

ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

A. GRIGIS

Propagation des singularités le long de courbes microbicaractéristiques pour des opérateurs pseudodifférentiels à caractéristiques doubles. I

Annales scientifiques de l'É.N.S. 4^e série, tome 15, n° 1 (1982), p. 147-159

http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1982_4_15_1_147_0

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1982, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (<http://www.elsevier.com/locate/ansens>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

PROPAGATION DES SINGULARITÉS LE LONG DE COURBES MICROBICARACTÉRISTIQUES POUR DES OPÉRATEURS PSEUDODIFFÉRENTIELS A CARACTÉRISTIQUES DOUBLES. I

PAR A. GRIGIS

Dans cet article, nous étudions la propriété de propagation des singularités pour des opérateurs du même type que ceux que nous avons considéré dans [5], mais différents en ce sens que nous imposons d'autres conditions à satisfaire par les invariants.

Le phénomène de propagation des singularités est semblable à celui observé pour l'opérateur de Schrödinger : les singularités microlocales des solutions se propagent le long de courbes tracées dans les feuilles canoniques de la variété caractéristique. Nous appelons ces courbes microbicaractéristiques.

Par exemple, pour l'opérateur de Schrödinger :

$$S = \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial t} - \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)^2, \quad (t, x) \in \mathbb{R}^{n+1},$$

les courbes microbicaractéristiques sont les droites contenues dans les n -plans :

$$\tau = \tau_0 < 0, \quad \xi = 0, \quad t = t_0, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Parmi les opérateurs que nous considérons, ceux qui, tels l'opérateur de Schrödinger, ont une variété caractéristique involutive, ont été traités par L. Boutet de Monvel [2] et R. Lascar [10]. Nous utilisons la forme microlocale quasi homogène de leur résultat. Notre étude est similaire à celle menée dans [5] aussi nous choisissons les mêmes notations et renvoyons très souvent à cet article. Notre énoncé principal est le théorème (1.14).

Enfin signalons que les conditions que nous imposons sont encore assez restrictives, et qu'il reste de nombreux problèmes ouverts dans le cas général. Nous discutons tout cela dans la dernière partie du présent article.

1. Présentation du résultat

(a) L'OPÉRATEUR P ET LES CONDITIONS IMPOSÉES A SES INVARIANTS. — Soit X une variété C^∞ , paracompacte, de dimension n et V un ouvert conique du fibré cotangent T^*X privé de sa section nulle. On travaille dans V , c'est-à-dire qu'on s'intéresse aux propriétés microlocales au voisinage des points de V , des distributions et des opérateurs pseudodifférentiels définis sur X .

On considère un opérateur pseudodifférentiel P , classique, à caractéristiques doubles sur une sous-variété fermée de V , C^∞ , conique, que l'on note Σ et sur laquelle on fait la même hypothèse que dans [5] :

HYPOTHÈSE (1.1). — On suppose Σ connexe, ω -feuilletée régulière, et non symplectique.

Rappelons que cela signifie ([5], définition (1.3)) que le rang de la restriction à Σ de la 2-forme symplectique ω est constant dans $V \cap \Sigma$ et d'autre part que le champ radial sur T^*X n'est orthogonal à Σ pour ω en aucun point de Σ . On note Γ_ρ la feuille canonique passant par un point $\rho \in \Sigma$; par définition Γ_ρ est supposée connexe et maximale. Enfin comme dans [5] on pose :

$$(1.2) \quad \left\{ \begin{array}{l} d = \text{codim } \Sigma > 0, \\ d' = \dim \Gamma > 0, \\ d'' = \frac{1}{2}(d - d'). \end{array} \right.$$

Le cas où Σ est involutive, c'est-à-dire où $d' = 0$, est particulier. Le lecteur fera les conventions évidentes pour admettre que les énoncés restent valables dans ce cas.

On suppose que le symbole principal de P , $p_m = I_1(P)$, est réel, elliptique dans V/Σ , et nul à l'ordre 2 exactement sur Σ . Pour fixer les idées on le supposera positif. D'autre part on suppose que le symbole sous-principal de P , noté $I_2(P)$, est réel sur Σ . Le caractère réel de $I_1(P)$ et $I_2(P)$ est assuré si on suppose P autoadjoint par exemple.

Rappelons [4] que la matrice fondamentale de P ou matrice hamiltonienne de p_m , notée A , est définie en un point ρ de Σ par :

$$(1.3) \quad \omega(u, Av) = q(u, v), \quad \forall u, v \in T_\rho T^*X,$$

$q(\cdot, \cdot)$ désignant la forme polaire du hessien de p_m au point ρ . Donc A est un endomorphisme de $T_\rho T^*X$, antisymétrique pour ω et pour q , et son rang est d et celui de A^2 est égal à $2d'$ d'après les notations (1.2). On appelle $\lambda_j, j=1, \dots, d'$ les nombres positifs tels que $\pm i\lambda_j$ soient les valeurs propres non nulles, comptées avec leur multiplicité, de la matrice fondamentale A . On range les λ_j dans l'ordre croissant :

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_{d'}$$

et pour tout multi-indice $\alpha \in \mathbb{N}^{d'}$ on note :

$$(1.4) \quad M_\alpha = I_2(P) + \sum_{j=1}^{d'} (2\alpha_j + 1)\lambda_j.$$

En particulier pour α égal au multi-indice nul, M_0 désigne l'invariant de Melin de P [11].

Remarque (1.5). — En un point ρ de Σ , l'ensemble K_ρ des multi-indices α tels que $M_\alpha(\rho) \leq 0$ est fini. Le cardinal de K_ρ , noté $|K_\rho|$ est une fonction semi-continue supérieure de $\rho \in \Sigma$.

C'est évident car les nombres λ_j sont strictement positifs et d'autre part le symbole sous-principal $I_2(P)$ et la matrice fondamentale A dépendent de manière C^∞ de $\rho \in \Sigma$, donc les fonctions M_α sont continues de ρ .

