ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

LAURENT CLOZEL

Changement de base pour les représentations tempérées des groupes réductifs réels

Annales scientifiques de l'É.N.S. 4e série, tome 15, nº 1 (1982), p. 45-115
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1982_4_15_1_45_0>

Ann. scient. Éc. Norm. Sup.
4e série, t. 15, 1982, p. 45 à 115.

CHANGEMENT DE BASE POUR LES REPRÉSENTATIONS TEMPÉRÉES DES GROUPES RÉDUCTIFS RÉELS

PAR LAURENT CLOZEL

SOMMAIRE

0. Introduction

Soit G un groupe algébrique connexe réductif défini sur $\mathbb{R}$. Dans son mémoire, « On the classification of irreducible representations of real algebraic groups », Langlands a donné une classification des représentations irréductibles admissibles de G_F ($F=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) qui est un cas particulier des « conjectures de Langlands » [13]. Cette classification s'exprime à l'aide de L-groupe de G sur F.

Soit $F=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$; on définit le L-groupe de G sur F, ${}^L(G/F)$, qu'on notera plus simplement ${}^LG$. C'est un produit semi-direct ${}^LG^0 \rtimes \Gamma_F$, où $\Gamma_F=\mathrm{Gal}(\overline{F}/F)$. Soit W_F le groupe de Weil de F; W_F est muni d'une projection canonique $W_F \to \Gamma_F$. Les représentations de G_F sont alors classifiées par les classes de sections admissibles du L-groupe, i. e. par les applications $\varphi: W_F \to {}^LG$ rendant commutatif le diagramme :

$$\begin{tikzcd} {}^LG \arrow[dr] & \\ & \Gamma_F \\ W_F \arrow[uu, "\varphi"] \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE. — 0012-9593/1982/ 45 /$ 5.00

et vérifiant certaines conditions; on identifie deux sections conjuguées par l'action intérieure de ${}^{L}G^{0}$ sur ${}^{L}G$.

A la section φ, Langlands associe une famille finie $\Pi_{\varphi}=\{\pi_1, \ldots, \pi_r\}$ de représentations de G_F; si $F=\mathbb{C}$, Π_{φ} est réduite à un seul élément. Si $F=\mathbb{R}$, on notera π_{φ} la somme directe $\pi_1 \oplus \ldots \oplus \pi_r$.

Il existe une injection canonique $W_{\mathbb{C}} \hookrightarrow W_{\mathbb{R}}$. Par composition, une section φ du L-groupe réel donne alors une section Φ du L-groupe complexe. Soit $\pi=\pi_{\varphi}$, $\Pi=\Pi_{\Phi}$ les représentations associées; Π est irréductible. Le problème de changement de base qui est traité ici consiste à trouver une relation directe entre Π et π, traduisant le relèvement du côté du L-groupe.

Shintani [22], à partir des travaux de Saito sur la formule des traces tordues, a indiqué la solution. Soit $\sigma : G_{\mathbb{C}} \to G_{\mathbb{C}}$ la conjugaison par rapport à $G_{\mathbb{R}}$. Si Φ provient par relèvement de φ, on vérifie que la représentation Π associée est σ-*stable* : Π est équivalente à $\Pi \circ \sigma$. Il existe donc un opérateur A_{σ}, agissant dans l'espace de Π, entrelaçant Π et $\Pi \circ \sigma$. Comme Π est irréductible, et σ involutif, le lemme de Schur implique que $(A_{\sigma})^2$ est scalaire; on peut donc normaliser A_{σ} de façon que $(A_{\sigma})^2=1$.

Par ailleurs, il existe une correspondance N, analogue à la norme d'extension de corps, entre $G_{\mathbb{C}}$ et $G_{\mathbb{R}}$; N envoie certains éléments de $G_{\mathbb{C}}$ dans des classes de conjugaison superstable de $G_{\mathbb{R}}$ (chap. 2). La représentation $\pi=\pi_{\varphi}$ a un caractère-distribution, noté trace (π); c'est une fonction localement intégrable analytique sur les éléments réguliers et, au moins si le L-paquet Π_{φ} est *tempéré*, stablement invariante (Shelstad). Par conséquent, l'expression trace $\pi(\mathrm{N}g)$ a un sens, si g est un élément convenable de $G_{\mathbb{C}}$. De même, on peut définir un caractère trace $(\Pi(g)A_{\sigma})$: c'est une fonction localement intégrable, analytique sur des éléments convenablement réguliers de $G_{\mathbb{C}}$. D'après Shintani, la relation cherchée entre Π et π s'exprime alors par une identité de caractères :

$$\operatorname{trace}(\Pi(g)A_{\sigma})=\varepsilon \operatorname{trace}\pi(\mathrm{N}g), \qquad \varepsilon=\pm 1,$$

pour g convenable dans $G_{\mathbb{C}}$.

Shintani a démontré cette relation pour $G=PGL(2)$ [22]. Depuis, le relèvement a été démontré, lorsque $G=GL(n)$, pour la série principale [4] puis pour toutes les représentations tempérées (Repka [17]). Dans cet article, nous obtenons le relèvement des caractères pour tous les L-paquets tempérés de n'importe quel groupe réductif réel (th. 8.4); on peut d'ailleurs préciser le choix de A_{σ} et déterminer alors la valeur de ε.

Voici le plan de l'article. Le chapitre 1 précise les définitions relatives à la fonctorialité de Langlands et vérifie l'identité de relèvement pour les tores (prop. 1.2). Dans le chapitre 2, on étudie la conjugaison gauche (σ-conjugaison) dans $G_{\mathbb{C}}$ et on définit l'application norme; ceci nécessite la notion de conjugaison stable (Labesse, Langlands) élaborée par Shelstad, et qui est duale de la notion de L-indiscernabilité pour les représentations. Le principal résultat est la proposition 2.12. Les chapitres 3 à 7 sont essentiellement consacrés à la démonstration des formules de relèvement pour les L-paquets formés de représentations de la série discrète. Le chapitre 3 étudie un relèvement, utilisé dans le chapitre 4, entre représentations de dimension finie de $G_{\mathbb{C}}$ et $G_{\mathbb{R}}$: celui-ci coïncide avec le changement de base si G est quasi déployé, et donne alors un exemple (trivial) de relèvement des caractères entre représentations non tempérées. Dans le chapitre 4, on étudie les caractères gauches des représentations σ-stables. Ce sont des fonctions localement intégrables (th. 4.2), analytiques sur les éléments σ-réguliers. On établit une forme locale (au voisinage de l'élément neutre) du théorème de relèvement (th. 4.8). Dans le chapitre 5, on vérifie que les caractères tordus associés à des représentations *tempérées* de $G_{\mathbb{C}}$ sont donnés par une fonction vérifiant certaines estimées de croissance (th. 5.1, 5.2, 5.12). Dans le chapitre 6, la forme locale du théorème de relèvement, combinée avec le calcul explicite de A_σ, permet d'obtenir le relèvement pour $G_{\mathbb{R}}$ *compact*; on combine alors ce résultat et les estimées tempérées du chapitre 5 pour obtenir le relèvement des séries discrètes (th. 7.2). Enfin, ceci, joint au résultat de Repka sur le relèvement des représentations induites, démontre les formules de changement de base entre L-paquets tempérés (th. 8.1). De telles formules s'étendent à des séries principales généralisées (prop. 8.7). Dans le cas tempéré, on montre que le relèvement est compatible avec les identités de Shelstad pour des formes intérieures (8, § 3).

Ce travail a fait l'objet de ma thèse, soutenue à l'université de Paris-VII en novembre 1981. Je voudrais à cette occasion remercier R. Godement, qui m'a guidé dans cette branche des mathématiques et dont l'encouragement est précieux; M. Duflo et P. Gérardin, qui ont suggéré ce sujet et prodigué l'aide et la critique; R. P. Langlands, Harish-Chandra, A. Knapp qui m'ont fourni des indications décisives; J.-P. Labesse, qui m'a inlassablement dévoilé les mystères de la L-indiscernabilité; et enfin H. Carayol, F. Rodier, J.-L. Waldspurger, M. Andler et C. Soulé pour de constants échanges mathématiques.

1. Le changement de base pour $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$: définitions et aspects fonctoriels

1. Dans tout ce qui suit, G est un groupe algébrique réductif connexe défini sur $\mathbb{R}$. On note $G_{\mathbb{R}}$, $G_{\mathbb{C}}$ les groupes de ses points réels et complexes. Si L est un groupe de Lie réel, on note $\mathfrak{l}^0$ son algèbre de Lie réelle, $\mathfrak{l}$ la complexifiée de $\mathfrak{l}^0$. Ainsi, $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}^0 = \mathrm{Lie}(G_{\mathbb{R}})$, $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^0 = \mathrm{Lie}(G_{\mathbb{C}})$ ont pour complexifiées $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$, $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$. On note σ la conjugaison complexe de $G_{\mathbb{C}}$; $G_{\mathbb{R}}$ est l'ensemble des points fixes de σ; σ donne une involution de $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^0$, et une involution ($\mathbb{C}$-linéaire) de $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$: on les notera aussi σ.

Par ailleurs, $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^0$ a une structure complexe donnée par la structure complexe de $G_{\mathbb{C}}$. L'injection naturelle $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}^0 \hookrightarrow \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^0$ donne un isomorphisme $j : \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^0 \to \mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$: c'est un isomorphisme d'algèbres de Lie réelles, qui est $\mathbb{C}$-linéaire pour la structure complexe naturelle sur $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^0$. On a alors un plongement d'algèbres de Lie réelles : $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^0 \hookrightarrow \mathfrak{g}_{\mathbb{R}} \times \mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$:

$$X \mapsto (jX,\ j\sigma X).$$

Il se prolonge uniquement en un isomorphisme d'algèbres de Lie complexes :

$$(\star) \qquad \mathfrak{g}_{\mathbb{C}} \approx \mathfrak{g}_{\mathbb{R}} \times \mathfrak{g}_{\mathbb{R}}.$$

Si $\mathfrak{l}$ est une algèbre de Lie complexe, on note $U(\mathfrak{l})$ l'algèbre enveloppante (sur $\mathbb{C}$) de $\mathfrak{l}$, $Z(\mathfrak{l})$ le centre de $U(\mathfrak{l})$. De $(\star)$, on déduit les isomorphismes :

$$(\star\star) \qquad \begin{cases} U(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}) \approx U(\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}) \otimes_{\mathbb{C}} U(\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}), \\ Z(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}) \approx Z(\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}) \otimes_{\mathbb{C}} Z(\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}). \end{cases}$$

En composant $(\star\star)$ avec le produit dans $Z(\mathfrak{g}_{\mathbb{R}})$, on obtient une application :

$$N: \quad Z(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}) \to Z(\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}).$$

2. Pour $F=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, on note ${}^L(G/F)$, ou plus simplement ${}^LG$ quand il n'y a pas de confusion possible, le L-groupe de G sur F : on parlera du L-groupe *réel* ou *complexe*. Rappelons brièvement la construction du L-groupe (Langlands [14], Borel [1]).

Soit T un tore maximal, B un sous-groupe de Borel de G définis sur $\mathbb{C}$. On associe à (G, B, T) la donnée radicielle polarisée (« based root datum ») $\Psi=(X^*(T), \Delta, X_*(T), \Delta^\vee)$; $X^*(T)$ est le groupe des caractères de T, $X_*(T)$ le groupe des sous-groupes à un paramètre de T, Δ la base du système de racines de (G, T) déterminée par B, $\Delta^\vee$ la base duale.

La donnée radicielle polarisée ${}^L\Psi=(X_*(T), \Delta^\vee, X^*(T), \Delta)$ détermine alors de façon unique à isomorphisme près un triplet ${}^LG^0\supset{}^LB^0\supset{}^LT^0$; on a $X_*(T)=X^*({}^LT^0)$, $X^*(T)=X_*({}^LT^0)$. Par ailleurs, le groupe de Galois $\Gamma_F=\mathrm{Gal}(\overline{F}/F)$ ($F=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) agit par automorphismes sur ${}^LG^0$: si $\gamma\in\Gamma_F$, il existe $g\in G_{\mathbb{C}}$ tel que $g B^\gamma g^{-1}=B$, $g T^\gamma g^{-1}=T$: on déduit alors de γ un automorphisme de Ψ et, par dualité, de ${}^L\Psi$. Il existe une suite exacte scindée :

$$1 \to \mathrm{Int}({}^LG^0) \to \mathrm{Aut}({}^LG^0) \to \mathrm{Aut}({}^L\Psi) \to 1;$$

on se fixe une section $\mathrm{Aut}({}^L\Psi) \to \mathrm{Aut}\,{}^LG^0$, d'où une application $\Gamma_F \to \mathrm{Aut}\,{}^LG^0$ dont l'image préserve $({}^LG^0, {}^LB^0, {}^LT^0)$.

On définit alors le L-groupe de G sur F (noté ${}^L(G/F)$, ou ${}^LG$ si aucune confusion n'est possible) comme le produit semi-direct ${}^LG^0 \rtimes \Gamma_F$.

On dit que G est *quasi déployé* s'il a un sous-groupe de Borel défini sur $\mathbb{R}$. Dans ce cas, on peut choisir B, T définis sur $\mathbb{R}$. En général, un groupe quelconque G est forme intérieure d'un groupe H quasi déployé, i. e., il existe un isomorphisme $\psi: G \to H$, ψ défini sur $\mathbb{C}$, tel que l'automorphisme $\psi(\psi^\sigma)^{-1}$ de G est intérieur : $\psi(\psi^\sigma)^{-1}=\mathrm{Ad}\,g$, $g\in G_{\mathbb{C}}$. (Ici $\psi^\sigma(x)=(\psi(x^\sigma))^\sigma$, où σ est l'élément non trivial de $\Gamma_{\mathbb{R}}$.) Dans ce cas, on peut supposer que $G_{\mathbb{C}}=H_{\mathbb{C}}$; si σ_1, σ_2 sont les actions de σ sur $G_{\mathbb{C}}$ données par les formes réelles G, H de $G_{\mathbb{C}}$, dire que G est forme intérieure de H revient à supposer que $\sigma_2=\mathrm{Ad}(g)\circ\sigma_1$ pour un $g\in G_{\mathbb{C}}$.

Dans cette situation, il existe un isomorphisme de ${}^LG^0$ sur ${}^LH^0$ qui préserve l'action de Γ_F, donc un isomorphisme ${}^LG \to {}^LH$ qui commute avec les projections sur Γ_F. On identifiera alors les L-groupes de G et H.

Soit $p(G/F)$ l'ensemble des classes de conjugaison de sous-groupes paraboliques de G définis sur F; on a $p(G/F)\subset p(G)$, où $p(G)=p(G/\mathbb{C})$; $p(G)$ est en bijection naturelle avec l'ensemble $p({}^LG^0)$ des classes de conjugaison de paraboliques de ${}^LG^0$. Un sous-groupe fermé P de ${}^LG$ est dit *parabolique* si son image par ${}^LG \to \Gamma_F$ est égale à Γ_F, et si $P^0=P\cap{}^LG^0$ est un sous-groupe parabolique de ${}^LG^0$. Dans ce cas, P est le normalisateur de P^0 dans ${}^LG$. Le sous-groupe parabolique P est dit *pertinent* (« relevant ») si l'élément de $p(G)$ associé à P^0 par la bijection naturelle $p(G)\to p({}^LG^0)$ appartient à $p(G/F)$. Si G est quasi-déployé, tout parabolique de ${}^LG$ est pertinent. Si le groupe dérivé de G est anisotrope (sur $\mathbb{R}$), le seul parabolique pertinent de ${}^L(G/\mathbb{R})$ est ${}^L(G/\mathbb{R})$.

Soit W_F le groupe de Weil de F (Tate [26]). Si $F=\mathbb{C}$, $W_F=\mathbb{C}^\times$; si $F=\mathbb{R}$, W_F est l'extension de $\Gamma_\mathbb{R}$ par $\mathbb{C}^\times$ donnée par l'unique classe non triviale dans $H^2(\Gamma_\mathbb{R}, \mathbb{C}^\times)\cong\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Une description plus explicite de $W_\mathbb{R}$ est la suivante :

$$W_\mathbb{R}=\mathbb{C}^\times\times\{1, \tau\}$$

comme ensemble, avec les relations :

$$\tau^2=-1\in\mathbb{C}^\times,$$
$$\tau z\tau^{-1}=\bar{z}, \qquad z\in\mathbb{C}^\times.$$

Par construction, on a donc la suite exacte canonique :

$$1\to W_\mathbb{C}\to W_\mathbb{R}\to\Gamma_\mathbb{R}=\mathrm{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R})\to 1.$$

Le groupe de Weil W_F est muni d'un homomorphisme canonique $W_F\to\Gamma_F$.

Nous pouvons maintenant rappeler la classification de Langlands des représentations de G_F. Soit $\varphi: W_F\to{}^LG$ un homomorphisme continu rendant le diagramme :

$$\begin{tikzcd} & {}^LG \arrow[d] \\ W_F \arrow[ur, "\varphi"] \arrow[r] & \Gamma_F \end{tikzcd}$$

commutatif : on appelle φ *une section du L-groupe*. On suppose de plus que l'image de φ est formée d'éléments semi-simples; $(g_0, \gamma)\in{}^LG^0\rtimes\Gamma_F$ est dit semi-simple si g_0 est semi-simple dans ${}^LG^0$. On dira que φ est *pertinente* si tout parabolique P de ${}^LG$ contenant l'image de φ est pertinent.

Soit $\Pi(G_F)$ l'ensemble des classes d'équivalence de représentations irréductibles admissibles de G_F dans des espaces de Hilbert. Rappelons qu'une représentation continue π de G dans un espace de Hilbert $\mathscr{H}$ est *admissible* si, pour tout sous-groupe compact maximal K de G_F, les composantes isotypiques de K dans $\mathscr{H}$ sont de dimension finie. On définit alors $\Pi(G_F)$ comme l'ensemble des représentations irréductibles admissibles de G_F, à équivalence de Naïmark près. Un sous-groupe compact maximal K étant choisi, $(\pi, \mathscr{H})$ définit une représentation de $(U(\mathfrak{g}_F), K)$ sur l'espace $\mathscr{H}^f$ des vecteurs K-finis de $\mathscr{H}$; si π est irréductible admissible, $\mathscr{H}^f$ est alors un $(\mathfrak{g}_F, K)$-module irréductible (*cf.* Wallach [28]). Les représentations π_1 et π_2 sont alors Naïmark-équivalentes si et seulement si les $(\mathfrak{g}_F, K)$-modules associés sont équivalents. Donc, après choix de K, $\Pi(G_F)$ est en bijection avec l'ensemble des classes d'équivalence de $(\mathfrak{g}_F, K)$-modules admissibles irréductibles.

Soit $\Phi(G)=\Phi(G/F)$ l'ensemble des classes d'équivalence, pour la conjugaison par ${}^LG^0$, de sections pertinentes de ${}^LG$. A tout $\varphi\in\Phi(G)$, Langlands associe une famille finie $\Pi_\varphi=\{\pi_1, \ldots, \pi_r\}$ de représentations de G_F; Π_φ est appelé le L-paquet associé à φ. Les Π_φ sont disjoints et leur réunion est égale à $\Pi(G_F)$.

Les π_i d'un même L-paquet Π_φ sont dites *L-indiscernables.* Si $F=\mathbb{C}$, $G=GL(n)$, ou si $F=\mathbb{R}$ et G_{der} est anisotrope, tout L-paquet est réduit à un seul élément : « il n'y a pas de L-indiscernabilité ». C'est donc vrai, en particulier, si G est un tore.

Une section φ est dite *tempérée* si son image est *bornée*. Dans ce cas, Π_φ est formé de représentations (unitaires) tempérées de G_F. Soit $F=\mathbb{R}$. La section $\varphi\in\Phi(G)$ est dite *discrète* si son image n'est contenue dans aucun sous-groupe parabolique propre de ${}^L G$. Si une telle φ existe, $G_{der}(\mathbb{R})$ a un sous-groupe de Cartan compact et le L-paquet Π_φ est une somme de représentations de carré intégrable modulo le centre de $G_{\mathbb{R}}$.

3. Changement de base. — D'après ce qui précède, les représentations admissibles irréductibles de $G_{\mathbb{C}}$ sont décrites par les homomorphismes Φ à image semi-simple $W_{\mathbb{C}}=\mathbb{C}^\times\to {}^L G^0$. Soit Π la représentation de $G_{\mathbb{C}}$ associée à Φ. Soit $\Pi\circ\sigma$ la représentation de $G_{\mathbb{C}}$ donnée par $g\mapsto\Pi(g^\sigma)$. On veut spécifier la (classe de conjugaison de la) section Φ^σ associée à $\Pi\circ\sigma$. Rappelons que l'élément non trivial $\sigma\in\Gamma_{\mathbb{R}}$ agit sur ${}^L G^0$, comme on l'a vu dans la construction de ${}^L(G/\mathbb{R})$. Si $z\in W_{\mathbb{C}}\equiv\mathbb{C}^\times$, on note $\bar{z}$ le conjugué complexe de z.

Proposition 1.1 (Repka [16]). — *Soit* Π *associée à* Φ. *Alors un représentant de la classe de sections associée à* $\Pi\circ\sigma$ *est :*

$$\Phi^\sigma:\quad \Phi^\sigma(z)=\Phi(\bar{z})^\sigma.$$

Repka démontre ceci pour G quasi-déployé. Si G est forme intérieure de G^1 quasi déployé, la relation $\sigma=\mathrm{Ad}(g)\circ\sigma_1$ implique que $\Pi\circ\sigma_1$ est équivalente à $\Pi\circ\sigma$. Ceci, joint à l'isomorphisme des L-groupes (§ 2), implique le résultat. □

En particulier, on voit que Π est équivalente à $\Pi\circ\sigma$ (on dira que Π est σ-stable) si et seulement si, pour un $g\in{}^L G^0$:

$$\Phi(\bar{z})\equiv\mathrm{Ad}(g)(\Phi(z)^\sigma).$$

Soit maintenant φ une section du L-groupe *réel* de G. Par restriction à $W_{\mathbb{C}}\hookrightarrow W_{\mathbb{R}}$, on déduit de φ une section Φ du L-groupe complexe :

$$\begin{tikzcd} W_{\mathbb{R}} \arrow[r, "\varphi"] & {}^L G^0\times\Gamma_{\mathbb{R}} \\ W_{\mathbb{C}} \arrow[u] \arrow[r, "\Phi"] & {}^L G^0 \arrow[u, hook] \end{tikzcd}$$

Si $\Pi_\Phi=\{\Pi\}$ et Π_φ sont les L-paquets associés respectivement à Φ et φ, on dit que Π_Φ (ou son unique élément Π) est *le relèvement par changement de base* de Π_φ. Si $\Pi_\varphi=\{\pi_1,\ldots,\pi_r\}$, soit $\pi=\pi_1\oplus\ldots\oplus\pi_r$: c'est une représentation admissible (en général réductible) de $G_{\mathbb{R}}$. On dira aussi que Π est le relèvement de π. (Nous n'emploierons cette terminologie que dans le cas tempéré.)

Supposons que Φ provienne ainsi de φ. Soit $\varphi(\tau)=(a,\sigma)\in{}^L G^0\rtimes\Gamma_{\mathbb{R}}$. On a : $\varphi(\tau^{-1})=(a,\sigma)^{-1}=((a^\sigma)^{-1},\sigma)$. Rappelons que $\tau z\tau^{-1}=\bar{z}$, $z\in W_{\mathbb{C}}\subset W_{\mathbb{R}}$. On en déduit que :

$$\varphi(\bar{z})=\varphi(\tau)\varphi(z)\varphi(\tau)^{-1}=(a,\sigma)(\Phi(z),1)((a^\sigma)^{-1},\sigma)=(a\Phi(z)^\sigma a^{-1},1),$$

c'est-à-dire $\Phi(\bar{z})=\mathrm{Ad}(a)\Phi(z)^\sigma$, $z\in W_{\mathbb{C}}$.

Autrement dit, si Φ provient d'une section réelle par restriction, Π_Φ est σ-stable.

4. CAS DES TORES. — Nous aurons besoin de la description explicite de la fonctorialité et du changement de base dans les cas des tores (Langlands [14], Gérardin [7]). Soit T un tore défini sur $\mathbb{R}$, $X^*(T)$ le groupe des caractères rationnels de T, $X_*(T)$ le groupe de ses sous-groupes à un paramètre. $X^*(T)$ et $X_*(T)$ sont deux $\mathbb{Z}$-modules libres en dualité : si $\chi \in X^*(T)$, $\chi : T_{\mathbb{C}} \to \mathbb{C}^\times$, $u \in X_*(T)$, $u : \mathbb{C}^\times \to T_{\mathbb{C}}$, on a $\chi \circ u(z) = z^m$, $m \in \mathbb{Z}$; la dualité est donnée par $\langle \chi, u \rangle = m$. Soit $X^*_{\mathbb{C}}(T) = X^*(T) \otimes \mathbb{C}$.

Les représentations admissibles irréductibles de $T_{\mathbb{C}}$ sont les caractères continus $T_{\mathbb{C}} \to \mathbb{C}^\times$. Si π est un tel caractère, on a $\pi(u(z)) = z^{\langle \lambda, u \rangle} \bar{z}^{\langle \mu, u \rangle}$ pour $z \in \mathbb{C}^\times$, $u \in X_*(T)$. On a λ, $\mu \in X^*(T) \otimes \mathbb{C}$, uniquement déterminés par π; ils doivent vérifier $\lambda - \mu \in X^*(T)$. On notera $\pi(t) = t^\lambda (\bar{t})^\mu$.

On a ${}^L(T/\mathbb{C}) = {}^LT^0$, avec $X^*(T) = X_*({}^LT^0)$, $X_*(T) = X^*({}^LT^0)$. Soit $\varphi : \mathbb{C}^\times \to {}^LT^0$ une section du L-groupe. Si $u \in X^*({}^LT^0)$, on a $u \circ \varphi(z) = z^{\langle \lambda, u \rangle} \bar{z}^{\langle \mu, u \rangle}$; λ, $\mu \in X^*({}^LT^0) \otimes \mathbb{C} \cong X(T) \otimes \mathbb{C}$ vérifient encore $\lambda - \mu \in X(T)$. Une telle section sera notée $z \mapsto z^\lambda (\bar{z})^\mu$. On obtient ainsi une bijection entre caractères et sections du L-groupe.

L'élément non trivial de $\Gamma_{\mathbb{R}}$ agit sur $X_*(T)$ par $u(z) \mapsto u(\bar{z})^\sigma$. Comme ${}^LT^0 \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(X_*(T), \mathbb{C}^\times)$, on en déduit une action (holomorphe) de $\Gamma_{\mathbb{R}}$ sur ${}^LT^0$: c'est celle qui définit le L-groupe réel.

Si $\pi : T_{\mathbb{R}} \to \mathbb{C}^\times$ est un caractère de $T_{\mathbb{R}}$, on peut l'étendre en un caractère de $T_{\mathbb{C}}$. Si $t \mapsto t^\lambda (\bar{t})^\mu$ est un caractère de $T_{\mathbb{C}}$ [1], on vérifie que sa restriction à $T_{\mathbb{R}}$ est triviale si et seulement si $\lambda + \sigma\mu = 0$, et $\lambda \in X^*(T) + (1-\sigma)(X^*_{\mathbb{C}}(T))$ (Langlands [14], lemme 2.8). Posons $\chi = \lambda + \sigma\mu$, $\lambda_0 = 1/2(\lambda - \sigma\mu)$. On a $\chi \in X^*_{\mathbb{C}}(T)$. On considère λ_0 comme un élément de $Y = X^*_{\mathbb{C}}(T)/(X^*(T) + (1-\sigma)(X^*_{\mathbb{C}}(T))$. Le couple (χ, λ_0) vérifie :

$$(\star) \qquad \chi - \sigma\chi \in X^*(T),$$

$$(\star\star) \qquad \lambda_0 + \sigma\lambda_0 + \frac{1}{2}(\chi - \sigma\chi) \in X^*(T);$$

on obtient ainsi une bijection entre les caractères de $T_{\mathbb{R}}$ et les éléments (χ, λ_0) de $X^*_{\mathbb{C}}(T) \times Y$ vérifiant $(\star)$, $(\star\star)$.

Soit $\varphi : W_{\mathbb{R}} \to {}^LT$ une section du L-groupe. On a $\varphi(z) = z^\lambda (\bar{z})^\mu$, $\varphi(\tau) = (e^{2i\pi\lambda_0}, \sigma)$, $\lambda_0 \in X^*_{\mathbb{C}}(T)/X^*(T)$; on a identifié $X^*(T) \otimes \mathbb{C}$ à l'algèbre de Lie de ${}^LT^0$. Les relations dans $W_{\mathbb{R}}$ impliquent $\mu = \sigma\lambda$, et $\lambda_0 + \sigma\lambda_0 = 1/2(\lambda - \mu) \bmod X^*(T)$. Si l'on conjugue φ par ${}^LT^0$, $\varphi(z)$ ne change pas et $\varphi(\tau)$ est changé en $t\varphi(\tau)t^{-\sigma}$, $t \in {}^LT^0$. Si $t = \exp(2i\pi\nu)$, $\nu \in X^*(T) \otimes \mathbb{C} = \mathrm{Lie}({}^LT^0)$, λ_0 est remplacé par $\lambda_0 + (1-\sigma)\nu$. On voit alors que (λ, λ_0) est bien défini dans $X^*_{\mathbb{C}}(T) \times Y$ et satisfait les relations $(\star)$, $(\star\star)$ avec λ à la place de χ. On obtient ainsi une bijection de $\Pi(T_{\mathbb{R}})$ et $\Phi(T/\mathbb{R})$ avec $X^*_{\mathbb{C}}(T) \times Y$, la bijection composée donne la fonctorialité pour les tores réels.

---

[1] Remarquer que $(\bar{t})^\mu$ *n'est pas* égal à $(t^\sigma)^\mu$ pour $\mu \in X(T)$, sauf si T est déployé.

Soit alors $\varphi : W_{\mathbb{R}} \to {}^L T$ une section de ${}^L(T/\mathbb{R})$, avec $\varphi(\tau) = (e^{2i\pi\lambda_0}, \sigma)$ et $\varphi(z) = z^{\lambda}(\bar{z})^{\mu} = z^{\lambda}(\bar{z})^{\sigma\lambda}$. La restriction Φ de φ à $W_{\mathbb{C}}$ est $\Phi : z \mapsto z^{\lambda}(\bar{z})^{\sigma\lambda}$.

A la section φ est associé l'élément (λ, λ_0) de $X_{\mathbb{C}}^*(T) \times Y$. Le caractère π de $T_{\mathbb{R}}$ associé à φ est donc la restriction à $T_{\mathbb{R}}$ du caractère $(z^{\alpha})(\bar{z})^{\beta}$ de $T_{\mathbb{C}}$, α, β définis par $\lambda_0 = 1/2(\alpha - \sigma\beta)$, $\lambda = \alpha + \sigma\beta$.

