_1, \ldots, \dot{f}_n) \rangle (g)\, dg = \det_{(e_i)}(f_j) \,.\, \int \alpha.$$

On peut alors expliciter S_q de la façon suivante :

$$\forall \alpha \in \Omega_c^{n-q}(G/K, E),$$

$$S_q(\alpha) = \prod \Big(\sum_\tau \varepsilon_\tau \,.\, \dot{e}_{\tau(1)} \wedge \ldots \wedge \dot{e}_{\tau(q)} \otimes \int U_{g^{-1}} \,.\, \langle f_\alpha, (\dot{e}_{\tau(q+1)}, \ldots, \dot{e}_{\tau(n)}) \rangle (g)\, dg\Big),$$

où τ décrit l'ensemble des permutations de $\{1, \ldots, n\}$ telles que

$$\tau(q+1) < \ldots < \tau(n).$$

En utilisant l'isomorphisme de $\Omega_c^{n-q}(G/K, E)_G$ avec $\mathrm{Hom}_K(\Lambda^{n-q}\mathfrak{g}/\mathfrak{k}, E \otimes \mathbb{R}_{\Delta^{-1}})$ décrit au paragraphe 1, on obtient l'application

$$\varphi_q : \quad \mathrm{Hom}_K(\Lambda^{n-q}\mathfrak{g}/\mathfrak{k}, E \otimes \mathbb{R}_{\Delta^{-1}}) \to (\Lambda^q \mathfrak{g}/\mathfrak{k} \otimes E)_K,$$

où $\varphi_q(l) = \prod \big(\sum_\tau \varepsilon_\tau \,.\, \dot{e}_{(1)} \wedge \ldots \wedge \dot{e}_{\tau(q)} \otimes l(\dot{e}_{\tau(q+1)} \wedge \ldots \wedge \dot{e}_{\tau(n)}\big)$,
avec $\tau(q+1) < \ldots < \tau(n)$.

On va maintenant établir que, à un coefficient près, S_q (ou φ_q) est un morphisme de complexes. De façon précise :

PROPOSITION 2. — *On a* $\delta \circ S_q = (-1)^{q-1} q\, S_{q-1} \circ d$ (*resp.* $\delta \circ \varphi_q = (-1)^{q-1} q\, \varphi_{q-1} \circ \partial$).

Notons T l'ensemble des permutations τ de $\{1, \ldots, n\}$ telles que $\tau(q+1) < \ldots < \tau(n)$ et R l'ensemble des permutations ρ de $\{1, \ldots, n\}$ telles que $\rho(q) < \ldots < \rho(n)$.

On a, pour $l \in \mathrm{Hom}_K(\Lambda^{n-q}\mathfrak{g}/\mathfrak{k}, E \otimes \mathbb{R}_{\Delta^{-1}})$, $\delta \circ \varphi_q(l) = \pi\ (A + A')$, avec

$$A=\sum_{\tau\in T}\varepsilon_\tau\sum_{i=1}^{q}(-1)^{i+1}\dot{e}_{\tau(1)}\wedge\ldots\wedge\hat{\dot{e}}_{\tau(i)}\wedge\ldots\wedge\dot{e}_{\tau(q)}\otimes e_{\tau(i)}.l(\dot{e}_{\tau(q+1)}\wedge\ldots\wedge\dot{e}_{\tau(q)})$$

et

$$A'=\sum_{\tau\in T}\varepsilon_\tau\sum_{i<j}(-1)^{i+j}[\widehat{e_{\tau(i)}\,e_{\tau(j)}}]\wedge\dot{e}_{\tau(1)}\wedge\ldots\wedge\hat{\dot{e}}_{\tau(i)}\wedge\ldots\wedge\hat{\dot{e}}_{\tau(j)}\wedge\ldots\wedge\dot{e}_{\tau(q)}$$
$$\otimes l(\dot{e}_{\tau(q+1)}\wedge\ldots\wedge\dot{e}_{\tau(q)}),$$

où $\forall i$, e_i est un représentant de $\dot{e}_i$ dans $\mathfrak{g}$.

D'autre part $\varphi_{q-1}\circ\partial(l)=\pi\,(B+C+D)$ avec :

$$B=\sum_{\rho\in R}\varepsilon_\rho\dot{e}_{\rho(1)}\wedge\ldots\wedge\dot{e}_{\rho(q-1)}\otimes\sum_{j=q}^{n}(-1)^{j-q}e_{\rho(j)}.l(\dot{e}_{\rho(q)}\wedge\ldots\wedge\hat{\dot{e}}_{\rho(j)}\wedge\ldots\wedge\dot{e}_{\rho(n)}),$$

$$C=-\sum_{\rho\in R}\varepsilon_\rho\dot{e}_{\rho(1)}\wedge\ldots\wedge\dot{e}_{\rho(q-1)}$$
$$\otimes\sum_{j=q}^{n}(-1)^{j-q}\Delta(e_{\rho(j)})l(\dot{e}_{\rho(q)}\wedge\ldots\wedge\hat{\dot{e}}_{e(j)}\wedge\ldots\wedge\dot{e}_{\rho(n)}),$$

$$D=\sum_{\rho\in R}\varepsilon_\rho\dot{e}_{\rho(1)}\wedge\ldots\wedge\dot{e}_{\rho(q-1)}$$
$$\otimes\sum_{q\leqq i<j}(-1)^{i+j}l([\widehat{e_{\rho(i)},\,e_{\rho(j)}}]\wedge\dot{e}_{\rho(q)}\wedge\ldots\wedge\hat{\dot{e}}_{\rho(i)}\wedge\ldots\wedge\hat{\dot{e}}_{\rho(j)}\wedge\ldots\wedge\dot{e}_{\rho(n)}).$$

(*a*) Égalité de A et de $(-1)^{q-1}q\,B$.

Pour $\tau\in T$ et $i\in\{1,\ldots,q\}$, on pose

$$A_{\tau,i}=\varepsilon_\tau(-1)^{i+1}\dot{e}_{\tau(1)}\wedge\ldots\wedge\hat{\dot{e}}_{\tau(i)}\wedge\ldots\wedge\dot{e}_{\tau(q)}\otimes e_{\tau(i)}.l(\dot{e}_{\tau(q+1)}\wedge\ldots\wedge\dot{e}_{\tau(n)}),$$

et, pour $\rho\in R$ et $j\in\{q,\ldots,n\}$

$$B_{\rho,j}=\varepsilon_\rho\dot{e}_{\rho(1)}\wedge\ldots\wedge\dot{e}_{\rho(q-1)}\otimes e_{\rho(j)}.l(\dot{e}_{\rho(q)}\wedge\ldots\wedge\hat{\dot{e}}_{\rho(j)}\wedge\ldots\wedge\dot{e}_{\rho(q)}).$$

A tout triplet (ρ,j,i) où $\rho\in R$, $j\in\{q,\ldots,n\}$ et $i\in\{1,\ldots,q\}$ on associe la permutation suivante, notée $\tau(\rho,j,i)$:

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
1 & \ldots & i & i+1 & \ldots & q & \ldots & j & j+1 & \ldots & n\\
\downarrow & & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \downarrow & & \downarrow\\
\rho(1) & \ldots & \rho(j) & \rho(i) & \ldots & \rho(q-1) & \ldots & \rho(j-1) & \rho(j+1) & \ldots & \rho(n)
\end{array}$$

autrement dit on amène $\rho(j)$ à la place « i », ce qui est le résultat de $(j-i)$ transpositions.