On fait maintenant l'hypothèse, nouvelle par rapport à [5] :

HYPOTHÈSE (1.6). — On suppose que P vérifie :

$$\forall \rho \in \Sigma \cap V, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^d;$$

- (i) $M_\alpha(\rho) \neq 0$;
- (ii) $M_\alpha(\rho) = M_\beta(\rho) < 0 \Rightarrow \alpha = \beta$.

On a alors :

PROPOSITION (1.7). — Si l'hypothèse (1.6) est vérifiée, l'ensemble $K = K_\rho$ des multi-indices α tels que $M_\alpha(\rho) \leq 0$ est indépendant de $\rho \in \Sigma \cap V$. D'autre part les $|K|$ fonctions M_α , $\alpha \in K$, sont C^∞ sur Σ .

Le premier point découle immédiatement de (i). Pour le 2^e on a plus généralement le fait que si $M_\alpha, \alpha \in \mathbb{N}^d$ vérifie $M_\beta(\rho_0) = M_\alpha(\rho_0) \Rightarrow \beta = \alpha$, alors M_α est C^∞ près de ρ (en particulier M_0 est C^∞). En effet, on remarque que si $\lambda_j(\rho_0) = \lambda_{j'}(\rho_0)$ alors $\alpha_j = \alpha_{j'}$. On partitionne les λ_j en autant de sous-ensembles qu'il y a de valeurs $\lambda_j(\rho_0)$ distinctes et on constate que dans l'expression de M_α interviennent le symbole sous-principal, qui est C^∞ , et les sommes de ces sous-ensembles de λ_j . Enfin les $+i\lambda_j$ sont des valeurs propres de la matrice A qui est C^∞ et il est bien connu que les fonctions symétriques d'un sous-ensemble de valeurs propres d'une matrice C^∞ sont des fonctions C^∞ si ce sous-ensemble est bien séparé dans \mathbb{C} des autres valeurs propres.

Rappelons que si K est vide, c'est-à-dire si $M_0 > 0$, P est hypoelliptique avec perte d'une dérivée. D'autre part, dans [5] on supposait $M_0 \equiv 0$ sur Σ et on montrait que P propage les singularités sur les feuilles canoniques. Par rapport à [5] on a conservé les hypothèses (H_1) (H_2) (H_3) et remplacé (H_4) par l'hypothèse (1.6).

(b) LES MÉTRIQUES INVARIANTES ET LES MICROBICARACTÉRISTIQUES DE P . — On rappelle que le fibré tangent d'une feuille canonique Γ de Σ est donné par :

$$T\Gamma = T\Sigma \cap T\Sigma^{\perp\omega}.$$

La 2-forme symplectique ω définit un isomorphisme :

$$(1.8) \quad T^*\Gamma \approx T(T^*X)/T\Sigma + T\Sigma^{\perp\omega}.$$

LEMME (1.9). — *Le hessien transversal sur Σ du symbole principal de P induit une métrique riemannienne sur chaque feuille canonique Γ . Cette métrique, notée g , est invariante si on transmue P avec un opérateur intégral de Fourier elliptique.*

Il suffit de définir de manière intrinsèque une forme quadratique définie positive sur chaque fibre du fibré $T^*\Gamma$. Pour cela on rappelle que A étant réelle antisymétrique pour q et ω , on a :

$$(1.10) \quad \left\{ \begin{array}{l} T(T^*X) = \text{Ker } A^2 \oplus \text{Im } A^2, \\ T\Sigma = \text{Ker } A, \\ T\Sigma^{\perp\omega} = \text{Im } A = \text{Im } A^2 \oplus (\text{Ker } A \cap \text{Im } A). \end{array} \right.$$

On en déduit un isomorphisme naturel :

$$(1.11) \quad \text{Ker } A^2 / T\Sigma \approx T(T^*X) / T\Sigma + T\Sigma^{\perp\omega}.$$

Le hessien transversal du symbole principal de P est défini positif sur $T(T^*X) / T\Sigma$, il induit par restriction une forme quadratique définie positive sur $\text{Ker } A^2 / T\Sigma$ qui se transporte *via* les isomorphismes (1.11) et (1.8) sur le fibré cotangent $T^*\Gamma$. L'invariance est claire.

DÉFINITION (1.12). — Soit P vérifiant les hypothèses du paragraphe 1 (a) et notamment (1.6). On appelle métriques invariantes associées à P les $|K|$ métriques riemanniennes $g_\alpha = (-M_\alpha)^{-1} g$, $\alpha \in K$, définies sur chaque feuille canonique Γ de Σ .

Ces métriques sont toutes conformes à g , c'est-à-dire qu'elles définissent la même notion d'angle. En effet les M_α sont des fonctions sur Γ et donc constantes sur les fibres si on les considère comme fonctions sur $T^*\Gamma$. Ces métriques sont, comme g , invariantes si on transmue P par un opérateur intégral de Fourier elliptique. De plus, si Q est un opérateur pseudodifférentiel elliptique, les mêmes métriques sont associées à P , à QP et à PQ . En effet on multiplie alors g et M_α par la même fonction de $\rho \in \Gamma$ à savoir le symbole principal de Q .

DÉFINITION (1.13). — On appelle microbicaractéristique de P , une courbe connexe d'une feuille canonique Γ , qui soit géodésique maximale d'une des $|K|$ métriques invariantes g_α associées à P .

Donc si $\rho \in \Sigma$ et $\zeta \in T_\rho^* \Gamma_\rho \setminus \{0\}$, il n'y a que $|K|$ microbicaractéristiques de P passant par ρ avec la direction ζ (elles sont éventuellement confondues). Ce sont par définition les projections sur Γ_ρ des courbes intégrales des champs hamiltoniens (dans $T^*\Gamma_\rho$) H_{g+M_α} des fonctions $g + M_\alpha$, $\alpha \in K$ partant respectivement des points $(\rho, (g_\alpha(\zeta))^{-1/2} \zeta) \in T^*\Gamma_\rho$. On peut remarquer que pour déterminer une microbicaractéristique de P il suffit de se donner un point $\rho \in \Sigma$, une direction de droite dans $T_\rho^* \Gamma_\rho$ et un multi-indice $\alpha \in K$.