Soit $N : T_{\mathbb{C}} \to T_{\mathbb{R}}$, $t \mapsto tt^{\sigma}$, l'application norme. Si $H \in X_*(T) \otimes \mathbb{C} \cong \mathrm{Lie}(T_{\mathbb{C}})$, la définition de l'action de $\Gamma_{\mathbb{R}}$ sur $X^*(T)$ implique que $\langle \alpha^{\sigma}, H \rangle = \overline{\alpha(H^{\sigma})}$, $\alpha \in X^*(T) \otimes \mathbb{C}$. On a alors, pour $t = \exp(H) \in T_{\mathbb{C}}$:

$$\begin{aligned}\pi \circ N(t) &= \pi(tt^{\sigma}) = \pi(\exp H)\, \pi(\exp H^{\sigma}) \\ &= \exp\langle \alpha, H \rangle\, \overline{\exp\langle \beta, H \rangle}\, \overline{\exp\langle \sigma\alpha, H \rangle}\, \exp\langle \sigma\beta, H \rangle \\ &= \exp\langle \alpha + \sigma\beta, H \rangle\, \overline{\exp\langle \beta + \sigma\alpha, H \rangle}.\end{aligned}$$

Autrement dit, $\pi \circ N$ est le caractère $\Pi : t \mapsto t^{\alpha+\sigma\beta}(\bar{t})^{\beta+\sigma\alpha}$ de $T_{\mathbb{C}}$. Remarquant que $\Phi : z \mapsto z^{\lambda}(\bar{z})^{\sigma\lambda} = z^{\alpha+\sigma\beta}(\bar{z})^{\beta+\sigma\alpha}$, on voit que Π est bien le caractère de $T_{\mathbb{C}}$ associé à Φ. En définitive :

PROPOSITION 1.2. — *Soit* T *un tore défini sur* $\mathbb{R}$, φ *une section de* ${}^L(T/\mathbb{R})$, Φ *la section de* ${}^L(T/\mathbb{C})$ *obtenue par restriction,* π *et* Π *les caractères de* $T_{\mathbb{R}}$, $T_{\mathbb{C}}$ *associés à* φ *et* Φ.

Soit $N : t \mapsto tt^{\sigma}$ *l'application norme de* $T_{\mathbb{C}}$ *dans* $T_{\mathbb{R}}$. *Alors* $\Pi(t) = \pi(N\, t)$, $t \in T_{\mathbb{C}}$.

2. Conjugaison et application norme

Nous donnons ici les définitions et résultats concernant la σ-conjugaison et l'application norme dont nous aurons besoin.

Les démonstrations sont données, sans prétention à l'originalité : une partie de ces résultats se trouvent dans Shelstad [21] et Repka [18].

1. ÉLÉMENTS σ-RÉGULIERS, σ-CONJUGAISON. — Soit G un groupe algébrique réductif connexe défini sur $\mathbb{R}$. L'élément non trivial du groupe de Galois $\Gamma_{\mathbb{R}} = \mathrm{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R})$ opère sur $G_{\mathbb{C}}$ par $x \mapsto x^{\sigma}$. Par restriction des scalaires, $G_{\mathbb{C}}$ définit un groupe algébrique réel $H = \mathrm{Res}_{\mathbb{C}/\mathbb{R}}\, G_{\mathbb{C}}$; $H_{\mathbb{R}} = G_{\mathbb{C}}$, et $\Gamma_{\mathbb{R}}$ agit sur H par automorphismes rationnels. On peut donc définir le produit semi-direct $\tilde{H} = H \rtimes \Gamma_{\mathbb{R}}$: c'est un groupe linéaire algébrique réel, et $(\tilde{H})_{\mathbb{R}} = G_{\mathbb{C}} \rtimes \Gamma_{\mathbb{R}}$.

On peut décrire explicitement les points complexes et la structure réelle de $\tilde{H}$: on a $H_{\mathbb{C}} \cong G_{\mathbb{C}} \times G_{\mathbb{C}}$, l'action de $\Gamma_{\mathbb{R}}$ sur $H_{\mathbb{C}}$ donnée par la structure réelle sur H étant alors σ_1 : $(x, y) \mapsto (y^{\sigma}, x^{\sigma})$; $H_{\mathbb{R}}$ s'identifie à $G_{\mathbb{C}}$ par $(x, x^{\sigma}) \mapsto x$. L'automorphisme $\sigma : x \mapsto x^{\sigma}$ de $H_{\mathbb{R}}$ définit alors l'automorphisme holomorphe $(x, y) \mapsto (y, x)$ de $H_{\mathbb{C}}$. On a donc $(\tilde{H})_{\mathbb{C}} = (G_{\mathbb{C}} \times G_{\mathbb{C}}) \rtimes \Gamma_{\mathbb{R}}$, $\sigma \in \Gamma_{\mathbb{R}}$ agissant sur $H_{\mathbb{C}}$ par $(x, y) \mapsto (y, x)$, et la conjugaison complexe sur $(\tilde{H})_{\mathbb{C}}$ étant $(x, y, \gamma) \mapsto (y^{\sigma}, x^{\sigma}, \gamma)$.

Nous noterons $\tilde{G}_{\mathbb{C}}$ le groupe de Lie réel $G_{\mathbb{C}} \rtimes \Gamma_{\mathbb{R}}$. On a donc $\tilde{G}_{\mathbb{C}} = \tilde{H}_{\mathbb{R}}$; on remarquera que $\tilde{G}_{\mathbb{C}}$ *n'est pas* l'ensemble des points complexes d'un groupe algébrique, mais l'ensemble des points réels d'un groupe algébrique réel.

Comme $\tilde{H}$ est un groupe linéaire algébrique, on y dispose de la notion d'élément semi-simple et unipotent. Un élément semi-simple de $\tilde{H}_{\mathbb{C}}$ est dit *régulier* si la composante neutre de son centralisateur est un tore.

DÉFINITION 2.1. — *Soit* $x \in G_{\mathbb{C}}$:

(i) x *est* σ-*semi-simple si* $(x, \sigma) \in \tilde{G}_{\mathbb{C}} = \tilde{H}_{\mathbb{R}}$ *est semi-simple;*

(ii) x *est* σ-*régulier si* (x, σ) *est semi-simple et régulier.*

LEMME 2.2. — $x \in G_{\mathbb{C}}$ *est* σ-*semi-simple si et seulement s'il vérifie l'une des conditions équivalentes :*

(iii) $\mathrm{Ad}(x) \circ \sigma \in \mathrm{Aut}(H)$ *est semi-simple;*

(iv) $xx^{\sigma} \in G_{\mathbb{C}}$ *est semi-simple.*

Démonstration. — On a $(\mathrm{Ad}(x) \circ \sigma)^2 = \mathrm{Ad}(xx^{\sigma})$; donc $\mathrm{Ad}\, x \circ \sigma$ est semi-simple si et seulement si $\mathrm{Ad}(xx^{\sigma})$ l'est, donc si xx^{σ} est semi-simple : (iii) équivaut à (iv). De même, (x, σ) est semi-simple si et seulement si son carré $(xx^{\sigma}, 1) \in \tilde{H}_{\mathbb{R}}$ est semi-simple, i. e. si $xx^{\sigma} \in H_{\mathbb{R}} = G_{\mathbb{C}}$ est semi-simple : (i) équivaut à (iv). □

DÉFINITION 2.3. — *Soit* $x \in G_{\mathbb{C}}$ *un élément* σ-*semi-simple. On définit son* σ-*commutant, noté* ${}^{\sigma}G_x$, *comme l'ensemble des points fixes de l'automorphisme* $\mathrm{Ad}(x) \circ \sigma$ de $H_{\mathbb{R}} = G_{\mathbb{C}}$.

Ainsi $({}^{\sigma}G_x)_{\mathbb{R}}$, qu'on notera par abus de notation ${}^{\sigma}G_x$, est égal à $\{ g \in G_{\mathbb{C}} = g^{-1}\, x\, g^{\sigma} = x \}$. Comme $\mathrm{Ad}(x) \circ \sigma$ est un automorphisme semi-simple de H, ${}^{\sigma}G_x$ est un sous-groupe réductif défini sur $\mathbb{R}$ de H (Steinberg [23], 2.10).

Si x est σ-régulier, la composante neutre de ${}^{\sigma}G_x$ est un tore défini sur $\mathbb{R}$.

Nous voulons décrire le groupe des points complexes de ${}^{\sigma}G_x$. Nous utilisons l'isomorphisme $H_{\mathbb{C}} \cong G_{\mathbb{C}} \times G_{\mathbb{C}}$. L'automorphisme $\mathrm{Ad}(x) \circ \sigma$ du groupe réel H se traduit sur les points complexes par $(g, h) \mapsto (\mathrm{Ad}(x)h, \mathrm{Ad}(x^{\sigma})g)$, $g, h \in G_{\mathbb{C}}$. Le groupe des points complexes $({}^{\sigma}G_x)_{\mathbb{C}}$ est l'ensemble des points fixes de cet automorphisme de $H_{\mathbb{C}}$, donc :

$$({}^{\sigma}G_x)_{\mathbb{C}} = \{ (g, h) : g = \mathrm{Ad}(x)h,\ h = \mathrm{Ad}(x^{\sigma})g \}.$$

On a donc $g = \mathrm{Ad}(xx^{\sigma})\, g$; l'application $(g, h) \mapsto g$ donne un isomorphisme de $({}^{\sigma}G_x)_{\mathbb{C}}$ avec $(G_{\mathbb{C}})^{xx^{\sigma}}$. La conjugaison complexe sur $({}^{\sigma}G_x)_{\mathbb{C}}$ est alors donnée par $g \mapsto \mathrm{Ad}(x)g^{\sigma} = (\mathrm{Ad}(x) \circ \sigma)g$.

Ainsi :

PROPOSITION 2.4. — *Soit* x *un élément* σ-*semi-simple. Le groupe des points complexes de* ${}^{\sigma}G_x$ *s'identifie à* $(G_{\mathbb{C}})^{xx^{\sigma}}$; *on a* ${}^{\sigma}G_x \subset (G_{\mathbb{C}})^{xx^{\sigma}}$, *et la conjugaison complexe sur* $(G_{\mathbb{C}})^{xx^{\sigma}}$ *est donnée par* $\mathrm{Ad}(x) \circ \sigma$.

Le groupe ${}^{\sigma}G_x$ est l'intersection du commutant de (x, σ) dans $\tilde{H}$ avec la composante neutre H. Donc x est σ-régulier si et seulement si la composante neutre de ${}^{\sigma}G_x$ est un tore, i. e. si la composante neutre de $(G_{\mathbb{C}})^{xx^{\sigma}}$ est un tore complexe, donc :

PROPOSITION 2.5 *a*. — $x \in G_{\mathbb{C}}$ *est* σ-*régulier si et seulement si* xx^{σ} *est un élément régulier de* $G_{\mathbb{C}}$.

Le groupe ${}^{\sigma}G_x$ est un groupe réductif de même rang que G, puisque ceci est vrai pour $(G_{\mathbb{C}})^{xx^{\sigma}}$. Si G est *simplement connexe*, ${}^{\sigma}G_x$ est connexe (Springer et Steinberg [24])

Soit G^1 une forme intérieure de G : on peut supposer $G^1_{\mathbb{C}}=G_{\mathbb{C}}$, la conjugaison complexe σ_1 de G^1 est alors de la forme $\mathrm{Ad}(c)\circ\sigma$, $c\in G_{\mathbb{C}}$. Alors $x\in G_{\mathbb{C}}$ est σ_1-semi-simple (σ_1-régulier) si et seulement si xc est σ-semi-simple (σ-régulier).

DÉFINITION 2.6. — On dit que x, $y\in G_{\mathbb{C}}$ sont *σ-conjugués* si :

$$x=h^{\sigma}yh^{-1} \quad \text{pour un } h\in G_{\mathbb{C}}.$$

La σ-conjugaison conserve les éléments σ-semi-simples (σ-réguliers).

Enfin, donnons une caractérisation infinitésimale de la σ-régularité. Soit $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ l'algèbre de Lie complexe de $G_{\mathbb{C}}$ (chap. 1). Si $g\in G_{\mathbb{C}}$, soit $(g,\sigma)=(s,\sigma)(n,1)$ la décomposition semi-simple/unipotent de (g,σ) dans $\tilde{H}$. D'après ce qui précède, la dimension de l'espace des points fixes de $\mathrm{Ad}\, s\circ\sigma$ dans $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ est $\geqq l=\mathrm{rang}(G)$. Comme $(g,\sigma)=(s,\sigma)(n,1)=(n,1)(s,\sigma)$, l'endomorphisme unipotent $\mathrm{Ad}\, n$ laisse fixe cet espace; on en déduit que $\mathrm{Ad}\,(g)\circ\sigma$ a encore la valeur propre 1 avec multiplicité $\geqq l$. Soit donc :

$$\det\nolimits_{\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}}(\mathrm{Ad}\, g\circ\sigma-(1+T))=T^{l}D_{\sigma}(g) \qquad (\mathrm{mod}\ T^{l+1}).$$

On démontre facilement :

PROPOSITION 2.5*b*. — *$g\in G_{\mathbb{C}}$ est σ-régulier si et seulement si :*

$$D_{\sigma}(g)\neq 0.$$

On notera ${}^{\sigma}G'_{\mathbb{C}}$ l'ensemble des éléments σ-réguliers de $G_{\mathbb{C}}$.

2. APPLICATION NORME (*cas quasi déployé*). — Rappelons (Langlands [15], Shelstad [21]) que g, $h\in G_{\mathbb{R}}$ sont dits *stablement conjugués* si $g=xhx^{-1}$, $x\in G_{\mathbb{C}}$. De même, deux sous-groupes de Cartan T^1, T^2 sont stablement conjugués si $T^1_{\mathbb{R}}=xT^2_{\mathbb{R}}x^{-1}$, $x\in G_{\mathbb{C}}$; d'après un résultat de Shelstad ([19], cor. 2.3) c'est vrai si et seulement si T^1 et T^2 sont conjugués par $G_{\mathbb{R}}$. Soit T un sous-groupe de Cartan, W le groupe de Weyl complexe de T, $W^{\sigma}=W^{\sigma}(T)$ le sous-groupe des éléments de W qui commutent à σ : $T_{\mathbb{C}}\to T_{\mathbb{C}}$; les éléments de W^{σ} préservent $T_{\mathbb{R}}$. Il est clair que si $t_1=wt_2$, $w\in W^{\sigma}$, t_1 et t_2 sont stablement conjugués. Réciproquement, soient t_1, $t_2\in G_{\mathbb{R}}$ deux éléments *fortement réguliers* (2). Si $t_1=gt_2g^{-1}$ pour $g\in G_{\mathbb{C}}$, on en déduit que $gT^2_{\mathbb{R}}g^{-1}=T^1_{\mathbb{R}}$, où $T^i_{\mathbb{R}}$ est le commutant de t_i dans $G_{\mathbb{R}}$ (lemme 2.16); on peut donc supposer, à conjugaison par $G_{\mathbb{R}}$ près, que t_1 et t_2 sont dans un tore $T_{\mathbb{R}}$ et qu'ils sont conjugués par un élément de W^{σ}.

Si G_{der} n'est pas simplement connexe et si les t_i sont réguliers mais pas fortement réguliers, $T^1_{\mathbb{R}}$ n'est plus nécessairement conjugué à $T^2_{\mathbb{R}}$ (T^i est la composante neutre du centralisateur de t^i). Par exemple, soit $G=PGL(2)$; on a la suite exacte :

$$1\to\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\to SL(2,\mathbb{C})\xrightarrow[p]{} PGL(2,\mathbb{C})\to 1.$$

(2) x est fortement régulier si G^x est un tore. Si G_{der} est simplement connexe, tout élément régulier est fortement régulier ([24], th. 3.9).

Les éléments de $G_{\mathbb{R}}$ sont représentés dans $SL(2, \mathbb{C})$ par des matrices à coefficients réels ou imaginaires purs. On note $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}_p$ l'image par p d'un élément $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ de $SL(2, \mathbb{C})$. Soit $h=\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}_p$, $b=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}_p$. Les éléments h et b de $G_{\mathbb{R}}$ sont réguliers, mais non fortement réguliers; en fait, si l'on note H, B les composantes neutres des commutants de h, b dans G, on a $G^h = H \cup b\, H$, $G^b = B \cup h\, B$. Le tore H est déployé, le tore B anisotrope et donc $H_{\mathbb{R}}$ et $B_{\mathbb{R}}$ ne sont pas conjugués par $G_{\mathbb{C}}$. Cependant, la matrice $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ a pour valeurs propres i et $-i$, et on en déduit que b et h sont conjugués par $G_{\mathbb{C}}$. Il est facile (comparer au théorème 2.13) de trouver un L-paquet de représentations de $G_{\mathbb{R}}$ dont le caractère n'a pas la même valeur en b et h.

Pour pouvoir utiliser les résultats de stabilité de Shelstad (th. 2.13), nous faisons donc la définition suivante. Soit G′ l'ouvert des éléments réguliers de G.

DÉFINITION 2.7. — *Soit $g_1, g_2 \in G'$. Soit T^1, T^2 les sous-groupes de Cartan de* G *contenant* g_1, g_2. *On dit que g_1, g_2 sont superstablement conjugués si $g_1 = x g_2 x^{-1}$, $T^1_{\mathbb{R}} = x T^2_{\mathbb{R}} x^{-1}$ pour un* $x \in G_{\mathbb{C}}$.

Si le groupe dérivé G_{der} de G est simplement connexe, la conjugaison superstable n'est donc autre que la conjugaison stable. Si T est un sous-groupe de Cartan de G, les classes de conjugaison superstables dans $T_{\mathbb{R}}$ sont les orbites de $W^{\sigma}(T)$.

Nous supposons maintenant G *quasi déployé*. Rappelons un résultat de Steinberg [23] : si G est quasi déployé, semi-simple et simplement connexe, toute classe de conjugaison semi-simple définie sur $\mathbb{R}$ contient un élément réel. En d'autres termes, si g est conjugué (dans $G_{\mathbb{C}}$) à g^{σ}, g est conjugué à un élément de $G_{\mathbb{R}}$ si g est semi-simple.

Soit d'abord G semi-simple, simplement connexe. Soit $g \in G_{\mathbb{C}}$, g σ-régulier. L'élément $x = g g^{\sigma}$ de $G_{\mathbb{C}}$ est conjugué à x^{σ} : $x^{\sigma} = g^{\sigma} g = g^{-1}(g g^{\sigma}) g$. Par conséquent, il existe $h \in G_{\mathbb{R}}$ conjugué à $g g^{\sigma}$. Comme g est σ-régulier, $h \in G'_{\mathbb{R}}$. Si $h_1 \in G'_{\mathbb{R}}$ est aussi conjugué à $g g^{\sigma}$, h et h_1 sont stablement conjugués. On a donc associé à g une classe de conjugaison stable de $G'_{\mathbb{R}}$. On la note Ng et on l'appelle *norme* de g. Si g, h sont σ-conjugués, $Ng = Nh$. On a donc défini une application N des classes de σ-conjugaison σ-régulières de $G_{\mathbb{C}}$ dans les classes de conjugaison stable de $G'_{\mathbb{R}}$.

Supposons maintenant G semi-simple. Soit G^{sc} le revêtement simplement connexe de G. Soit $g \in {}^{\sigma}G'_{\mathbb{C}}$. Soit $\tilde{g}$ une image réciproque de g dans $G^{sc}_{\mathbb{C}}$. Dans $G^{sc}_{\mathbb{C}}$, on a $\tilde{g}\tilde{g}^{\sigma} = \tilde{x}\tilde{h}\tilde{x}^{-1}$, $\tilde{x} \in G^{sc}_{\mathbb{C}}$, $\tilde{h} \in G^{sc}_{\mathbb{R}}$. Soit h l'image de $\tilde{h}$ dans $G_{\mathbb{R}}$: on définit la norme de g, notée N_g, comme la classe de conjugaison superstable de h dans $G_{\mathbb{R}}$. Montrons que celle-ci est bien définie. Si $\tilde{g}_1 = \tilde{g}z$ est un autre relèvement de g, $z \in \ker (G^{sc}_{\mathbb{C}} \xrightarrow{\pi} G_{\mathbb{C}})$, on a :

$$\tilde{g}_1 \tilde{g}_1^{\sigma} = \tilde{g}\tilde{g}^{\sigma} z z^{\sigma}; \qquad z z^{\sigma} \in G^{sc}_{\mathbb{R}} \qquad \text{et} \qquad \pi(z z^{\sigma}) = 1.$$

Si $\tilde{g}_1 g_1^{\sigma} = \tilde{x}_1 \tilde{h}_1 x_1^{-1} = \tilde{x}\tilde{h}\tilde{x}^{-1} z z^{\sigma}$, $\tilde{h}_1$ et $\tilde{h} z z^{\sigma}$ sont stablement conjugués dans $G^{sc}_{\mathbb{R}}$: si T^{sc}_1, $T^{sc} = (G^{sc})^{\tilde{h}} = (G^{sc})^{\tilde{h} z z^{\sigma}}$ sont leurs centraliseurs, on a $\tilde{x}_1 (T^{sc}_1)_{\mathbb{R}} \tilde{x}_1^{-1} = \tilde{x}(T^{sc})_{\mathbb{R}} \tilde{x}^{-1}$; on en déduit, en notant y l'image d'un élément $\tilde{y}$ par π, que $x_1 h_1 x_1^{-1} = xhx^{-1}$, $x_1 (\mathrm{T}_1)_{\mathbb{R}} x_1^{-1} = x \mathrm{T}_{\mathbb{R}} x^{-1}$ où T_1, T sont les images de T_1^{sc}, T^{sc}. Donc h_1, h sont superstablement conjugués.

Si enfin G est réductif connexe quasi déployé, on a $\mathrm{G}_{\mathbb{C}} = (\mathrm{G}_{\mathrm{der}})_{\mathbb{C}} (\mathrm{G}_{\mathrm{rad}})_{\mathbb{C}}$, où $\mathrm{G}_{\mathrm{rad}}$ est le radical de G.

On définit alors $\mathrm{N}(g_0 z) = (\mathrm{N} g_0) z z^{\sigma} \in (\mathrm{G}_{\mathrm{der}})_{\mathbb{R}} (\mathrm{G}_{\mathrm{rad}})_{\mathbb{R}} \subset \mathrm{G}_{\mathbb{R}}$; on vérifie que $\mathrm{N} g$ est encore défini à conjugaison superstable près. En définitive :

PROPOSITION 2.8. — *L'application norme envoie les classes de σ-conjugaison d'éléments σ-réguliers de* $\mathrm{G}_{\mathbb{C}}$ *dans les classes de conjugaison superstable régulières de* $\mathrm{G}_{\mathbb{R}}$.

Mentionnons maintenant deux propriétés des tores réels :

LEMME 2.9. — *Soit* T *un tore défini sur* $\mathbb{R}$, $\mathrm{T}_{\mathbb{R}}^0$ *la composante neutre de* $\mathrm{T}_{\mathbb{R}}$:

(i) *tout élément de* $\mathrm{T}_{\mathbb{C}}$ *est σ-conjugué à un élément réel : si* $t \in \mathrm{T}_{\mathbb{C}}$, *on a* $t = x^{-1} x^{\sigma} s$, $x \in \mathrm{T}_{\mathbb{C}}$, $s \in \mathrm{T}_{\mathbb{R}}^0$.

(ii) *en particulier, tout élément de* $\mathrm{H}^1(\Gamma_{\mathbb{R}}, \mathrm{T}_{\mathbb{C}})$ *est représenté par un élément de* $\mathrm{T}_{\mathbb{R}}$: *si* $t \in \mathrm{T}_{\mathbb{C}}$, $tt^{\sigma} = 1$, *on a* $t = x^{-1} x^{\sigma} s$, $s \in \mathrm{T}_{\mathbb{R}}$, $s^2 = 1$.

Il est clair que (ii) résulte de (i); il suffit de démontrer (i) pour les deux tores de dimension 1 sur $\mathbb{R}$, puis d'utiliser une surjection d'un produit direct sur T. □

Soit alors g un élément σ-régulier. A conjugaison près, on peut supposer que $gg^{\sigma} \in \mathrm{G}'_{\mathbb{R}}$. Supposons tout d'abord $\mathrm{G}_{\mathrm{der}}$ simplement connexe. Le commutant de gg^{σ} est un tore maximal T. On a $gg^{\sigma} = g^{\sigma} g$, donc $g(gg^{\sigma}) = g(g^{\sigma} g) = (gg^{\sigma}) g$, i.e. $g \in \mathrm{T}_{\mathbb{C}}$. Donc g est σ-conjugué à un élément réel. Si G est semi-simple et si $\tilde{g} \in (\mathrm{G}_{sc})_{\mathbb{C}}$ relève g, $\tilde{g}$ est σ-conjugué à un élément de $(\mathrm{G}_{sc})_{\mathbb{R}}$, donc g est σ-conjugué à un élément réel. Enfin, en utilisant la décomposition $\mathrm{G}_{\mathbb{C}} = (\mathrm{G}_{\mathrm{der}})_{\mathbb{C}} (\mathrm{G}_{\mathrm{red}})_{\mathbb{C}}$, on en déduit en général :

PROPOSITION 2.10. — *Tout élément σ-régulier de* $\mathrm{G}_{\mathbb{C}}$ *est σ-conjugué à un élément* (*de carré régulier*) *de* $\mathrm{G}_{\mathbb{R}}$.

COROLLAIRE 2.11. — *L'image de la norme est formée des* (*classes de conjugaison superstable de*) *carrés réguliers de* $\mathrm{G}_{\mathbb{R}}$.

3. APPLICATION NORME (*cas général*). — On ne suppose plus G quasi déployé. Supposons d'abord G semi-simple et simplement connexe. Si g est σ-régulier dans $\mathrm{G}_{\mathbb{C}}$, on dit que $\mathrm{N} g$ *est défini* si gg^{σ} est conjugué à un élément de $\mathrm{G}_{\mathbb{R}}$. On vérifie alors comme ci-dessus que $\mathrm{N} g$ est défini à conjugaison stable près dans $\mathrm{G}_{\mathbb{R}}$, et que $\mathrm{N} g$ est défini si et seulement si g est σ-conjugué à un élément de $\mathrm{G}_{\mathbb{R}}$.

Si G est semi-simple, soit $\pi : \mathrm{G}^{sc} \to \mathrm{G}$. Si $g \in \mathrm{G}_{\mathbb{C}}$, on dit que $\mathrm{N} g$ *est défini* si g a un relèvement $\tilde{g}$ tel que $\mathrm{N} \tilde{g}$ est défini; on pose alors $\mathrm{N} g = \pi(\mathrm{N} \tilde{g})$. On vérifie que $\mathrm{N} g$ est défini à conjugaison superstable près dans $\mathrm{G}_{\mathbb{R}}$. Si $\mathrm{N} g$ est défini, g est σ-conjugué à un élément de $\mathrm{G}_{\mathbb{R}}$ (puisque c'est vrai dans G^{sc}). Réciproquement, supposons g σ-régulier $\in \mathrm{G}_{\mathbb{R}}$: g est un élément d'un sous-groupe de Cartan $\mathrm{T}_{\mathbb{R}} \subset \mathrm{G}_{\mathbb{R}}$. Le lemme 2.9 dit que g est σ-conjugué dans $\mathrm{T}_{\mathbb{C}}$ à un élément h de la composante neutre $\mathrm{T}_{\mathbb{R}}^0$ de $\mathrm{T}_{\mathbb{R}}$. Comme la composante neutre de $\mathrm{G}_{\mathbb{R}}$ est dans $\pi(\mathrm{G}_{\mathbb{R}}^{sc})$, h a un relèvement $\tilde{h} \in \mathrm{G}_{\mathbb{R}}^{sc}$, donc $\mathrm{N} g$ est défini. Enfin, si G n'est pas semi-simple, on utilise la décomposition $\mathrm{G}_{\mathbb{C}} = \mathrm{G}_{\mathbb{C}}^{\mathrm{rad}} \mathrm{G}_{\mathbb{C}}^{\mathrm{der}}$. En définitive :

PROPOSITION 2.12. — *L'application norme est définie sur l'ensemble des éléments σ-conjugués à des éléments de carré régulier de* $G_{\mathbb{R}}$; *son image est l'ensemble des carrés réguliers de* $G_{\mathbb{R}}$, *à conjugaison superstable près.*

La raison pour laquelle nous avons défini la norme à conjugaison superstable près est la suivante. Soit φ une section tempérée du L-groupe réel de G, π_φ la représentation de $G_{\mathbb{R}}$ associée à φ (*cf.* chap. 8), Θ_φ le caractère de π_φ. Θ_φ est une distribution donnée par une fonction localement intégrable sur $G_{\mathbb{R}}$, analytique sur $G'_{\mathbb{R}}$. En particulier, si T est une tore maximal de G, Θ_φ définit une fonction analytique Θ_φ^{T} sur $T'_{\mathbb{R}}$.

THÉORÈME 2.13. — (Shelstad [19]). Θ_φ^{T} *est invariante par conjugaison superstable sur* $T'_{\mathbb{R}}$.

(Shelstad appelle une distribution satisfaisant cette condition « stablement invariante ».)

Par conséquent, l'expression $\Theta_\varphi(Ng)$ a un sens quand la norme Ng de g est définie.

Faisons encore les remarques suivantes. Tout d'abord, si T est un tore anisotrope, tout automorphisme de $T_{\mathbb{C}}$ est un automorphisme réel (Shelstad [19]) : c'est clair, par exemple puisque $T_{\mathbb{R}}$ est un compact maximal de $T_{\mathbb{C}}$. On en déduit que si T est un tore de G tel que $T_{der} = T \cap G_{der}$ est anisotrope, la conjugaison superstable coïncide sur $T_{\mathbb{R}}$ avec la conjugaison stable. Enfin, si G_{der} lui-même est anisotrope, les groupes de Weyl réel et complexe de G par rapport à l'unique tore (à conjugaison près) T de G coïncident : dans ce cas, conjugaison, conjugaison stable et conjugaison superstable sont identiques. Si G_{der} est anisotrope, on appellera *σ-elliptiques* les éléments σ-conjugués à des éléments de $G_{\mathbb{R}}$.

Nous démontrons maintenant une proposition qui sera utilisée au chapitre 8. Soit G réductif connexe sur $\mathbb{R}$, P un sous-groupe parabolique *cuspidal* de G, M un sous-groupe de Levi de P, définis sur $\mathbb{R}$.

PROPOSITION 2.14. — *Soit* $g \in G_{\mathbb{C}}$, gg^σ *fortement régulier. Si* g *est σ-conjugué à un élément de* $G_{\mathbb{R}}$, *et σ-conjugué à un élément de* $M_{\mathbb{C}}$, *alors il est σ-conjugué à un élément de* $M_{\mathbb{R}}$.

Démonstration. — Soit G^1 une forme intérieure quasi déployée de G, c le cocycle définissant G^1 : $\sigma_1 = \mathrm{Ad}(c) \circ \sigma$, $cc^\sigma \in Z(G_{\mathbb{C}})$. Soit H un tore maximal de M. Je dis que c est cohomologue à un élément de $H_{\mathbb{C}}$ (*cf.* Steinberg [23], § 10). En effet, G^1 étant quasi déployé, H est conjugué à un tore maximal de G^1 (Langlands [14], lemme 2.1) : $\mathrm{Ad}\, g\, H_{\mathbb{R}} = H^1_{\mathbb{R}}$, $g \in G_{\mathbb{C}}$, $H^1 \subset G^1$. Alors si $t \in H_{\mathbb{R}}$, $\mathrm{Ad}\, g t \in H^1_{\mathbb{R}}$ d'où :

$$(\star) \qquad \mathrm{Ad}(g)\, t = \sigma_1 \mathrm{Ad}(g)\, t = \mathrm{Ad}(c)\, \sigma\, \mathrm{Ad}(g)\, t = \mathrm{Ad}(c)\, \mathrm{Ad}(g^\sigma)\, t^\sigma = \mathrm{Ad}(c)\, \mathrm{Ad}(g^\sigma)\, t,$$

i. e. $\mathrm{Ad}(g^{-1} c g^\sigma)\, t = t$; si t est pris fortement régulier, on en déduit que $g^{-1} c g^\sigma \in H_{\mathbb{C}}$.

En particulier, on peut supposer $c \in M_{\mathbb{C}}$; c définit donc une forme intérieure M^1 de M, qui est un sous-groupe de Levi d'un parabolique de G^1; par conséquent, M^1 est quasi déployé.