On a donc $\varepsilon_{\tau(\rho,j,i)}=(-1)^{j-i}\varepsilon_\rho$. De plus $A_{\tau(\rho,j,i),i}=(-1)^{j+1}B_{\rho,j}$.

LEMME. — *L'application* $(\rho,j,i)\mapsto(\tau(\rho,j,i),i)$ *de* $R\times\{q,\ldots,n\}\times\{1,\ldots,q\}$ *dans* $T\times\{1,\ldots,q\}$ *est une bijection.*

Comme card $T = n!/(n-q)!$ et card $R = n!/(n-q+1)!$, les deux ensembles considérés ont même cardinal et il suffit d'établir que cette application est injective.

Supposons donc que l'on ait $\tau(\rho_1, j_1, i) = \tau(\rho_2, j_2, i)$. Alors ρ_1 et ρ_2 coïncident sur l'ensemble $\{1, \ldots, q-1\}$, mais comme on doit avoir $\rho_1(q) < \ldots < \rho_1(n)$ et $\rho_2(q) < \ldots < \rho_2(n)$ on a nécessairement $\rho_1 = \rho_2$. Enfin de $\rho_1(j_1) = \rho_2(j_2)$ on déduit que $j_1 = j_2$.

Il en résulte que

$$\sum_{\rho, j, i} A_{\tau(\rho, j, i), i} = \sum_{\tau, i} A_{\tau, i} = A.$$

Or

$$\sum_{\rho, j, i} A_{\tau(\rho, j, i), i} = \sum_{\rho, j, i} (-1)^{j+1} B_{\rho, j} = (-1)^{j+1} q \sum_{\rho, j} B_{\rho, i} = (-1)^{q-1} q B.$$

(*b*) Égalité de $\pi(A')$ et de $(-1)^{q-1} q \pi(C+D)$.

Si α est un élément de $\Omega_c^{n-q}(G/K, E)$ dont la classe dans $\Omega_c^{n-q}(G/K, E)_G$ correspond à l par l'isomorphisme de $\Omega_c^{n-q}(G/K, E)_G$ sur $\mathrm{Hom}_K(\Lambda^q \mathfrak{g}/\mathfrak{k}, E \otimes \mathbb{R}_{\Delta^{-1}})$, on a $\pi(C+D) = \int \pi \circ (\bar{\omega}^{\Lambda(q-1)} \wedge d\beta)$ où $\beta = \overline{p^* \alpha}$.

Le terme $\bar{\omega}^{\Lambda(q-1)} \wedge d\beta$ apparaît dans $d(\bar{\omega}^{\Lambda(q-1)} \wedge \beta)$ qui s'écrit

$$(q-1) d\bar{\omega} \wedge \bar{\omega}^{\Lambda(q-2)} \wedge \beta + (-1)^{q-1} \bar{\omega}^{\Lambda(q-1)} \wedge d\beta.$$

Comme $\pi \circ d(\bar{\omega}^{\Lambda(q-1)} \wedge \beta) = d(\pi_\circ (\bar{\omega}^{\Lambda(q-1)} \wedge \beta))$ est une forme d'intégrale nulle sur G/K, l'intégrale de $\pi \circ (\bar{\omega}^{\Lambda(q-1)} \wedge d\beta)$ est aussi celle de la forme $(-1)^q (q-1) \pi \circ (d\bar{\omega} \wedge \bar{\omega}^{\Lambda(q-2)} \wedge \beta)$.

Comme $d\omega = -\dot{\overline{[\omega, \omega]}}$, on a

$$(-1)^q (q-1) \pi \circ (d\bar{\omega} \wedge \bar{\omega}^{\Lambda(q-2)} \wedge \beta) = (-1)^{q-1} (q-1) \dot{\overline{[\omega, \omega]}} \wedge \bar{\omega}^{\Lambda(q-2)} \wedge \beta.$$

Par suite

$$(-1)^{q-1} q (C+D) = q(q-1) \int \pi \circ (\dot{\overline{[\omega, \omega]}} \wedge \bar{\omega}^{\Lambda(q-2)} \wedge \beta)$$

$$= q! \sum_\sigma \varepsilon_\sigma \sum_{i<j<q} (-1)^{i+j} \dot{\overline{[e_{\sigma(i)}, e_{\sigma(j)}]}} \wedge \dot{e}_{\sigma(1)} \wedge \ldots \wedge \hat{\dot{e}}_{\sigma(i)} \wedge \ldots \wedge \hat{\dot{e}}_{\sigma(j)} \wedge \ldots \wedge \dot{e}_{\sigma(q)} \otimes l(\dot{e}_{\sigma(q+1)} \wedge \ldots \wedge \dot{e}_{\sigma(n)})$$

où σ décrit l'ensemble S des permutations de $\{1, \ldots, n\}$ telles que

$$\sigma(1) < \ldots < \sigma(q) \qquad \text{et} \qquad \sigma(q+1) < \ldots < \sigma(n).$$

On obtient donc que $(-1)^{q-1} \pi(C+D) = q \pi(A')$.

Remarque. — On peut naturellement démontrer cette dernière égalité de façon combinatoire comme au *a*), mais l'interprétation de $\pi(C+D)$ en terme d'intégrale de forme différentielle et l'utilisation du théorème de Stokes donne une démonstration plus rapide et plus éclairante.

COROLLAIRE. — *En posant* $\overline{S}_q=(-1)^{[q/2]}S_q/q\,!$ [*resp.* $\overline{\varphi}_q=(-1)^{[q/2]}\varphi_q/q\,!$] *on a* $\delta\circ\overline{S}_q=\overline{S}_{q-1}\circ d$ (*resp.* $\delta\circ\overline{\varphi}_q=\overline{\varphi}_{q-1}\circ\partial$).