(c) LES ÉNONCÉS :

THÉORÈME (1.14). — *Soit P un opérateur pseudodifférentiel vérifiant dans un ouvert conique V les hypothèses décrites au paragraphe 1 (a). Soit $\rho_0 \in V \cap \Sigma$ et $u \in \mathcal{D}'(x)$ tel que $\rho_0 \notin \text{WF}(Pu)$. Si $\rho_0 \in \text{WF}(u)$ il existe un arc γ de microbicaractéristique de P passant par ρ_0 tel que $\gamma \subset \text{WF}(u)$.*

Ce théorème est montré dans [2] et [10], dans le cas où Σ est involutive. Il y a un autre cas particulier où l'hypothèse (1.6) est vérifiée et le phénomène de propagation n'est pas plus

compliqué que pour l'opérateur de Schrödinger : c'est le cas où l'ensemble K est réduit à l'élément $\{0\}$ et donc où seule la métrique g_0 intervient; P vérifie alors dans V (noter l'ordre des λ_j) :

$$(1.15) \quad -\lambda_1 < M_0 = I_2(P) + \sum_{j=1}^d \lambda_j < 0.$$

Le théorème (1.14) dit entre autres qu'il n'y a pas de points isolés dans $WF(u) \setminus WF(Pu)$. En fait on montrera dans le paragraphe 2 un résultat plus précis que le théorème (1.14) qui correspondrait à une version microlocale de ce théorème. De plus on ébauche une théorie de seconde microlocalisation, dont l'intérêt dans ce cadre particulier est peut-être limité, mais qui permet de montrer :

THÉORÈME (1.16). — Soit P comme dans (1.14). Soit $u \in \mathcal{D}'(X)$ telle que $WF(Pu) \cap V = \emptyset$. Soit $\rho_0 \in V \cap \Sigma$ tel que toute microbicaractéristique de P , contenant ρ_0 rencontre $VWF(u)$; alors $\rho_0 \notin WF(u)$. (Noter que par définition les microbicaractéristiques sont supposées maximales dans V .)

Autrement dit, si Pu est C^∞ , le front d'onde de u est une réunion de géodésiques des métriques invariantes associées à P .

2. Application des méthodes décrites dans [5]

(a) **LE MODÈLE MICROLOCAL.** — Comme il est montré dans ([5], proposition (1.15)), pour étudier P microlocalement au voisinage d'un point $\rho_0 \in \Sigma$, il suffit d'étudier le modèle que l'on va décrire dans ce paragraphe. Pour passer de P au modèle, on le compose avec un opérateur pseudodifférentiel elliptique pour changer le degré et on transmue à l'aide d'un opérateur intégral de Fourier elliptique. Voici le modèle, écrit comme dans [5], § 1.4 :

$$(2.1) \quad \begin{cases} X = \mathbb{R}_x^n = \mathbb{R}_t^d \times Y, \\ Y = \mathbb{R}_y^{n-d} = \mathbb{R}_{y'}^{n-d-d'} \times \mathbb{R}_{y''}^{d'}. \end{cases}$$

On note $\xi = (\tau, \eta) = (\tau, \eta', \eta'')$ la variable duale de $x = (t, y) = (t, y', y'')$ et la variété ω -feuilletée Σ a pour équations :

$$(2.2) \quad t = \tau = \eta'' = 0.$$

Les feuilles canoniques de Σ sont les d'' -plans de Σ parallèles à l'espace $\mathbb{R}_{y''}^{d''}$.

On se place dans un voisinage conique V d'un point $\rho_0 \in \Sigma$. On suppose V ouvert, disjoint de $\eta' = 0$, et polycylindrique par rapport aux variables $(t, y', y'', \tau / |\eta'|, \eta'' / |\eta'|)$.

NOTATIONS (2.3). — Pour simplifier on conviendra souvent d'identifier, au moins dans l'écriture les éléments suivants :

$$\begin{aligned} (0, y; 0, \eta) \in T^*X & \quad \text{et} \quad (y, \eta) \in T^*Y, \\ \Sigma : \{t = \tau = \eta'' = 0\} \subset T^*X & \quad \text{et} \quad \Sigma : \{\eta'' = 0\} \subset T^*Y. \end{aligned}$$

D'autre part on identifiera souvent (y, η) (ou $(0, y; 0, \eta)$) avec le couple $(\rho, \zeta) \in T^* \Gamma$; $\rho = (y; \eta', 0)$, $\zeta = \eta''$.

Il sera facile de voir auquel de ces fibrés appartient le point désigné par l'une ou l'autre de ces notations.

L'opérateur considéré appartient à $\mathcal{N}^{1,2}(X, \Sigma)$ et s'écrit :

$$(2.4) \quad P = P_0 + P', \quad P' \in \mathcal{N}^{1,3}(X, \Sigma),$$

avec :

$$(2.5) \quad P_0 = \sum_{1 \leq j, j' \leq d'} a_{jj'}(y, D_{y'}) Z_j Z_{j'}^* + \sum_{1 \leq l, l' \leq d''} b_{ll'}(y, D_{y'}) D_{y''} D_{y''} + c(y, D_{y''}).$$

où :

$$Z_j = D_{t_j} + it_j |D_{y''}|, \quad j = 1, \dots, d',$$

et les fonctions $a_{jj'}$, $b_{ll'}$ et c sont des symboles d'opérateurs pseudodifférentiels, homogènes de degré -1 pour $a_{jj'}$ et $b_{ll'}$, 0 pour c , et ne dépendant que des variables y' , y'' et η' .