LEMME 2.15. — *Soit* G *une forme intérieure de* G^1 :

$$\sigma = \mathrm{Ad}(a) \circ \sigma_1, \qquad aa^{\sigma_1} \in Z(G_{\mathbb{C}}).$$

Alors $aa^{\sigma_1} \in Z(G^1_{\mathbb{R}})$ *ou, ce qui est équivalent,* $aa^{\sigma_1} = (aa^{\sigma_1})^{\sigma_1} = a^{\sigma_1} a$.

Démonstration. — aa^{σ_1} est central, donc :

$$aa^{\sigma_1} = a^{-1} (aa^{\sigma_1})\, a = a^{\sigma_1} a. \quad \square$$

Revenons à la démonstration de la proposition 2.14. On peut supposer que $g \in \mathrm{M}_{\mathbb{C}}$. Soit $a = c^{-1}$: $\sigma = \mathrm{Ad}(a) \circ \sigma_1$, et $aa^{\sigma_1} \in \mathrm{Z}(\mathrm{G}^1_{\mathbb{R}})$ d'après le lemme. Comme g est σ-régulier, ga est σ_1-régulier. D'après la proposition 2.10, on a $ga = x^{-1} m x^{\sigma_1}$, $m \in \mathrm{M}^1_{\mathbb{R}}$, $x \in \mathrm{M}_{\mathbb{C}}$. On en déduit que $gg^{\sigma} aa^{\sigma_1} = x^{-1} m^2 x$.

Par ailleurs, on a $g = y g_0 y^{-\sigma}$, par hypothèse, pour un $g_0 \in \mathrm{G}_{\mathbb{R}}$, $y \in \mathrm{G}_{\mathbb{C}}$. Donc :

$$gg^{\sigma} = y g_0^2 y^{-1} = x^{-1} (aa^{\sigma_1})^{-1} m^2 x,$$

g_0^2 fortement régulier dans $\mathrm{G}_{\mathbb{R}}$, m^2 fortement régulier dans $\mathrm{M}^1_{\mathbb{R}}$ (ou $\mathrm{G}^1_{\mathbb{R}}$). Soit $\mathrm{T} \subset \mathrm{G}$ le commutant de g_0^2, $\mathrm{T}^1 \subset \mathrm{M}^1 \subset \mathrm{G}^1$ celui de m^2, et soit $u = xy$. On a évidemment :

$$u \mathrm{T}_{\mathbb{C}} u^{-1} = \mathrm{T}^1_{\mathbb{C}}.$$

LEMME 2.16. — $\mathrm{T}^1_{\mathbb{R}} = u \mathrm{T}_{\mathbb{R}} u^{-1}$.

Démonstration. — Un calcul analogue à (★) avant le lemme 2.15 montre que :

$$\mathrm{Ad}(u^{-1} c u^{\sigma}) g_0^2 = g_0^2.$$

Ceci montre que $u^{-1} c u^{\sigma} \in \mathrm{T}_{\mathbb{C}}$. On en déduit que :

$$\mathrm{Ad}(u^{-1} c u^{\sigma}) = \mathrm{Ad}(u^{-1}) \sigma_1 \sigma \mathrm{Ad}(u^{\sigma}) = \mathrm{Ad}(u^{-1}) \sigma_1 \mathrm{Ad}(u) \sigma = 1 \quad \text{sur } \mathrm{T}_{\mathbb{C}}, \text{ i. e.}$$

$\sigma = \mathrm{Ad}(u^{-1}) \sigma_1 \mathrm{Ad}(u)$. En regardant les points fixes, on en déduit que $\mathrm{T}_{\mathbb{R}} = u^{-1} \mathrm{T}^1_{\mathbb{R}} u$. □

Soit $t(\mathrm{G})$, $t(\mathrm{G}^1)$ l'ensemble des classes de conjugaison de sous-groupes de Cartan de $\mathrm{G}_{\mathbb{R}}$ et $\mathrm{G}^1_{\mathbb{R}}$. Soit $t_{\mathrm{G}^1}(\mathrm{G})$ l'ensemble des classes de $t(\mathrm{G})$ conjuguées dans $\mathrm{G}_{\mathbb{C}}$ à des classes de $t(\mathrm{G}^1)$ à la manière du lemme 2.16. On définit de même $t_{\mathrm{G}}(\mathrm{G}^1)$. On a l'ordre de Hiraï sur $t(\mathrm{G})$ et $t(\mathrm{G}^1)$: $t_1 \leqq t_2 \Leftrightarrow$ pour $\mathrm{T}_1, \mathrm{T}_2$ convenables dans t_1, t_2, $\mathrm{S}_{\mathrm{T}_i}$ le tore déployé maximal de T_i, on a $\mathrm{S}_{\mathrm{T}_1} \subset \mathrm{S}_{\mathrm{T}_2}$.

La conjugaison par $\mathrm{G}_{\mathbb{C}}$ donne une bijection $t_{\mathrm{G}_1}(\mathrm{G}) \leftrightarrow t_{\mathrm{G}}(\mathrm{G}_1)$. Shelstad a montré qu'elle respecte l'ordre de Hiraï (Shelstad [19]).

Soit B un tore fondamental de M. Si H est un tore réel maximal d'un groupe G, on note $[\mathrm{H}] \in t(\mathrm{G})$ sa classe. D'après le résultat de Langlands déjà cité, B est conjugué dans $\mathrm{M}_{\mathbb{C}}$ à un tore maximal B^1 de M^1; comme $\mathrm{S} = \mathrm{S}_{\mathrm{B}}$ est central dans M_1, on a $\mathrm{S} \subset \mathrm{B}^1$ et donc, puisque B^1 est isomorphe sur $\mathbb{R}$ à B, $\mathrm{S} = \mathrm{S}_{\mathrm{B}^1}$. Par ailleurs, $\mathrm{T}^1 \subset \mathrm{M}^1 = (\mathrm{G}^1)^{\mathrm{S}}$, donc $\mathrm{S} \subset \mathrm{T}^1$. On a donc, dans M^1 (ou G^1), $[\mathrm{B}^1] \leqq [\mathrm{T}^1]$. On en déduit que $[\mathrm{B}] \leqq [\mathrm{T}]$ pour l'ordre dans $t(\mathrm{G})$. Il reste à remarquer que si T est un tore réel de G, $[\mathrm{T}] \geqq [\mathrm{B}]$, alors T est conjugué à un tore de M. En effet, à conjugaison près, on a $\mathrm{T} \supset \mathrm{S}_{\mathrm{T}} \supset \mathrm{S}_{\mathrm{B}} = \mathrm{S}$, d'où $\mathrm{T} \subset \mathrm{G}^{\mathrm{S}} = \mathrm{M}$. Donc $\mathrm{T}_{\mathbb{R}}$ est conjugué dans $\mathrm{G}_{\mathbb{R}}$ à un sous-groupe de Cartan de $\mathrm{M}_{\mathbb{R}}$; comme $g_0 \in \mathrm{T}_{\mathbb{R}} = (\mathrm{G}_{\mathbb{R}})^{g_0^2}$, g est σ-conjugué à un élément de $\mathrm{M}_{\mathbb{R}}$. □

3. Vrais et faux relèvements en dimension finie

Dans ce chapitre nous décrivons un « relèvement » de certaines représentations de dimension finie de $\mathrm{G}_{\mathbb{R}}$ en des représentations de dimension finie de $\mathrm{G}_{\mathbb{C}}$. Ce relèvement se traduit par l'identité habituelle entre les caractères, ce qui sera utilisé au chapitre 4. Il ne coïncide pas forcément avec le relèvement de Langlands, donné par la fonctorialité. Par exemple, si G est anisotrope, une représentation irréductible de $G_{\mathbb{R}}$ se relève (à la Langlands) en une représentation *tempérée* de $G_{\mathbb{C}}$, qui ne peut être de dimension finie. On peut vérifier néanmoins que pour les représentations rationnelles irréductibles de G *quasi déployé*, ce relèvement coïncide avec celui de Langlands : c'est un exemple non tempéré de relèvement pour les caractères.

1. Soit G un groupe algébrique connexe défini sur $\mathbb{R}$. Soit σ la conjugaison de $G_{\mathbb{C}}$ par rapport à $G_{\mathbb{R}}$. Soit (π, V) une représentation de dimension finie de $G_{\mathbb{R}}$. On a $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} \cong \mathfrak{g}_{\mathbb{R}} \times \mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ (chap. 1). Si π désigne aussi la représentation de $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ on en déduit une représentation $\Pi = \pi \otimes \pi$ de $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$; $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ agit à gauche de façon « holomorphe » pour la conjugaison par rapport à $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$, à droite de façon « antiholomorphe ». L'espace de Π est $V \otimes V$, et :

$$\Pi(X, Y)(v_1 \otimes v_2) = X v_1 \otimes v_2 + v_1 \otimes Y v_2.$$

LEMME 3.1. — *L'opérateur* A :

$$V \otimes V \to V \otimes V,$$
$$v_1 \otimes v_2 \mapsto v_2 \otimes v_1,$$

entrelace Π *et* $\Pi \circ \sigma$.

C'est clair puisque σ agit sur $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ par $(x, y) \mapsto (y, x)$. $\square$

On suppose maintenant que Π s'intègre en une représentation de $G_{\mathbb{C}}$, telle que $\Pi|_{G_{\mathbb{R}}} = \pi \otimes \pi$.

PROPOSITION 3.2. — Π *est un relèvement analytique de* π, *au sens suivant : soit* $g \in G_{\mathbb{C}}$ σ-*conjugué à un élément* $g_0 \in G_{\mathbb{R}}$.

Alors trace $(\Pi(g)A) =$ trace $\pi(g_0^2)$.

Démonstration. — Comme $A^2 = 1$, il est facile de voir que trace $(\Pi(g)A)$ est invariant par σ-conjugaison. On peut donc supposer $g \in G_{\mathbb{R}}$. Dans ce cas, $\Pi(g) = \pi(g) \otimes \pi(g)$. Il suffit donc de démontrer le lemme d'algèbre linéaire suivant, qui est laissé au lecteur :

LEMME 3.3. — *Soit* V *un espace vectoriel de dimension finie sur* $\mathbb{C}$, $M \in \operatorname{Hom}(V, V)$. *Soit* A : $V \otimes V \to V \otimes V$ *défini comme ci-dessus. Alors* trace $M^2 =$ trace $(A(M \otimes M))$.

Supposons maintenant G réductif. Supposons, pour simplifier, π rationnelle irréductible.

Dans ce cas π se prolonge en une représentation holomorphe de $G_{\mathbb{C}}$, et Π s'intègre donc à $G_{\mathbb{C}}$. De plus, π est irréductible comme représentation de $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ et a un caractère infinitésimal χ_π. De même, Π a un caractère infinitésimal X_Π. On a $Z(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}) \cong Z(\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}) \otimes Z(\mathfrak{g}_{\mathbb{R}})$ (chap. 1); il est clair que $z_1 \otimes z_2$ agit par $\chi_\pi(z_1)\chi_\pi(z_2) = \chi_\pi(z_1 z_2) = (\chi_\pi \circ N)(z_1 \otimes z_2)$, d'où :

PROPOSITION 3.4 (π *rationnelle irréductible*). — *On a* $X_\Pi = \chi_\pi \circ N$.

4. Intégrabilité des caractères gauches

1. Dans ce chapitre, nous démontrons que les caractères gauches associés aux représentations σ-stables sont donnés par l'intégration contre une fonction localement intégrable sur $G_{\mathbb{C}}$.

Comme auparavant, G est un groupe algébrique connexe réductif défini sur $\mathbb{R}$.

On désigne par σ la conjugaison de $G_{\mathbb{C}}$ par rapport à $G_{\mathbb{R}}$. On choisit un sous-groupe compact maximal U de $G_{\mathbb{C}}$.

Soit T une distribution sur $G_{\mathbb{C}}$. On dit que T est *invariante par σ-conjugaison* si $T(f^g) \equiv T(f)$, où $f^g(x) = f(g^\sigma x g^{-1})$. On dit que T est *une distribution propre* si elle est distribution propre du centre $Z(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$ de l'algèbre enveloppante $U(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$ de $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$.

En particulier, soit Π une représentation irréductible σ-stable de $G_{\mathbb{C}}$, A entrelaçant Π et $\Pi \circ \sigma$. Si Π est réalisée dans un espace de Hilbert $\overline{\mathscr{V}}$, A agit sur l'espace $\mathscr{V}$ des vecteurs U-finis de $\overline{\mathscr{V}}$; on peut supposer, d'après le lemme de Schur, que $A^2 = 1$.

Si φ est une fonction C^∞ à support compact sur $G_{\mathbb{C}}$, U-finie à droite et à gauche,

$$\Pi(\varphi) = \int_{G_{\mathbb{C}}} \varphi(g)\,\Pi(g)\,dg,$$

où dg est une mesure de Haar sur $G_{\mathbb{C}}$, est un opérateur de rang fini qui préserve $\mathscr{V}$; il en est de même pour $\Pi(\varphi)A$. Par conséquent :

$$T(\varphi) = \operatorname{trace}(\Pi(\varphi)A)$$

est bien défini pour de tels φ, qui forment un sous-espace dense de $C_c^\infty(G_{\mathbb{C}})$.

PROPOSITION 4.1. — *L'application* :

$$\varphi \to \operatorname{trace}(\Pi(\varphi)A),$$

se prolonge en une distribution propre, invariante par σ-conjugaison, sur $G_{\mathbb{C}}$.

Remarque. — D'après la densité des fonctions U-finies, cette distribution ne dépend que la classe d'équivalence infinitésimale de Π (et du choix de A).

Démonstration. — Ne connaissant pas de démonstration simple, nous faisons appel à des résultats assez profonds. Soit $\overline{\mathscr{V}}$ un espace de Hilbert où est réalisée Π, $L^1(\overline{\mathscr{V}})$ l'espace des opérateurs traçables $\overline{\mathscr{V}} \to \overline{\mathscr{V}}$ avec sa norme habituelle. L'application $\psi \mapsto \Pi(\psi)$, de $C_c^\infty(G_{\mathbb{C}})$ muni de la topologie des fonctions-tests dans $L^1(\overline{\mathscr{V}})$, est continue (*cf.* e. g. Wallach [29], 8.7.4, démonstration); si de plus A est *continu*, $S \mapsto \operatorname{trace}(SA)$ est une forme linéaire continue sur $L^1(\overline{\mathscr{V}})$. On en déduit que $\varphi \mapsto \operatorname{trace}(\Pi(\varphi)A)$ définit une distribution sur $G_{\mathbb{C}}$, qui étend évidemment la trace pour les fonctions U-finies. Nous sommes donc amenés à chercher une réalisation de Π telle que A soit continu.

On peut tout d'abord se ramener à un groupe *quasi déployé*. On sait en effet (*cf.* chap. 1) que G est forme intérieure d'un groupe quasi déployé. Soit G^1 un tel groupe; on suppose

$G^1_{\mathbb{R}} \subset G^1_{\mathbb{C}} = G_{\mathbb{C}}$. Alors $\sigma_1 = \mathrm{Ad}(g) \circ \sigma$, pour un $g \in G_{\mathbb{C}}$. Si, dans l'espace de Hilbert $\overline{\mathscr{V}}$, l'opérateur borné A^1 entrelace Π et $\Pi \circ \sigma_1$:

$$A^1 \, \Pi(h^{\sigma_1}) \equiv \Pi(h) \, A^1,$$

on en déduit puisque $h^{\sigma_1} = g h^{\sigma} g^{-1}$:

$$A^1 \, \Pi(g) \, \Pi(h^{\sigma}) \, \Pi(g)^{-1} \equiv \Pi(h) \, A^1,$$

d'où un opérateur borné (qu'on peut rendre involutif) entrelaçant Π et $\Pi \circ \sigma$.

Supposons donc G quasi déployé; soit B un sous-groupe de Borel de G défini sur $\mathbb{R}$. Remarquons tout d'abord que si Π est *unitaire*, l'opérateur A doit être unitaire donc continu : l'équivalence infinitésimale de deux représentations unitaires implique l'équivalence unitaire (*cf.* Warner [30], I,4.5.5.3). Soit Π une représentation admissible irréductible de $G_{\mathbb{C}}$. D'après la classification de Langlands (Želobenko pour les groupes complexes), Π est l'unique sous-module d'une représentation induite :

$$I = \mathrm{ind}_{P_{\mathbb{C}} = MAN_{\mathbb{C}}}^{G_{\mathbb{C}}} (\delta \otimes \nu \otimes 1),$$

où $P_{\mathbb{C}}$ est un parabolique contenant $B_{\mathbb{C}}$, $P_{\mathbb{C}} = MAN_{\mathbb{C}}$ sa décomposition de Langlands, δ une représentation tempérée de M, ν un caractère réel antidominant de A (*cf.* Borel-Wallach [3], th. 4.11).

Les données (P, δ, ν) sont uniquement déterminées par Π. La représentation $\Pi \circ \sigma$ se plonge alors comme unique sous-module dans :

$$I \circ \sigma = \mathrm{ind}_{P^{\sigma}_{\mathbb{C}} = M^{\sigma} A^{\sigma} N^{\sigma}_{\mathbb{C}}}^{G_{\mathbb{C}}} (\delta^{\sigma} \otimes \nu^{\sigma} \otimes 1);$$

Si $\Pi \cong \Pi \circ \sigma$, on doit avoir $P_{\mathbb{C}} = P^{\sigma}_{\mathbb{C}}$, $\delta \cong \delta^{\sigma}$, $\nu = \nu^{\sigma}$.

Mais alors, δ étant unitaire, il existe un opérateur d'entrelacement continu $A_M : \overline{\mathscr{V}}(\delta) \to \overline{\mathscr{V}}(\delta)$ entre δ et $\delta \circ \sigma$.

L'opérateur $\mathrm{ind}_{MAN_{\mathbb{C}}}^{G_{\mathbb{C}}} (A_M \otimes 1 \otimes 1)$ est alors continu pour la structure hilbertienne naturelle sur l'induite, il entrelace I et $I \circ \sigma$ et donc Π et $\Pi \circ \sigma$.

L'invariance par σ-conjugaison de la distribution obtenue se vérifie trivialement. Si u est un élément de $Z(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$:

$$\Pi(u \star \varphi) = \Pi(u) \, \Pi(\varphi) = \lambda(u) \, \Pi(\varphi),$$

où λ est le caractère infinitésimal de Π; donc :

$$\mathrm{trace}(\Pi(u \star \varphi) \, A) = \lambda(u) \, \mathrm{trace}(\Pi(\varphi) \, A). \ \square$$

La distribution trace $(\Pi(\varphi) A)$, où A est choisi involutif, sera appelée *caractère gauche* de la représentation σ-stable Π (associé à A).

THÉORÈME 4.2. — *Soit* T *une distribution propre, invariante par σ-conjugaison, sur* $G_{\mathbb{C}}$. *Alors* T *est donnée par* (*l'intégration contre*) *une fonction localement intégrable sur* $G_{\mathbb{C}}$, *analytique sur les éléments σ-réguliers.*

En particulier, les caractères gauches des représentations irréductibles σ-stables de $G_{\mathbb{C}}$ *sont localement intégrables.*

Le reste du chapitre est consacré à la démonstration de ce théorème. Si l'on considère le groupe $\tilde{G}_{\mathbb{C}} = G_{\mathbb{C}} \rtimes \mathrm{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R})$, on voit que ceci revient à démontrer l'intégrabilité, sur la composante non connexe, des distributions propres sur $\tilde{G}_{\mathbb{C}}$ invariantes par l'action de la composante connexe $G_{\mathbb{C}}$. Harish-Chandra a démontré (non publié) l'intégrabilité locale de telles distributions dans un cadre plus général ([4]).

Soit G un groupe de Lie réel, d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}_0$. On suppose :

1° $\mathfrak{g}_0$ est réductive;

2° G a un nombre fini de composantes connexes;

3° le groupe analytique G_1 d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}_0^1 = [\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_0]$ a un centre fini.

Soit G^0 la composante de l'unité dans G, G^1 une composante connexe quelconque de G. On peut définir, de façon analogue aux éléments σ-réguliers (chap. 2), les éléments *réguliers* de G^1.

THÉORÈME 4.3. (Harish-Chandra). — *Soit* T *une distribution* G^0*-invariante sur* G^1, *distribution propre pour* $Z(\mathfrak{g}_0)$. *Alors* T *est une fonction localement intégrable sur* G^1, *analytique sur l'ensemble des éléments réguliers.*

Nous donnons ici une démonstration limitée au cas qui nous intéresse, utilisant de façon déterminante la géométrie de la σ-conjugaison et le relèvement à des sous-groupes (réductifs) réels de $G_{\mathbb{C}}$. Rappelons comment procède la démonstration du théorème d'intégrabilité locale dans le cas « classique » d'un groupe réductif réel G (Harish-Chandra, *cf.* Varadarajan [27], Part II). Tout d'abord, on démontre l'intégrabilité locale au voisinage de l'élément neutre ou d'un élément central de G; ceci se fait par réduction au théorème correspondant pour l'algèbre de Lie. Ensuite, on la démontre au voisinage de tout élément semi-simple x en utilisant l'analyse orbitale pour se ramener au résultat analogue dans le centralisateur (réductif) G^x de x. Enfin, on remarque qu'un ouvert contenant tous les éléments semi-simples de G doit être égal à G tout entier; ceci, appliqué à l'ouvert des éléments de G au voisinage desquels la distribution est intégrable, termine la démonstration.

Dans le cas de la conjugaison gauche, le schéma de la démonstration est le suivant. Rappelons (chap. 2) la définition des éléments σ-semi-simples de $G_{\mathbb{C}}$: g est σ-semi-simple si $(g, \sigma) \in \tilde{G}_{\mathbb{C}}$ est semi-simple. Dans ce cas, son σ-commutant ${}^{\sigma}G^{g}$ est réductif. Au voisinage de g, la sous-variété $({}^{\sigma}G^{g}).g$ de $G_{\mathbb{C}}$ est transverse par rapport à la σ conjugaison. On peut calculer les parties radiales, sur cette sous-variété, des opérateurs de $Z(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$; identifiant $({}^{\sigma}G^{g}).g$ à ${}^{\sigma}G^{g}$, on vérifie alors (§ 3) qu'à un facteur modulaire près, on obtient les opérateurs du centre de l'algèbre enveloppante de ${}^{\sigma}G^{g}$, composés avec l'application carré (th. 4.10).

Le théorème d'intégrabilité locale pour ${}^{\sigma}G^{g}$ démontre alors que T est localement intégrable au voisinage de g (§ 3).

Si de plus g est *σ-régulier* (chap. II), ${}^{\sigma}G^{g}$ est un tore réel et T est analytique au voisinage de g.

([4]) Je remercie Harish-Chandra de m'avoir communiqué ses notes non publiées sur cette question.

A l'opposé, ${}^{\sigma}G^{g}$ peut être une forme réelle de $G_{\mathbb{C}}$. C'est le cas en particulier pour $g=1$: dans ce cas ${}^{\sigma}G^{g}=G_{\mathbb{R}}$, et l'on obtient un relèvement de T en une distribution propre invariante dans un voisinage complètement invariant de 1 dans $G_{\mathbb{R}}$: c'est une première forme du théorème de relèvement, démontrée au paragraphe 2 (th. 4.8). Enfin, on montre que l'intégrabilité locale de T se déduit du résultat au voisinage des éléments semi-simples (§ 4).

Remarquons que pour démontrer le *théorème* 4.2 nous pouvons supposer que G est quasi déployé. Soit en effet G^1 forme intérieure de G. Soit T une distribution propre sur $G_{\mathbb{C}}$, invariante par σ-conjugaison : utilisant la notation fonctionnelle pour T, on a :

$$T(h^{\sigma} x h^{-1}) \equiv T(x), \qquad h \in G_{\mathbb{C}},$$

d'où si $h^{\sigma} \equiv g^{-1} h^{\sigma_1} g$:

$$T(g^{-1} h^{\sigma_1} g x h^{-1}) \equiv T(x), \qquad h \in G_{\mathbb{C}},$$

c'est-à-dire $T(g^{-1} h^{\sigma_1} x h^{-1}) \equiv T(g^{-1} x)$, $h \in G_{\mathbb{C}}$, donc en posant $T(g^{-1} x) = S(x)$:

$$S(h^{\sigma_1} x h^{-1}) \equiv S(x).$$

Autrement dit, S est invariante par σ_1-conjugaison; c'est une distribution propre puisque l'action de $Z(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$ commute à la translation par g^{-1}. Si S est localement intégrable, il en est de même pour T.

De plus, la translation par g^{-1} envoie les éléments σ_1-réguliers sur les éléments σ-réguliers. Le *théorème* 4.2, s'il est vérifié pour S et σ_1, l'est donc pour T et σ. A partir du paragraphe 3, on supposera donc, pour simplifier les démonstrations, que G est quasi déployé.

2. INTÉGRABILITÉ AU VOISINAGE DE L'ORIGINE. — Rappelons tout d'abord des résultats classiques sur les parties radiales d'opérateurs différentiels, dus à Harish-Chandra et Helgason. Dans ce qui suit, les variétés, actions de groupes, opérateurs différentiels, etc., sont supposés *analytiques*. Soit A un groupe de Lie unimodulaire agissant analytiquement sur une variété N, U une sous-variété (localement fermée) de N. On suppose qu'en tout point $u \in U$, l'espace tangent à N est la somme de l'espace tangent à U et de l'espace tangent à l'orbite $A.u$; l'application :

$$\psi : \quad A \times U \to A.U \subset N.$$

est donc submersive. Soit ω_A une mesure de Haar sur A, ω_N une mesure A-invariante sur N, ω_U une mesure sur U, toutes données par des formes de rang maximal. Dans ces conditions, on a une mesure naturelle $\omega_A . \omega_U . (\omega_N)^{-1}$ sur les fibres (lisses) de l'application ψ. L'intégration le long des fibres nous donne une application $\alpha \mapsto f_\alpha$ de $C_c^\infty(A \times U)$ dans $C_c^\infty(N)$, donc par dualité une application $T \mapsto \beta_T$ qui envoie les distributions sur N dans les distributions sur $A \times U$.

THÉORÈME 4.4 (*cf.* Varadarajan [27], p. 23) :

(i) *si* T *est une distribution* A-*invariante sur* N, β_T *est de la forme* $1 \otimes \sigma_T$, *où* σ_T *est une distribution sur* U;

(ii) T *est donnée, dans ce cas, par une fonction localement intégrable si et seulement si il en est de même pour* σ_T; σ_T *est alors la restriction de* T *à* U;

(iii) *si* A_0 *est un sous-groupe de* A *laissant invariants* U *et* ω_U, σ_T *est invariante sous* A_0.

Soit D un opérateur différentiel d'ordre fini défini sur un voisinage de U dans N. Nous pouvons appliquer D aux fonctions A-invariantes définies dans un voisinage de $u \in \mathrm{U}$.

THÉORÈME 4.5 (*cf.* Varadarajan [27], p. 24). — *Il existe un opérateur différentiel* $\Delta(D)$ *sur* U *satisfaisant* $(\mathrm{D}f)|_{\mathrm{U}} = \Delta(\mathrm{D})(f|_{\mathrm{U}})$, *pour toute fonction* f C^{∞}, A-*invariante dans un voisinage de* U.

Si T *est une distribution* A-*invariante, et si* D *est* A-*invariant* : $\Delta(\mathrm{D})\sigma_{\mathrm{T}} = \sigma_{\mathrm{DT}}$.

$\Delta(\mathrm{D})$ est alors appelé une partie radiale de l'opérateur D le long de U (pour l'action de A).

Nous appliquons ceci à la situation suivante : A est le groupe $\mathrm{G}_{\mathbb{C}}$ agissant sur lui-même par σ-conjugaison. La variété U va être un ouvert de $\mathrm{G}_{\mathbb{R}}$; plus précisément :

PROPOSITION 4.6. — *Soit* $\mathscr{U}$ *l'ouvert formé des éléments* g *de* $\mathrm{G}_{\mathbb{R}}$ *tels que* $\mathrm{Ad}(g)+1$ *est inversible :*

(i) $\mathscr{U}$ *est l'ensemble des éléments de* $\mathrm{G}_{\mathbb{R}}$ *tels que l'application :*

$$\mathrm{G}_{\mathbb{C}} \times \mathrm{G}_{\mathbb{R}} \to \mathrm{G}_{\mathbb{C}},$$
$$(x, y) \mapsto xyx^{-\sigma}$$

est submersive au voisinage de tout point (z, g), $z \in \mathrm{G}_{\mathbb{C}}$.

(ii) $\mathscr{U}$ *est l'ensemble des éléments de* $\mathrm{G}_{\mathbb{R}}$ *en lesquels l'application carré :* $\mathrm{G}_{\mathbb{R}} \to \mathrm{G}_{\mathbb{R}}$ *est un difféomorphisme local.*

Démonstration. — (ii) est bien connu. Pour (i), il suffit de supposer $z=1$. L'application est submersive si l'on a :

$$\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} = (1 - \mathrm{Ad}(g) \circ \sigma)\,\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} + \mathfrak{g}_{\mathbb{R}};$$

g étant réel, ceci équivaut à $i.\mathfrak{g}_{\mathbb{R}} = (1 + \mathrm{Ad}(g))\, i\,\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$. □

D'après la proposition, (i), nous pouvons donc chercher des parties radiales $\Delta(z)$ des opérateurs z de $\mathrm{Z}(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$ le long de $\mathscr{U}$. Remarquons qu'il existe des parties radiales $\mathrm{G}_{\mathbb{R}}$-*invariantes*. En effet, soit $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{g}_{\mathbb{R}} + i\,\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$. La démonstration de la proposition 4.6 montre qu'en tout $u \in \mathscr{U}$, l'application de $i\,\mathfrak{g}_{\mathbb{R}} \times \mathrm{G}_{\mathbb{R}}$ dans $\mathrm{G}_{\mathbb{C}}$ donnée par $(\mathrm{X}, y) \mapsto \exp(\mathrm{X})\, y \exp(-\sigma\mathrm{X})$ est submersive au voisinage de $(0, u)$. Elle donne donc une carte locale de $\mathrm{G}_{\mathbb{C}}$ en u. Si f est une fonction sur $\mathrm{G}_{\mathbb{R}}$ sur un voisinage U de u, on peut l'étendre localement en une fonction sur $\mathrm{G}_{\mathbb{C}}$ par $\mathrm{F}(\exp(\mathrm{X})\, y \exp(-\sigma\mathrm{X})) = f(y)$. On peut alors définir $\Delta(z)$ par $\Delta(z) f = (z\mathrm{F})|_{\mathrm{U}}$. Comme $i\,\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ est invariant par $\mathrm{G}_{\mathbb{R}}$ ainsi que z, on en déduit que $\Delta(z)$ est invariant par $\mathrm{G}_{\mathbb{R}}$. Nous utilisons les résultats suivants (chap. 1, 3). Soit $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}^0 \subset \mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$, $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^0 \subset \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$. On a un isomorphisme naturel $j : \mathfrak{g}_{\mathbb{R}} \cong \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^0$.

Rappelons que $\sigma : \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^0 \to \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^0$ est la conjugaison complexe. On a un plongement (d'algèbres de Lie réelles) :

$$\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^0 \hookrightarrow \mathfrak{g}_{\mathbb{R}} \times \mathfrak{g}_{\mathbb{R}},$$
$$\mathrm{X} \mapsto (j\mathrm{X}, j\sigma\mathrm{X}),$$

qui se prolonge en un isomorphisme d'algèbres de Lie complexes :

$$(\star) \qquad \mathfrak{g}_{\mathbb{C}} \xrightarrow{\approx} \mathfrak{g}_{\mathbb{R}} \times \mathfrak{g}_{\mathbb{R}}.$$

En particulier, on en déduit un isomorphisme :

$$Z(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}) \approx Z(\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}) \otimes Z(\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}).$$

En composant avec le produit de l'algèbre $Z(\mathfrak{g}_{\mathbb{R}})$, qui envoie $Z(\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}) \otimes Z(\mathfrak{g}_{\mathbb{R}})$ dans $Z(\mathfrak{g}_{\mathbb{R}})$, on en déduit l'application :

$$N: \quad Z(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}) \to Z(\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}).$$

Rappelons maintenant le relèvement en dimension finie (chap. 3). Si π est une représentation rationnelle de $G_{\mathbb{R}}$, l'isomorphisme ($\star$) permet d'en déduire une représentation Π de $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$.