Remarque. — *On peut alors exprimer* $\overline{\varphi}_q$ *de la façon suivante :*

$$\overline{\varphi}_q(l)=(-1)^{[q/2]}\pi\Big(\sum_{\sigma\in S}\varepsilon_\sigma\dot{e}_{\sigma(1)}\wedge\ldots\wedge\dot{e}_{\sigma(q)}\otimes l(\dot{e}_{\sigma(q+1)}\wedge\ldots\wedge\dot{e}_{\sigma(n)})\Big).$$

Il est intéressant de remarquer que l'élément

$$\sum_{\sigma\in S}\varepsilon_\sigma\dot{e}_{\sigma(1)}\wedge\ldots\wedge\dot{e}_{\sigma(q)}\otimes l(\dot{e}_{\sigma(q+1)}\wedge\ldots\wedge\dot{e}_{\sigma(n)})$$

est K-invariant; en effet pour évaluer

$$\sum_{\sigma\in S}\varepsilon_\sigma\,\mathrm{Ad}k\,\dot{e}_{\sigma(1)}\wedge\ldots\wedge\mathrm{Ad}k\,\dot{e}_{\sigma(q)}\otimes U_k\,l(\dot{e}_{\sigma(q+1)}\wedge\ldots\wedge\dot{e}_{\sigma(n)}).$$

on remplace la base $(\dot{e}_i)$ par la base $(\mathrm{Ad}k^{-1}\,\dot{e}_i)$ et on obtient

$$\det\mathrm{Ad}k\,.\sum_{\sigma\in S}\varepsilon_\sigma\dot{e}_{\sigma(1)}\wedge\ldots\wedge\dot{e}_{\sigma(q)}\otimes l(\dot{e}_{\sigma(q+1)}\wedge\ldots\wedge\dot{e}_{\sigma(n)}).$$

Mais K étant connexe on a $\det\mathrm{Ad}k=1$.

PROPOSITION 3. — K *étant supposé connexe,* $\overline{S}_q$ (*resp.* $\overline{\varphi}_q$) *est un isomorphisme topologique de* $\Omega_c^{n-q}(G/K,E)_G$ [*resp.* $\mathrm{Hom}_K(\Lambda^{n-q}\mathfrak{g}/\mathfrak{k},E\otimes\mathbb{R}_{\Delta^{-1}})$] *sur* $(\Lambda^q\mathfrak{g}/\mathfrak{k}\otimes E)_K$.

On va construire une application ψ_q de $(\Lambda^q\mathfrak{g}/\mathfrak{k}\otimes E)_K$ dans $\mathrm{Hom}_K(\Lambda^{n-q}\mathfrak{g}/\mathfrak{k},E\otimes\mathbb{R}_{\Delta^{-1}})$ continue, telle que $\overline{\varphi}_q\circ\psi_q=\mathrm{Id}$ et $\psi_q\circ\overline{\varphi}_q=\mathrm{Id}$.

On utilise d'abord l'isomorphisme de $(\Lambda^q\mathfrak{g}/\mathfrak{k}\otimes E)_K$ avec $(\Lambda^q\mathfrak{g}/\mathfrak{k}\otimes E)^K$, autrement dit on remplace la classe de $\dot{Y}_1\wedge\ldots\wedge\dot{Y}_q\otimes a$ dans $(\Lambda^q\mathfrak{g}/\mathfrak{k}\otimes E)_K$ par

$$\int\mathrm{Ad}k.\dot{Y}_1\wedge\ldots\wedge\mathrm{Ad}k.\dot{Y}_q\otimes U_k.a\,dk.$$

On définit alors l'application $\psi_q(\pi(\dot{Y}_1\wedge\ldots\wedge\dot{Y}_q\otimes a))$ ainsi :

à $\dot{X}_1\wedge\ldots\wedge\dot{X}_{n-q}\in\Lambda^{n-q}\mathfrak{g}/\mathfrak{k}$,

on associe

$$(-1)^{[q/2]}\int\frac{\mathrm{Ad}k.\dot{Y}_1\wedge\ldots\wedge\mathrm{Ad}k.\dot{Y}_q\wedge\dot{X}_1\wedge\ldots\wedge\dot{X}_{n-q}}{\dot{e}_1\wedge\ldots\wedge\dot{e}_n}\,U_k.a\,dk.$$

On vérifie facilement que cette application appartient à $\mathrm{Hom}_K(\Lambda^{n-q}\mathfrak{g}/\mathfrak{k}, E\otimes\mathbb{R}_{\Delta^{-1}})$. Calculons $\bar{\varphi}_q \circ \psi_q$.

On a :

$$\bar{\varphi}_q \circ \psi_q(\pi(\dot{Y}_1 \wedge \ldots \wedge \dot{Y}_q \otimes a)) = \pi\left(\sum_{\sigma\in S} \varepsilon_\sigma \, \dot{e}_{\sigma(1)} \wedge \ldots \wedge \dot{e}_{\sigma(q)} \otimes \int \frac{\mathrm{Ad}\,k.\dot{Y}_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{Ad}\,k.\dot{Y}_q \wedge \dot{e}_{\sigma(q+1)} \wedge \ldots \wedge \dot{e}_{\sigma(n)}}{\dot{e}_1 \wedge \ldots \wedge \dot{e}_n} \mathrm{U}_k.a\,dk\right).$$

Dans la base $(\dot{e}_{\sigma(1)} \wedge \ldots \wedge \dot{e}_{\sigma(q)})_{\sigma\in S}$ de $\Lambda^q\mathfrak{g}/\mathfrak{k}$ on a :

$$\mathrm{Ad}\,k.\dot{Y}_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{Ad}\,k.\dot{Y}_q = \sum_{\sigma\in S} \lambda_\sigma(k)\,\dot{e}_{\sigma(1)} \wedge \ldots \wedge \dot{e}_{\sigma(q)}.$$

Alors

$$\begin{aligned}\mathrm{Ad}\,k.\dot{Y}_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{Ad}\,k.\dot{Y}_q \wedge \dot{e}_{\sigma(q+1)} \wedge \ldots \wedge \dot{e}_{\sigma(n)} &= \lambda_\sigma(k)\,\dot{e}_{\sigma(1)} \wedge \ldots \wedge \dot{e}_{\sigma(n)} \\ &= \varepsilon_\sigma.\lambda_\sigma(k)\,\dot{e}_1 \wedge \ldots \wedge \dot{e}_n.\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}\bar{\varphi}_q \circ \psi_q(\pi(\dot{Y}_1 \wedge \ldots \wedge \dot{Y}_q \otimes a)) &= \pi\left(\sum_{\sigma\in S} \int \lambda_\sigma(k)\,\dot{e}_{\sigma(1)} \wedge \ldots \wedge \dot{e}_{\sigma(q)} \otimes \mathrm{U}_k a\,dk\right) \\ &= \pi\left(\left(\int \mathrm{Ad}\,k.\dot{Y}_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{Ad}\,k.\dot{Y}_q \otimes \mathrm{U}_k a\,dk\right)\right) = \pi(\dot{Y}_1 \wedge \ldots \wedge \dot{Y}_q \otimes a).\end{aligned}$$

Évaluons maintenant $\psi_q \circ \bar{\varphi}_q$.