D'après les hypothèses faites sur P , la $d' \times d'$ matrice $(a_{jj'})$ est hermitienne définie positive, la $d'' \times d''$ matrice $(b_{ll'})$ est réelle définie positive, et la fonction c est réelle.

Les invariants M_α définis en (1.4) s'écrivent :

$$(2.6) \quad M_\alpha(y, \eta) = c(y, \eta') + \sum_{j=1}^{d'} 2 \alpha_j \lambda_j(y, \eta'),$$

où les $\lambda_j(y, \eta')$, $j = 1, \dots, d'$ sont les valeurs propres de la matrice $(a_{jj'}(y, \eta'))$, comptées avec leur multiplicité, et rangées dans l'ordre croissant.

D'autre part la métrique riemannienne g sur la feuille canonique qui passe par le point $\rho_0 = (0, y_0; 0, \eta'_0, 0)$ a pour expression :

$$(2.7) \quad g = \sum_{1 \leq l, l' \leq d''} b_{ll'}(y'_0, y''_0, \eta'_0) \eta''_l \eta''_{l'}.$$

Les microbicaractéristiques de P , supposé vérifier (1.6), contenues dans Γ_{ρ_0} sont les projections (obtenues en faisant $\eta'' = 0$) des courbes intégrales contenues dans les sous-variétés :

$$g(y'_0, y''_0; \eta'_0, \eta''_0) + M_\alpha(y'_0, y''_0; \eta'_0) = 0, \quad \alpha \in \mathbb{K},$$

des champs hamiltoniens respectifs :

$$(2.8) \quad H_{g+M_\alpha} = \sum_{l=1}^{d''} \left(\frac{\partial(g+M_\alpha)}{\partial y''_l} \frac{\partial}{\partial \eta''_l} - \frac{\partial(g+M_\alpha)}{\partial \eta''_l} \frac{\partial}{\partial y''_l} \right).$$

Remarquons enfin qu'on a restreint autant que nécessaire le voisinage de $\rho_0 \in \Sigma$ pour construire les coordonnées canoniques adaptées et un opérateur intégral de Fourier adéquat.

D'autre part l'opérateur $P' \in \mathcal{N}^{1,3}(X, \Sigma)$ est considéré comme une perturbation en ce sens que P_0 et $P = P_0 + P'$ ont les mêmes invariants M_α et g sur Σ .

(b) ÉTUDE DU MODÈLE A L'AIDE D'UNE MICROLOCALISATION QUASI HOMOGENÈME. — On se place dans la situation du paragraphe 2 (a). Comme pour étudier l'opérateur de Schrödinger (voir [2] et [10]) et comme on l'a fait dans [5], il est commode d'introduire la notion de front d'onde quasi homogène, $WF'(u)$ pour une distribution $u \in \mathcal{D}'(X)$, associée aux dilatations :

$$(2.9) \quad \lambda \cdot (t, y; \tau, \eta', \eta'') \rightarrow (t, y, \lambda\tau, \lambda\eta', \lambda^{1/2} \eta''), \quad \lambda > 0.$$

La définition et les propriétés de WF' sont données dans [10] et rappelées dans [5], § 2.1.

On rappelle qu'on associe à P un opérateur différentiel à coefficients polynomiaux, noté P_0^G , opérant sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}_t^d)$, et dépendant des paramètres (y, η) :

$$(2.10) \quad P_0^G = \sum_{1 \leq j, j' \leq d} a_{jj'}(y, \eta') (D_{t_j} + it_{j'} | \eta' |) (D_{t_{j'}} - it_j | \eta' |) + \sum_{1 \leq l, l' \leq d'} b_{ll'}(y, \eta') \eta_{l'}' \eta_l'' + c(y, \eta').$$

Compte tenu de la notation (2.3) on peut considérer en fait P_0^G dépendant du paramètre (ρ, ζ) , $\rho \in \Sigma \cap V$, $\zeta \in T_p^* \Gamma_\rho$. Cette remarque est importante, de même que celle qui consiste à voir la propriété d'homogénéité suivante :

$$(2.11) \quad \begin{cases} P_0^G(y, \lambda\eta', \lambda^{1/2} \eta'') (f(\lambda^{1/2} t)) = (P_0^G(y, \eta', \eta'') f)(\lambda^{1/2} t), \\ \lambda > 1, \quad | \eta' | > 1, \quad f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}_t^d). \end{cases}$$

Il est naturel alors d'introduire la définition suivante (noter que le terme microcaractéristique est employé en un sens différent dans la catégorie analytique par divers auteurs).

DÉFINITION (2.12). — On dit que P défini en (2.4) est non microcaractéristique au point $(\rho, \zeta) \in T^* \Gamma$, $\rho = (0, y; 0, \eta', 0)$, $\zeta = \eta''$ si l'opérateur $P_{0(y, \eta)}^G$ est inversible dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}_t^d)$.

Cette définition est écrite dans un système particulier de coordonnées canoniques. Elle est bien sûr intrinsèque car P_0^G est un invariant associé à P [c'est la forme réduite des divers opérateurs différentiels à coefficients polynomiaux associés à P en un point de Σ (voir [3])].

LEMME (2.13). — P est non microcaractéristique en (ρ, ζ) si et seulement si :

$$(g + M_\alpha)(\rho, \zeta) \neq 0, \quad \forall \alpha \in \mathbb{N}^d.$$

Cela résulte immédiatement de la considération du spectre de P_0^G .

PROPOSITION (2.14). — Si P est non microcaractéristique au point (ρ, ζ) , $\rho = (0, y, 0, \eta', 0)$, $\zeta = \eta''$, alors P est hypoelliptique dans un voisinage quasi homogène (au sens de (2.9)) du point $(0, y; 0, \eta)$.