La fonction trace $(\Pi(g) A)$ sur $G_{\mathbb{C}}$ est alors invariante par σ-conjugaison et propre pour $Z(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$: si χ_π est le caractère infinitésimal de π, trace $(\Pi(g) A)$ a pour caractère $\chi_\pi \circ N$. De plus, trace $(\Pi(g) A) = \text{trace } \pi(g^2)$ pour $g \in G_{\mathbb{R}}$.

Nous pouvons maintenant calculer l'action sur les distributions invariantes des parties radiales des opérateurs de $Z(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$. Soit $q : G_{\mathbb{R}} \to G_{\mathbb{R}}$ l'application carré. Rappelons qu'un ouvert de $G_{\mathbb{R}}$ est dit *complètement invariant* s'il est invariant et contient la partie semi-simple de chacun de ses éléments [27]. On verra (lemme 7.6) qu'il existe un voisinage complètement invariant U de 1 dans $G_{\mathbb{R}}$, qui s'envoie sous q par un difféomorphisme sur $V \subset G_{\mathbb{R}}$. Soit alors q_* l'application induite entre opérateurs différentiels sur U et V : si f est une fonction sur V, $F = f \circ q$ sa transformée sur U, D un opérateur différentiel sur U :

$$(DF)(x) = (q_* D)(f)(qx).$$

THÉORÈME 4.7. — *Soit* $z \in Z(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$, $N : Z(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}) \to Z(\mathfrak{g}_{\mathbb{R}})$.

Soit U *un voisinage ouvert complètement invariant de* 1 *dans* $G_{\mathbb{R}}$ *restreint auquel q est un difféomorphisme.*

Soit $\Delta(z)$ *une partie radiale* $G_{\mathbb{R}}$-*invariante de z sur* U *pour la* σ-*conjugaison.*

Si t est une distribution $G_{\mathbb{R}}$-*invariante sur* U :

$$\Delta(z) \,.\, t = (q_*)^{-1} (N z) \,.\, t.$$

Nous appliquons ceci aux distributions invariantes gauches sur $G_{\mathbb{C}}$. Si T est une telle distribution, elle admet, d'après le *théorème* 4.4, une « restriction » σ_T à U. D'après le *théorème* 4.5, si T est distribution propre de $Z(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$, σ_T est distribution propre de $\Delta(z)$; de plus d'après le *théorème* 4.4 (iii) σ_T est invariante. D'après le *théorème* 4.7, $\sigma_T \circ q^{-1}$ est alors une distribution propre invariante de $Z(\mathfrak{g}_{\mathbb{R}})$ sur V (la norme $N : Z(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}) \to Z(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$ est surjective !). Le théorème d'intégrabilité locale de Harish-Chandra (*cf.* Varadarajan [27], part. II, p. 58) dit qu'une distribution propre de $Z(\mathfrak{g}_{\mathbb{R}})$, invariante, sur un ouvert complètement invariant, est donnée par une fonction localement intégrable. En particulier, $\sigma_T \circ q^{-1}$ est localement intégrable. D'après le *théorème* 4.4 (ii), il en est de même pour T au voisinage de U, ou de tout point σ-conjugué à un point de U. En définitive :

THÉORÈME 4.8. — *Soit* U *un voisinage ouvert complètement invariant de* 1 *dans* $G_{\mathbb{R}}$, $U \subset \mathscr{U}$, *sur lequel l'application carré est injective. Soit* $V = q(U)$.

Soit $W = \bigcup_{g \in G_{\mathbb{C}}} (g U g^{-\sigma})$.

Si T *est une distribution sur* W, *invariante par* σ*-conjugaison, propre pour* $Z(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$, *elle est donnée par une fonction localement intégrable sur* W. *Cette fonction est de la forme* $T(gug^{-\sigma})=t(u^2)=t\circ q(u)$, *où* t *est une fonction localement intégrable sur* V, *qui est une distribution propre invariante de* $Z(\mathfrak{g}_{\mathbb{R}})$. *Si* $\chi: Z(\mathfrak{g}_{\mathbb{R}})\to\mathbb{C}$ *est le caractère central de* t, *le caractère central de* T *est* $\chi\circ N: Z(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})\to\mathbb{C}$.

En particulier, le relèvement à $G_{\mathbb{R}}$ est donc toujours possible au voisinage de l'unité pour une distribution σ-invariante propre. Dans le cas des relèvements donnés par la fonctorialité, il faudra vérifier qur t se prolonge en une distribution sur $G_{\mathbb{R}}$.

Démonstration du théorème 4.7. — Soit U complètement invariant, $q: U \xrightarrow{\approx} V$ comme indiqués. Soit π une représentation rationnelle de $G_{\mathbb{R}}$ admettant un relèvement Π à $G_{\mathbb{C}}$. La fonction $g\mapsto \operatorname{trace}(\Pi(g)A)$ est alors fonction propre de $Z(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$: on a :

$$z(\operatorname{trace}(\Pi(g)A))=(\chi_\pi\circ N)(z)\operatorname{trace}(\Pi(g)A),$$

donc si $g\in G_{\mathbb{R}}$:

$$\Delta(z)(\operatorname{trace}\pi(g^2))=\chi_\pi(Nz)\operatorname{trace}\pi(g^2).$$

Sur V, ceci se traduit par :

$$[q_*(\Delta(z))]\operatorname{trace}\pi(h)=\chi_\pi(Nz)\operatorname{trace}\pi(h),$$

c'est-à-dire, puisque $u\in Z(\mathfrak{g}_{\mathbb{R}})$ agit précisément par $\chi_\pi(u)$ sur les coefficients de π :

$$[q_*(\Delta(z))]\operatorname{trace}\pi(h)=(Nz)\operatorname{trace}\pi(h).$$

En tout point semi-simple régulier $x\in V$, les fonctions de la forme $\operatorname{trace}\pi(h)$ pour les représentations rationnelles, suffisent à engendrer l'algèbre des fonctions invariantes au voisinage de x [5].

On en déduit que si f est une fonction C^∞ invariante sur V :

$$([q_*(\Delta(z))-Nz]f)(h)=0,$$

pour tout h semi-simple régulier, et donc par continuité pour tout h. Un théorème fondamental d'Harish-Chandra dit qu'un opérateur différentiel analytique invariant sur un ouvert complètement invariant $\Omega\subset G_{\mathbb{R}}$, annulant toutes les fonctions C^∞ invariantes sur Ω, annule toutes les distributions invariantes sur Ω (*cf.* Varadarajan [27], Part II, p. 50). Appliqué à $q_*(\Delta(z))-Nz$ sur V (qui est complètement invariant), ceci termine la démonstration. □

3. Intégrabilité au voisinage des éléments (σ)-semi-simples. — Rappelons (chap. 2) que $\tilde{G}_{\mathbb{C}}=G_{\mathbb{C}}\rtimes \operatorname{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R})$ est muni de sa structure naturelle de groupe linéaire algébrique réel.

---

[5] Au moins pour G_{der} simplement connexe (Steinberg [23]). En général, prendre x fortement régulier.

Un élément (g, σ) de $\tilde{G}_{\mathbb{C}}$ est alors semi-simple si $\mathrm{Ad}(g) \circ \sigma$ est un endomorphisme semi-simple de $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^0$ ou, ce qui revient au même, si $gg^\sigma \in G_{\mathbb{C}}$ est semi-simple. Dans ce cas :

g est *σ-semi-simple*.

Soit g σ-semi-simple. Le σ-commutant de g est le groupe, commutant de g pour la conjugaison gauche :

$$ {}^\sigma G_g = \{h \in G_{\mathbb{C}};\ hgh^{-\sigma} = g\}. $$

On a vu (chap. 2, § 1) que ${}^\sigma G_g$ est un sous-groupe réductif (défini sur $\mathbb{R}$) de $H_{\mathbb{R}} = \mathrm{Res}_{\mathbb{C}/\mathbb{R}}(G_{\mathbb{C}})$. L'ensemble de ses points complexes s'identifie à $(G_{\mathbb{C}})^{gg^\sigma}$; la conjugaison complexe dans $(G_{\mathbb{C}})^{gg^\sigma}$, donnée par la forme réelle ${}^\sigma G_g$, est l'application $h \to (\mathrm{Ad}(g) \circ \sigma)\, h = \mathrm{Ad}(g)\, h^\sigma$.

En particulier, si gg^σ est central dans $G_{\mathbb{C}}$, on a $G_{\mathbb{C}}^{gg^\sigma} = G_{\mathbb{C}}$ et ${}^\sigma G_g$ est une forme intérieure (tordue par g) de $G_{\mathbb{R}}$. Si G est quasi déployé, on peut, à conjugaison près, supposer que $gg^\sigma \in G_{\mathbb{R}}$ (chap. 2); ${}^\sigma G_g$ est alors une forme intérieure de $(G_{\mathbb{R}})^{gg^\sigma}$. Si g est σ-régulier, les composantes connexes de ${}^\sigma G_g$ et $G_{\mathbb{C}}^{gg^\sigma}$ sont des tores.

Si $h \in {}^\sigma G_g$, $\mathrm{Ad}(h)$ commute à l'action de $\mathrm{Ad}(g) \circ \sigma$. Décomposons $\mathscr{G}_{\mathbb{C}}$ suivant les espaces propres de $\mathrm{Ad}(g) \circ \sigma : \mathfrak{g}_{\mathbb{C}} = {}^\sigma\mathfrak{g}_g \oplus \mathfrak{q}$, où $\mathfrak{q}$ est la somme des espaces associés aux valeurs propres différentes de 1.

On définit $\delta_g(h) = \det(1 - \mathrm{Ad}(h).\mathrm{Ad}(g) \circ \sigma)|_{\mathfrak{q}}$, pour $h \in {}^\sigma G_g$.

LEMME 4.9. — *L'application* $G_{\mathbb{C}} \times {}^\sigma G_g \to G_{\mathbb{C}}$:

$$ (x, h) \to xhgx^{-\sigma} $$

est submersive en tout point (x, h) *tel que* $\delta_g(h) \neq 0$.

On peut supposer $x = 1$. On vérifie que la différentielle de l'application est donnée par :

$$ (X, H) \to \mathrm{Ad}(h) H + (1 - \mathrm{Ad}(hg) \circ \sigma) X, $$

$$ \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^0 \times {}^\sigma\mathfrak{g}_g^0 \to \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^0. \quad \square $$

La σ-conjugaison est donc transverse sur l'ouvert $\mathscr{U}$ de ${}^\sigma G_g$ défini par $\delta_g(h) \neq 0$; c'est un voisinage complètement invariant (car défini par les valeurs propres d'une représentation rationnelle) de l'unité dans ${}^\sigma G_g$.

Remarquons que l'application carré de ${}^\sigma G_g$ est submersive sur $\mathscr{U}$. En effet, le sous-espace $i\,{}^\sigma\mathfrak{g}_g^0$ de $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^0$ (le produit par $i = \sqrt{-1}$ est intérieur à $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^0$) est égal à l'espace propre de (-1) pour $\mathrm{Ad}(g) \circ \sigma$. Donc, si $\delta_g(h) \neq 0$, on a *a fortiori* $\det(1 + \mathrm{Ad}(h))|_{i\,{}^\sigma\mathfrak{g}_g^0} \neq 0$, i. e. $\det(1 + \mathrm{Ad}(h))|_{{}^\sigma\mathfrak{g}_g^0} \neq 0$, ce qui veut dire que l'application carré est régulière en h (prop. 4.6). $\square$

Nous cherchons maintenant à calculer l'action des parties radiales des opérateurs de $Z(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$ sur les fonctions invariantes sur ${}^\sigma G_g$, pour le plongement de ${}^\sigma G_g$ dans $G_{\mathbb{C}}$ donné par $h \to hg$. Remarquons que la restriction à ${}^\sigma G_g . g$ d'une distribution σ-invariante sur $G_{\mathbb{C}}$ est invariante d'après le théorème 4.4 (iii), puisque :

$$ x(hg)x^{-\sigma} = (xhx^{-1})\, g, \qquad x \in {}^\sigma G_g. $$

Pour simplifier, nous supposons dans ce qui suit que G est quasi déployé sur $\mathbb{R}$. Par ailleurs, remarquons que le groupe $G_{\mathbb{C}}^{gg^\sigma}$ pourrait ne pas être connexe comme groupe de Lie ou, ce qui revient au même, comme groupe algébrique. Par conséquent, il n'est pas évident que la théorie des caractères de Harish-Chandra s'applique au groupe (réductif réel) ${}^\sigma G_g$. Nous notons ${}^\sigma G_g^0$ (l'ensemble des points réels de) sa composante connexe algébrique; l'ensemble des points complexes de ${}^\sigma G_g^0$ est donc la composante connexe de $G_{\mathbb{C}}^{gg^\sigma}$; ${}^\sigma G_g^0$ est alors un groupe de classe $\mathscr{H}$ (*cf.* Varadarajan [27], Part II, p. 16) auquel on peut appliquer les résultats de Harish-Chandra. Nous notons maintenant $\mathscr{U}$ l'ouvert de ${}^\sigma G_g^0$ défini par $\delta_g \neq 0$. Soit q l'application carré de ${}^\sigma G_g^0$; q_* désigne l'application induite sur les opérateurs différentiels (voir l'énoncé du théorème 4.7).

Nous avons besoin de composer la norme d'extension de corps (sur les centres des algèbres enveloppantes) avec les homomorphismes de Harish-Chandra. On peut le faire de la façon suivante : il existe des isomorphismes évidents :

$$\varepsilon: \quad Z({}^\sigma\mathfrak{g}_g) \cong Z((\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^{gg^\sigma})^0),$$
$$\iota: \quad Z(\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}) \cong Z(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^0),$$

où $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^0$, $(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^{gg^\sigma})^0$ sont considérées comme des algèbres de Lie complexes. On a un homomorphisme de Harish-Chandra $\varphi: Z((\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^0) \to Z((\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^{gg^\sigma})^0)$ et l'application norme $N: Z(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}) \to Z(\mathfrak{g}_{\mathbb{R}})$.

Par composition :

$$Z(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}) \underset{N}{\rightarrow} Z(\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}) \underset{\iota}{\cong} Z(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^0) \underset{\varphi}{\rightarrow} Z((\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^{gg^\sigma})^0) \underset{\varepsilon^{-1}}{\cong} Z({}^\sigma\mathfrak{g}_g),$$

on obtient une application qui sera simplement notée $\varphi \circ N$.

Si $\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}^0 \subset (\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^{gg})^0 \subset \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^0$ est une algèbre de Cartan, ε identifie $Z({}^\sigma\mathfrak{g}_g)$ à $S(\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}^0)^{W_1}$, où $W_1 = W((\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^{gg^\sigma})^0, \mathfrak{h}_{\mathbb{C}}^0)$; l'image de $\varphi \circ N$ s'identifie alors à $S(\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}^0)^W$, $W = W(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^0, \mathfrak{h}_{\mathbb{C}}^0)$. On a un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} Z({}^\sigma\mathfrak{g}_g) & \xleftarrow[\varphi]{} & Z(\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}) \\ \uparrow N & & \uparrow N \\ Z(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^{gg^\sigma}) & \xleftarrow[\varphi]{} & Z(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}) \end{array}$$

Si $x \in G_{\mathbb{C}}^{gg^\sigma}$, x normalise $(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^{gg^\sigma})^0$ et opère donc sur $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^0/(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^{gg^\sigma})^0$, par un automorphisme complexe. Pour $h \in {}^\sigma G_g$, posons :

$$\nu_g(h) = \det(1 - \mathrm{Ad}(hgg^\sigma))|_{\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^0/(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^{gg^\sigma})^0},$$

où det désigne le déterminant (complexe) de cet endomorphisme.

THÉORÈME 4.10. — *Soit* $g \in G_{\mathbb{C}}$ *σ-semi-simple*, ${}^\sigma G_g^0$, $\mathscr{U} \subset {}^\sigma G_g^0$, ν_g *comme ci-dessus. On plonge* ${}^\sigma G_g^0$ *dans* $G_{\mathbb{C}}$ *par* $h \to hg$.

Soit $z \in Z(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$, $\varphi \circ N: Z(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}) \to Z({}^\sigma\mathfrak{g}_g)$.

Soit $\mathscr{V} \subset \mathscr{U}$ un voisinage complètement invariant de 1 *dans* ${}^{\sigma}G_g^0$ *tel que* $q : \mathscr{V} \to \mathscr{W}$ *soit un difféomorphisme.*

(i) *Soit* $\Delta(z)$ *une partie radiale* ${}^{\sigma}G_g^0$*-invariante de z sur* $\mathscr{V}$ *pour la* σ*-conjugaison. Si t est une distribution* ${}^{\sigma}G_g^0$*-invariante sur* $\mathscr{V}$;

$$q_*(\Delta(z)).\, t = |\nu_g|^{-1/2} (\varphi \circ N)(z)(|\nu_g|^{1/2}.\, t).$$

(ii) *Si de plus g est* σ*-régulier,* $\Delta(z)$ *est uniquement défini sur* $\mathscr{V}$, *et :*

$$q_*(\Delta(z)) = |\nu_g|^{-1/2} (\varphi \circ N)(z) \circ |\nu_g|^{1/2}.$$

COROLLAIRE 4.11. — *Soit* T *une distribution propre, invariante par* σ*-conjugaison, sur* $G_{\mathbb{C}}$.

(i) *Si g est* σ*-semi-simple,* T *est donnée au voisinage de g par une fonction localement intégrable.*

(ii) *Si g est* σ*-régulier,* T *est analytique au voisinage de g.*

Démonstration du corollaire. — Pour (i), on procède comme pour le théorème 4.8. Tout d'abord, il existe des parties radiales ${}^{\sigma}G_g^0$-invariantes : procéder comme après la proposition 4.6, en utilisant le fait que l'application $\mathfrak{q} \times {}^{\sigma}G_g^0 \to G_{\mathbb{C}}$ donnée par $(X, h) \mapsto \exp(X)\, hg \exp(-\sigma X)$ est submersive en $(0, u)$ pour $u \in \mathscr{U}$; de plus $\mathfrak{q}$ est évidemment stable sous ${}^{\sigma}G_g^0$. Soit $\mathscr{V}, \mathscr{W}$ comme dans le théorème 4.10.

Sur $\mathscr{W}$, $t = \sigma_T \circ q^{-1}$ est alors une distribution invariante qui satisfait :

$$X(z)\, t(h) = |\nu_g(h)|^{-1/2} (\varphi \circ N)(z)(|\nu_g(h)|^{1/2}\, t(h)),$$

pour tout $z \in Z(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$, X étant le caractère central de T. Si $s(h) = |\nu_g(h)|^{1/2}\, t(h)$, on a donc $(\varphi \circ N)(z)\, s = X(z)\, s$, pour $z \in Z(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$: s est distribution propre de l'image de $\varphi \circ N$ dans $Z({}^{\sigma}\mathfrak{g}_g)$.

Comme $S(\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}^0)^{W_1}$ est un module libre de rang fini sur $S(\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}^0)^W$, avec les notations précédant le théorème 4.10, on déduit que s est $Z({}^{\sigma}\mathfrak{g}_g)$-finie. Le théorème d'intégrabilité locale de Harish-Chandra s'applique alors à s; on va voir que ν_g est analytique et $\neq 0$ sur $\mathscr{U}$ (c'est évidemment vrai en $h = 1$ ce qui suffirait ici), donc t est donnée par une fonction localement intégrable, donc il en est de même pour T d'après 4.4 (ii). Si de plus g est σ-régulier, ${}^{\sigma}G_g^0$ est un tore et il est clair que l'image de $\varphi \circ N$ contient des éléments elliptiques de $Z({}^{\sigma}\mathfrak{g}_g) \cong S({}^{\sigma}\mathfrak{g}_g)$ identifié aux opérateurs différentiels à coefficients constants sur ${}^{\sigma}G_g^0$. $\square$

Nous démontrons maintenant le théorème 4.10. Supposons d'abord g σ-régulier.

D'après le chapitre 2 et notre hypothèse sur G, on peut choisir *g réel*, à σ-conjugaison près; ${}^{\sigma}G_g^0$ est alors un tore de $G_{\mathbb{R}}$. Si Π est une représentation de dimension finie de $G_{\mathbb{C}}$ relevant π, on a :

$$\text{trace}\,(\Pi(hg)\, A) = \text{trace}\, \pi\, (h^2 g g^{\sigma}), \qquad h \in {}^{\sigma}G_g^0.$$

Comme gg^{σ} commute à $(G_{\mathbb{C}}^{gg^{\sigma}})^0$, qui est un tore maximal de $G_{\mathbb{C}}$, gg^{σ} est dans la composante neutre; donc gg^{σ} appartient au tore réel ${}^{\sigma}G_g^0$.

On raisonne alors comme dans la démonstration du théorème 4.7 : pour $z \in Z(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$,

$$z(\operatorname{trace}(\Pi(hg)A)) = (\chi_\pi \circ N)(z) \operatorname{trace}(\Pi(h)A) \quad (^6),$$

donc si $\Delta(z)$ est une partie radiale :

$$\Delta(z)(\operatorname{trace}\pi(h^2 gg^\sigma)) = \chi_\pi(Nz) \operatorname{trace}\pi(h^2 gg^\sigma),$$

soit sur $\mathscr{W}$:

$$[q_*(\Delta(z))] \operatorname{trace}\pi(hgg^\sigma) = \chi_\pi(Nz) \operatorname{trace}\pi(hgg^\sigma).$$

D'autre part, si $h_1 \in {}^\sigma G_g^0$, h_1 régulier :

$$\operatorname{trace}\pi(h_1) = \varepsilon \frac{\Sigma_{s\in W} \varepsilon(s) h_1^{s\lambda}}{|\nu(h_1)|^{1/2}}, \qquad \varepsilon = \pm 1,$$

où W est le groupe de Weyl de $G_{\mathbb{C}}$, $\lambda \in {}^\sigma \mathfrak{g}_g^*$ représente χ_π *via* l'homomorphisme de Harish-Chandra, et $\nu(h_1)$ est le facteur réel :

$$\nu(h_1) = \det(1 - \operatorname{Ad} h_1)|_{\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}/{}^\sigma\mathfrak{g}_g}.$$

On en déduit qu'au voisinage d'un point h tel que hgg^σ soit régulier :

$$|\nu_g(h)|^{-1/2} \circ \varphi(Nz) \circ |\nu_g(h)|^{1/2} \operatorname{trace}\pi(hgg^\sigma) = \chi_\pi(Nz) \operatorname{trace}\pi(hgg^\sigma),$$

donc :

$$[q_*(\Delta(z)] \operatorname{trace}\pi(hgg^\sigma) = |\nu_g(h)|^{-1/2} \varphi(Nz) \circ |\nu_g(h)|^{1/2} \operatorname{trace}\pi(hgg^\sigma),$$

pour tout π admettant un relèvement à $G_{\mathbb{C}}$.

Comme de plus, au voisinage de h tel que hgg^σ est régulier, les fonctions trace $\pi(hgg^\sigma)$ pour les π qui se relèvent à $G_{\mathbb{C}}$, engendrent l'anneau des germes de fonctions C^∞, on en déduit l'expression cherchée pour $\Delta(z)$ et celui-ci est bien défini. Pour conclure la démonstration du théorème 4.10 (ii) il nous reste à montrer :

LEMME 4.12. — *Si* $y \in \mathscr{U}$, $h = y^2$, hgg^σ *est régulier, i. e. :*

$$0 \neq \nu(hgg^\sigma) = \det(1 - \operatorname{Ad}(hgg^\sigma))|_{\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}/{}^\sigma\mathfrak{g}_g},$$

Preuve. — Par hypothèse, on a $\delta_g(y) \neq 0$. On peut écrire la décomposition de $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}^0$ sous l'action du tore ${}^\sigma\mathfrak{g}_g^0$:

$$\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}^0 = {}^\sigma\mathfrak{g}_g^0 \oplus \mathfrak{q}_1^0,$$

d'où :

$$\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^0 = {}^\sigma\mathfrak{g}_g^0 \oplus (\mathfrak{q}_1^0 + i\,{}^\sigma\mathfrak{g}_g^0 + i\,\mathfrak{q}_1^0) = {}^\sigma\mathfrak{g}_g^0 + \mathfrak{q}^0;$$

alors :

$$\delta_g(y) = \det(1 - \operatorname{Ad}(y)\operatorname{Ad}(g) \circ \sigma)|_{\mathfrak{q}^0},$$

(6) Les dérivations sont par rapport à h.

donc :

$$\delta_g(y)=\det(1-\mathrm{Ad}(y)\,\mathrm{Ad}(g))|_{\mathfrak{q}_1^0}\det(1+\mathrm{Ad}(y)\,\mathrm{Ad}\,g)|_{\mathfrak{q}_1^0}\det(1+\mathrm{Ad}\,y)|_{{}^\sigma\mathfrak{g}_g^0}$$
$$=2^l\det(1-\mathrm{Ad}(y^2)\,\mathrm{Ad}(gg^\sigma))|_{\mathfrak{q}_1^0}=2^l\,\nu(hgg^\sigma),$$

où $l=\mathrm{rang}(\mathrm{G})$. □

Nous démontrons maintenant la partie (i) du théorème. Soit $\mathscr{V}$, $\mathscr{W}$ comme auparavant. Si φ est une fonction C^∞, localement invariante par ${}^\sigma\mathrm{G}_g^0$ sur un voisinage d'un point $x\in\mathscr{V}$, on peut la prolonger (par submersivité) en une fonction C^∞, localement invariante par σ-conjugaison, sur un voisinage de xg dans $\mathrm{G}_\mathbb{C}$. Soit $\mathscr{V}_1$ l'ouvert de $\mathscr{V}$ formé des x tels que xg soit σ-régulier, i. e. que x^2gg^σ soit régulier. $\mathscr{V}_1$ est dense dans $\mathscr{V}$.

Si $x\in\mathscr{V}_1$, $h\in{}^\sigma\mathrm{G}_g^0$:

$$hxgh^{-\sigma}=xg \text{ équivaut à } hxh^{-1}=x;$$

et donc ${}^\sigma\mathrm{G}_{xg}\cap{}^\sigma\mathrm{G}_g^0$ est le commutant de x dans ${}^\sigma\mathrm{G}_g^0$.

Comme la composante neutre de ${}^\sigma\mathrm{G}_{xg}$ est un tore, ce commutant doit avoir un tore pour composante neutre : x est semi-simple régulier dans ${}^\sigma\mathrm{G}_g^0$, et, pour des raisons de dimension, ${}^\sigma\mathrm{G}_{xg}^0$ s'identifie à la composante neutre du commutant de x dans ${}^\sigma\mathrm{G}_g^0$. Soit $\mathscr{W}_1=q(\mathscr{V}_1)$.

Notations. — $\mathrm{T}={}^\sigma\mathrm{G}_{xg}^0$, $\mathrm{H}={}^\sigma\mathrm{G}_g^0$:

— $\Delta'_{\mathrm{G}_\mathbb{C}/\mathrm{T}}(z)$ est la partie radiale de $z\in\mathrm{Z}(\mathfrak{g}_\mathbb{C})$ sur $\mathrm{T}g\subseteqq\mathrm{G}_\mathbb{C}$, transportée par l'application carré $q:\mathrm{T}\to\mathrm{T}$;

— $\Delta'_{\mathrm{G}_\mathbb{C}/\mathrm{H}}(z)$ est défini de façon analogue pour $\mathrm{H}g\subseteqq\mathrm{G}_\mathbb{C}$ (sur un ouvert où q est un difféomorphisme);

— $\Delta_{\mathrm{H}/\mathrm{T}}(\mathrm{D})$ est la partie radiale sur T', l'ensemble des éléments réguliers de T, d'un opérateur différentiel D sur H, pour la conjugaison dans H.

Soit $x\in\mathscr{V}_1$. On peut trouver un voisinage ouvert complètement invariant (i. e. invariant : il s'agit d'éléments semi-simples) $\mathscr{W}_2$ de x^2 dans $\mathscr{W}$ formé d'éléments y tels que ygg^σ soit régulier; $\mathscr{V}_2=q^{-1}\mathscr{W}_2$ est un voisinage de x, complètement invariant, formé d'éléments u tels que ug est σ-régulier.

Soit $\mathrm{T}g\subseteqq\mathrm{H}g\subset\mathrm{G}_\mathbb{C}$. Si φ est une fonction C^∞ sur un voisinage de xg dans $\mathrm{T}g$, on peut la prolonger localement en une fonction C^∞, invariante par conjugaison gauche, sur $\mathrm{G}_\mathbb{C}$: il suffit de remarquer que pour ξ au voisinage de x, on a une somme directe d'espaces tangents :

$$\mathrm{T}_{\xi g}(\mathrm{G}_\mathbb{C})=\mathrm{T}_{\xi g}(\mathrm{T}g)\oplus\mathrm{T}_{\xi g}(\mathrm{G}_\mathbb{C}\,\xi g).$$

Soit $\tilde\varphi$ cette fonction, définie sur un voisinage de $x.g$ dans $\mathrm{G}_\mathbb{C}$ qu'on peut supposer invariant. Par restriction, $\tilde\varphi|_{\mathrm{H}.g}$ est alors une fonction C^∞ invariante sur un voisinage de x dans H. Posons :

$$\varphi_\mathrm{T}(t^2)=\varphi(tg),\qquad t^2\in\mathscr{W}_2,$$

i. e. :

$$\varphi_\mathrm{T}(t)=\varphi(q^{-1}t.g),\qquad t\in\mathscr{W}_1\cap\mathrm{T}.$$

De même :

$$\varphi_H(u)=\tilde{\varphi}(q^{-1}u.g), \qquad u\in\mathscr{W}_2.$$

Par définition, si $\Delta'_{G_{\mathbb{C}}/H}$ est une partie radiale comme indiqué :

$$(\star) \qquad \Delta'_{G_{\mathbb{C}}/H}(z)\,\varphi_H(u)=(z\,\tilde{\varphi})(q^{-1}u.g).$$

De même, si $\Delta'_{G_{\mathbb{C}}/T}$ est la partie radiale (celle-ci unique d'après ce qui précède) par rapport à T :

$$(\star\star) \qquad \Delta'_{G_{\mathbb{C}}/T}(z)\,\varphi_T(t)=(z\,\tilde{\varphi})(q^{-1}t.g).$$

En particulier, si $t\in T$, on a d'après $(\star)$:

$$(z\,\tilde{\varphi})(q^{-1}t.g)=(\Delta'_{G_{\mathbb{C}}/H}(z)\,\varphi_H)(t)$$

et puisque φ_H est une fonction H-invariante prolongeant φ_T :

$$(z\,\tilde{\varphi})(q^{-1}t.g)=[(\Delta_{H/T}\circ\Delta'_{G_{\mathbb{C}}/H})(z)\,\varphi_T](t).$$

Comparant avec $(\star\star)$ et remarquant que φ_T peut être, au voisinage de t, n'importe quelle fonction C^∞, on a, au voisinage de x^2 :

$$(\star\star\star) \qquad \Delta'_{G_{\mathbb{C}}/T}(z)=\Delta_{H/T}\circ\Delta'_{G_{\mathbb{C}}/H}(z).$$

Soit $\Delta'_{1,\,G_{\mathbb{C}}/H}(z)$ l'opérateur différentiel donné par le théorème 4.10 (i). On va voir que restreint à $\mathscr{W}_2$, il vérifie aussi $(\star\star\star)$. Montrons que ceci implique le théorème. On a alors :

$$[\Delta_{H/T}\circ(\Delta'_{G_{\mathbb{C}}/H}-\Delta'_{1,\,G_{\mathbb{C}}/H})](z)=0,$$

au voisinage de x^2. Si f est une fonction sur un voisinage de x^2 assez petit, H-invariante, on a donc par définition de $\Delta_{H/T}$:

$(\Delta'-\Delta'_1)(z)f(t)=0$ pour t sur un voisinage de x^2 dans T. Comme $\Delta'(z)$ est H-invariant par hypothèse, et que $\Delta'_1(z)$ l'est aussi comme on le vérifie aisément, on voit alors que $(\Delta'-\Delta'_1)(z)f=0$ sur un voisinage de x^2 dans H. Donc $(\Delta'-\Delta'_1)(z)$ annule toutes les fonctions invariantes sur un voisinage (qu'on peut supposer invariant) de x^2 dans H.