Soit $l \in \mathrm{Hom}_K(\Lambda^{n-q}\mathfrak{g}/\mathfrak{k}, E\otimes\mathbb{R}_{\Delta^{-1}})$. Si $\sigma\in S$, on note L_σ l'élément

$$(\dot{e}_{\sigma(1)} \wedge \ldots \wedge \dot{e}_{\sigma(q)} \otimes l(\dot{e}_{\sigma(q+1)} \wedge \ldots \wedge \dot{e}_{\sigma(n)})).$$

Alors

$$\bar{\varphi}_q(l) = (-1)^{[q/2]}\pi \sum_{\sigma\in S} \varepsilon_\sigma L_\sigma.$$

Lorsque σ décrit S, les $\dot{e}_{\sigma(q+1)} \wedge \ldots \wedge \dot{e}_{\sigma(n)}$ constituent une base de $\Lambda^{n-q}\mathfrak{g}/\mathfrak{k}$, et on a pour $\sigma'\in S$:

$$\begin{aligned}&L_\sigma \Lambda(\dot{e}_{\sigma'(q+1)} \wedge \ldots \wedge \dot{e}_{\sigma'(n)}) \\ &\quad = \dot{e}_{\sigma(1)} \wedge \ldots \wedge \dot{e}_{\sigma(q)} \wedge \dot{e}_{\sigma'(q+1)} \wedge \ldots \wedge \dot{e}_{\sigma'(n)} \otimes l(\dot{e}_{\sigma(q+1)} \wedge \ldots \wedge e_{\sigma(n)}) \\ &\quad = \begin{cases} 0 & \text{si } \sigma'\neq\sigma, \\ \varepsilon_\sigma(\dot{e}_1 \wedge \ldots \wedge \dot{e}_n) \otimes l(\dot{e}_{\sigma(q+1)} \wedge \ldots \wedge \dot{e}_{\sigma(n)}) & \text{si } \sigma'=\sigma.\end{cases}\end{aligned}$$

Comme $\sum_{\sigma\in S} \varepsilon_\sigma L_\sigma$ est un élément K-invariant de $\Lambda^q \mathfrak{g}/\mathfrak{k}\otimes E$, on a pour $\sigma'\in S$:

$$\psi_q \circ \bar{\varphi}_q(l)(\dot{e}_{\sigma'(q+1)} \wedge \ldots \wedge \dot{e}_{\sigma'(n)}) = \sum_{\sigma\in S} \varepsilon_\sigma \frac{L_\sigma \wedge (\dot{e}_{\sigma'(q+1)} \wedge \ldots \wedge \dot{e}_{\sigma'(n)})}{\dot{e}_1 \wedge \ldots \wedge \dot{e}_n} = l(\dot{e}_{\sigma'(q+1)} \wedge \ldots \wedge \dot{e}_{\sigma'(n)}).$$

Il en résulte que $\psi_q \circ \bar{\varphi}_q(l)$ et l, qui coïncident sur la base $(\dot{e}_{\sigma(q+1)} \wedge \ldots \wedge \dot{e}_{\sigma(n)})_{\sigma\in S}$ de $\Lambda^{n-q}\mathfrak{g}/\mathfrak{k}$, sont égales.

Remarque 1. — L'application T_q réciproque de $\bar{S}_q$ est définie ainsi : à un élément de $(\Lambda^q \mathfrak{g}/\mathfrak{k}\otimes E)_K$ de la forme $\pi(\dot{Y}_1 \wedge \ldots \wedge \dot{Y}_q \otimes a)$ on associe la classe dans $\Omega_c^{n-q}(G/K, E)_G$ de la forme A définie pour tout $g\in G$ par

$$A(g) = \xi(g) \int (i_{\dot{Y}_1} \ldots i_{\dot{Y}_q}(\bar{\omega}^{\Lambda n})(gk) \circ \Lambda^{n-q} D_g R_k) \otimes U_{gk}.a\, dk,$$

où ξ est un élément de $C_c^\infty(G)$ d'intégrale 1.

Remarque 2. — La proposition 3 conduit à un isomorphisme de Poincaré entre $H^{n-*}(\mathfrak{g}, \mathfrak{k}, E\otimes\mathbb{R}_{\Delta^{-1}})$ et $H_*(\mathfrak{g}, \mathfrak{k}, E)$.

Pour $K=\{e\}$ cet isomorphisme était signalé dans [4] (p. 288, exercice 15). Deux autres isomorphismes (ou « dualités ») de Poincaré ont déjà été démontrés :

(i) l'isomorphisme de $H^{n-*}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, \mathbb{R})$ et de $H_*(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, \mathbb{R})$ pour $\mathfrak{g}$ unimodulaire, $\mathfrak{h}$ réductive dans $\mathfrak{g}$ et $n=\dim \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ (*cf.* [6]);

(ii) l'isomorphisme, pour $\mathfrak{g}$ unimodulaire, $\mathfrak{h}$ réductive dans $\mathfrak{g}$ et $n=\dim\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$, de $\mathrm{Ext}^*_{\mathfrak{g},\mathfrak{h}}(E, F)$ et du dual de $\mathrm{Ext}^{n-*}_{\mathfrak{g},\mathfrak{h}}(E, F)$, si E et F sont deux $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$-modules admissibles dont l'un est de dimension finie (*cf.* [3], 1.2.9). L'isomorphisme de $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{k}}(\Lambda^{n-*}\mathfrak{g}/\mathfrak{k}, E\otimes\mathbb{R}_{\Delta^{-1}})$ avec $\Lambda^*\mathfrak{g}/\mathfrak{k} \otimes_{\mathscr{U}(\mathfrak{h})} E$ que l'on a obtenu a pu être établi parce que toute classe de $\Lambda^*\mathfrak{g}/\mathfrak{k}\otimes_{\mathscr{U}(\mathfrak{h})} E$ contient un unique élément $\mathfrak{k}$-invariant. Ceci explique que pour les $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$-modules on suppose $\mathfrak{h}$ réductive dans $\mathfrak{g}$, car dans ce cas toute classe dans $\Lambda^*\mathfrak{g}/\mathfrak{h}\otimes_{\mathscr{U}(\mathfrak{h})} E$ est représentée par un élément $\mathfrak{h}$-invariant.