Cette proposition justifie la définition (2.12). Elle s'obtient en reprenant exactement la démonstration de la proposition (2.15) de [5], c'est-à-dire en construisant dans un voisinage quasi homogène de $(0, y_0; 0, \eta_0)$ une paramétrix de P , de type $(\rho, \delta) = (1/2, 1/2)$.

D'autre part, pour étudier P près d'un point (ρ_0, ζ_0) microcaractéristique, autrement dit dans un petit voisinage quasi homogène du point $(0, y_0; 0, \eta_0)$ on utilise la méthode de réduction de Grusin. Il n'y a aucune difficulté nouvelle par rapport à [5], paragraphe 3, aussi nous laissons les détails.

En effet si le noyau de $P_0^G(y_0, \eta_0)$ est de dimension 1 et c'est le cas si l'hypothèse (1.6) est vérifiée, il est engendré par une fonction $h_{\alpha_0}(t, y'_0, \eta'_0)$ où α_0 est l'unique multi-indice α tel que $(g + M_\alpha)(y_0, \eta_0) = 0$ et $h_{\alpha_0}(t, y, \eta')$ est une base de l'espace propre de $P_0^G(y, \eta', 0)$ correspondant à la valeur propre $M_{\alpha_0}(y, \eta')$ pour (y, η') voisin de (y_0, η'_0) . Par exemple on peut poser :

$$(2.15) \quad h_{\alpha_0}(t, y, \eta') = \langle V_{j_1}(y, \eta') \cdot \tilde{Z} \rangle^{\alpha_{j_1}^0} \dots \langle V_{j_n}(y, \eta') \cdot \tilde{Z} \rangle^{\alpha_{j_n}^0} \exp\left(-\frac{t^2 |\eta'|}{2}\right),$$

où $\alpha_{j_1}^0, \dots, \alpha_{j_n}^0$ sont les composantes non nulles de α_0 , V_{j_1}, \dots, V_{j_n} sont des vecteurs propres de la matrice $(a_{jj'})$ correspondant aux valeurs propres respectives $\lambda_{j_1}, \dots, \lambda_{j_n}$ (étant donné l'unicité du multi-indice α tel que $(g + M_\alpha)(y_0, \eta_0) = 0$ ces valeurs propres et ces vecteurs propres sont C^∞ de (y, η')) et :

$$\tilde{Z} = (\tilde{Z}_1, \dots, \tilde{Z}_j, \dots, \tilde{Z}_d), \quad \tilde{Z}_j = \frac{\partial}{\partial t_j} - t_j |\eta'|$$

$(\langle V_{j_i} \cdot \tilde{Z} \rangle)$ est donc un opérateur différentiel du 1^{er} ordre et on l'applique $\alpha_{j_i}^0$ fois.

On procède alors comme dans [5], paragraphe 3.3 en introduisant l'opérateur de Hermite H_{α_0} , de symbole h_{α_0} convenablement tronqué, et en montrant que le système :

$$P = \begin{pmatrix} P & H_{\alpha_0} \\ H_{\alpha_0}^* & 0 \end{pmatrix} \in \begin{pmatrix} OPS^{1,2}(X, \Sigma) & OPH^0 \\ OPH^{*0} & OPS^{1,2}(Y, \Sigma) \end{pmatrix},$$

admet dans un voisinage quasihomogène U de (y_0, η_0) une paramétrix qui s'écrit :

$$\mathcal{E} = \begin{pmatrix} E & E^+ \\ E^- & E^\pm \end{pmatrix} \in \begin{pmatrix} OPS^{-1, -2}(X, \Sigma) & OPH^0 \\ OPH^{*0} & OP \mathcal{K}(Y, \Sigma) \end{pmatrix},$$

où E^\pm est un opérateur pseudodifférentiel quasihomogène sur Y défini pour $(y, \eta) \in U$.

Le symbole principal quasihomogène de E^\pm est calculé facilement :

$$E_0^\pm(y, \eta) = -(g + M_{\alpha_0})(y, \eta).$$

Donc E^\pm est de type principal quasi homogène au sens de [10] si $\zeta_0 = \eta_0''$ est non nul, car la différentielle par rapport à η'' de E_0^\pm est non nulle au point (y_0, η_0) . Autrement dit E^\pm est du type des opérateurs étudiés dans [2] et [10].

(c) LA PROPAGATION DES SINGULARITÉS. — Montrons d'abord un résultat microlocal quasi homogène. Pour ce résultat l'hypothèse (1.6) n'est pas nécessaire.

THÉORÈME (2.16). — Soit P décrit en (2.4). Soit (ρ_0, ζ_0) , $\zeta_0 \neq 0$, un point microcaractéristique de P tel que le noyau de $P_0^G(\rho_0, \zeta_0)$ soit de dimension 1. Soit α_0 le multi-indice tel que $(g + M_{\alpha_0})(\rho_0, \zeta_0) = 0$. Soit $u \in \mathcal{D}'(X)$ tel que $(\rho_0, \zeta_0) \in \text{WF}'(u) \setminus \text{WF}'(Pu)$. Alors (ρ_0, ζ_0) est point intérieur d'un arc $\tilde{\gamma}$ de courbe intégrale $H_{g+M_{\alpha_0}}$ tel que $\tilde{\gamma} \subset \text{WF}'(u)$.

Preuve. — On applique la méthode de réduction dans un voisinage quasi homogène U de $(y_0, \eta_0)(\rho_0 = (0, y_0; 0, \eta_0'), \zeta_0 = \eta_0'')$. On a les égalités dans U :

$$(2.17) \quad \begin{cases} \text{WF}'(EPu + E^+ H_{\alpha_0}^* u) = \text{WF}'(u), \\ \text{WF}'(E^- Pu + E^\pm H_{\alpha_0}^* u) = \emptyset \end{cases}$$

et par suite, moyennant les abus de notations signalés en (2.3) :

$$\begin{aligned} \text{WF}'(H_{\alpha_0}^* u) &= \text{WF}'(u), \\ \text{WF}'(E^\pm H_{\alpha_0}^* u) &= \emptyset. \end{aligned}$$

On applique alors le résultat de R. Lascar [10] sur les opérateurs de type principal réel, à E^\pm et à la distribution $H_{\alpha_0}^* u \in \mathcal{D}'(Y)$ et on obtient le théorème.