Si $\Delta(z)$ est une partie radiale de z sur $\mathscr{U}$ comme dans le *théorème* 4.10 (i), et t une *fonction* ${}^\sigma G_g^0$-invariante, on voit donc que :

$$q_*(\Delta(z)).\,t=|\nu_g|^{-1/2}(\varphi\circ N)(z)(|\nu_g|^{1/2}\,t),$$

au voisinage des éléments $h\in\mathscr{W}$ tels que hgg^σ est régulier.

Si t est une fonction, on en déduit par continuité que cette égalité reste vraie au voisinage de tout point de $\mathscr{W}$. D'après le théorème de Harish-Chandra déjà cité à la fin du paragraphe 2, on en déduit que l'opérateur ${}^\sigma G_g^0$-invariant

$$q_*(\Delta(z))-|\nu_g|^{-1/2}\circ(\varphi\circ N)(z)\circ|\nu_g|^{1/2}$$

annule toutes les *distributions* invariantes sur $\mathcal{W}$: ceci implique la partie (i) du théorème. □

Nous devons encore vérifier que l'opérateur $\Delta'_{1,\, G_{\mathbb{C}}/H}(z)$ vérifie l'identité ($\star\star\star$) au voisinage des $h \in \mathcal{W}$ tels que hgg^σ est régulier. Par définition, $\Delta'_1(z)$ a pour expression au voisinage de h dans H :

$$\Delta'_{1,\, G_{\mathbb{C}}/H}(z) = |\nu_g|^{-1/2} (\varphi \circ N)(z) \circ |\nu_g|^{1/2}.$$

L'opérateur $(\varphi \circ N)(z)$ est dans $Z({}^\sigma\mathfrak{g}_g)$; les parties radiales de ces opérateurs sur T ont été calculées par Harish-Chandra (*cf.* Varadarajan [27], Part II, p. 53). Comme le fait de prendre les parties radiales commute avec la multiplication par la fonction invariante $|\nu_g|^{1/2}$, on obtient :

$$\Delta_{H/T} \circ \Delta'_{1,\, G_{\mathbb{C}}/H}(z) = |\nu_{H/T} \cdot \nu_g|^{-1/2} \cdot (\varphi_T \circ N)(z) \circ |\nu_{H/T} \cdot \nu_g|^{1/2}.$$

Ici :

$$\nu_{H/T}(h) = \det(1 - \mathrm{Ad}(h))|_{\mathfrak{q}_2}, \qquad h \in T,$$

où l'on a posé ${}^\sigma\mathfrak{g}_g = \mathfrak{h} = \mathfrak{t} \oplus \mathfrak{q}_2$, $\mathfrak{t}$ l'algèbre de Lie complexe de T. On désigne par $\varphi_T : Z(\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}) \to S(\mathfrak{t})$ l'homomorphisme de Harish-Chandra, on utilise le fait que $\varphi_T = \varphi_{H/T} \circ \varphi$, où $\varphi_{H/T}$ est l'homomorphisme de Harish-Chandra : $Z({}^\sigma\mathfrak{g}_g) \to S(\mathfrak{t})$. Par ailleurs, rappelons que T a été construit comme (la composante neutre du) σ-commutant de $x.g$, xg σ-régulier. La partie (ii) du théorème nous donne :

$$\Delta'_{G_{\mathbb{C}}/T}(z) = |\nu_{xg}|^{-1/2} \circ (\varphi_T \circ N)(z) \circ |\nu_{xg}|^{1/2}.$$

Pour vérifier ($\star\star\star$), nous devons donc montrer que :

$$|\nu_{H/T}(x^2 h)\, \nu_g(x^2 h)| = |\nu_{xg}(h)|,$$

pour h dans un voisinage de 1 dans T. Par définition :

$$\nu_g(x^2 h) = \det(1 - \mathrm{Ad}(hx^2 gg^\sigma))|_{\mathfrak{g}^0_{\mathbb{C}}/(\mathfrak{g}^{gg^\sigma}_{\mathbb{C}})^0}.$$
$$\nu_{xg}(h) = \det(1 - \mathrm{Ad}(hx^2 gg^\sigma))|_{\mathfrak{g}^0_{\mathbb{C}}/\mathfrak{t}^0_{\mathbb{C}}},$$

où $\mathfrak{t}^0_{\mathbb{C}}$ est l'algèbre de Lie réelle du complexifié $T_{\mathbb{C}}$ de T.

Les deux déterminants sont des déterminants complexes, pour la structure complexe de $\mathfrak{g}^0_{\mathbb{C}}$. Leur rapport est égal à :

$$\det(1 - \mathrm{Ad}(hx^2 gg^\sigma))|_{(\mathfrak{g}^{gg^\sigma}_{\mathbb{C}})/\mathfrak{t}^0_{\mathbb{C}}},$$

qui est bien égal par définition à $\nu_{H/T}(x^2 h)$ puisque $\mathrm{Ad}(gg^\sigma)$ vaut identiquement 1 sur $\mathfrak{g}^{gg^\sigma}_{\mathbb{C}}$. □

En fait, nous avons implicitement utilisé dans la démonstration l'analogue du lemme 4.12, que nous vérifions maintenant :

LEMME 4.13 (*les données sont comme dans le théorème* 4.10). — *Si* $y \in \mathcal{U}$, $h = y^2$, *on a :*

$$\nu_g(h) \underset{\mathrm{def}}{=} \det(1 - \mathrm{Ad}(hgg^\sigma))|_{\mathfrak{g}^0_{\mathbb{C}}/(\mathfrak{g}^{gg^\sigma}_{\mathbb{C}})^0} \neq 0.$$

Démonstration. — Comme partout ailleurs dans ce paragraphe, on peut supposer gg^σ *réel. Soit* $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^0 = (\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^{gg^\sigma})^0 \oplus \mathfrak{q}_2^0$ la décomposition de $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^0$ sous l'action de gg^σ; $\mathfrak{q}_2^0$ est aussi le supplémentaire des espaces (± 1) dans la décomposition de $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^0$ sous $\mathrm{Ad}(g) \circ \sigma$; $\mathfrak{q}_2^0$ est σ-stable car σ commute à $\mathrm{Ad}(gg^\sigma)$, et aussi $(\mathrm{Ad}(g) \circ \sigma)$-stable. Si $y \in {}^\sigma\mathrm{G}_g$, on vérifie facilement que :

$$(\mathrm{Ad}(y)\,\mathrm{Ad}(g) \circ \sigma)^2 = \mathrm{Ad}(y^2)\,\mathrm{Ad}(gg^\sigma).$$

Si $\nu_g(h) = \nu_g(y^2) = 0$, on a :

$$\det{}_{\mathfrak{q}_2^0}(1 - \mathrm{Ad}(hgg^\sigma)) = \det{}_{\mathfrak{q}_2^0}((1 - \mathrm{Ad}(yg) \circ \sigma)(1 + Ad(yg) \circ \sigma)) = 0.$$

Rappelons (*lemme* 4.9) que $\mathscr{U}$ est défini par $\delta_g(y) \neq 0$:

$$\delta_g(y) = \det(1 - \mathrm{Ad}(y)\,\mathrm{Ad}\,g \circ \sigma)\,|_{\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^0/{}^\sigma\mathfrak{g}_g^0},$$

Si $\nu_g(y^2) = 0$, on doit avoir :

$$\mathrm{Ad}(y)\,\mathrm{Ad}(g)\,\sigma\,\mathrm{X} = \pm\,\mathrm{X} \quad \text{pour un } \mathrm{X} \in \mathfrak{q}_2^0;$$

si l'on a le signe $(+)$, ceci implique évidemment $\delta_g(y) = 0$; sinon, on remarque qu'en posant $\mathrm{Y} = i\mathrm{X} \in \mathfrak{q}_2^0$ (la multiplication par i est intérieure à $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^0$), on obtient de nouveau $\mathrm{Ad}(y)\,\mathrm{Ad}(g)\,\sigma\,\mathrm{Y} = \mathrm{Y}$. □

4. Fin de la démonstration du théorème 4.2. — Avec les notations du théorème 4.2, nous avons montré que T est localement intégrable au voisinage de tous les points semi-simples de $\mathrm{G}_{\mathbb{C}} \times \{\sigma\}$, et analytique au voisinage des points (σ)-réguliers. Il est clair que l'ensemble des points de $\mathrm{G}_{\mathbb{C}}$ au voisinage desquels T est localement intégrable est un ouvert de $\mathrm{G}_{\mathbb{C}}$ invariant par σ-conjugaison. Il nous suffit donc de démontrer le résultat suivant, bien connu dans le cas non tordu :

Lemme 4.14. — *Soit* F *un fermé de* $\mathrm{G}_{\mathbb{C}} \times \{\sigma\}$, $\mathrm{F} \neq \varnothing$, *invariant par conjugaison par la composante neutre* $\mathrm{G}_{\mathbb{C}} \times \{1\}$. *Alors* F *contient un élément semi-simple.*

Démonstration. — Soit (g, σ) un élément de F. Le groupe $\tilde{\mathrm{G}}_{\mathbb{C}}$ est un groupe linéaire réel, et on y dispose donc de la décomposition semi-simple-unipotent; comme un élément unipotent est dans la composante neutre (dont l'ensemble des points réels est) $\mathrm{G}_{\mathbb{C}} \times \{1\}$, cette décomposition s'écrit :

$$(g, \sigma) = (s, \sigma)(n, 1) = (n, 1)(s, \sigma);$$

(s, σ) est semi-simple et on doit avoir :

$$(sn^\sigma, \sigma) = (ns, \sigma) \text{ c'est-à-dire } n \in {}^\sigma\mathrm{G}_s.$$

Montrons que (s, σ) est dans l'adhérence de l'orbite de (g, σ).

Le résultat analogue appliqué à n dans le groupe réductif ${}^\sigma\mathrm{G}_s$, ou sa composante neutre, nous donne une suite (x_i) d'éléments de ${}^\sigma\mathrm{G}_s$ tels que $x_i n x_i^{-1} \to 1$.

On a alors :

$$(x_i, 1)(g, \sigma)(x_i^{-1}, 1)=(x_i, 1)(s, \sigma)(x_i^{-1}, 1)(x_i n x_i^{-1}, 1) =(s, \sigma)(x_i n x_i^{-1}, 1) \to (s, \sigma). \quad \square$$

Appliqué au complément de l'ouvert maximal où T est localement intégrable, le lemme montre que celui-ci doit être vide, ce qui termine la démonstration du théorème. $\square$

5. Croissance des distributions propres tempérées invariantes par conjugaison gauche

1. Soit T une distribution propre sur $G_{\mathbb{C}}$, invariante par σ-conjugaison. D'après les résultats du chapitre 4, T est donnée sur les éléments σ-réguliers par une fonction analytique. Par ailleurs (chap. 2), les classes de σ-conjugaison d'éléments σ-réguliers sont paramétrées par des éléments des sous-groupes de Cartan de la forme intérieure quasi-déployée de $G_{\mathbb{R}}$.

Rappelons que T est dite *tempérée* si elle est continue pour la topologie induite sur $C_c^{\infty}(G_{\mathbb{C}})$ par les semi-normes définissant l'espace de Schwartz $\mathscr{S}(G_{\mathbb{C}})$, c'est-à-dire les semi-normes données par :

$$f \mapsto \operatorname*{Sup}_{G_{\mathbb{C}}} (1+\sigma(x))^r \, \Xi(x)^{-1} \, |(u \star f \star v)(x)|,$$

pour tout $r \geqq 0$, $u, v \in U(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$. Ici $\sigma(x)$ est essentiellement la distance entre o et $x.o$ pour un point o de l'espace symétrique $G_{\mathbb{C}}/U$ (*cf.* Warner [30], II, 8.1.2); $\Xi(x)$ est la fonction sphérique élémentaire sur $G_{\mathbb{C}}$ de caractère central trivial (*cf.* [30], II,8.3).

Le but de ce chapitre est d'estimer, pour T tempérée, la croissance de la fonction représentant T sur les éléments σ-réguliers. Si $g \in G_{\mathbb{C}}$, posons :

$$\det_{\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}} (\operatorname{Ad} g \circ \sigma - (1+T)) = T^l G_{\sigma}(g) \; mod \, T^{l+1},$$

où $l = \operatorname{rang}(G)$ (*cf.* chap. 2); l'élément g est σ-régulier si et seulement si $D_{\sigma}(g) \neq 0$. Dans ce cas, si le tore réel $H_{\mathbb{R}} \subset G_{\mathbb{C}}$ est le σ-commutant de g, $\mathfrak{h}$ son algèbre de Lie :

$$D_{\sigma}(g) = \det_{\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}/\mathfrak{h}} (\operatorname{Ad} g \circ \sigma - 1).$$

Nous allons démontrer les deux théorèmes suivants, tout-à-fait analogues aux résultats connus dans le cas « classique » d'une distribution invariante.

THÉORÈME 5.1. — *Soit* T *une distribution invariante par* σ-*conjugaison sur* $G_{\mathbb{C}}$, *distribution propre de* $Z(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$. *Alors, si* T *est tempérée, il existe* $C>0$, $m>0$ *tels que :*

$$|T(x) \leqq C \, |D_{\sigma}(x)|^{-1/2} (1+\sigma(x))^m,$$

pour tout x σ-*régulier.*

Rappelons que si $X : Z(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}) \to \mathbb{C}$ est le caractère central de T, X est de la forme $\chi \circ N$, où χ est un caractère de $Z(\mathfrak{g}_{\mathbb{R}})$.

THÉORÈME 5.2. — *Si de plus χ est régulier, on a une majoration de la forme* $|T(x)| \leqq C|D_\sigma(x)|^{-1/2}$, *$x$ σ-régulier.*

2. La démonstration imite celle de Harish-Chandra dans le cas « classique », nous suivons l'exposé de Warner [30], II, théorème 8.3.8.2).

Nous groupons ici les résultats préparatoires.

Tout d'abord, on vérifie facilement qu'on peut se ramener à G quasi déployé. Nous faisons maintenant cette hypothèse; en particulier les sous-groupes de Cartan de $G_{\mathbb{R}}$ contiennent des représentants de toutes les classes de σ-conjugaison σ-régulières. Il suffit de démontrer les majorations du théorèmes 5.1 sur chacune des composantes (qui sont en nombre fini) de l'ensemble des éléments σ-réguliers de chaque sous-groupe de Cartan $H_{\mathbb{R}}$ de $G_{\mathbb{R}}$. On note ${}^\sigma H'_{\mathbb{C}}$ l'ensemble des éléments σ-réguliers de $H_{\mathbb{C}}$, ${}^\sigma H'_{\mathbb{R}} = {}^\sigma H'_{\mathbb{C}} \cap H_{\mathbb{R}}$.

Soit $W = W(G_{\mathbb{C}}, H_{\mathbb{C}}) = N_{G_{\mathbb{C}}}(H_{\mathbb{C}})/H_{\mathbb{C}}$ le groupe de Weyl complexe; W agit sur $H_{\mathbb{C}}$. Soit W^σ le sous-groupe des éléments qui commutent à σ : ce sont les éléments qui laissent stable $H_{\mathbb{R}} \subset H_{\mathbb{C}}$. Soit N^σ l'image inverse de W^σ par l'application $N_{G_{\mathbb{C}}}(H_{\mathbb{C}}) \to W$.

Soit $\overline{W}^\sigma = \{w \in N^\sigma/H_{\mathbb{R}} : w = w^\sigma \bmod H_{\mathbb{R}}\}$. Le groupe $\overline{W}^\sigma$ se projette sur W^σ. Soit en effet $\omega \in W^\sigma$. Si $w \in N^\sigma$ relève ω, on a $w^\sigma = ws$, $s \in H_{\mathbb{C}}$; s satisfait $ss^\sigma = 1$. Donc s définit un élément de $H^1(\mathrm{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R}), H_{\mathbb{C}})$ et comme celui-ci est représenté par les cocycles à valeurs dans $H_{\mathbb{R}}$ (lemme 2.9), on a $s = htt^{-\sigma}$, $h \in H_{\mathbb{R}}$, $t \in H_{\mathbb{C}}$, d'où $(wt)^\sigma = wth$. L'élément wt de $N^\sigma/H_{\mathbb{R}}$ est dans $\overline{W}^\sigma$ et relève ω.

Le noyau de cette projection est l'ensemble des $z \in H_{\mathbb{C}}/H_{\mathbb{R}}$ tels que $z = z^\sigma \bmod H_{\mathbb{R}}$. On vérifie facilement qu'il est isomorphe à $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^d$, où d est le rang déployé de H. On le note R. On a une suite exacte :

$$1 \to R \to \overline{W}^\sigma \to W^\sigma \to 1.$$

Le groupe $\overline{W}^\sigma$ agit à droite sur $G_{\mathbb{C}}/H_{\mathbb{R}}$, et agit sur ${}^\sigma H'_{\mathbb{R}}$ par $h \mapsto w^{-1}hw^\sigma$ (remarquer que ceci est bien défini).

PROPOSITION 5.3. — *L'application* $G_{\mathbb{C}}/H_{\mathbb{R}} \times {}^\sigma H'_{\mathbb{R}} \to G_{\mathbb{C}}$ *induite par* $(g, h) \mapsto ghg^{-\sigma}$ *réalise un revêtement de l'ouvert des éléments σ-conjugués à* ${}^\sigma H'_{\mathbb{R}}$: *ce revêtement est d'ordre* $2^d|W^\sigma| = |\overline{W}^\sigma|$, *où d est le rang déployé de* H. *Plus précisément,* (x, h) *et* (y, k) *ont même image si et seulement si* $x = yw^{-1}$, $k = w^{-1}hw^\sigma$ *pour un* $w \in \overline{W}^\sigma$.

Démonstration. — Supposons que $xhx^{-\sigma} = yky^{-\sigma}$. On a alors $zhz^{-\sigma} = k$, où $z = y^{-1}x$. Comme $H_{\mathbb{R}}$ est la composante neutre du σ-commutant de h et k, on en déduit que $zH_{\mathbb{R}}z^{-\sigma} = H_{\mathbb{R}}$, d'où $\mathrm{Ad}(z)H_{\mathbb{R}} = H_{\mathbb{R}}$, donc $z \in N^\sigma$. De plus, $z^{-\sigma} = h^{-1}z^{-1}k$ donc $zz^{-\sigma} = (\mathrm{Ad}(z)h)k \in H_{\mathbb{R}}$. On voit donc que la classe de z modulo $H_{\mathbb{R}}$ est bien élément de $\overline{W}^\sigma$. La réciproque est immédiate. □

Remarque 5.4. — Soit $W_2 = W(G_{\mathbb{R}}, H_{\mathbb{R}})$ le groupe de Weyl réel de $H_{\mathbb{R}}$. Alors le quotient $W_2 \backslash W^\sigma$ s'identifie au groupe $\mathscr{D}(H) = \mathscr{D}(H, \mathbb{R})$ qui paramètre la conjugaison dans $H_{\mathbb{R}}$

modulo conjugaison superstable (Langlands [15], p. 702). En effet, $\mathscr{D}(\mathrm{H})=\mathrm{G}_{\mathbb{R}}\backslash\mathscr{A}(\mathrm{H})/\mathrm{H}_{\mathbb{C}}$, où :

$$\mathscr{A}(\mathrm{H})=\{g\in\mathrm{G}_{\mathbb{C}} : \mathrm{H}^g=g^{-1}\mathrm{H}g \text{ et } \mathrm{Ad}\,g : \mathrm{H}\to\mathrm{H}^g \text{ sont définis sur } \mathbb{R}\}.$$

D. Shelstad a montré que $\mathscr{A}(\mathrm{H})=\mathrm{G}_{\mathbb{R}}.\mathrm{N}_{\mathrm{G}_{\mathbb{C}}}(\mathrm{H}_{\mathbb{C}})$ ([19], th. 2.1). Donc $\mathscr{D}(\mathrm{H})\subset\mathrm{N}_{\mathrm{G}_{\mathbb{R}}}(\mathrm{H}_{\mathbb{C}})\backslash\mathrm{N}_{\mathrm{G}_{\mathbb{C}}}(\mathrm{H}_{\mathbb{C}})/\mathrm{H}_{\mathbb{C}}$, et comme les éléments de $\mathscr{D}(\mathrm{H})$ doivent agir $\mathbb{R}$-rationnellement il est clair que $\mathscr{D}(\mathrm{H})\subset\mathrm{W}_2\backslash\mathrm{W}^\sigma$; l'inclusion inverse est évidente.

Pour transférer les estimées tempérées sur $\mathrm{G}_{\mathbb{C}}$ en des estimées sur $\mathrm{H}_{\mathbb{R}}$, nous voulons maintenant relever l'action sur $\mathrm{G}_{\mathbb{C}}$ des éléments de $\mathrm{U}(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$ via l'application :

$$\Phi : \quad \mathrm{G}_{\mathbb{C}}\times{}^\sigma\mathrm{H}'_{\mathbb{R}}\to\mathrm{G}_{\mathbb{C}},$$
$$(g, h)\mapsto ghg^{-\sigma}.$$

Soit ${}^\sigma\Gamma_h$ l'application induite par $d\Phi$ sur les opérateurs différentiels :

$${}^\sigma\Gamma_h=(d\Phi)_{(1,\,h)} : \mathrm{U}(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})\otimes\mathrm{U}(\mathfrak{h})\to\mathrm{U}(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}).$$

(Les éléments des algèbres enveloppantes donnent des opérateurs différentiels par leur action à droite; ils sont donc invariants par translation à *gauche*.) Soit $\Delta=\Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}, \mathfrak{h})$; pour $\alpha\in\Delta$, soit ξ_α le caractère de $\mathrm{H}_{\mathbb{R}}$ associé. Sur ${}^\sigma\mathrm{H}'_{\mathbb{R}}$, on a alors $\xi_\alpha\neq\pm1$ pour tout α; soit $\eta_\alpha^\pm=-(1\pm\xi_{-\alpha})^{-1}$: c'est une fonction analytique sur ${}^\sigma\mathrm{H}'_{\mathbb{R}}$.

PROPOSITION 5.5. — *Soit $\mathscr{R}$ l'algèbre de fonctions analytiques sur ${}^\sigma\mathrm{H}'_{\mathbb{R}}$ engendrée par les* $\eta_\alpha^\pm$ $(\alpha\in\Delta)$.

Alors, pour tout $u\in\mathrm{U}\,\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$, il existe des éléments en nombre fini $u_i\in\mathrm{U}\,\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$, $v_i\in\mathrm{U}(\mathfrak{h})$, $\eta_i\in\mathscr{R}$ tels que :

(1) $\qquad \deg u_i+\deg v_i\leqq\deg u,$

(2) $\qquad {}^\sigma\Gamma_h(\sum\eta_i(h)(u_i\otimes v_i))\equiv u,\ h\in{}^\sigma\mathrm{H}'_{\mathbb{R}}.$

Démonstration. — Par récurrence sur le degré de u. Supposons d'abord $u\in\mathrm{U}(\mathfrak{h}_{\mathbb{C}})$. On a :

$$\Phi : \quad \mathrm{H}_{\mathbb{C}}\times{}^\sigma\mathrm{H}'_{\mathbb{R}}\to\mathrm{H}_{\mathbb{C}},$$
$$(x, h)\mapsto xhx^{-\sigma}=xx^{-\sigma}h.$$

On en déduit que $d\Phi_{(1,\,h)}$ envoie $1\otimes\mathrm{X}$ sur $\mathrm{X}(\mathrm{X}\in\mathfrak{h})$ et $\mathrm{X}\otimes1$ sur $2\mathrm{X}(\mathrm{X}\in\sqrt{-1}\,\mathfrak{h}\subset\mathfrak{h}_{\mathbb{C}})$. Comme ces éléments engendrent $\mathrm{U}(\mathfrak{h}_{\mathbb{C}})$, on voit que tout élément de $\mathrm{U}(\mathfrak{h}_{\mathbb{R}})$ se relève.

Soit $\mathrm{X}_\alpha^+\in\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ des vecteurs racines associés aux $\alpha\in\Delta$. Soit $\mathrm{X}_\alpha^-=\sqrt{-1}\,\mathrm{X}_\alpha^+\in\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$. Si $u\in\mathrm{U}(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$ n'est pas dans $\mathrm{U}(\mathfrak{h}_{\mathbb{R}})$, u est une somme d'éléments de la forme $\mathrm{X}_\alpha^\pm u'$, où $\deg(u')\leqq\deg(u)-1$.

LEMME 5.6. — *Si $\mathrm{X}\in\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$, L_X, R_X désignent respectivement la multiplication par* X *à gauche et à droite sur $\mathrm{U}(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$. Alors, pour tout $a\in\mathrm{U}(\mathfrak{h})$, $\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_r\in\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$:*

$${}^\sigma\Gamma_h(\mathrm{X}_1\ldots\mathrm{X}_r\otimes a)=(\mathrm{L}_{\mathrm{Ad}(h^{-1})\sigma\mathrm{X}_1}-\mathrm{R}_{\mathrm{X}_1})\ldots(\mathrm{L}_{\mathrm{Ad}(h^{-1})\sigma\mathrm{X}_r}-\mathrm{R}_{\mathrm{X}_r})\,a.$$

(*cf.* Shintani [22], p. 170). La démonstration est immédiate par récurrence et tout à fait analogue au cas classique. □

D'après ce lemme, on a :

$$^{\sigma}\Gamma_h(\mathrm{X}\,u\otimes a)=(\mathrm{Ad}\,(h^{-1})\,\sigma\,X)\,^{\sigma}\Gamma_h(u\otimes a)-{}^{\sigma}\Gamma_h(u\otimes a)\,\mathrm{X},$$

c'est-à-dire :

$$(\star)\qquad {}^{\sigma}\Gamma_h(\mathrm{X}\,u\otimes a)=((\mathrm{Ad}\,(h^{-1})\,\sigma-1)\,X)^{\sigma}\,\Gamma_h(u\otimes a)+[\mathrm{X},\,{}^{\sigma}\Gamma_h(u\otimes a)].$$

Soit alors $u=\mathrm{X}_{\alpha}^{\pm}\,u'$, $\deg(u')\leqq\deg(u)-1$. Par récurrence, on peut trouver $u_i'\in\mathrm{U}(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$, $v_i'\in\mathrm{U}(\mathfrak{h})$, $\eta_i'\in\mathscr{R}$ avec :

$$^{\sigma}\Gamma_h(\textstyle\sum\eta_i'(h)(\mathrm{u}_i'\otimes v_i'))\equiv u'.$$

On en déduit, d'après $(\star)$:

$$^{\sigma}\Gamma_h(\textstyle\sum\eta_i'(h)(\mathrm{X}_{\alpha}^{\pm}\,u_i'\otimes v_i'))=\sum\eta_i'(h)((\mathrm{Ad}\,(h^{-1})\,\sigma-1)\,\mathrm{X}_{\alpha}^{\pm})\,^{\sigma}\Gamma_h(u_i'\otimes v_i')$$
$$+\textstyle\sum\eta_i'(h)[\mathrm{X}_{\alpha}^{\pm},\,{}^{\sigma}\Gamma_h(u_i'\otimes v_i')].$$

Si $h\in{}^{\sigma}\mathrm{H}_{\mathbb{R}}'$, $(\mathrm{Ad}\,(h^{-1})\,\sigma-1)\,\mathrm{X}_{\alpha}^{\pm}=(\pm\xi_{-\alpha}(h)-1)\,\mathrm{X}_{\alpha}^{\pm}$, donc :

$$^{\sigma}\Gamma_h(\textstyle\sum\eta_i'(h)(\mathrm{X}_{\alpha}^{\pm}\,u_i\otimes v_i'))=(\eta_{\alpha}^{\pm}(h))^{-1}\,\mathrm{X}_{\alpha}^{\pm}\,u'+[\mathrm{X}_{\alpha}^{\pm},\,u'],$$

d'après l'hypothèse de récurrence. On en déduit que :

$$\mathrm{X}_{\alpha}^{\pm}\,u'={}^{\sigma}\Gamma_h(\textstyle\sum\eta_{\alpha}^{\pm}\,\eta_i'(\mathrm{X}_{\alpha}^{\pm}\,u_i'\otimes v_i'))-\eta_{\alpha}^{\pm}\,[\mathrm{X}_{\alpha}^{\pm},\,u'].$$

Le degré de $[\mathrm{X}_{\alpha}^{\pm},\,u']$ est inférieur à celui de u, d'où le résultat par récurrence puisque :

$$\deg(\mathrm{X}_{\alpha}^{\pm}\,u_i')+\deg(v_i')\leqq 1+\deg(u_i')+\deg(v_i')\leqq 1+\deg(u')\leqq\deg\,u.\qquad\square$$

Soit $h\in{}^{\sigma}\mathrm{H}_{\mathbb{R}}'$. On a :

$$\mathrm{D}_{\sigma}(h)=\det\nolimits_{\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}/\mathfrak{h}}(\mathrm{Ad}\,h\circ\sigma-1)=2^l\,\det\nolimits_{\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}/\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}}(\mathrm{Ad}\,h\circ\sigma-1)$$
$$=2^l\prod_{\alpha\in\Delta}(h^{\alpha}-1)(-h^{\alpha}-1),\qquad l=\mathrm{rang}\,(\mathrm{G}).$$

Si l'on fait un choix de racines positives, on a donc :

$$\mathrm{D}_{\sigma}(h)=2^l\prod_{\alpha>0}(h^{\alpha}-1)(-h^{\alpha}-1)\prod_{\alpha>0}h^{-2\alpha}(1-h^{\alpha})(-1-h^{\alpha})$$
$$=2^l(-1)^{|\Delta^+|}h^{-4\rho}(\prod_{\alpha>0}(1-h^{\alpha})(1+h^{\alpha}))^2.$$

où :

$$\rho=\frac{1}{2}\sum_{\alpha>0}\alpha.$$

Nous définissons $\Delta_{\sigma}(h)=h^{-2\rho}\prod_{\alpha>0}(1-h^{2\alpha})$. On a donc :

$$\mathrm{D}_{\sigma}(h)=2^l(-1)^{|\Delta^+|}\Delta_{\sigma}(h)^2.$$

Remarquons de plus que $\Delta_\sigma(h)=\Delta(h^{-2})$, si $G_{\mathbb{R}}$ est acceptable, et :

$$D_\sigma(h)=2^l D(h^{-2})=2^l D(h^2),$$

où Δ, D sont les analogues non tordus (*cf.* Warner [30], II, 8.1]). Si l'on change le choix de Δ^+, Δ_σ change par un facteur (± 1). Soit Δ_R l'ensemble des racines réelles dans Δ. Soit :

$$^\sigma H'_{\mathbb{R}}(R)=\{h\mid \xi_\alpha(h)\neq\pm 1,\ \alpha\in\Delta_R\}.$$

PROPOSITION 5.7. — T *distribution propre* σ-*invariante sur* $G_{\mathbb{C}}$. *Soit* $F_T(h)=\Delta_\sigma(h)T(h)$, $h\in{}^\sigma H'_{\mathbb{R}}$.

Alors F_T *s'étend en une fonction analytique sur* $^\sigma H'_{\mathbb{C}}(R)$.