On peut alors étendre (i) au cas où $\mathfrak{g}$ n'est pas unimodulaire, mais en supposant toujours $\mathfrak{h}$ unimodulaire et réductive dans $\mathfrak{g}$ et obtenir ainsi un isomorphisme de $H^{n-*}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, E\otimes\mathbb{R}_{\Delta^{-1}})$ avec $H_*(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, E)$ pour tout $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$-module E.

Remarque 3. — Lorsque $K=\{e\}$ on peut décrire le noyau de l'application $S_q : \Omega_c^{n-q}(G, E)\to\Lambda^q\mathfrak{g}\otimes E$; c'est l'ensemble des formes α du type $f\wedge\omega^{\Lambda(n-q)}$ où f est une fonction appartenant à $C_c^\infty(G, \Lambda^q\mathfrak{g}\otimes E)$ d'intégrale nulle.

2.B. CAS OÙ K EST NON CONNEXE. — D'après ce qui précède l'application $\bar{\varphi}_q$ est un isomorphisme topologique de $\mathrm{Hom}_{K^0}(\Lambda^{n-q}\mathfrak{g}/\mathfrak{k}, E\otimes\mathbb{R}_{\Delta^{-1}})$ sur $(\Lambda^q\mathfrak{g}/\mathfrak{k}\otimes E)_{K^0}$.

L'espace $\mathrm{Hom}_K(\Lambda^{n-q}\mathfrak{g}/\mathfrak{k}, E\otimes\mathbb{R}_{\Delta^{-1}})$ est $\mathrm{Hom}_{K^0}(\Lambda^{n-q}\mathfrak{g}/\mathfrak{k}, E\otimes\mathbb{R}_{\Delta^{-1}})^{K/K^0}$ où l'action de K/K^0 est donnée par :

$$\forall\, l \in \mathrm{Hom}_{K^0}(\Lambda^{n-q}\mathfrak{g}/\mathfrak{k}, E\otimes\mathbb{R}_{\Delta^{-1}}) \qquad \forall\, \dot{k}\in K/K^0, \quad \dot{k}.l = U_k \circ l \circ \Lambda^{n-q}\mathrm{Ad}\,k^{-1},$$

k étant un représentant quelconque de $\dot{k}$.

On a :

$$\bar{\varphi}_q(\dot{k}.l) = (-1)^{[q/2]}\pi\Big(\sum_{\sigma\in S}\dot{e}_{\sigma(1)}\wedge\ldots\wedge\dot{e}_{\sigma(q)}\otimes U_k l(\mathrm{Ad}\,k^{-1}\dot{e}_{\sigma(q+1)}\wedge\ldots\wedge\mathrm{Ad}\,k^{-1}\dot{e}_{\sigma(n)})\Big).$$

En remplaçant la base $(\dot{e}_1, \ldots, \dot{e}_n)$ par la base $(\mathrm{Ad}\,k\,\dot{e}_1, \ldots, \mathrm{Ad}\,k\,\dot{e}_n)$, on obtient que $\bar{\varphi}_q(\dot{k}.l)$ est égal à

$$(-1)^{[q/2]}\pi(\mathrm{Ad}\,k\,\dot{e}_{\sigma(1)}\wedge\ldots\wedge\mathrm{Ad}\,k\,\dot{e}_{\sigma(q)}\otimes U_k l(\dot{e}_{\sigma(q+1)}\wedge\ldots\wedge\dot{e}_{\sigma(n)})).\det \mathrm{Ad}\,k^{-1},$$

c'est-à-dire à $\det\mathrm{Ad}\,k^{-1}.(\Lambda^q\mathrm{Ad}\,k\otimes U_k)\,\bar{\varphi}_q(l)$.

Donc $\bar{\varphi}_q$ est un K/K^0-morphisme pour l'action suivante de K/K^0 dans $(\Lambda^q\mathfrak{g}/\mathfrak{k}\otimes E)_{K^0}$:

$$\dot{k}\,\pi(\dot{X}_1\wedge\ldots\wedge\dot{X}_q\otimes a) = \det\mathrm{Ad}\,k^{-1}.\pi(\mathrm{Ad}\,k\,\dot{X}_1\wedge\ldots\wedge\mathrm{Ad}\,k\,\dot{X}_q\otimes U_k a),$$

où k est un représentant de $\dot{k}$.

Il en résulte que $\bar{\varphi}_q$ induit un isomorphisme de $\mathrm{Hom}_K(\Lambda^{n-q}\mathfrak{g}/\mathfrak{k}, E\otimes\mathbb{R}_{\Delta^{-1}})$ sur $(\Lambda^q\mathfrak{g}/\mathfrak{k}\underset{\mathscr{U}(\mathfrak{k})}{\otimes}E)^{K/K^0}$. On a obtenu :

Proposition 4. — *Si* K *est un sous-groupe compact de* G, K^0 *la composante connexe de* e *dans* K *et* n *la dimension de* G/K, *les complexes*

$$\Omega_c^{n-*}(G/K, E)_G, \quad \mathrm{Hom}_K(\Lambda^{n-*}\mathfrak{g}/\mathfrak{k}, E\otimes\mathbb{R}_{\Delta^{-1}}) \quad \text{et} \quad (\Lambda^*\mathfrak{g}/\mathfrak{k}\underset{\mathscr{U}(\mathfrak{k})}{\otimes}E)^{K/K^0},$$

sont topologiquement isomorphes, l'action d'un élément $\dot{k}$ *de* K/K^0 *sur* $(\Lambda^*\mathfrak{g}/\mathfrak{k}\underset{\mathscr{U}(\mathfrak{k})}{\otimes}E)$ *étant* $\det\mathrm{Ad}\,k^{-1}.\Lambda^*\mathrm{Ad}\,k\otimes U_k$, *où* k *est un représentant quelconque de* $\dot{k}$.

Corollaire 1. — *Si* G *a un nombre fini de composantes connexes et si* K *est un sous-groupe compact maximal, les espaces* $H_*(G, E)$ *et* $H_*(\mathfrak{g}/\mathfrak{k}, E)^{K/K^0}$ *sont topologiquement isomorphes.*

Nous verrons au paragraphe suivant que $H_*(\mathfrak{g}, \mathfrak{k}, E)^{K/K^0}$ s'interprète comme étant la $(\mathfrak{g}, K)$-homologie de G à coefficients dans le $(\mathfrak{g}, K)$-module $E\otimes\mathbb{R}_\varepsilon$ où $\mathbb{R}_\varepsilon$ est $\mathbb{R}$ muni de la structure de $(\mathfrak{g}, K)$-module pour laquelle l'action de $\mathfrak{g}$ est triviale et celle de K est donnée par la représentation $\varepsilon : k\mapsto\det\mathrm{Ad}\,k$.