On déduit facilement du théorème (2.16), le théorème (1.14). En effet on peut supposer que P est le modèle. D'autre part si $\rho_0 \in \text{WF}(u) \setminus \text{WF}(Pu)$, cela implique compte tenu de la proposition (2.14) et du fait que $\text{WF}(u)$ est la projection de $\text{WF}'(u)$, qu'il existe au moins un $\zeta_0 \in T_\rho^* \Gamma_\rho$ tel que (ρ_0, ζ_0) soit microcaractéristique pour P et $(\rho_0, \zeta_0) \in \text{WF}'(u)$. Comme P vérifie l'hypothèse (1.6) on peut appliquer le théorème (2.16) à P au point (ρ_0, ζ_0) et en déduire qu'il existe un arc de géodésique γ (projection de $\tilde{\gamma}$) de la métrique g_{α_0} tel que $\rho_0 \in \gamma \subset \text{WF}(u)$.

Pour montrer le théorème (1.16) il suffit d'avoir une version intrinsèque du théorème (2.16) et ensuite de l'appliquer au voisinage de chacun de points de chacune des microbicaractéristiques partant de ρ_0 . [On utilise aussi la connexité des microbicaractéristiques et la compacité de l'ensemble des $\zeta \in T_{\rho_0}^* \Gamma_{\rho_0}$ tels que (ρ_0, ζ) soit microcaractéristique de P .] Autrement dit, il faut une définition d'un équivalent du front d'onde quasi homogène, qui ne fasse pas intervenir le choix de coordonnées canoniques particulier, qui est fait quand on écrit P sous la forme du modèle décrit en 2 (a).

Voici brièvement comment on procède. On définit la notion de support d'un opérateur de $\mathcal{H}^m(X, \Sigma) = \bigcap_{j \in \mathbb{N}} S^{m-j, -2j}(X, \Sigma)$. Pour cela on reprend la définition (2.12) de [5] en l'écrivant de manière intrinsèque. Un symbole $r \in \mathcal{H}^m$ est une fonction à décroissance rapide sur N où $N = T(T^*X)/T\Sigma$ est le fibré tangent normal à Σ . Dans le cas où Σ est involutive, la 2-forme symplectique ω définit un isomorphisme de N sur $T^*\Gamma$ et on peut donc définir le produit χr de r par un symbole sur $T^*\Gamma$, $\chi(\rho, \zeta)$ quasi homogène pour les dilatations :

$$(2.18) \quad \lambda.(\rho, \zeta) \rightarrow (\lambda\rho, \lambda^{1/2}\zeta).$$

Par suite on définit le support de r comme le plus petit fermé quasi conique [au sens de (2.18)] de $T^*\Gamma$ tel que $\chi r \in S^{-\infty}$ pour tout χ à support dans le complémentaire de F . Dans le cas où Σ n'est pas involutive, $T^*\Gamma$ est isomorphe au quotient de N par $T\Sigma^\perp / T\Sigma \cap T\Sigma^\perp$ et on peut encore définir le produit χr et par suite le support de $r \in \mathcal{H}^m$. On note que cet ensemble est stable par les dilatations (2.18).

Ensuite on définit (au moins pour la classe des distributions u telle que $Qu \in C^\infty$ pour un opérateur $Q \in S^{m,k}$ transversalement elliptique sur Σ) une nouvelle notion de front d'onde comme suit : le point (ρ, ζ) , $\rho \in \Sigma$, $\zeta \in T_\rho^* \Gamma_\rho$, n'appartient pas à $WF'_\Sigma u$ si et seulement si il existe un voisinage quasiconique U de (ρ, ζ) tel que pour tout R de symbole $r \in \mathcal{H}^0$ à support dans U on ait $Ru \in C^\infty$. On vérifie aisément que cette notion coïncide avec la notion de front d'onde quasi homogène utilisée dans le cas du modèle paragraphe 2 (a) et que $WF'_\Sigma u$ a les mêmes propriétés, entre autres que $WF(u)$ est la projection (par $(\rho, \zeta) \rightarrow \rho$) de $WF'_\Sigma(u)$.

On est ainsi en mesure de lire le théorème (2.16) sans se placer dans le cadre du paragraphe 2 (a) et d'obtenir le théorème (1.16).

3. Remarques. Questions ouvertes

Dans ce paragraphe, nous discutons un peu l'hypothèse (1.6) et plus généralement nous envisageons les problèmes qui se posent pour l'étude de la propagation des singularités pour les opérateurs de $OPS^{m,k}(X, \Sigma)$ transversalement elliptiques.

(a) DISCUSSION DE L'HYPOTHÈSE (1.6). — L'opérateur P_0^G introduit en (2.10) agit dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}_t^d)$ et dépend des paramètres (ρ, ζ) , $\rho = (0, y; 0, \eta', 0) \in \Sigma$, $\zeta = \eta'' \in T_\rho^* \Gamma_\rho$. L'hypothèse (1.6) dit exactement que les valeurs propres négatives de $P_0^G(\rho, 0)$ sont toutes distinctes, et par suite C^∞ et que 0 n'est pas valeur propre de $P_0^G(\rho, 0)$; cela implique que 0 est valeur propre de multiplicité au plus 1 de $P_0^G(\rho, \zeta)$ pour tout (ρ, ζ) . On est naturellement amené à se poser les deux questions suivantes.

(3.1) Que se passe-t-il si 0 est valeur propre de $P_0^G(\rho, 0)$? On peut déjà se poser le problème dans le cas où Σ est involutive. Par exemple il faudrait étudier un opérateur du type de Schrödinger et pour lequel le symbole sous-principal s'annule en changeant de signe en un point ρ de Σ . Au point $(\rho, 0)$ un tel opérateur n'est plus de type principal quasi homogène. On tombe naturellement sur ce problème dans l'étude des opérateurs invariants à gauche sur un groupe de Lie (voir [6]).