La démonstration se fait par descente au commutant gauche. Soit $h\in{}^\sigma H'_{\mathbb{R}}(R)$, $Z=({}^\sigma G_h)^0$ la composante neutre de son σ-commutant; Z contient $H=H_{\mathbb{R}}$ comme sous-groupe de Cartan, et $\Delta(Z, H)$ est formé des racines $\alpha\in\Delta$ telles que $\xi_\alpha(h)=\pm 1$. En particulier, Z n'a pas de racines réelles par rapport à H. Soit $\mathfrak{z}$ l'algèbre de Lie de Z.

L'identité :

$$\Delta_\sigma(x)=x^{-2\rho}\prod_{\alpha>0}(1-x^{2\alpha})=x^{-2\rho_Z}\prod_{\alpha\in\Delta^+(Z,H)}(1-x^{2\alpha})\,x^{-2(\rho-\rho_Z)}\prod_{\substack{\alpha>0\\ \alpha\notin\Delta(Z,H)}}(1-x^{2\alpha})$$

$$=\Delta_\sigma^Z(x)\,x^{-2(\rho-\rho_Z)}\prod_{\alpha>0,\ \alpha(h)^2\neq 1}(1-x^{2\alpha}),$$

où Δ_σ^Z, ρ_Z sont les analogues de Δ_σ et ρ pour le couple (Z, H), montre qu'au voisinage de h, Δ_σ coïncide, modulo une fonction analytique non nulle, avec Δ_σ^Z. Si on plonge Z dans $G_{\mathbb{C}}$ par $x\mapsto hx$, plongement transverse au voisinage de $(x=1)$, le *théorème* 4.10 dit que la partie radiale de T est une distribution t invariante sur un voisinage de 1 dans Z, de la forme $t(x)=s(x^2)$, où $u=|\nu_h|^{1/2}s$ est une distribution invariante, $Z(\mathfrak{z})$-finie. L'analogue de la proposition 5.7 est bien connu dans le cas non tordu (*cf.* [30], II, prop. 8.3.4.3); comme Z n'a pas de racines réelles pour H, il implique que $\Delta^Z(y)u(y)$ ou, aussi bien, $\Delta^Z(y^{-1})u(y)$, est analytique au voisinage de 1 dans H. Comme ν_h est analytique $\neq 0$ près de $(y=1)$, ceci implique que $\Delta_\sigma^Z(x)\,t(x)=\Delta^Z(x^{-2})s(x^2)$ est analytique près de $(x=1)$ sur H. Comme $\Delta_\sigma^Z(hx)=\Delta_\sigma^Z(x)$, on voit donc que $\Delta_\sigma^Z(hx)T(hx)$ se prolonge en une fonction analytique au voisinage de $(x=1)$, i. e. de $hx=h$ dans H. □

3. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 5.1 ET DU THÉORÈME 5.2. — Nous voulons d'abord nous limiter aux semi-normes définies par l'action à droite de $U(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$.

PROPOSITION 5.8. — T *tempérée*, σ-*invariante. Alors il existe des éléments* u_i *de* $U(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$, $m\geqq 0$ *tels que, pour* $f\in C_c^\infty(G_{\mathbb{C}})$:

$$|\langle T,f\rangle|\leqq\sum_{i=1}^{r}\operatorname{Sup}_G\,\Xi^{-1}(1+\sigma)^m|f\star u_i|.$$

Démonstration. — Il suffit de recopier, *mutatis mutandis*, la démonstration donnée par Harish-Chandra dans le cas de la conjugaison ordinaire. (*cf.* Warner [30], 8.3.8.1).

Nous revenons à la situation décrite dans la *proposition* 5.3. $\overline{W}^\sigma$ agit sur $G_\mathbb{C}/H_\mathbb{R}$ et sur $H_\mathbb{R}$. Soit $\alpha \in C_c^\infty(G_\mathbb{C}/H_\mathbb{R})$, $\overline{W}^\sigma$-invariante, telle que $\int \alpha = 1$. Soit $\Omega = \Omega^\sigma = \Omega^{-1}$ un compact de $G_\mathbb{C}$ dont l'image contienne le support de α. Si $g \in C_c^\infty({}^\sigma H'_\mathbb{R})$, définissons $f_g \in C_c^\infty(G_\mathbb{C})$ par :

$$f_g(xhx^{-\sigma}) = \alpha(\dot{x})\,\overline{\Delta}_\sigma(h)^{-1} \sum_{w \in \overline{W}^\sigma} \operatorname{sgn}(w)\, g(w.h),$$

où $\overline{\Delta}_\sigma$ désigne le conjugué complexe de Δ_σ, et $\operatorname{sgn}(w)$ est défini à l'aide de la projection $\overline{W}^\sigma \to W^\sigma$. Il est facile de voir que f_g est bien définie : il suffit de vérifier qu'elle ne change pas si l'on remplace x par xw^{-1}, et h par $w.h = w^{-1}hw^\sigma$, ce qui résulte de la formule (*cf.* p. 51) :

$$\Delta_\sigma(w^{-1}hw^\sigma) = \Delta((w^{-1}hw^\sigma)^{-2}) = \Delta((w^{-1}hw^\sigma w^{-\sigma}hw)^{-1})$$

puisque $w^{-1}hw^\sigma \in H_\mathbb{R} = \Delta((w^{-1}h^2w)^{-1}) = \operatorname{sgn}(w)\,\Delta(h^{-2}) = \operatorname{sgn}(w)\,\Delta_\sigma(h)$.

Rappelons que $F_T(h) = \Delta_\sigma(h)\,T(h)$ (*prop.* 5.7). T est donnée par l'intégration contre une fonction $T(x)$.

LEMME 5.9. — *Soit* $g \in C_c^\infty({}^\sigma H'_\mathbb{R})$; f_g *comme ci-dessus.*

On a $\langle T, f_g \rangle = \int_{G_\mathbb{C}} T(x)\, f_g(x)\, dx = \int_{H_\mathbb{R}} g(h)\, F_T(h)\, dh.$

Démonstration. — Soit $G_\mathbb{C}(H_\mathbb{R}) = \bigcup_g g H_\mathbb{R} g^{-\sigma}$. Il existe une formule intégrale, analogue au cas non tordu :

$$\int_{G_\mathbb{C}} \varphi(x)\, dx = |\overline{W}^\sigma|^{-1} \int_{H_\mathbb{R}} |\Delta_\sigma(h)|^2\, dh \int_{G_\mathbb{C}/H_\mathbb{R}} \varphi(\dot{x}h\dot{x}^{-\sigma})\, d\dot{x},$$

les mesures vérifiant $d\dot{x} = dx/dh$. Appliquée à f_g, dont le support est contenu dans $G_\mathbb{C}(H_\mathbb{R})$, elle donne :

$$\begin{aligned}
\int_{G_\mathbb{C}} T(x)\, f_g(x)\, dx &= |\overline{W}^\sigma|^{-1} \int_{H_\mathbb{R}} |\Delta_\sigma(h)|^2\, dh \\
&\quad \times \int_{G_\mathbb{C}/H_\mathbb{R}} T(\dot{x}h\dot{x}^{-\sigma})\, \alpha(\dot{x})\, (\overline{\Delta}_\sigma(h))^{-1} \sum_{\overline{W}^\sigma} \operatorname{sgn}(w)\, g(w.h)\, d\dot{x} \\
&= |\overline{W}^\sigma|^{-1} \int_{H_\mathbb{R}} T(h)\, \Delta_\sigma(h)\, dh \int_{G_\mathbb{C}/H_\mathbb{R}} \alpha(\dot{x}) \sum \operatorname{sgn}(w)\, g(w.h)\, d\dot{x} \\
&= |\overline{W}^\sigma|^{-1} \int_{H_\mathbb{R}} F_T(h) \sum_{w \in \overline{W}^\sigma} \operatorname{sgn}(w)\, g(w.h)\, dh = \int_{H_\mathbb{R}} F_T(h)\, g(h)\, dh,
\end{aligned}$$

car $F_T(wh) = \operatorname{sgn}(w)\, F_T(h)$. □

Il est clair que le *lemme* 5.9 va nous permettre de relier la croissance de F_T sur $H_{\mathbb{R}}$ et les majorations de $\langle T, f_g \rangle$ dues à la température [7] de T. Pour transformer celles-ci en des majorations portant sur g, nous montrons :

LEMME 5.10. — *Pour tout* $u \in U(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$, *il existe des éléments* $v_i \in U(\mathfrak{h})$, $\eta_i \in \mathscr{R}$ *(prop. 5.5) tels que, pour* $g \in C_c^\infty({}^\sigma H'_{\mathbb{R}})$:

$$|(f_g \star u)(xhx^{-\sigma})| \leqq |\xi_\rho(h^2)|^{-1} \sum_{i=1}^{r} \sum_{w \in \overline{W}^\sigma} |\eta_i(h).(g^w \star v_i)(h)|,$$

pour tout $x \in \Omega$, $h \in {}^\sigma H'_{\mathbb{R}}$.

[Ici $g^w(h) = g(w.h)$.]

Démonstration. — (*cf.* [30], II, lemme 8.3.8.3). Posons $f = f_g$. Soit :

$$\Phi : \quad (g, h) \to ghg^{-\sigma}.$$
$$G_{\mathbb{C}} \times {}^\sigma H'_{\mathbb{R}} \to G_{\mathbb{C}}.$$

D'après la proposition 5.5, il existe des $\eta_i \in \mathscr{R}$, $u_i \in U(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$, $v_i \in U(\mathfrak{h})$ tels que :

$(\star)$ pour $h \in {}^\sigma H'_{\mathbb{R}}$, $\quad (f \star u) \circ \Phi = \sum \eta_i(h)(f \circ \Phi) \star (u_i \otimes v_i)$,

au point $(1, h)$. Soit $f^x(h) = f(xhx^{-\sigma})$. On a, pour $X \in \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^0$:

$$(f \star X)(xhx^{-\sigma}) = \frac{d}{dt}\bigg|_0 f(xhx^{-\sigma} \exp tX)$$
$$= \frac{d}{dt}\bigg|_0 f(xh \exp t \operatorname{Ad}(x^{-\sigma})X.x^{-\sigma}) = (f^x \star \operatorname{Ad}(x^{-\sigma})X)(h).$$

Ceci est vrai aussi pour tout $X \in U\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$. Posons $\operatorname{Ad}(x^{-\sigma})u = \sum_i \varphi_i(x) u_i$. L'égalité $(\star)$ appliquée à f^x nous donne :

$$(f \star u)(xhx^{-\sigma}) = (f^x \star \operatorname{Ad}(x^{-\sigma})u)(h)$$
$$= \sum_i \varphi_i(x)(f^x \star u_i)(h)$$
$$= \sum_i \sum_j \varphi_i(x)\eta_{ij}(h)((f^x \circ \Phi) \star (u_{ji} \otimes v_{ji}))(1, h).$$

Comme de plus $f^x \circ \Phi(y, h) = f \circ \Phi(xy, h)$ et que les u_{ji} commutent aux translations à gauche :

$$(f \star u)(xhx^{-\sigma}) = \sum_{i, j} \varphi_i(x)\eta_{ij}(h)[(f \circ \Phi) \star (u_{ji} \otimes v_{ji})](x, h).$$

Par définition, $f \circ \Phi(x, h) = \alpha(\dot{x})\bar{\Delta}_\sigma(h)^{-1} \sum_w \operatorname{sgn}(w) g^w(h)$.

[7] « tempérance » traduit « temperedness ».

Comme les fonctions φ_i sont bornées sur le compact Ω, on obtient, en réarrangeant les indices :

$$|(f\star u)(xhx^{-\sigma})| \leqq C\sum_i \sum_w |\eta_i(h)[((\Delta_\sigma)^{-1} g^w)\star v_i](h)|.$$

Soit $\mathscr{R}_0$ l'algèbre engendrée par les fonctions η_α^+ sur $H'_{\mathbb{R}}$. Si $\eta(h)\in\mathscr{R}_0$, $\eta(h^2)\in\mathscr{R}$. On a (*cf.* [30], II, p. 169) :

$$a(\Delta^{-1} g)=\xi_\rho^{-1} a'(\eta g), \qquad g\in C_c^\infty(H'_{\mathbb{R}}),$$

pour tout $a\in U(\mathfrak{h})$, Δ comme avant la *proposition* 5.7, avec $a'\in U(\mathfrak{h})$ et $\eta\in\mathscr{R}_0$. Composant avec l'application $h\mapsto h^2$, et tenant compte de l'identité $\Delta_\sigma(h)=\Delta(h^{-2})$, on en déduit de même :

$$a((\Delta_\sigma)^{-1} g)=\xi_\rho^{-1}(h^2)\, a'(\eta g), \qquad g\in C_c^\infty({}^\sigma H'_{\mathbb{R}}),$$

avec $\eta\in\mathscr{R}$. Comme $\mathscr{R}$ est stable sous l'action de $U(\mathfrak{h})$, ceci termine le démonstration. $\square$

Soit U un sous-groupe compact maximal de $G_{\mathbb{C}}$, stable par σ; $K=U\cap G_{\mathbb{R}}$ est un compact maximal de $G_{\mathbb{R}}$. Soit θ un automorphisme de Cartan de $G_{\mathbb{C}}$ et $G_{\mathbb{R}}$ compatible avec le choix de U. On peut supposer $H_{\mathbb{C}}$, $H_{\mathbb{R}}$ θ-stables. Soit $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}^0=k^0+\mathfrak{p}^0$ la décomposition de Cartan de $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}^0$, $\mathfrak{h}^0=\mathfrak{h}^0+\mathfrak{h}_\mathfrak{p}^0$ celle de $\mathfrak{h}^0$. Soit $H_{\mathbb{R}}=(H_{\mathbb{R}}\cap K)H_\mathfrak{p}=H_K H_\mathfrak{p}$, $\mathscr{H}_\mathfrak{p}=\exp(\mathfrak{h}_\mathfrak{p}^0)$.

Soit $(\mathfrak{h}_\mathfrak{p}^0)'$ le complément des hyperplans découpés sur $\mathfrak{h}_\mathfrak{p}^0$ par les racines réelles ou complexes. Soit C_1 une composante connexe de ${}^\sigma H'_{\mathbb{R}}$: il existe une composante $\mathscr{C}^+$ de $(\mathfrak{h}_\mathfrak{p}^0)'$ telle que C_1 rencontre $H_K\exp(\mathscr{C}^+)$. Il suffit alors de démontrer les majorations cherchées sur $C=C_1\cap(H_K\exp\mathscr{C}^+)$.

Nous supposons $\Delta^+\subset\Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{R}},\mathfrak{h}_{\mathbb{R}})$ choisi de façon que $\mathscr{C}^+$ corresponde aux racines réelles ou complexes positives. (Rappelons que Δ_σ et ξ_ρ sont déterminées par Δ^+.)

La décomposition de Cartan de $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^0$ s'écrit $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^0=(k^0+\sqrt{-1}\,\mathfrak{p}_0)+(\mathfrak{p}^0+\sqrt{-1}\,k^0)$ $=\mathfrak{u}^0+\mathfrak{q}^0$; $\mathfrak{q}^0$ contient $(\mathfrak{h}^0+\sqrt{-1}\,\mathfrak{h}_k^0)=\mathfrak{h}_\mathfrak{q}^0$ comme sous-espace abélien maximal. Les racines de Δ prennent des valeurs réelles sur $\mathfrak{h}_\mathfrak{q}^0$ et s'identifient aux racines restreintes de $(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^0,\mathfrak{h}_\mathfrak{q}^0)$. Δ^+ définit donc un ordre sur celles-ci; comme les multiplicités des racines restreintes sont égales à deux, la demi-somme des racines restreintes positives de $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^0$ est alors $\delta=2\rho$.

LEMME 5.11. — *Il existe* $m\geqq 0$, $\eta_i\in\mathscr{R}$, $v_i\in U(\mathfrak{h})$ *tels que :*

$$\left|\int_{H_{\mathbb{R}}} g(h)\,F_T(h)\,dh\right| \leqq \sum_{i=1}^r \sum_w \sup_{{}^\sigma H'_{\mathbb{R}}} (1+\sigma)^m\, |\eta_i|\;|g^w\star v_i|,$$

pour $g\in C_c^\infty(C)$.

Démonstration. — D'après le *lemme* 5.9, la tempérance de T, et la *proposition* 5.8, on a :

$$\left|\int_{H_{\mathbb{R}}} g(h)\,F_T(h)\,dh\right| = |\langle T, f_g\rangle| \leqq \sum_{i=1}^r \sup_G \Xi^{-1}(1+\sigma)^m |f_g\star u_i|.$$

Nous évaluons ces estimées en fonction de g à l'aide du *lemme* 5.10. Remarquons que le support de f_g est dans $\Omega.\mathrm{C}$. Comme Ω est compact, il existe $\mathrm{M} \geqq 1$ tel que :

$$\Xi(xyx^{-\sigma}) \geqq \mathrm{M}^{-1}\,\Xi(y),$$
$$1+\sigma(xyx^{-\sigma}) \leqq \mathrm{M}(1+\sigma(y)),$$

pour tout $x \in \Omega$, $y \in \mathrm{G}_{\mathbb{C}}$ (*cf.* [27], Part II, chap. 8).

Si $u \in \mathrm{U}(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$, le *lemme* 5.10 implique, en notant ${}^{x}h = xhx^{-\sigma}$:

$$\begin{aligned}
|(f_g \star u)({}^{x}h)|\,\Xi({}^{x}h)^{-1}(1+\sigma({}^{x}h))^{m} &\\
&\leqq \mathrm{M}^{m+1}\,|(f_g \star u)({}^{x}h)|\,\Xi(h)^{-1}(1+\sigma(h))^{m}\\
&\leqq \mathrm{M}^{m+1}\,|\xi_{\rho}(h^2)|^{-1}\,\Xi(h)^{-1}(1+\sigma(h))^{m}\sum_{i,\,w}|\eta_i(h)(g^{w}\star v_i)(h)|,
\end{aligned}$$

pour $x \in \Omega$. Si $h = h_k h_{\mathfrak{p}} \in \mathrm{H}_{\mathbb{R}}$, on a :

$$|\xi_{\rho}(h^2)| = |\xi_{\rho}(h_{\mathfrak{p}}^2)| = |\xi_{2\rho}(h_{\mathfrak{p}})| = |\xi_{\delta}(h_{\mathfrak{p}})|,$$

où ξ_{δ} est l'exponentielle de δ sur $\mathrm{A} = \exp(\mathfrak{h}_{\mathfrak{q}}^{0})$; Ξ étant sphérique, $\Xi(h) = \Xi(h_{\mathfrak{p}})$.

Si $h \in \mathrm{C}$, $h_{\mathfrak{p}} = \exp(\mathrm{H})$ pour un $\mathrm{H} \in \mathscr{C}^{+}$. D'après les ordres choisis pour les racines, H est dans la chambre dominante de $\mathfrak{h}_{\mathfrak{q}}^{0}$. Il est bien connu qu'on a alors :

$$\Xi(\exp \mathrm{H})\,\xi_{\delta}(\exp \mathrm{H}) \geqq 1,$$

cf. [30], II, prop. 8.3.7.3, d'où :

$$|(f_g \star u)({}^{x}h)|\,\Xi({}^{x}h)^{-1}(1+\sigma({}^{x}h))^{m} \leqq \mathrm{M}^{m+1}(1+\sigma(h))^{m}\sum_{i,\,w}|\eta_i(h)(g^{w}\star v_i)(h)|,$$

ce qui démontre le lemme puisque le support de f_g est dans $\Omega.\mathrm{C}$. □

Nous pouvons maintenant conclure. Rappelons que C_1 était une composante connexe de l'ensemble défini sur $\mathrm{H}_{\mathbb{R}}$ par $\xi_{\alpha}(h) \neq \pm 1$ (tout $\alpha \in \Delta$). $\mathscr{C}^{+}$ est défini par $\langle \beta, \mathrm{H} \rangle > 0$, $\beta \in \Delta_{\mathrm{RC}}^{+}$ = ensemble des racines positives réelles ou complexes. Il est clair que C_1 est contenu dans une composante connexe $h_0(\mathrm{H}_{\mathrm{K}})^{0}\,\mathrm{H}_{\mathfrak{p}} = h_0\,\mathrm{H}_k\,\mathrm{H}_{\mathfrak{p}}$ de $\mathrm{H}_{\mathbb{R}}$; par conséquent C est l'ensemble des $h = h_0\,h_k \exp(\mathrm{H})$, avec :

- $\xi_{\alpha}(h) = \xi_{\alpha}(h_0)\,\xi_{\alpha}(h_k)\exp\langle \alpha, \mathrm{H}\rangle \neq \pm 1$ tout α,
- $\langle \beta, \mathrm{H} \rangle > 0$ tout $\beta \in \Delta_{\mathrm{RC}}^{+}$.

Comme $\langle \alpha, \mathrm{H} \rangle$ est réel pour tout α, on a :

$$\xi_{\alpha}(h) \neq \pm 1 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} & \langle \alpha, \mathrm{H} \rangle \neq 0, \\ \text{ou } \langle \alpha, \mathrm{H} \rangle = 0 & \text{et} \quad \xi_{\alpha}(h_k) \neq \pm \xi_{\alpha}(h_0). \end{cases}$$

Comme les racines imaginaires sont nulles sur H, on a enfin :

$$\mathrm{C} = \{h_0\,h_k \exp(\mathrm{H}),\ \langle \beta, \mathrm{H} \rangle > 0 \text{ tout } \beta \in \Delta_{\mathrm{RC}}^{+},\ \pm\xi_{\alpha}(h_k) \neq \xi_{\alpha}(h_0) \text{ tout } \alpha \in \Delta_{\mathrm{I}}\}.$$

En particulier C s'écrit comme un produit $\mathrm{C} = h_0\,\mathrm{C}^{-}\exp(\mathscr{C}^{+})$.

Soit alors $g=g^{-}\otimes g^{+}$, $g^{-}\in C_c^{\infty}(h_0 C^{-})$, $g^{+}\in C_c^{\infty}(\exp \mathscr{C}^{+})$. On a :

$$\int g(h)\, F_T(h)\, dh=\int_{\mathscr{C}^{+}} F_{T,g^{-}}(x)\, g^{+}(\exp x)\, dx,$$

$$F_{T,g^{-}}(x)=\int_{h_0 C^{-}} F_T(h \exp x)\, g^{-}(h)\, dh.$$

Les majorations données par le *lemme* 5.11 s'écrivent alors :

$$\left|\int F_{T,g^{-}}(x)\, g^{+}(\exp x)\, dx\right| \leqq \sum_{i,\, w} \operatorname*{Sup}_{H_{\mathbb{R}}} (1+\|x\|)^m \,|\eta_i(h_K \exp x)|\quad |g^w \star v_i|.$$

Le groupe de Weyl $\overline{W}^{\sigma}$ respecte la décomposition de C; g^{-} étant à support compact, on a évidemment des majorations :

$$|(g^w \star v_i)(h_0 h_k \exp x)| \leqq M \sum_j D_j g^{+}(\exp x),$$

les D_j étant des opérateurs polynomiaux à coefficients constants sur $\mathfrak{h}_{\mathfrak{p}}^0$. De même, si $\alpha\in\Delta_I$:

$$|\eta_\alpha(h_k \exp x)|=\frac{1}{|\xi_\alpha(h_k)\pm 1|}\quad \text{est borné sur } \operatorname{Supp}(g^{-}).$$

Nous allons supposer que le support de g^{+} est dans $\exp \mathscr{C}^{+}(\varepsilon)$, pour un $\varepsilon>0$, où :

$$\mathscr{C}^{+}(\varepsilon)=\{x\in\mathscr{C}^{+} : \langle \beta, x\rangle>\varepsilon \text{ pour } \beta\in\Delta_{RC}^{+}\}.$$

Si $\alpha\in\Delta_{RC}^{+}$, on a pour $x\in\mathscr{C}^{+}(\varepsilon)$:

$$|\xi_\alpha(h_K \exp x)\pm 1|=|e^{\langle\alpha, x\rangle}\pm\overline{\xi}_\alpha(h_K)|\geqq e^{\varepsilon}-1.$$

De même, si $\alpha\in\Delta_{RC}^{-}$, $x\in\mathscr{C}^{+}(\varepsilon)$:

$$|\xi_\alpha(h_K \exp x)\pm 1|=|e^{\langle\alpha, x\rangle}\pm\overline{\xi}_\alpha(h_K)|\geqq 1-e^{-\varepsilon}.$$

Comme les η_i sont des produits de fonctions de la forme $(\xi_\alpha(h_K \exp x)\pm 1)^{-1}$, on en déduit qu'il existe $M>0$ tel que, pour tout i :

$$|\eta_i(h_K \exp x)|<M, \qquad x\in\mathscr{C}^{+}(\varepsilon).$$

On en déduit enfin, si $\operatorname{Supp}(g^{+})\subset\exp\mathscr{C}^{+}(\varepsilon)$:

$$\left|\int F_{T,g^{-}}(x)\, g^{+}(\exp x)\, dx\right| \leqslant \sum_k \operatorname*{Sup}_{\mathscr{C}+}(1+\|x\|^m)\, D_k g^{+}(\exp x).$$

Par ailleurs, soit $h=h_0 h_k \exp x\in C$. Si x est dans un voisinage de 1 dans $H_{\mathbb{R}}$, ν_h comme dans le *théorème* 4.10, on a :

$$|\nu_h(x)|=|D_\sigma(hx)|=2^l\,|\Delta_\sigma(hx)|^2,$$

et le *théorème* 4.10 montre alors que $F_T(hx) = \Delta_\sigma(hx) T(hx)$ est fonction propre de $S(\mathfrak{h})^W$ opérant sur $H_{\mathbb{R}}$. Localement, on en déduit qu'on a un développement :

$$F_T(h \exp Y) = \sum_i e^{<\lambda_i, Y>} p_i(Y),$$

où les p_i sont des polynômes et $\{\lambda_i\}$ est dans l'orbite de W dans $\mathfrak{h}^*$ définie par le caractère central. Comme $h_0 H_k^0 \exp(\mathscr{C}^+) \subset {}^\sigma H'_{\mathbb{R}}(R)$, la *proposition* 5.7 montre que les valeurs de F_T sur H_K^0 se recollent; on en déduit que :

$$F_T(h_0 h_k \exp(x)) = \sum_{i=1}^{r} \xi_i(h_k) \sum_{k=1}^{s} p_{ik}(x) e^{\langle \lambda_k, x \rangle},$$

les ξ_i étant des caractères linéairement indépendants de H_K^0. Mais alors :

$$F_{T, g^-}(x) = \sum_{k=1}^{s} \sum_{i=1}^{r} \left(\int_{C^-} \xi_i(h_k) g^-(h_0 h_k) dh_k \right) p_{ik}(x) e^{\langle \lambda_k, x \rangle}.$$

La majoration de F_{T, g^-} sur $\mathscr{C}^+(\varepsilon)$ implique évidemment que :

$$\sum_{i=1}^{r} \int \xi_i(h_k) g^-(h_0 h_k) p_{ik} dh_k = 0 \quad \text{pour tout } k \quad \text{tel que } \operatorname{Re}(\lambda_k) > 0,$$

sur $\mathscr{C}^+$. L'indépendance des ξ_i permet alors de conclure que $p_{ik} = 0$ si $\operatorname{Re}(\lambda_k) > 0$; il est alors clair que :

$$|F_T(h_0 h_k \exp(x))| \leqq \sum |p_{ik}(x)|,$$

ce qui démontre le *théorème* 5.1.

Si de plus le caractère central χ est *régulier*, les exponentielles forment une base de l'espace des solutions des parties radiales opérant sur $H_{\mathbb{R}}$ (Varadarajan [27], Part II, p. 233). Les coefficients p_{ik} sont donc des constantes, et ceci démontre le *théorème* 5.2. □

4. APPLICATION AUX CARACTÈRES GAUCHES. — Nous montrons maintenant que les résultats de ce chapitre s'appliquent aux caractères gauches des représentations σ-stables tempérées.

Soit donc G réductif connexe/$\mathbb{R}$, pas nécessairement quasi déployé; $G_{\mathbb{R}} \subset G_{\mathbb{C}}$, σ la conjugaison complexe. Soit Π une représentation σ-stable de $G_{\mathbb{C}}$, A entrelaçant Π et $\Pi \circ \sigma$ $A^2 = 1$. On note $\operatorname{trace}(\Pi(g) A)$ le caractère gauche de Π, fonction localement intégrable sur $G_{\mathbb{C}}$ (chap. 4). Rappelons que Π est dite tempérée si son *caractère* (non tordu) est une distribution tempérée.

THÉORÈME 5.12. — *Soit* Π *une représentation irréductible* σ*-stable tempérée de* $G_{\mathbb{C}}$. *Alors son caractère gauche* $\operatorname{trace}(\Pi(g) A)$ *est une distribution tempérée sur* $G_{\mathbb{C}}$.

En particulier il satisfait aux majorations du théorème 5.1.

Démonstration (8). — On choisit un compact maximal σ-stable U de $G_{\mathbb{C}}$; σ agit alors sur le dual de U par $\delta \mapsto \delta^{\sigma}$. Soit $G_{\mathbb{C}} = UAN_{\mathbb{C}}$ une décomposition d'Iwasawa de $G_{\mathbb{C}}$, $M = Z_U(A)$. Si Π est tempérée, elle est de la forme :

$$\Pi = \mathrm{ind}_{MAN_{\mathbb{C}}}^{G_{\mathbb{C}}} (\mu \otimes \xi \otimes 1) \qquad \text{(induite unitaire)},$$

où λ est un caractère *unitaire* de A, μ un caractère de M (Wallach [28]). Soit $\overline{\mathscr{V}}$ l'espace de Π, $\mathscr{V}$ l'espace des vecteurs U-finis.

Si $\varphi \in C_c^{\infty}(G_{\mathbb{C}})$, soit $\Pi(\varphi) = (\Pi_{\delta, \nu}(\varphi))$ la décomposition de $\Pi(\varphi)$ suivant les U-types. On sait (prop. 4.1.) que $\Pi(\varphi)A$ est traçable; on a :

$$\operatorname{trace}(\Pi(\varphi)A) = \sum_{\delta} \operatorname{trace}(\Pi_{\delta, \delta^{\sigma}}(\varphi)A),$$

la somme étant absolument convergente. Enfin, A est unitaire.

Soit $\mathfrak{u}$ l'algèbre de Lie complexe de U. Il existe un élément $\omega \in Z(\mathfrak{u})$ tel que $\delta(\omega) = \dim(\delta)^2 . 1_{\delta}$ pour toute représentation δ de U (Warner [30], I, 2.4.3.4). En particulier, $\Pi(\omega)$ admet un inverse dans $\mathscr{V}$- et un inverse borné dans $\overline{\mathscr{V}}$, qu'on notera $\Pi(1/\omega)$. Pour tout $N \geqq 0$, $\varphi \in C_c^{\infty}(G_{\mathbb{C}})$, on a alors :

$$\operatorname{trace}(\Pi(\varphi)A) = \operatorname{trace}\left[\Pi\left(\frac{1}{\omega^N}\right)\Pi(\omega^N \star \varphi)A\right] = \sum_{\delta} \dim(\delta)^{-2N} \operatorname{trace}(\Pi_{\delta, \delta^{\sigma}}(\omega^N \star \varphi)A),$$

la somme étant absolument convergente.