Corollaire 2. — « *Isomorphisme de Poincaré* » *pour l'algèbre de Lie. Si* K *est un sous-groupe compact de* G *et si* $n=\dim G/K$, *on a un isomorphisme topologique de* $H_*(\mathfrak{g}, \mathfrak{k}, E)^{K/K^0}$ *sur* $H^{n-*}(\mathfrak{g}, K, E\otimes\mathbb{R}_{\Delta^{-1}})$.

3. Isomorphisme de Poincaré dans la catégorie des $(\mathfrak{g}, \mathrm{K})$-modules

Rappelons qu'un $(\mathfrak{g}, \mathrm{K})$-module F est un espace vectoriel muni d'une représentation de $\mathfrak{g}$ et d'une représentation de K vérifiant :

(i) $\forall k \in \mathrm{K}, \forall x \in \mathfrak{g}, \forall a \in \mathrm{F}, (\mathrm{Ad}\,k.\mathrm{X})a = k\mathrm{X}k^{-1}a$;

(ii) $\forall a \in \mathrm{F}$, $\mathrm{K}.a$ engendre un sous-espace de dimension finie, la représentation de K dans cet espace est continue et

$$\forall \mathrm{Y} \in \mathfrak{k}, \qquad \mathrm{Y}.a = \frac{d}{dt}(\exp t\mathrm{Y}.a)|_{t=0}.$$

On notera $\underline{\mathrm{C}}_{\mathfrak{g},\mathrm{K}}$ la catégorie des $(\mathfrak{g}, \mathrm{K})$-modules.

Pour les définitions et propriétés de la $(\mathfrak{g}, \mathrm{K})$-cohomologie, on renvoit à [5], § 3.6. Nous utiliserons seulement que les $\mathrm{H}^*(\mathfrak{g}, \mathrm{K}, \mathrm{F})$ sont donnés par la cohomologie du complexe $\mathrm{Hom}_{\mathrm{K}}(\Lambda^* \mathfrak{g}/\mathfrak{k}, \mathrm{F})$.

Nous allons maintenant définir les espaces $\mathrm{H}_*(\mathfrak{g}, \mathrm{K}, \mathrm{F})$. Notons $\mathrm{F}_{\mathfrak{g}}$ le quotient $\mathrm{F}/\mathfrak{g}\mathrm{F}$; $\mathrm{F}_{\mathfrak{g}}$ est un K-module car $\mathfrak{g}\mathrm{F}$ est stable par l'action de K : en effet, si $k \in \mathrm{K}$, $\mathrm{X} \in \mathfrak{g}$ et $a \in \mathrm{F}$ on a

$$k\mathrm{X}a = k\mathrm{X}k^{-1}.ka = (\mathrm{Ad}\,k.\mathrm{X})ka \qquad \text{et} \qquad k\mathrm{X}a \text{ est donc un élément de } \mathfrak{g}\mathrm{F}.$$

DÉFINITION. — On appelle $\mathrm{H}_p(\mathfrak{g}, \mathrm{K}, .)$ les foncteurs dérivés à gauche du foncteur exact à droite $\mathrm{F} \mapsto (\mathrm{F}_{\mathfrak{g}})^{\mathrm{K}}$.

Remarque. — Si F est un $(\mathfrak{g}, \mathrm{K})$-module, on peut considérer l'application $a \mapsto \int ka\,dk$ de F dans F^{K}, et on montre comme au paragraphe 1 qu'elle induit un isomorphisme (algébrique cette fois) de F_{K} sur F^{K}, d'où il résulte que les foncteurs $\mathrm{F} \mapsto (\mathrm{F}_{\mathfrak{g}})^{\mathrm{K}}$ et $\mathrm{F} \mapsto (\mathrm{F}_{\mathfrak{g}})_{\mathrm{K}}$ sont naturellement équivalents.

Pour $0 \leqq q \leqq n$, on note $\mathrm{I}_q(\mathrm{F})$ l'espace $(\mathcal{U}(\mathfrak{g}) \underset{\mathcal{U}(\mathfrak{k})}{\otimes} \Lambda^q \mathfrak{g}/\mathfrak{k}) \otimes \mathrm{F}$ muni de la structure de $(\mathfrak{g}, \mathrm{K})$-module suivante :

si $u \in \mathcal{U}(\mathfrak{g})$, $\dot{\mathrm{Y}}_1 \in \mathfrak{g}, \ldots, \dot{\mathrm{Y}}_q \in \mathfrak{g}$, $a \in \mathrm{F}$, $\mathrm{X} \in \mathfrak{g}$ et $k \in \mathrm{K}$

$$\mathrm{X}(u \otimes \dot{\mathrm{Y}}_1 \wedge \ldots \wedge \dot{\mathrm{Y}}_q \otimes a) = \mathrm{X}u \otimes \dot{\mathrm{Y}}_1 \wedge \ldots \wedge \dot{\mathrm{Y}}_q \otimes a + u \otimes \dot{\mathrm{Y}}_1 \wedge \ldots \wedge \dot{\mathrm{Y}}_q \otimes \mathrm{X}a$$

et

$$k(u \otimes \dot{\mathrm{Y}}_1 \wedge \ldots \wedge \dot{\mathrm{Y}}_q \otimes a) = \mathrm{Ad}\,k\,u \otimes \mathrm{Ad}\,k\,\dot{\mathrm{Y}}_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{Ad}\,k\,\dot{\mathrm{Y}}_q \otimes ka.$$

LEMME. — *Les* $(\mathfrak{g}, \mathrm{K})$-*modules* $\mathrm{I}_q(\mathrm{F})$ *sont relativement projectifs dans la catégorie* $\underline{\mathrm{C}}_{\mathfrak{g},\mathrm{K}}$.

Pour établir ce résultat il est utile de calculer $u(1 \otimes \dot{\mathrm{Y}}_1 \wedge \ldots \wedge \dot{\mathrm{Y}}_q \otimes a)$ lorsque u est de la forme $\mathrm{X}_p \ldots \mathrm{X}_1$ où les X_i appartiennent à $\mathfrak{g}$. Si I est le sous-ensemble $\{i_1, \ldots, i_r\}$ de $\{1, \ldots, p\}$ avec $i_1 > \ldots > i_r$ on note u_{I} le produit $\mathrm{X}_{i_1} \ldots \mathrm{X}_{i_r}$. Le complémentaire J de I dans $\{1, \ldots, p\}$ étant $\{j_1, \ldots, j_{p-r}\}$ où $j_1 < \ldots < j_{p-r}$ on note u_{J} le produit $\mathrm{X}_{j_1} \ldots \mathrm{X}_{j_{p-r}}$.