(3.2) Comment étudier P en un point $\rho_0 \in \Sigma$ où plusieurs M_α sont égaux et négatifs?

Il existe alors au moins un point microcaractéristique (ρ_0, ζ_0) tel que le noyau de $P_0^G(\rho_0, \zeta_0)$ soit de dimension supérieure à 1.

Soit $K' = K'_{\rho_0, \zeta_0}$ l'ensemble des multi-indices α tels que :

$$(g + M_\alpha)(\rho_0, \zeta_0) = 0.$$

Les fonctions M_α , $\alpha \in K'$ ne sont pas toujours C^∞ dans un voisinage de (ρ_0, ζ_0) (même si on change l'ordre des λ_j), car en général la matrice fondamentale de P n'admet pas de

diagonalisation C^∞ au voisinage de ρ_0 . Toutefois on peut remarquer que les fonctions symétriques de l'ensemble des $M_\alpha, \alpha \in K'$ sont C^∞ au voisinage de ρ_0 . On peut donc construire des symboles de $\mathcal{H}^0, \tilde{h}_\alpha, \alpha \in K'$ [donc C^∞ au voisinage U de (ρ_0, ζ_0)] tels qu'ils forment en chaque point (ρ, ζ) de U une base de l'espace de fonctions de $\mathcal{S}(\mathbb{R}_t^{d'})$ engendré par $h_\alpha, \alpha \in K$, ces dernières étant définies par la formule (2.15).

On peut appliquer dans un voisinage parabolique U de (ρ_0, ζ_0) la méthode de réduction comme il est fait dans [8] ou [12] en construisant une paramétrix au système :

$$(3.3) \quad \begin{pmatrix} P & \tilde{H}_{\alpha_1} & \dots & \tilde{H}_{\alpha_{|K'|}} \\ \tilde{H}_{\alpha_1}^* & & & \\ \vdots & & 0 & \\ \tilde{H}_{\alpha_{|K'|}}^* & & & \end{pmatrix},$$

les \tilde{H}_α étant des opérateurs de Hermite de symbole \tilde{h}_α convenablement tronqués, et ainsi se ramener à l'étude dans U de la propagation des singularités pour un $|K'| \times |K'|$ système E^\pm d'opérateurs pseudodifférentiels quasi homogènes sur Y. Si le symbole principal de E^\pm est noté E_0^\pm comme dans [5] alors $-E_0^\pm$ est la matrice de la restriction de P_0^G à l'espace engendré par les $\tilde{h}_\alpha, \alpha \in K'$.

Il peut être intéressant d'étudier de tels systèmes en adaptant au « cadre quasi homogène » la théorie des systèmes hyperboliques.

Remarque (3.4). — L'hypothèse (1.6) n'est pas trop restrictive car génériquement l'accident (3.1) à savoir l'annulation d'un des M_α arrive sur une sous-variété de Σ de codimension 1 et l'accident (3.2) c'est-à-dire le télescopage de 2 valeurs propres de la matrice fondamentale arrive sur une sous-variété de Σ de codimension 2 donc encore plus rarement.

(b) UN EXEMPLE. — Voici un exemple, standard, pour lequel l'hypothèse (1.6) (ii) n'est pas vérifiée et qui pourtant propage les singularités comme il est décrit dans le théorème (1.16) :

$$(3.5) \quad \begin{cases} P = \sum_{j=1}^{n-1} D_{x_j}^2 + \left(\sum_{j=1}^q x_j^2 \right) D_{x_n}^2 + \lambda D_{x_n}, \\ 0 < q < n-1; \quad \lambda \in \mathbb{R}; \quad |\lambda| > q; \quad |\lambda| - q \neq 2k, \quad k \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Notons $x = (x', x'', x_n), x' \in \mathbb{R}^q, x'' \in \mathbb{R}^{n-1-q}$.

En un point $\rho = (0, x'', x_n; 0, 0, \xi_n) \xi_n \neq 0$ les invariants s'écrivent :

$$M_\alpha(\rho) = \sum_{j=1}^q (2\alpha_j + 1) |\xi_n| + \lambda \xi_n = (2|\alpha| + q) |\xi_n| + \lambda \xi_n.$$

Donc si $|\lambda| > q + 2$, l'hypothèse (1.6) (ii) n'est pas vérifiée (au point ρ ou en son antipodal). Pourtant on montre facilement le théorème (1.16) c'est-à-dire la propagation des singularités sur les droites des plans :

$$(0, x'', x_n = a; 0, 0, \xi_n = b), \quad x'' \in \mathbb{R}^{n-1-q},$$

car on peut diagonaliser complètement P à l'aide des opérateurs de Hermite H_α (voir [1], § 5).

(c) LES OPÉRATEURS À CARACTÉRISTIQUES MULTIPLES. — Considérons un opérateur $P \in \mathcal{N}^{m,k}(X, \Sigma)$, $k \geq 2$, auto-adjoint, transversalement elliptique sur Σ , celle-ci étant feuilletée régulière comme au paragraphe 1. On transmue P à l'aide d'un opérateur intégral de Fourier elliptique après avoir éventuellement changé le degré de P pour se ramener à la situation du paragraphe 2 (a) où :

$$\Sigma : t = \tau = \eta'' = 0.$$

On n'est pas obligé de faire une construction aussi sophistiquée que dans [4] car on se préoccupe pas de mettre P sous une forme simple. Toutefois on associe encore à P un opérateur différentiel à coefficients polynomiaux qui s'écrit :

$$P_0^G(y, \eta) = \sum_{|\alpha| + |\beta| + |\gamma| \leq k} a_{\alpha\beta\gamma}(y, \eta') t^\alpha D_t^\beta \eta''^\gamma,$$

$a_{\alpha\beta\gamma}$ homogène de degré $1/2(|\alpha| - |\beta| - |\gamma|)$.