Nous voulons maintenant majorer les termes en $\operatorname{trace}(\Pi_{\delta, \delta^{\sigma}}(\psi)A)$, de façon uniforme par rapport à δ. Des majorations de ce genre ont été démontrées par Harish-Chandra pour toutes les représentations tempérées; ici, on obtient très facilement :

LEMME 5.13. — *Soit* $m(\delta)$ *la multiplicité de* δ *dans* $\mathscr{V}$, $d(\delta)$ *la dimension de* δ. *Alors, pour tout* $g \in G_{\mathbb{C}}$:

$$|\operatorname{trace}(\Pi_{\delta, \delta^{\sigma}}(g)A)| \leqq m(\delta) d(\delta)^3 \Xi(g).$$

Démonstration. — Soit (e_i) une base orthonormale de $\mathscr{V}_{\delta}$. On a :

$$\operatorname{trace}(\Pi_{\delta, \delta^{\sigma}}(g)A) = \sum \langle \Pi(g)A e_i, e_i \rangle.$$

Comme A est unitaire, il suffit de montrer que :

$$|\langle \Pi(g)x, y \rangle| \leqq d(\delta)^2 \Xi(g),$$

pour $x \in \mathscr{V}_{\delta^{\sigma}}$, $y \in \mathscr{V}_{\delta}$ unitaires. D'après la décomposition de Cartan de $G_{\mathbb{C}}$, il suffit de le montrer pour $g = a$ dans la chambre dominante de A.

(8) Je remercie R. P. Langlands de m'avoir indiqué l'usage des estimées uniformes pour résoudre ce problème.

L'espace $\mathscr{V}$ est formé de fonctions U-finies sur U; si $f \in \mathscr{V}$, $\Pi(a) f \in \overline{\mathscr{V}}$ a pour expression :

$$\rho(a) f(u) = f(\underline{u}(a^{-1} u))\, \underline{a}(a^{-1} u)^{-\lambda-\rho},$$

ρ comme d'habitude et $x = \underline{u}(x)\,\underline{a}(x)\,\underline{n}(x)$ étant la décomposition d'Iwasawa dans $G_{\mathbb{C}}$. La structure hilbertienne invariante sur $\overline{\mathscr{V}}$ est donnée par $\|f\|^2 = \int_U |f(u)|^2\, du$.

Si f est, par exemple, C^∞ sur U, la formule de Plancherel s'écrit :

$$f(1) = \sum_{\nu \in \hat{U}} \int_U f(u)\, d(\nu) \text{ trace } \nu(u)\, du.$$

Si f est de type δ, toutes les intégrales sont nulles sauf une et l'on a :

$$f(1) = \int_U f(x)\, d(\delta) \text{ trace } \delta(x)\, dx.$$

D'après l'inégalité de Schwarz :

$$|f(1)|^2 \leqq \|f\|^2 \left(\int_U d(\delta)^2 \,|\text{ trace } \delta(x)|^2\, dx \right)$$

et la formule de Plancherel appliquée à $f = d(\delta)$ trace δ montre que le terme entre parenthèses est égal à $d(\delta)$ trace $\delta(1) = d(\delta)^2$.

On a donc $|f(1)| \leqq d(\delta)\, \|f\|$; comme ceci est vrai aussi pour les translatées de f, on voit que :

$$\operatorname*{Sup}_U |f(u)| \leqq d(\delta) \qquad \text{si} \quad \|f\| = 1.$$

Appliquons ceci à $f \in \mathscr{V}_{\delta^\sigma}$, $g \in \mathscr{V}_\delta$:

$$\langle \Pi(a) f, g \rangle = \int_U f(\underline{u}(a^{-1} u))\, \underline{a}(a^{-1} u)^{-\lambda-\rho}\, \bar{g}(u)\, du,$$

donc en majorant $|f|$ et $|g|$, pour f et g de norme 1 :

$$|\langle \Pi(a) f, g \rangle| \leqq d(\delta)\, d(\delta^\sigma) \int_U \underline{a}(a^{-1} u)^{-\rho}\, du,$$

puisque λ est unitaire. Il ne reste plus qu'à reconnaître l'expression de la fonction sphérique élémentaire :

$$\Xi(a) = \Xi(a^{-1}) = \int_U \underline{a}(a^{-1} u)^{-\rho}\, du. \quad \square$$

Soit maintenant $\psi \in C_c^\infty(G_{\mathbb{C}})$. On a :

$$\operatorname{trace}(\Pi_{\delta, \delta^\sigma}(\psi) A) = \int_{G_{\mathbb{C}}} \psi(g) \operatorname{trace}(\Pi_{\delta, \delta^\sigma}(g) A)\, dg,$$

donc d'après le *lemme* :

$$|\operatorname{trace}(\Pi_{\delta, \delta^\sigma}(\psi) A)| \leqq m(\delta)\, d(\delta)^3 \int_{G_{\mathbb{C}}} |\psi(g)|\, \Xi(g)\, dg,$$

Pour $N_1 > 0$ assez grand, on sait ([30], II, 8.3.7.5) que :

$$\int_{G_{\mathbb{C}}} \Xi(g)^2 (1+\sigma(g))^{-N_1}\, dg = C < \infty.$$

On a alors :

$$|\operatorname{trace}(\Pi_{\delta, \delta^\sigma}(\psi) A)| \leqq m(\delta)\, d(\delta)^3\, C \operatorname*{Sup}_{G_{\mathbb{C}}} |\psi(g)\, \Xi(g)^{-1} (1+\sigma(g))^{N_1}|,$$

avec une constante C indépendante de δ. Comme $m(\delta)$ est lui-même majoré par une puissance de $d(\delta)$, on obtient :

$$|\operatorname{trace}(\Pi_{\delta, \delta^\sigma}(\psi) A)| \leqq C_1\, d(\delta)^{N_2} \operatorname*{Sup}_{G_{\mathbb{C}}} |\psi(g)\, \Xi(g)^{-1} (1+\sigma(g))^{N_1}|.$$

Pour N assez grand, $\sum_\delta d(\delta)^{N_2 - N}$ converge absolument, et la décomposition de $\operatorname{trace}(\Pi(\varphi) A)$ suivant les U-types montre que :

$$|\operatorname{trace}(\Pi(\varphi) A)| \leqq C_1 \left(\sum_\delta d(\delta)^{N_2 - N}\right) \operatorname*{Sup}_{G_{\mathbb{C}}} |(\omega^N \star \varphi)\, \Xi^{-1} (1+\sigma(g))^{N_1}|,$$

c'est-à-dire que $\varphi \to \operatorname{trace}(\Pi(\varphi) A)$ est tempérée. $\square$

6. Le relèvement des représentations d'un groupe compact

1. Nous démontrons maintenant le théorème de relèvement dans le cas d'un groupe réductif compact, ou plus généralement quand son groupe dérivé est compact (= anisotrope). Soit donc G un groupe réductif connexe, G_{der} son groupe dérivé; on suppose $(G_{der})_{\mathbb{R}}$ compact. D'après la classification de Langlands (chap. 1), le dual de $G_{\mathbb{R}}$ est en bijection avec l'ensemble $\Phi_{\mathbb{R}}(G)$ des classes de sections admissibles discrètes du L-groupe réel de G; on obtient une véritable bijection, i. e., il n'y a pas de L-indiscernabilité, car G_{der} est anisotrope. Si $\varphi \in \Phi_{\mathbb{R}}(G)$, soit Φ la restriction de φ à la composante neutre $W_{\mathbb{C}}$ de $W_{\mathbb{R}}$.

Soient π, Π les représentations de $G_{\mathbb{R}}$, $G_{\mathbb{C}}$ associées à φ, Φ. On sait que Π est σ-stable; c'est le relèvement de π. Soit A un opérateur d'entrelacement involutif de Π et $\Pi \circ \sigma$.

Soit N l'application norme de G; N envoie les éléments σ-réguliers, σ-elliptiques de $G_{\mathbb{C}}$ sur les classes régulières de conjugaison stable de carrés de $G_{\mathbb{R}}$. Comme G_{der} est anisotrope, la conjugaison stable coïncide avec la conjugaison (chap. 2, § 2).

THÉORÈME 6.1. — *Soient* π *une représentation irréductible de* $G_{\mathbb{R}}$, Π *le relèvement de* π *à* $G_{\mathbb{C}}$, $A : \Pi \sim \Pi \circ \sigma$, $A^2 = 1$. *Alors, les notations étant conformes au chapitre* 4 :

$$\operatorname{trace}(\Pi(g)A) = \varepsilon \operatorname{trace} \pi(Ng),$$

pour tout g σ*-régulier,* σ*-elliptique de* $G_{\mathbb{C}}$, ε *étant égal à* ± 1.

Remarque. — On peut spécifier le choix de A et la valeur de ε (§ 4).

La suite de ce chapitre est consacrée à la démonstration.

2. RÉDUCTION AU CAS SEMI-SIMPLE.

LEMME 6.2. — *Soit* G *réductif connexe défini sur* $\mathbb{R}$, G_{der} *anisotrope. Soit* G_{rad} *le plus grand tore central de* G. *Alors :*

$$G_{\mathbb{R}} = G_{rad}(\mathbb{R})\, G_{der}(\mathbb{R}),$$

i.e. $G_{\mathbb{R}}$ *est le produit des deux groupes, d'intersection peut-être non triviale.*

Démonstration. — Soit T un tore déployé maximal de G. Soit G_{ad} le groupe adjoint de G. L'image de T par la projection $G \to G_{ad}$ est un tore déployé de G_{ad}, donc réduit à l'élément neutre. En particulier, $T(\mathbb{R})$ a une image réduite à 1 dans $G_{ad}(\mathbb{R})$; la suite exacte $1 \to Z(\mathbb{R}) \to G(\mathbb{R}) \to G_{ad}(\mathbb{R})$ montre que $T(\mathbb{R})$ est central. Donc $T(\mathbb{R}) \subset G_{rad}(\mathbb{R})$. Comme $T(\mathbb{R})$ rencontre toutes les composantes connexes de $G_{\mathbb{R}}$ pour la topologie réelle (Matsumoto, *cf.* Borel-Tits [2], th. 14.4), il en est de même pour $G_{rad}(\mathbb{R})$.

On est alors ramené à montrer que $g \in G_{rad}(\mathbb{R})\, G_{der}(\mathbb{R})$ si g est dans la composante neutre topologique de $G_{\mathbb{R}}$, ce qui est évident :

$$G_{\mathbb{R}}^0 = G_{rad}^0(\mathbb{R})\, G_{der}(\mathbb{R}). \quad \square$$

Soit G comme ci-dessus. Les inclusions $G_{rad} \to G$, $G_{der} \to G$ nous donnent des homomorphismes de L-groupes sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$: ${}^LG \to {}^LG_{rad}$, ${}^LG \to {}^LG_{der}$.

Soit $F = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, ${}^LG$ le L-groupe associé à F. Si φ est une section admissible de ${}^LG$ (discrète dans le cas réel), on en déduit par composition une section admissible φ_0 de ${}^LG_{der}$, ψ de ${}^LG_{rad}$. (On emploie les majuscules correspondantes dans le cas complexe). Si π est la représentation irréductible de G_F associée à φ, la décomposition :

$$G_F = G_{rad}(F)\, G_{der}(F),$$

qui est évidemment valide dans le cas complexe, montre que $\pi_{|G_{der}(F)}$ est une représentation irréductible π_0 de $G_{der}(F)$; $\pi|_{G_{rad}(F)}$ est un caractère χ de $G_{rad}(F)$. Langlands a montré ([14], *cf.* Borel [1], 8.3) que π_0 est alors la représentation de $G_{der}(F)$ associée à φ_0, et χ le caractère de G_{rad} associé à ψ.

Si maintenant Φ (section de ${}^L G$ sur $\mathbb{C}$) est la restriction de φ (section de ${}^L G$ sur $\mathbb{R}$), il est clair que Φ_0 et Ψ, ainsi associés à Φ, sont les restrictions de φ_0 et ψ. Si $\Pi, \Pi_0, X, \pi, \pi_0, \chi$ sont les représentations associées, et si A entrelace Π et $\Pi \circ \sigma$ et est involutif, A entrelace aussi Π_0 et $\Pi_0 \circ \sigma$; on a $X(z) = X(z^\sigma)$ pour $z \in G_{\text{rad}}(\mathbb{C})$. La représentation Π_0 relève π_0, et X relève χ.

D'après les formules de relèvement pour les tores (prop. 1.2), on a donc :

$$X(z) = \chi(Nz) = \chi(z z^\sigma), \qquad z \in G_{\text{rad}}(\mathbb{C}).$$

Par ailleurs, en supposant le relèvement démontré dans le cas semi-simple compact :

$$\text{trace}(\Pi_0(g)A) = \varepsilon \text{ trace } \pi_0(Ng), \qquad \varepsilon = \pm 1,$$

pour g σ-régulier, σ-elliptique dans $G_{\text{der}}(\mathbb{C})$. On voit facilement que dans un sens évident :

$$N(zg_0) = N z N g_0, \qquad z \in G_{\text{rad}}(\mathbb{C}), \quad g_0 \in G_{\text{der}}(\mathbb{C}).$$

On a alors, si $g = zg_0$ est la décomposition de g :

$$\begin{aligned}\text{trace}(\Pi(g)A) &= \text{trace}(X(z)\,\Pi_0(g_0)A) = X(z)\,\text{trace}(\Pi_0(g_0)A)\\ &= \varepsilon\chi(Nz)\,\text{trace } \pi_0(Ng_0) = \varepsilon \text{ trace } \pi(NzNg_0) = \varepsilon \text{ trace } \pi(Ng).\end{aligned}$$

On peut donc se limiter à traiter le cas semi-simple, ce qui limite appréciablement la complexité des notations.

3. Fonctorialité de Langlands dans le cas semi-simple compact. — Comme nous aurons besoin de l'expression précise de la correspondance dans ce cas, nous décrivons, faute de référence commode, cette partie du mémoire de Langlands [14].

G est donc connexe anisotrope semi-simple $/\mathbb{R}$; soit ${}^L G = {}^L G^0 \rtimes \Gamma_{\mathbb{R}}$ le L-groupe de G. Si $\varphi \in \Phi_{\mathbb{R}}(G)$, $\varphi : W_{\mathbb{R}} \to {}^L G$, on a $\varphi(w) = (\varphi^0(w), \sigma(w))$, $\varphi^0(w) \in {}^L G^0$, $\sigma(w)$ l'image de w par $W_{\mathbb{R}} \to \Gamma_{\mathbb{R}}$. La composante φ^0 est alors un homomorphisme tordu : $\varphi^0(w_1 w_2) = \varphi^0(w_1)^{\sigma(w_1)} \varphi^0(w_2)$. Dans ces conditions, Langlands montre qu'il existe un tore maximal ${}^L T^0$ de G^0 que $\varphi(W_{\mathbb{C}})$ centralise [i.e., $\varphi(W_{\mathbb{C}}) \in {}^L T^0$] et que $\varphi(W_{\mathbb{R}})$ normalise. Comme :

$$(h, \sigma)(t, 1)(h, \sigma)^{-1} = (h, \sigma)(t, 1)({}^\sigma h^{-1}, \sigma) = (h\,{}^\sigma t\,h^{-1}, 1),$$

on voit que $\varphi^0(W_{\mathbb{R}})$ normalise ${}^L T^0$. A conjugaison près, on peut supposer que ${}^L T^0$ est le tore utilisé pour définir le L-groupe, ce qu'on fera par la suite.

Notons τ l'élément $(1, \sigma)$ de $W_{\mathbb{R}}$. L'image $\sigma(\tau)$ de τ par $W_{\mathbb{R}} \to \Gamma_{\mathbb{R}}$ est l'élément non trivial σ, et $\tau^2 = -1$ d'où :

$$(\varphi_0(\tau), \sigma)^2 = (\varphi_0(\tau)\,{}^\sigma\varphi_0(\tau), 1) = (\varphi_0(-1), 1).$$

Posons $h = \varphi_0(\tau) \in N({}^L T^0)$; donc $h\,{}^\sigma h = \varphi_0(-1)$. Par ailleurs, $\varphi(\tau)$ opère par conjugaison sur ${}^L T^0$; si $t \in {}^L T^0$, on vérifie facilement que :

$$\varphi(\tau)(t, 1)\,\varphi(\tau)^{-1} = (h\,{}^\sigma t\,h^{-1}, 1).$$

donc $\varphi(\tau)$ opère par $t \mapsto h\,{}^\sigma t\,h^{-1}$.

On introduit maintenant la condition définissant les sections discrètes : $\varphi(W_{\mathbb{R}})$ n'est contenu dans aucun parabolique propre de ${}^LG$. Un sous-groupe parabolique de ${}^LG$ est un sous-groupe de ${}^LG$ qui se projette surjectivement sur $\Gamma_{\mathbb{R}}$ et est le normalisateur d'un sous-groupe parabolique de ${}^LG^0$. Comme $\varphi(W_{\mathbb{R}})$ satisfait la première condition, l'hypothèse est donc que $\varphi(W_{\mathbb{R}})$ ne normalise aucun parabolique propre de ${}^LG^0$.

LEMME 6.3. — *Dans ce cas,* $\varphi(\tau)$ *opère sur* ${}^LT^0$ *par* $t \mapsto t^{-1}$; *de plus, la classe de* h *dans* $W({}^LT^0)=N({}^LT^0)/{}^LT^0$ *est l'élément de plus grande longueur du groupe de Weyl.*

Démonstration. — Puisque $\varphi(\tau)^2=\varphi(-1)\in{}^LT^0$, l'action de $\varphi(\tau)$ sur ${}^LT^0$ est involutive. Soit $E=X^*({}^LT^0)\otimes\mathbb{R}$ l'espace réel engendré par les racines; $\varphi(\tau)$ agit sur E par une involution respectant le système de racines. Si celle-ci a un vecteur fixe $x\neq 0$, l'ensemble des racines $\{\alpha\,|\,(\alpha, x)\geqq 0\}$ définit un parabolique propre de ${}^LG^0$, normalisé par $\varphi(W_{\mathbb{R}})$. Donc $\varphi(\tau)$ doit agir par (-1) sur E, par $t\mapsto t^{-1}$ sur ${}^LT^0$.

L'action de σ sur $\Delta^\vee\subset X^*({}^LT^0)$ (chap. 1, § 2) respecte les racines positives; comme $\varphi(\tau)=\mathrm{Ad}(h)\circ\sigma$ agit par (-1), on voit que $\mathrm{Ad}(h)$ doit envoyer les racines positives sur les négatives; donc $\mathrm{Ad}(h)=w_0$, l'élément de plus grande longueur du groupe de Weyl. □

Tous les $\varphi(\tau)=(h, \sigma)$ satisfaisant aux conditions du lemme sont conjugués par un élément de ${}^LT^0$; en effet :

$$(t, 1)\,(h, \sigma)\,(t^{-1}, 1)=(th.{}^{\sigma}t^{-1}, \sigma)=(h.\,(t^{w_0})^2, \sigma).$$

Comme la classe de h dans W est égale à w_0, *deux* h possibles diffèrent par un $u\in{}^LT^0$, qu'on peut prendre égal à $(t^{w_0})^2$ pour un $t\in{}^LT^0$. En particulier, deux tels choix de $\varphi(\tau)$ définissent le même élément de $\Phi_{\mathbb{R}}(G)$.

Cherchons maintenant les conditions satisfaites par $\psi=\varphi|_{W_{\mathbb{C}}}$. Tout d'abord :

(i) $\tau z\tau^{-1}=\bar{z}$, $z\in W_{\mathbb{C}}$, d'où $\varphi(\bar{z})=\varphi(\tau)\varphi(z)\varphi(\tau)^{-1}=\varphi(z)^{-1}$.

Donc : $\psi(z)=\psi(z)^{-1}$, *i.e.* $\varphi=1$ *sur* $\mathbb{R}_+^\times\subset\mathbb{C}^\times$ [9].

(ii) Montrons que ψ est régulier, i. e. $\alpha^\vee\circ\psi\neq 1$ pour toute racine $\alpha^\vee$ de $\Delta^\vee$. Supposons que $\alpha^\vee\circ\psi=1$: on a $\varphi(z)X_\alpha=X_\alpha$ pour tout $z\in W_{\mathbb{C}}$, $X_\alpha\in\mathrm{Lie}({}^LG^0)$ de poids $\alpha^\vee$.

Soit $Z=X_\alpha+\mathrm{Ad}(\tau)X_\alpha$.

On a $\mathrm{Ad}(\tau)Z=\mathrm{Ad}(\tau)X_\alpha+\mathrm{Ad}(\tau^2)X_\alpha=Z$, puisque $\tau^2=-1$, et $(\alpha^\vee\circ\psi)\,(-1)=1$. Par ailleurs, $\mathrm{Ad}(\tau)X_\alpha$ est un vecteur non nul de poids $(-\alpha)$. Il est bien connu qu'alors Z est semi-simple; Z commute à ${}^LT^0_\alpha=\mathrm{Ker}\,\alpha\subset{}^LT^0$, d'où un tore maximal ${}^LT^0_1={}^LT^0_\alpha.\exp(\mathbb{C}Z)$; $\varphi(\tau)$ agit par $t\mapsto t^{-1}$ sur ${}^LT^0_\alpha$, par l'identité sur $\exp(\mathbb{C}Z)$, et $\varphi(W_{\mathbb{R}})$ normalise ${}^LT^0_1$. Mais alors le Lemme précédent s'applique pour montrer que $\varphi(\tau)$ agit par $t\mapsto t^{-1}$, ce qui contredit la construction de ${}^LT^0_1$. □

On voit donc que ψ est un homomorphisme elliptique $(\varphi(\bar{z})=\varphi(z)^{-1})$ régulier de $\mathbb{C}^\times\cong W_{\mathbb{C}}$ dans ${}^LT^0$. Réciproquement, ces conditions et celle du lemme 6.3 sur $\varphi(\tau)$ impliquent que $\varphi(W_{\mathbb{R}})$ ne normalise aucun parabolique propre de ${}^LG^0$; en effet, si $\varphi(W_{\mathbb{R}})$ normalise ${}^LP^0$, on doit avoir $\varphi(W_{\mathbb{C}})\subset{}^LP^0$; le centralisateur d'un élément semi-simple régulier dans ${}^LP^0$ est son

[9] On dira que ψ est *elliptique*.

centralisateur dans ${}^{L}G^{0}$, donc par régularité de φ, ${}^{L}P^{0} \supset {}^{L}T^{0}$. Mais alors ${}^{L}P^{0}$ ne peut être normalisé par $\varphi(\tau)$ qui agit par (-1) sur ${}^{L}T^{0}$.

Pour obtenir toutes les sections admissibles, il ne nous reste donc qu'à vérifier à quelles conditions ψ et $\varphi(\tau)$ ainsi définis donnent un homomorphisme de $W_{\mathbb{R}}$ dans ${}^{L}G$; ceci équivaut à $\psi(-1)=h.{}^{\sigma}h$.

Soit ρ la demi-somme des racines positives sur T pour un ordre quelconque. Par dualité, 2ρ [qui est dans $X^*(T)$] donne un sous-groupe à un paramètre : $\mathbb{C}^{\times} \to {}^{L}T^{0}$.

LEMME 6.4. — (« lemme 3.2 » de Langlands [14]). — *Sous les hypothèses ci-dessus* $h.{}^{\sigma}h=(-1)^{2\rho}$, *ou ce qui est équivalent*, $\lambda^{\vee}(h.{}^{\sigma}h)=(-1)^{\langle 2\rho,\lambda^{\vee}\rangle}$ *pour tout* $\lambda^{\vee}\in L^{\vee}$.

(On vérifie que $(-1)^{2\rho}$ ne dépend pas de l'ordre choisi sur les racines.) Nous admettons ce lemme. D'après la description des homomorphismes continus de $\mathbb{C}^{\times}$ dans un tore complexe (chap. 1, § 4),

$$\psi(z)=z^{\mu}(\bar{z})^{\nu}, \qquad \mu,\, \nu\in L\otimes\mathbb{C}, \quad \mu-\nu\in L,$$

où $L=\mathrm{Hom}_{\mathrm{gr.\,alg.}}(\mathbb{C}^{\times}, {}^{L}T^{0})$; autrement dit, pour tout $\lambda^{\vee}\in L^{\vee}=\mathrm{Hom}_{\mathrm{gr.\,alg.}}({}^{L}T^{0}, \mathbb{C}^{\times})$, on a :

$$\lambda^{\vee}(\psi(z))=z^{\langle\lambda^{\vee},\mu\rangle}\,\bar{z}^{\langle\lambda^{\vee},\nu\rangle}.$$

L'ellipticité et la régularité de ψ impliquent :

$$\psi(z)=z^{\mu}(\bar{z})^{-\mu}, \qquad \mu\in L\otimes\mathbb{C}, \quad 2\mu\in L,$$
$$\langle\mu,\alpha^{\vee}\rangle\neq 0 \quad \text{pour tout } \alpha^{\vee}\in\Delta^{\vee}.$$

Donc μ définit un système de racines positives dans Δ. Soit ρ leur demi-somme. On doit avoir :

$$\psi(-1)=(-1)^{2\rho} \quad \text{d'après le lemme 6.4.}$$

Si on considère l'homomorphisme $\varepsilon(z)=z^{\rho}(\bar{z})^{-\rho}$, bien défini puisque $2\rho\in L$, on a, puisque $-1=\exp(i\pi)$:

$$\lambda^{\vee}(\varepsilon(-1))=e^{\langle\lambda^{\vee},\rho\rangle i\pi}\,e^{-\langle\lambda^{\vee},-\rho\rangle i\pi}=e^{\langle\lambda^{\vee},2\rho\rangle i\pi}=(-1)^{\langle\lambda^{\vee},2\rho\rangle},$$

pour tout $\lambda^{\vee}\in L^{\vee}$ (et donc $\langle\lambda^{\vee},2\rho\rangle\in\mathbb{Z}$). La condition sur ψ est donc $\psi(-1)=\varepsilon(-1)$, i. e., si ψ_1 est le caractère $\psi\varepsilon^{-1}=z^{\mu-\rho}(\bar{z})^{-\mu+\rho}$:

$$\psi_1(-1)=1.$$

La fonctorialité dans le cas des tores (chap. 1, § 4) montre que les caractères d'un tore anisotrope $T_{\mathbb{R}}$ s'identifient aux homomorphismes $\xi : \mathbb{C}^{\times}\to {}^{L}T^{0}$ tels que $\xi(z)=\xi(\bar{z})^{-1}$ et $\xi(-1)=1$. Donc ψ_1 définit un caractère du tore anisotrope associé à ${}^{L}T^{0}$, qui s'identifie naturellement à un tore maximal de $G_{\mathbb{R}}$. L'ensemble des caractères du tore étant identifié à L, ce caractère est $\mu-\rho$. C'est le plus haut poids de la représentation de $G_{\mathbb{R}}$ cherchée.

Récapitulons :

PROPOSITION 6.5. — *Les classes de sections admissibles de* ${}^{L}G^{0} \rtimes W_{\mathbb{R}}$, *discrètes, sont déterminées par leur restriction* ψ *à* $\mathbb{C}^{\times} \cong W_{\mathbb{C}}$; *on peut supposer que* $\psi(\mathbb{C}^{\times}) \subset {}^{L}T^{0}$, *et* ψ *doit satisfaire :*

(i) $\psi(z) = \psi(\bar{z})^{-1}$;

(ii) ψ *régulier;*

(iii) $\psi(-1) = (-1)^{2\rho}$.

Un tel ψ *est de la forme* $z \mapsto z^{\mu}(\bar{z})^{-\mu}$, $\mu \in (1/2)\mathrm{L}$ *régulier; si* ρ *est la demi-somme de racines associée à* μ, $\mu - \rho$ *est alors le plus haut poids d'une représentation irréductible* π *de* $G_{\mathbb{R}}$. *Si* ψ' *est conjugué à* ψ *par* ${}^{L}G^{0}$, *il l'est par* $W = N({}^{L}T^{0})/{}^{L}G^{0}$ *et détermine donc la même représentation. On obtient ainsi une bijection entre représentations irréductibles de* $G_{\mathbb{R}}$ *et sections admissibles discrètes modulo conjugaison.*

4. CAS SEMI-SIMPLE. — G est connexe semi-simple anisotrope/$\mathbb{R}$.

Soit φ une section admissible de ${}^{L}G^{0} \times W_{\mathbb{R}}$, comme dans la proposition 6.5. Sa restriction ψ à $W_{\mathbb{C}}$, qu'on notera maintenant Φ, est une section du L-groupe complexe, donc détermine par dualité une représentation de $G_{\mathbb{C}}$. Nous voulons décrire cette représentation. Soit plus généralement $\Phi : W_{\mathbb{C}} \to {}^{L}T^{0}$ un homomorphisme. La dualité pour les tores associe à Φ un caractère X de $T_{\mathbb{C}}$; si $\Phi(z) = z^{\mu}(\bar{z})^{\nu}$, μ, $\nu \in L \otimes \mathbb{C}$, $\mu - \nu \in L$, $L = X^{*}(T) \cong X_{*}({}^{L}T^{0})$, on a $X(t) = t^{\mu}(\bar{t})^{\nu}$, (chap. 1, § 4). Soit $B_{\mathbb{C}} = T_{\mathbb{C}} N_{\mathbb{C}}$ un sous-groupe de Borel de $G_{\mathbb{C}}$ contenant $T_{\mathbb{C}}$; la représentation $P = \mathrm{ind}_{T_{\mathbb{C}} N_{\mathbb{C}}}^{G_{\mathbb{R}}} (X \otimes 1)$ contient un unique K-type minimal, dont la multiplicité est 1; la représentation irréductible Π de $G_{\mathbb{C}}$ associée à Φ est l'unique sous-quotient de P contenant ce K-type (*cf.* Langlands [14]; Borel [1], § 9); cette classification à l'aide des K-types minimaux est en fait celle de Zelobenko, mais Duflo [6] montre qu'elle coïncide avec celle de Langlands.

Si $\Phi(z) = z^{\mu}(\bar{z})^{-\mu}$, $2\mu \in L$, X est unitaire donc P est irréductible; $\Pi = P$.

Soit $G_{\mathbb{C}} = UAN_{\mathbb{C}}$ une décomposition d'Iwasawa de $G_{\mathbb{C}}$; en particulier, $U \cong G_{\mathbb{R}}$. Soit M le commutant de A dans U; $T_{\mathbb{C}} = MA$ est un sous-groupe de Cartan de $G_{\mathbb{C}}$, qu'on identifie au $T_{\mathbb{C}}$ précédent; L est le réseau des caractères rationnels de $T_{\mathbb{C}}$, qui s'identifie par restriction au réseau des caractères de M. On a alors :

$$X(t) = X(ma) = (ma)^{\mu}(m^{-1}a)^{-\mu} = m^{2\mu}, \qquad \mu \in \frac{1}{2}L, \quad \mu - \rho \in L.$$

De façon générale, si $\xi \in L \equiv \hat{M}$, $\lambda \in \mathfrak{a}^{*}$, notons $\Pi(\mu, \lambda)$ la représentation $\mathrm{ind}_{MAN_{\mathbb{C}}}^{G_{\mathbb{C}}}$ $(\xi \otimes a^{\lambda} \otimes 1)$. On doit alors montrer :

PROPOSITION 6.6. — *Soit* $\mu \in (1/2)L$, $\mu - \rho \in L$, μ *régulier. Alors :*

(i) *la représentation* $\Pi = \Pi(2\mu, 0)$ *est* σ*-stable;*

(ii) *si* A *entrelace* Π *et* $\Pi \circ \sigma$ *et vaut* 1 *sur le* U*-type minimal*, $\mathrm{trace}(\Pi(g)A) = \mathrm{trace}\, \pi(Ng)$, g σ*-régulier* σ*-elliptique*, π *étant la représentation de plus haut poids* $\mu - \rho$ *de* $G_{\mathbb{R}}$.

Démonstration. — D'après le chapitre 1, la restriction à $W_{\mathbb{C}}$ d'une section du L-groupe réel donne toujours une représentation σ-stable (1, § 3), ce qui démontre (i). En fait, on va construire explicitement un opérateur d'entrelacement. La représentation $\Pi(\mu, \lambda)$ se réalise dans l'espace $\overline{\mathscr{L}}(\mu, \lambda)$ des fonctions φ sur $G_{\mathbb{C}}$, L^2 sur U, vérifiant :

$$\varphi(gman) = m^{-\mu} a^{-\lambda-\rho} \varphi(g), \qquad man \in \mathrm{MAN}_{\mathbb{C}}.$$

Soit M′ le normalisateur de A dans U, $W = M'/M$ le groupe de Weyl, w_0 l'élément de plus grande longueur de W, w un représentant de w_0 dans M′.