On établit alors facilement par récurrence sur p que :

$$u(1 \otimes \dot{\mathrm{Y}}_1 \wedge \ldots \wedge \dot{\mathrm{Y}}_q \otimes a) = \sum_{\mathrm{I}} (-1)^{p-\mathrm{card}\,\mathrm{I}} u_{\mathrm{I}} \otimes \dot{\mathrm{Y}}_1 \wedge \ldots \wedge \dot{\mathrm{Y}}_q \otimes u_{\mathrm{J}}\,a.$$

Supposons maintenant que l'on a un diagramme :

$$\begin{array}{ccc} & \mathrm{I}_q(\mathrm{F}) & \\ & \downarrow h & \\ \mathrm{A} & \underset{s}{\overset{f}{\leftrightarrows}} & \mathrm{B} \end{array}$$

où f, h sont des $(\mathfrak{g}, \mathrm{K})$-morphismes et s un K-morphisme tel que $f \circ s = \mathrm{Id}_{\mathrm{B}}$.

Nous allons construire un $(\mathfrak{g}, \mathrm{K})$-morphisme $\bar{h} : \mathrm{I}_q(\mathrm{F}) \to \mathrm{A}$ tel que $f \circ \bar{h} = h$.

On définit $\bar{h}(u \otimes \dot{\mathrm{Y}}_1 \wedge \ldots \wedge \dot{\mathrm{Y}}_q \otimes a)$ lorsque u est de la forme $\mathrm{X}_p \mathrm{X}_1$ par :

$$\bar{h}(u \otimes \dot{\mathrm{Y}}_1 \wedge \ldots \wedge \dot{\mathrm{Y}}_q \otimes a) = \sum_{\mathrm{I}} (-1)^{p - \operatorname{card} \mathrm{I}} u_{\mathrm{I}} . s_\circ h (1 \otimes \dot{\mathrm{Y}}_1 \wedge \ldots \wedge \dot{\mathrm{Y}}_q \otimes u_{\mathrm{J}} a).$$

On vérifie facilement que $\bar{h}$ est nulle sur les éléments de la forme

$$-u\mathrm{X} \otimes \dot{\mathrm{Y}}_1 \wedge \ldots \wedge \dot{\mathrm{Y}}_q \otimes a + u \otimes \sum_i \dot{\mathrm{Y}}_1 \wedge \ldots \wedge [\mathrm{X}, \mathrm{Y}_i] \wedge \ldots \wedge \dot{\mathrm{Y}}_q \otimes a,$$

ensuite que $\bar{h}$ est un $(\mathfrak{g}, \mathrm{K})$-morphisme et enfin que $f \circ \bar{h} = h$.

Remarque. — La démonstration précédente établit la « réciprocité de Frobenius » suivante :
si B est un $(\mathfrak{g}, \mathrm{K})$-module l'application

$$\operatorname{Hom}_{\mathfrak{g}, \mathrm{K}} (\mathrm{I}_q(\mathrm{F}), \mathrm{B}) \to \operatorname{Hom}_{\mathrm{K}} (\Lambda^q \mathfrak{g}/\mathfrak{k} \otimes \mathrm{F}, \mathrm{B}),$$
$$h \mapsto h',$$

où $h'(\dot{\mathrm{Y}}_1 \wedge \ldots \wedge \dot{\mathrm{Y}}_q \otimes a) = h(1 \otimes \dot{\mathrm{Y}}_1 \wedge \ldots \wedge \dot{\mathrm{Y}}_q \otimes a)$, est un isomorphisme.

D'après [5], § 2.9, la suite

$$0 \to \mathrm{I}_n(\mathbb{R}) \to \ldots \xrightarrow{d_q} \mathrm{I}_q(\mathbb{R}) \to \ldots \to \mathrm{I}_0(\mathbb{R}) \xrightarrow{\eta} \mathbb{R} \to 0,$$

où η est l'augmentation et

$$\begin{aligned} d_q(u \otimes \dot{\mathrm{Y}}_1 \wedge \ldots \wedge \dot{\mathrm{Y}}_{q+1}) = & \sum_{i=1}^{q+1} (-1)^{i+1} u \mathrm{Y}_i \otimes (\dot{\mathrm{Y}}_1 \wedge \ldots \wedge \hat{\dot{\mathrm{Y}}}_i \wedge \ldots \wedge \dot{\mathrm{Y}}_{q+1}) \\ & + \sum_{i<j} (-1)^{i+j} u \otimes (\dot{\widehat{[\mathrm{Y}_i, \mathrm{Y}_j]}} \wedge \dot{\mathrm{Y}}_1 \wedge \ldots \wedge \hat{\dot{\mathrm{Y}}}_i \wedge \ldots \wedge \hat{\dot{\mathrm{Y}}}_j \wedge \ldots \wedge \dot{\mathrm{Y}}_{q+1}), \end{aligned}$$

est une résolution forte relativement projective du $(\mathfrak{g}, \mathrm{K})$-module trivial $\mathbb{R}$. Alors la suite

$$0 \to \mathrm{I}_n(\mathrm{F}) \to \ldots \xrightarrow{\delta_q} \mathrm{I}_q(\mathrm{F}) \to \ldots \to \mathrm{I}_0(\mathrm{F}) \xrightarrow{\eta \otimes 1_{\mathrm{F}}} \mathrm{F} \to 0,$$

où $\delta_q = d_q \otimes \mathrm{Id}_{\mathrm{F}}$, est une résolution forte relativement projective de F dans $\underline{\mathrm{C}}_{\mathfrak{g}, \mathrm{K}}$.