L'opérateur P_0^G est elliptique en (t, D_t, η'') , c'est une forme réduite de l'opérateur P_Σ associé à P (voir [3]).

On peut montrer exactement comme dans (2.14) que P est hypoelliptique dans un voisinage quasi homogène d'un point (y_0, η_0) non microcaractéristique pour P , c'est-à-dire tel que $P_0^G(y_0, \eta_0)$ est inversible dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.

Pour étudier la propagation des singularités au voisinage d'un point $(\rho_0, \zeta_0) = (y_0, \eta_0)$ microcaractéristique on peut utiliser la méthode de réduction de Grusin. Si on suppose par exemple $\eta_0'' \neq 0$ et le noyau de $P_0^G(y_0, \eta_0)$ de dimension 1 on obtient un opérateur réduit E^\pm , opérateur pseudodifférentiel quasi homogène défini dans un voisinage parabolique de (y_0, η_0) et caractéristique en (y_0, η_0) . En général, c'est-à-dire génériquement mais on ne sait pas donner de conditions explicites pour cela, E^\pm est à caractéristiques simples et on peut lui appliquer le théorème de R. Lascar [10] et montrer ainsi que P propage les singularités sur une courbe microbicaractéristique passant par $\rho_0 = (0, y_0; 0, \eta_0', 0)$. Malheureusement ni les hypothèses ni la conclusion d'un théorème éventuel ne peuvent s'exprimer simplement à l'aide d'invariants comme dans le cas des caractéristiques doubles $k = 2$.

(d) NON HYPOELLIPTICITÉ. — On remarque simplement que si P vérifie les hypothèses du paragraphe 1 (b) notamment (1.6) et si Σ n'est pas symplectique et K est non vide [K est défini en (1.5)] alors P n'est pas hypoelliptique.

En effet soit $\alpha_0 \in K$ et (y_0, η_0) tel que :

$$(g + M_{\alpha_0})(y_0, \eta_0) = 0.$$

On peut montrer que \mathcal{E} construit au paragraphe 2(b) est aussi une paramétrix à droite pour P dans un voisinage parabolique U de (y_0, η_0) si bien qu'on a dans U :

$$WF'(PE^+ u + HE^\pm u) = \emptyset,$$

$$WF'(H_{\alpha_0} E^+ u) = WF'(u)$$

et par suite $(0, y_0; 0, \eta_0) \in WF'(E^+ u) \setminus WF'(PE^+ u)$ si $(y_0, \eta_0) \in WF'(u) \setminus WF'(E^\pm u)$.

Mais il est montré dans [2] et [10] que E^\pm admet une solution singulière donc c'est vrai aussi pour P .

BIBLIOGRAPHIE

- [1] L. BOUTET DE MONVEL, *Hypoelliptic Operators with Double Characteristics and Related Pseudodifferential Operators* (C.P.A.M., vol. 27, 1974, p. 585-639).
- [2] L. BOUTET DE MONVEL, *Propagation des singularités des solutions d'équations analogues à l'équation de Schrödinger* (Lecture Notes, vol. 459, 1975, p. 1-14).
- [3] L. BOUTET DE MONVEL, A. GRIGIS et B. HELFFER, *Paramétrixes d'opérateurs pseudodifférentiels à caractéristiques multiples* (Astérisque, vol. 34-35, 1976, p. 93-121).
- [4] A. GRIGIS, *Hypoellipticité et paramétrixes pour des opérateurs pseudodifférentiels à caractéristiques doubles* (Astérisque, vol. 34-35, 1976, p. 183-205).
- [5] A. GRIGIS, *Propagation des singularités pour des opérateurs pseudodifférentiels à caractéristiques doubles* (Comm. in P.D.E., vol. 4, n° 11, 1979, p. 1233-1262).
- [6] A. GRIGIS, *Propagation des singularités sur des groupes de Lie nilpotents de rang 2* (Ann. scient. Ec. Norm. Sup., t. 15, 4^e série, 1982, p. 161 à 171).
- [7] V. V. GRUSIN, *On a Class of Hypoelliptic Pseudodifferential Operators Degenerate on a Manifold* (Mat. Sbornik, Vol. 84, 1971, p. 163-195 et Math. U.S.S.R. Sbornik, vol. 13, 1971, p. 155-185).
- [8] B. HELFFER, *Sur l'hypoellipticité des opérateurs pseudodifférentiels à caractéristiques multiples, perte de 3/2 dérivées* (Bull. Soc. Math. Fr., t. 51-52, 1977, p. 13-61).
- [9] L. HÖRMANDER, *A class of Hypoelliptic Pseudodifferential Operators with Double Characteristics* (Math. Ann., vol. 217, 1975, p. 165-188).
- [10] R. LASCAR, *Propagation des singularités des solutions d'équations quasi homogènes* (Ann. Inst. Fourier Grenoble, vol. 27-2, 1977, p. 79-123).
- [11] A. MELIN *Lower Bounds for Pseudodifferential Operators* (Ark. for Mat., vol. 9, 1971, p. 117-140).
- [12] J. SJÖSTRAND, *Parametrixes for Pseudodifferential Operators with Multiple Characteristics* (Ark. für Mat., vol. 12, 1974, p. 85-130).
- [13] J. SJÖSTRAND, *Propagation of Singularities for Operators with Multiple Involutive Characteristics* (Ann. Inst. Fourier Grenoble, vol. 26-1, 1976, p. 141-155).

(Manuscrit reçu le 10 juillet 1981,
accepté le 19 septembre 1981.)

A. GRIGIS,
Centre de Mathématiques,
École Polytechnique,
Laboratoire associé au C.N.R.S., n° 169,
plateau de Palaiseau,
91128 Palaiseau Cedex.