Comme $\mathrm{I}_q(\mathrm{F})_{\mathfrak{g}} = (\mathscr{U}(\mathfrak{g}) \underset{\mathscr{U}(\mathfrak{k})}{\otimes} \Lambda^q \mathfrak{g}/\mathfrak{k}) \underset{\mathscr{U}(\mathfrak{g})}{\otimes} \mathrm{F}$ s'identifie à $\Lambda^q \mathfrak{g}/\mathfrak{k} \underset{\mathscr{U}(\mathfrak{k})}{\otimes} \mathrm{F}$ (toujours d'après [5], § 2.9) et comme $\Lambda^q \mathfrak{g}/\mathfrak{k} \underset{\mathscr{U}(\mathfrak{k})}{\otimes} \mathrm{F} = (\Lambda^q \mathfrak{g}/\mathfrak{k} \otimes \mathrm{F})_{\mathrm{K}^\circ}$ est isomorphe à $(\Lambda^q \mathfrak{g}/\mathfrak{k} \otimes \mathrm{F})^{\mathrm{K}^\circ}$ on en déduit :

PROPOSITION 5. — *Si* F *est un* $(\mathfrak{g}, \mathrm{K})$*-module et si* V *désigne l'action de* K *dans* F, $\mathrm{H}_*(\mathfrak{g}, \mathrm{K}, \mathrm{F})$ *est l'homologie du complexe*

$$0 \to (\Lambda^n \mathfrak{g}/\mathfrak{k} \otimes \mathrm{F})^{\mathrm{K}} \xrightarrow{\delta} \ldots \xrightarrow{\delta} (\mathfrak{g}/\mathfrak{k} \otimes \mathrm{F})^{\mathrm{K}} \to \mathrm{F}^{\mathrm{K}} \to 0,$$

où δ est définie comme au paragraphe 2 et où l'action de K *dans* $\Lambda^q\,\mathfrak{g}/\mathfrak{k}\otimes F$ *est* $k \mapsto \Lambda^q\,\mathrm{Ad}\,k\otimes V_k$.

Remarque. — On définit de façon évidente les bifoncteurs $\mathrm{Tor}_*^{\mathfrak{g},K}$ dans la catégorie $\underline{C}_{\mathfrak{g},K}$. Le fait que les espaces $I_q(F)$ soient projectifs montre que $H_*(\mathfrak{g}, K, F)=\mathrm{Tor}_*^{\mathfrak{g},K}(\mathbb{R}, F)$ et aussi que, pour deux $(\mathfrak{g}, K)$-modules F_1 et F_2, on a $\mathrm{Tor}^{\mathfrak{g},K}(F_1, F_2)=H_*(\mathfrak{g}, K, F_1\otimes F_2)$.

D'après l'étude faite au paragraphe 2, l'application $\bar{\varphi}_q$ induit un isomorphisme de $\mathrm{Hom}_K(\Lambda^{n-q}\,\mathfrak{g}/\mathfrak{k}, F\otimes\mathbb{R}_{\Delta^{-1}})$ sur le sous-espace de $\Lambda^q\,\mathfrak{g}/\mathfrak{k}\otimes F$ constitué des éléments K-invariants pour l'action suivante de K :

$$k \mapsto \det \mathrm{Ad}\,k^{-1}.\Lambda^q\,\mathrm{Ad}\,k\otimes V_k.$$

Notons $\mathbb{R}_\varepsilon$ l'espace $\mathbb{R}$ muni de la structure de $(\mathfrak{g}, K)$-module pour laquelle l'action de $\mathfrak{g}$ est triviale et cette de K est donnée par la représentation $\varepsilon : k \mapsto \det \mathrm{Ad}\,k$ (ε est égale à 1 ou -1 sur chaque composante connexe de K). Alors $\bar{\varphi}_q$ est un isomorphisme de $\mathrm{Hom}_K(\Lambda^{n-q}\,\mathfrak{g}/\mathfrak{k}, F\otimes\mathbb{R}_{\Delta^{-1}})$ sur $(\Lambda^q\,\mathfrak{g}/\mathfrak{k}\otimes F\otimes\mathbb{R}_\varepsilon)^K$ d'où la

PROPOSITION 6. — Si F est un $(\mathfrak{g}, K)$-module, on a un isomorphisme de Poincaré de $H^{n-*}(\mathfrak{g}, K, F\otimes\mathbb{R}_{\Delta^{-1}})$ avec $H_*(\mathfrak{g}, K, F\otimes\mathbb{R}_\varepsilon)$.

Remarque. — Si E est un G-module différentiable, on définira sa $(\mathfrak{g}, K)$-homologie comme dans la proposition 5. Si $E_{(K)}$ désigne l'espace des vecteurs K-finis de E, $E_{(K)}$ est un $(\mathfrak{g}, K)$-module, on a $(E\otimes R_{\Delta^{-1}})_{(K)}=E_{(K)}\otimes\mathbb{R}_{\Delta^{-1}}$ et les isomorphismes suivants :

$$\mathrm{Hom}_K(\Lambda^{n-q}\,\mathfrak{g}/\mathfrak{h}, E\otimes\mathbb{R}_{\Delta^{-1}})\simeq \mathrm{Hom}_K(\Lambda^{n-q}\,\mathfrak{g}/\mathfrak{k}, E_{(K)}\otimes\mathbb{R}_{\Delta^{-1}})$$
$$\simeq(\Lambda^q\,\mathfrak{g}/\mathfrak{k}\otimes E\otimes\mathbb{R}_\varepsilon)^K\simeq(\Lambda^q\,\mathfrak{g}/\mathfrak{k}\otimes E_{(K)}\otimes\mathbb{R}_\varepsilon)^K,$$

d'où il résulte que les espaces $H^{n-*}(\mathfrak{g}, K, E\otimes\mathbb{R}_{\Delta^{-1}})$, $H^{n-*}(\mathfrak{g}, K, E_{(K)}\otimes\mathbb{R}_{\Delta^{-1}})$, $H_*(\mathfrak{g}, K, E\otimes\mathbb{R}_\varepsilon)$ et $H_*(\mathfrak{g}, K, E_{(K)}\otimes\mathbb{R}_\varepsilon)$ sont algèbriquement isomorphes. Si, de plus, G a un nombre fini de composantes connexes et si K est un sous-groupe compact maximal, on obtient, en conclusion, un isomorphisme topologique entre $H_*(G, E)$ et $H_*(\mathfrak{g}, K, E\otimes\mathbb{R}_\varepsilon)$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] P. BLANC, *Projectifs dans la catégorie des G-modules topologiques* (Note C.R.A.S., t. 289, p. 161-163, 1979).

[2] P. BLANC et D. WIGNER, *Homologie des représentations des groupes de Lie et dualité de Poincaré* (*Centre de Mathématiques de l'École polytechnique*, 1980).

[3] A. BOREL et N. WALLACH, *Seminar on the Cohomology of Discrete Subgroups of Semi-Simple Groups*, I.A.S., Princeton, 1977.

[4] H. CARTAN et S. EILENBERG, *Homological Algebra*, Princeton University Press, 1956.

[5] A. GUICHARDET, *Cohomologie des groupes topologiques et des algèbres de Lie*, Nathan/Cédic, 1980.

[6] J. L. KOSZUL, *Homologie et cohomologie des algèbres de Lie* (*Bull. Soc. Math. Fr.*, t. 78, p. 65-127, 1950).

Joëlle PICHAUD
Université de Paris-VII,
U.E.R. de Mathématiques,
2, place Jussieu,
75251 Paris Cedex 05.

(Manuscrit reçu le 11 juin 1982.)