LEMME 6.7. — *Soit* B *l'opérateur défini sur* $\overline{\mathscr{L}}(\mu, \lambda)$ *par :*

$$\varphi(g) \mapsto \psi(g) = \varphi({}^{\sigma}gw^{-1}).$$

L'opérateur B *envoie* $\overline{\mathscr{L}}(\mu, \lambda)$ *sur* $\overline{\mathscr{L}}(w_0\mu, -w_0\lambda)$ *et entrelace* $\Pi(\mu, \lambda)$ *et* $\Pi(w_0\mu, -w_0\lambda)\circ\sigma$.

Démonstration. — Comme $G_{\mathbb{C}}$ opère par translation à gauche, il est clair que B entrelace l'action de g et celle de ${}^{\sigma}g$. Comme B^2 est scalaire, il suffit de vérifier que B envoie $\overline{\mathscr{L}}(\mu, \lambda)$ dans $\overline{\mathscr{L}}(w_0\mu, -w_0\lambda)$. Si $\psi = B\varphi$, on a :

$$\psi(gman) = \varphi({}^{\sigma}gma^{-1}\,{}^{\sigma}nw^{-1}) = \varphi({}^{\sigma}gw^{-1}\, m^{w_0} a^{-w_0} u),$$

avec :

$${}^{\sigma}n \in N_{\mathbb{C}}^{-} = w\, N_{\mathbb{C}}\, w^{-1} = {}^{\sigma}N_{\mathbb{C}}, \qquad u \in N_{\mathbb{C}},$$

donc :

$$\psi(gman) = m^{-w_0\mu} a^{w_0\lambda + w_0\rho} \psi(g) = m^{-w_0\mu} a^{w_0\lambda - \rho} \psi(g)$$

car $w_0\rho = -\rho$, i. e. $\psi \in \overline{\mathscr{L}}(w_0\mu, -w_0\lambda)$. $\square$

En particulier, B entrelace $\Pi(\mu, 0)$ et $\Pi(w_0\mu, 0)\circ\sigma$; il est clair que B est unitaire. Nous voulons entrelacer $\Pi(\mu, 0)$ et $\Pi(\mu, 0)\circ\sigma$; il suffit d'entrelacer $\Pi(w_0\mu, 0)$ et $\Pi(\mu, 0)$ à l'aide d'un opérateur d'entrelacement classique.

Si, pour tout $\alpha \in \Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{t}_{\mathbb{C}})$, $H_{\alpha} \in \mathfrak{a}$ est la coracine [de sorte que $\alpha(H_{\alpha}) = 2$] on définit $D(w_0)$ comme l'ensemble des $\lambda \in \mathfrak{a}^*$ tels que $\langle \lambda, H_{\alpha} \rangle > 0$, tout $\alpha \in \Delta^+ = \Delta(\mathfrak{b}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{t}_{\mathbb{C}})$.

LEMME 6.8. — (Schiffmann, *cf.* Duflo [6]). — *Soit* φ *une fonction continue dans* $\mathscr{L}(\mu, \lambda)$. *Alors l'intégrale :*

$$C(\lambda)\varphi(g) = \int_{N_{\mathbb{C}}} \varphi(gnw)\, dn$$

converge absolument si $\mathrm{Re}\,\lambda \in D(w_0)$. *En particulier, elle est définie pour* φ *U-finie, et* $C(\lambda)\varphi$ *est alors dans* $\mathscr{L}(w_0\mu, w_0\lambda)$. *Comme* $C(\lambda)$ *commute aux translations à gauche, il entrelace les* $(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, U)$*-modules* $\mathscr{L}(\mu, \lambda)$ *et* $\mathscr{L}(w_0\mu, w_0\lambda)$.

(Ici $\mathscr{L}(\mu, \lambda)$ désigne le $(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, U)$-module obtenu par restriction de $\overline{\mathscr{L}}$ aux vecteurs U-finis.)

En composant avec l'opérateur B, on voit que l'intégrale :

$$A(\lambda)\varphi(g) = \int_{N_{\mathbb{C}}} B\varphi(gnw)\, dn = \int_{N_{\mathbb{C}}} \varphi(g^{\sigma} n^{\sigma})\, dn,$$

i. e. :

$$A(\lambda)\,\varphi(g)=\int_{N_{\mathbb{C}}^{-}}\varphi(g^{\sigma}u)\,du,$$

converge absolument pour $\operatorname{Re}\lambda\in D(w_0)$ [donc $\operatorname{Re}(-w_0\lambda)\in D(w_0)$], entrelaçant $\Pi(\mu,\lambda)$ et $\Pi(\mu,-\lambda)\circ\sigma$. On suppose la mesure sur $N_{\mathbb{C}}^{-}$ normalisée par :

$$\int_{N_{\mathbb{C}}^{-}}\underline{a}(u)^{-2\rho}\,du=\prod_{\alpha>0}\rho(H_\alpha)^{-1},$$

où $g=\underline{k}(g)\,\underline{a}(g)\,\underline{n}(g)$ est défini par la décomposition d'Iwasawa $G_{\mathbb{C}}=UAN_{\mathbb{C}}$. Cette normalisation coïncide avec celle utilisée dans Duflo [6], donc $A(\lambda)=C(\lambda)\,B$, $C(\lambda)$ comme dans [6] ([10]).

Nous voulons étudier la convergence et la normalisation en 0 de $A(\lambda)$. L'espace des vecteurs K-finis $\mathscr{L}(\mu,\lambda)$ s'identifie à un espace fixe de vecteurs sur U, noté $\mathscr{L}(\mu)$; $C(\lambda)$ envoie $\mathscr{L}(\mu)$ dans $\mathscr{L}(w_0\mu)$ et $A(\lambda)$ agit dans $\mathscr{L}(\mu)$. Soit $D(\lambda)$ l'opérateur d'entrelacement normalisé :

$$D(\lambda)=\prod_{\alpha>0}(\lambda(H_\alpha)+|\mu(H_\alpha)|)\,C(\lambda).$$

Alors $D(0)=\lim_{\substack{\lambda\to 0\\ \operatorname{Re}\lambda\in D(w_0)}} D(\lambda)$ est défini et unitaire. Ceci résulte de l'expression de $D(\lambda)$ comme produit d'opérateurs élémentaires dont on connaît les éléments matriciels (*cf.* [6]), mais aussi de l'argument suivant : $D(\lambda)$ agit sur $\mathscr{L}(\mu)$ par un opérateur dont les coefficients sont des fonctions rationnelles en λ. Soit $\mathscr{N}\subset\mathscr{L}(\mu)$ le sous-espace formé des vecteurs $v\in\mathscr{L}(\mu)$ tels que la fraction $D(\lambda)\,v$ soit définie et égale à 0 en $\lambda=0$. On vérifie facilement que $\mathscr{N}$ est un sous-$\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$-module de $\mathscr{L}(\mu,0)$. Il est bien connu que $\mathscr{L}(\mu,0)$ est irréductible. Comme $D(\lambda)$, par construction, agit de façon unitaire sur le U-type minimal, on voit que $\mathscr{N}$ est réduit à 0. Par ailleurs, $D(\lambda)=D(\mu,\lambda)$ étant normalisé vérifie la relation (pour le prolongement rationnel) $D(\mu,\lambda)\,D(w_0\mu,w_0\lambda)=1$, où $D(w_0\mu,w_0\lambda)$ est l'opérateur normalisé analogue : $\mathscr{L}(w_0\mu)\to\mathscr{L}(\mu)$.

Le même raisonnement montre que l'espace $\mathscr{N}'$ correspondant à $\mathscr{N}$ pour $D(w_0\mu,w_0\lambda)$ doit être égal à 0, et on en déduit que $D(\lambda)$ doit être défini et partout non nul en $\lambda=0$. Il définit alors une équivalence infinitésimale entre les deux représentations unitaires $\Pi(\mu,0)$ et $\Pi(w_0\mu,0)$; étant unitaire sur le U-type minimal, il est unitaire.

Composant avec B, on voit que l'opérateur :

$$A=\Big(\prod_{\alpha>0}|\mu(H_\alpha)|\Big)\lim_{\substack{\lambda\to 0\\ \operatorname{Re}\lambda\in D(w_0)}}A(\lambda)$$

est une équivalence unitaire entre $\Pi(\mu,0)$ et $\Pi(\mu,0)\circ\sigma$; le produit entre parenthèses est non nul puisque μ est régulier. Nous voulons vérifier que A est involutif; pour ceci, nous étudions son comportement sur le U-type minimal.

([10]) Nos opérateurs $C(\lambda)$ sont les $A(w,\mu,\lambda)$ de Duflo, nos $D(\lambda)$ ses $B(w,\mu,\lambda)$.

Soit E^μ la représentation de dimension finie de U dont μ est un poids extrémal : c'est le U-type minimal de $\mathscr{L}(\mu)$. Les fonctions de $\mathscr{L}(\mu)$ appartenant au U-type minimal sont les fonctions $c_{ef} : k \mapsto \langle e, k.f \rangle$, $e \in E^\mu$, $f \in E^\mu$ de poids μ, $\langle \quad \rangle$ étant le produit hermitien invariant. Rappelons que $w \in M'$ représente w_0; en particulier, w opère sur E^μ.

LEMME 6.9 (Duflo [6]) :

$$C(\lambda) c_{e,f} = \prod_{\alpha>0} (\lambda(H_\alpha) + |\mu(H_\alpha)|)^{-1} c_{e,w.f}.$$

On a $A(\lambda) = C(\lambda) B$. *Comme* $B\psi(k) = \psi(kw^{-1})$, *on voit que* $B c_{e,f} = c_{e,w^{-1}f}$. *Par conséquent :*

$$A(\lambda) c_{e,f} = \prod_{\alpha>0} (\lambda(H_\alpha) + |\mu(H_\alpha)|)^{-1} c_{e,f},$$

ce qui démontre enfin :

PROPOSITION 6.10. — *L'opérateur* A *est unitaire, involutif et entrelace* $\Pi(\mu, 0)$ *et* $\Pi(\mu, 0) \circ \sigma$. *De plus, il agit par* 1 *sur le* U-*type minimal.*

Nous utilisons maintenant les résultats du chapitre 4. Nous revenons aux hypothèses de la proposition 6.6; en particulier, $\Pi = \Pi(2\mu, 0)$. Soit V un voisinage ouvert invariant de 1 dans $U = G_{\mathbb{R}}$, sur lequel l'application carré q est injective; soit $W = \bigcup_{g \in G_{\mathbb{C}}} g V g^{-\sigma}$. Si T est la trace tordue associée à Π et A, on a d'après le théorème 4.8 :

$$T(gug^{-\sigma}) = t(u^2),$$

sur W, t étant une distribution propre invariante de $Z(\mathfrak{g}_{\mathbb{R}})$ sur $q(V)$; le caractère infinitésimal χ de t satisfait $\chi \circ N = X$, X étant celui de Π.

LEMME 6.11. — χ *est le caractère infinitésimal de la représentation* π *de* $G_{\mathbb{R}}$ *de plus haut poids* $\mu - \rho$.

C'est un cas particulier du fait plus général suivant : le relèvement dans le L-groupe implique le relèvement des caractères infinitésimaux. Soit $\mathfrak{h}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{a}$, $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}} = \mathfrak{m}$. Rappelons (chap. 4, § 3) que l'application norme commute avec les homomorphismes d'Harish-Chandra : si $\varphi : Z(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}) \to Z(\mathfrak{h}_{\mathbb{C}})^{W \times W}$, $\psi : Z(\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}) \approxeq Z(\mathfrak{h}_{\mathbb{R}})^W$, on a $\psi(Nz) = N_1 \varphi(z)$, $N : Z(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}) \to Z(\mathfrak{g}_{\mathbb{R}})$, $N_1 : Z(\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}) \to Z(\mathfrak{h}_{\mathbb{R}})$. Notant encore X, χ les caractères de $S(\mathfrak{h}_{\mathbb{C}})^{W \times W}$, $S(\mathfrak{h}_{\mathbb{R}})^W$ transportés par φ, ψ, il suffit donc de vérifier que $X(z) = \chi(N_1 z)$, $z \in S(\mathfrak{h}_{\mathbb{C}})^{W \times W}$. D'après le chapitre 4, paragraphe 2 (après la proposition 4.6), N_1 est obtenu de la façon suivante : si $H = Z + T$ est la décomposition de $H \in \mathfrak{h}_{\mathbb{C}}$ suivant $\mathfrak{h}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{a}$, on a un isomorphisme $\mathfrak{h}_{\mathbb{C}} \to \mathfrak{h}_{\mathbb{R}} \oplus \mathfrak{h}_{\mathbb{R}} = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{m}$ donné par $Z + T \mapsto (Z + \iota T)$, $Z - \iota T)$; ici ι désigne la multiplication par $\sqrt{-1}$ dans $\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}^0$, qui échange $\mathfrak{m}^0$ et $\mathfrak{a}^0$. La norme de $Z + T$ est l'image, par le produit : $S(\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}) \otimes S(\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}) \to S(\mathfrak{h}_{\mathbb{R}})$, de $(Z + \iota T, \; Z - \iota T) = (Z + \iota T) \otimes 1 + 1 \otimes (Z - \iota T)$; autrement dit, $N_1(Z + T) = 2\,Z$. Les caractères X et χ s'identifient à des éléments du dual de $\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}$ et $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$ modulo les groupes de Weyl; soit Λ, λ des représentants, on doit donc vérifier que $\Lambda(Z + T) \equiv \lambda(2\,Z)$ modulo W.

Si π a pour plus haut poids $\mu - \rho$, avec μ régulier et ρ correspondant, on sait que le caractère infinitésimal de π est représenté par $\mu \in \mathfrak{m}^*$. Par ailleurs (*cf.* e. g. Borel-Wallach [3], p. 93) le caractère infinitésimal de $\Pi(\xi, \lambda)$ est représenté par $\xi+\lambda\in\mathfrak{m}^*\oplus\mathfrak{a}^*$, celui de $\Pi(2\mu, 0)$ est donc représenté par $(2\mu, 0)$ d'où le résultat. $\square$

Nous pouvons maintenant démontrer, à la normalisation près, la proposition 6.6. Soit V un voisinage de 1 dans $G_{\mathbb{R}}$, T la trace tordue associée à A, et t comme avant le lemme 6.11. L'expression des parties radiales de $Z(\mathfrak{g}_{\mathbb{R}})$ sur le sous-groupe de Cartan M de $G_{\mathbb{R}}$ (*cf.* Varadarajan [27], II, p. 53) montre que t doit être un multiple de la distribution trace $\pi|_{q(V)}$:

$$\text{trace}\,(\Pi(g)\,A)=c\ \text{trace}\,\pi(Ng), \qquad g\in V.$$

D'après la proposition 5.7, le membre de gauche est égal à une fonction analytique sur M divisée par un dénominateur polynomial. D'après la formule de Weyl, il en est de même pour le membre de droite.

S'ils coïncident sur $V\cap M$, ils doivent donc être égaux sur tous les éléments de carré régulier de M, donc, d'après le chapitre 2, sur tous les éléments g σ-réguliers, σ-elliptiques.

Il nous reste à calculer c. Nous savons d'ores et déjà que T est une fonction C^∞ au voisinage de l'origine dans $G_{\mathbb{C}}$, puisque t est évidemment C^∞. Il nous suffit donc de calculer T(1).

LEMME 6.12. — *Soit* $\psi\in C_c^\infty(G_{\mathbb{C}})$. *Pour* $\operatorname{Re}\lambda\in D(w_0)$, $\Pi(\mu, -\lambda)(\psi)A(\lambda)$ *est traçable et l'on a* [*on note* $\Pi_\lambda=\Pi(\mu, -\lambda)$] :

$$\text{trace}\,(\Pi_\lambda(\psi)\,A(\lambda))=\int_{UN_{\mathbb{C}}MAN_{\mathbb{C}}^-}\psi(knmauk^{-1})\,m^\mu a^{-\lambda-\rho}\,dk\,dn\,dm\,da\,du,$$

l'intégrale étant absolument convergente.

Remarque. — $\Pi_\lambda(\psi)$ dépend du choix d'une mesure de Haar dg sur $G_{\mathbb{C}}$. On a fixé (après le lemme 6.8) le choix d'une mesure du sur $N_{\mathbb{C}}^-$. Soit dn la mesure sur $N_{\mathbb{C}}$ transformée de du par $u\to n=wuw^{-1}$, dk une mesure de masse 1 sur U, da une mesure de Haar quelconque sur A. On prend $dg=dk\,dn\,da$. Les mesures dk, dn, da figurant le membre de droite sont alors les mêmes.

Démonstration. — Soit φ une fonction continue de $\overline{\mathscr{L}}(\mu)$. On peut prolonger φ en une fonction sur $G_{\mathbb{C}}$ appartenant à $\overline{\mathscr{L}}(\mu, \lambda)$ et l'on a :

$$A(\lambda)\,\varphi(g)=\int_{N_{\mathbb{C}}^-}\varphi(g^\sigma u)\,du.$$

Si $\psi\in C^\infty(G_{\mathbb{C}})$, on a :

$$\begin{aligned}\Pi_\lambda(\psi)\,A(\lambda)\,\varphi(g)&=\int_{G_{\mathbb{C}}}\psi(x)\,(A(\lambda)\,\varphi)\,(x^{-1}g)\,dx\\&=\int_{G_{\mathbb{C}}}\psi(gy^{-1})\,(A(\lambda)\,\varphi)\,(y)\,dy\\&=\int_{G_{\mathbb{C}}}\int_{N_{\mathbb{C}}^-}\psi(gy^{-1})\,\varphi(y^\sigma u)\,dy\,du\\&=\int_{G_{\mathbb{C}}}\int_{N^-}\psi(gu^\sigma x^{-\sigma})\,\varphi(x)\,dx\,du,\end{aligned}$$

à l'aide de changements de variable évidents, les intégrales convergeant absolument, d'où à l'aide de la décomposition d'Iwasawa :

$$= \int_{\mathrm{UN}_{\mathbb{C}}\mathrm{AN}_{\bar{\mathbb{C}}}} \psi(gu^{\sigma} an^{-\sigma} k^{-1})\, \varphi(k)\, a^{-\lambda-\rho}\, dk\, dn\, da\, du,$$

donc, pour $v \in \mathrm{U}$:

$$\Pi_{\lambda}(\psi)\, \mathrm{A}(\lambda)\, \varphi(v) = \int_{\mathrm{UN}_{\mathbb{C}}\mathrm{AN}_{\bar{\mathbb{C}}}} \psi(vnauk^{-1})\, \varphi(k)\, a^{-\lambda-\rho}\, dk\, dn\, da\, du.$$

On sait que $\mathrm{C}(\lambda)$, et donc aussi $\mathrm{A}(\lambda)$ est un opérateur continu pour la structure hilbertienne ordinaire de $\overline{\mathscr{L}}(\mu)$ si $\mathrm{Re}\,\lambda \in \mathrm{D}(w_0)$. Par conséquent $\Pi_{\lambda}(\psi)\, \mathrm{A}(\lambda)$ est traçable. Nous voulons calculer sa trace dans $\overline{\mathscr{L}}(\mu)$. Pour ceci, nous le composons avec la projection orthogonale $\mathrm{P}_{\mu} : \mathrm{L}^2(\mathrm{U}) \to \overline{\mathscr{L}}(\mu)$; on a alors :

$$\mathrm{trace}_{\overline{\mathscr{L}}(\mu)}(\Pi_{\lambda}(\psi)\, \mathrm{A}(\lambda)) = \mathrm{trace}_{\mathrm{L}^2(\mathrm{U})}(\mathrm{P}_{\mu}\, \Pi_{\lambda}(\psi)\, \mathrm{A}(\lambda)).$$

Si φ est continu sur U :

$$\begin{aligned}(\mathrm{P}_{\mu}\, \Pi_{\lambda}(\psi)\, \mathrm{A}(\lambda)\, \varphi)(v) &= \int_{\mathrm{UN}_{\mathbb{C}}\mathrm{AN}_{\bar{\mathbb{C}}}\mathrm{M}} \psi(vmnauk^{-1})\, m^{\mu}\, a^{-\lambda-\rho}\, \varphi(k)\, dk\, dn\, da\, du\, dm \\ &= \int_{\mathrm{UN}_{\mathbb{C}}\mathrm{AMN}_{\bar{\mathbb{C}}}} \psi(vnmauk^{-1})\, m^{\mu}\, a^{-\lambda-\rho}\, \varphi(k)\, dk\, dn\, da\, dm\, du,\end{aligned}$$

la convergence étant absolue. Par conséquent, l'opérateur $\mathrm{E} = \mathrm{P}_{\mu}\, \Pi(\psi)\, \mathrm{A}(\lambda)$ est donné par l'intégration contre le noyau intégral :

$$\mathrm{K}_{\psi}(k, v) = \int_{\mathrm{N}_{\mathbb{C}}\mathrm{AMN}_{\bar{\mathbb{C}}}} \psi(vnmauk^{-1})\, m^{\mu}\, a^{-\lambda-\rho}\, dn\, da\, dm\, du,$$

et le théorème de Fubini appliqué aux intégrations précédentes montre que l'intégrale donnant K_{ψ} converge absolument presque partout en (k, v). En fait il converge absolument partout :

LEMME 6.13. — *Soit* $\psi \in \mathrm{C}_c(\mathrm{G}_{\mathbb{C}})$, $\psi \geqq 0$, $\lambda \in \mathrm{D}(w_0)$. *Alors :*

$$\mathrm{I} = \int_{\mathrm{N}_{\mathbb{C}}\mathrm{MAN}_{\bar{\mathbb{C}}}} \psi(nmau)\, a^{-\lambda-\rho}\, dn\, dm\, da\, du < \infty.$$

Démonstration. — En remplaçant ψ par $\psi \circ \sigma$ (qui est encore dans $\mathrm{C}_c(\mathrm{G}_{\mathbb{C}})$!) l'intégrale devient :

$$\mathrm{J} = \int_{\mathrm{N}_{\bar{\mathbb{C}}}\mathrm{MAN}_{\mathbb{C}}} \psi(uman)\, a^{\lambda+\rho}\, du\, dm\, da\, dn.$$

En écrivant la décomposition d'Iwasawa de *uman* suivant $G_{\mathbb{C}} = UN_{\mathbb{C}}A$, des changements de variables évidents donnent :

$$J = \int_{N_{\mathbb{C}}^{-}MAN_{\mathbb{C}}} \psi(\underline{k}(u)\,man)\,\underline{a}(u)^{-\lambda-\rho}\,a^{\lambda+\rho}\,du\,dm\,da\,dn;$$

il est clair que $J < \infty$ se réduit à $\int_{N_{\mathbb{C}}^{-}} \underline{a}(u)^{-\lambda-\rho}\,du < \infty$, pour $\lambda \in D(w_0)$, ce qui est un des lemmes fondamentaux dans la construction des opérateurs d'entrelacement. □

On vérifie de plus que I reste uniformément bornée si l'on translate ψ à droite et à gauche par U. Le théorème de convergence dominée de Lebesgue montre alors que K_ψ est partout défini et *continu* en (k, v). On peut donc calculer trace (E) par l'intégration sur la diagonale, ce qui démontre le lemme 6.12. □

Pour calculer $T(1)$, il est clair qu'il suffit d'évaluer T contre des fonctions invariantes par $g \mapsto kgk^{-1}$. Soit $\psi \in C_c^\infty(G_{\mathbb{C}})$, $\psi(kgk^{-1}) \equiv \psi(g)$, $(k \in U)$, et à support dans la cellule de Bruhat $B = N_{\mathbb{C}}^{-}MAN_{\mathbb{C}}$. Comme l'unité a une base de voisinages U-invariants, il existe une approximation de l'unité (ψ_n) formée de telles fonctions, i. e. $\psi_n\,dg \to \delta_e$. On a alors :

$$(\star) \qquad \operatorname{trace}(\Pi_\lambda(\psi)\,A(\lambda)) = \int_B \psi(nmau)\,m^\mu\,a^{-\lambda-\rho}\,dn\,dm\,da\,du.$$

LEMME 6.14. — *Soit* $\psi \in C_c^\infty(G_{\mathbb{C}})$. *Alors, si* $\Pi = \Pi(\mu, 0)$:

$$\operatorname{trace}(\Pi(\psi)\,A) = \prod_{\alpha>0} |\mu(H_\alpha)| \lim_{\substack{\lambda \to 0 \\ \operatorname{Re}\lambda \in D(w_0)}} \operatorname{trace}(\Pi_\lambda(\psi)\,A(\lambda)).$$

Démonstration. — Soit $\overline{\mathscr{L}}(\mu) = \bigoplus_\delta \overline{\mathscr{L}}(\mu)^\delta$ la décomposition de $\overline{\mathscr{L}}(\mu)$ suivant les U-types. Elle est respectée par $\Pi_\lambda(\psi)$ et $A(\lambda)$; avec des notations évidentes, on a :

$$\operatorname{trace}\Pi_\lambda(\psi)\,A(\lambda) = \sum_\delta \operatorname{trace}(\Pi_\lambda^\delta(\psi)\,A^\delta(\lambda)),$$
$$\operatorname{trace}(\Pi(\psi)\,A) = \sum_\delta \operatorname{trace}(\Pi^\delta(\psi)\,A^\delta).$$

Chaque $A^\delta(\lambda)$ est une fonction rationnelle en λ, qui tend pour $\lambda \to 0$ vers $\left(\prod_{\alpha>0} |\mu(H_\alpha)|^{-1}\right) A^\delta$. De même $\Pi_\lambda^\delta(\psi) \underset{\lambda \to 0}{\to} \Pi^\delta(\psi)$. Pour obtenir l'égalité du lemme, il suffit donc de vérifier qu'on peut intervertir limite et sommation; pour ceci, il suffit de majorer $\sum_\delta |\operatorname{trace}(\Pi_\lambda^\delta(\psi)\,A^\delta(\lambda)|$ indépendamment de λ. La somme $\sum_\delta |\operatorname{trace}\Pi_\lambda^\delta(\psi)|$ est majorée par $\|\Pi_\lambda(\psi)\|_1$, où $\|T\|_1 = \operatorname{trace}(|T|)$ si T est un opérateur traçable; chaque $A^\delta(\lambda)$ est borné par $\|A(\lambda)\|_\infty$, où $\|\ \|_\infty$ désigne la norme d'opérateur. Par conséquent, il nous suffit pour conclure de majorer $\|\Pi_\lambda(\psi)\|_1$ et $\|A(\lambda)\|_\infty$ indépendamment de λ pour λ au voisinage de 0. La première majoration est un exercice facile :

LEMME 6.15. — $\| \Pi_\lambda(\psi) \|_1$ *est borné quand* $\operatorname{Re}\lambda$ *reste dans un ensemble borné de* $\mathfrak{a}^*$.

Soit, en effet, $\psi = \sum_{\gamma, \tau} \psi_{\gamma, \tau}$ la décomposition de ψ en fonctions de type (γ, τ) à gauche et à droite pour U. Pour tous entiers k, l, on a des majorations uniformes :

$$|\psi_{\gamma, \tau}(x)| \leqq C_{k, l}(1 + \|\gamma\|^2)^{-k}(1 + \|\tau\|^2)^{-l},$$

tout $x \in G_{\mathbb{C}}$ (*cf.* Wallach [29], 8.7). Par ailleurs pour $\operatorname{Re}\lambda$ borné, Π_λ reste uniformément bornée, i. e. :

$$\| \Pi_\lambda(\varphi) \|_\infty \leqq C \| \varphi \|_\infty = C \operatorname{Sup} |\varphi(x)|, \qquad \varphi \in C_c^\infty(G_{\mathbb{C}}).$$

Pour tout γ, soit (v_i^γ) une base orthonormale de la composante de type γ de $\overline{\mathscr{L}}(\mu)$; soit $m(\gamma)$ sa dimension. On a :

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{m(\gamma)} \sum_{i=1}^{m(\tau)} |\langle \Pi_\lambda(\psi_{\tau, \gamma}) v_i^\gamma, v_j^\tau \rangle| \\
&\qquad\qquad \leqq C . C_{k, l}\, m(\gamma)\, m(\tau)(1 + \|\gamma\|)^{-k}(1 + \|\tau\|)^{-l} \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad \leqq C . C_{k, l}(1 + \|\gamma\|)^{N-k}(1 + \|\tau\|)^{N-l}.
\end{aligned}$$

En choisissant k, l assez grands, on voit donc que :

$$\sum_{\gamma, \tau} \sum_{i, j} |\langle \Pi_\lambda(\psi) v_i^\gamma, v_j^\tau \rangle| = \sum_{\gamma, \tau} \sum_{i, j} |\langle \Pi_\lambda(\psi_{\tau, \gamma}) v_i^\gamma, v_j^\tau \rangle|,$$

est majorée indépendamment de λ; cette somme majore $\| \Pi_\lambda(\psi) \|_1$. □

Nous voulons maintenant montrer que $A(\lambda)$ ou, ce qui revient au même, $C(\lambda)$, reste uniformément borné pour $\lambda \in D(w_0)$ voisin de 0. Le lecteur expert en intégrales singulières le démontrera sans doute à l'aide des méthodes de Knapp-Stein [12]. Faute de mieux, nous calculons une majoration explicite. Soit $w_0 = s_{\alpha_1} \ldots s_{\alpha_r}$ une décomposition minimale de w_0 en symétries associées aux racines simples. On note $C(w, \mu, \lambda)$ l'opérateur $C(\lambda)$. Soit $w_1, \ldots, w_r$ des représentants de $s_{\alpha_1}, \ldots, s_{\alpha_r}$ dans M'; on suppose que $w = w_1 \ldots w_r$. On note $C(w_i, \mu, \lambda)$ l'opérateur d'entrelacement (non normalisé) noté $A(w_i, \mu, \lambda)$ dans [6]. Alors :

$$\begin{aligned}
C(w, \mu, \lambda) = {} & C(w_1, w_2 \ldots w_r \mu, w_2 \ldots w_r \lambda) \\
& \times C(w_2, w_3 \ldots w_r \mu, w_3 \ldots w_r \lambda) \ldots C(w_r, \mu, \lambda),
\end{aligned}$$

où chaque élément du produit est un opérateur d'entrelacement, absolument convergent, réalisé sur le sous-groupe G_{α_i} de $G_{\mathbb{C}}$ isogène à $SL(2, \mathbb{C})$ associé à α_i; si l'on identifie ce sous-groupe à $SL(2, \mathbb{C})$ ou $PLG(2, \mathbb{C})$ cet opérateur s'identifie à :

$$C(s, \mu_i, \lambda_i) \qquad \text{où} \quad \mu_i = (w_{i+1} \ldots w_r \mu)_{|M_{\alpha_i}}, \qquad \lambda_i = (w_{i+1} \ldots w_r \lambda)_{|\mathfrak{a}\alpha_i},$$

avec des notations évidentes; s représente la symétrie non triviale dans le groupe de Weyl de $SL(2, \mathbb{C})$. On a $\operatorname{Re}\lambda_i > 0$, et $\mu_i \neq 1$ puisque μ est régulier. Par conséquent, il suffit de vérifier que $C(s, \mu, \lambda)$ est uniformément borné, pour $\mu \neq 1$ et $\lambda \to 0$, $\operatorname{Re}\lambda > 0$, quand le groupe est $SL(2, \mathbb{C})$. Dans ce cas, $U = SU(2)$, M est le cercle unité; μ s'identifie à un entier $\neq 0$ et $\tau \in \hat{U}$ à un entier positif; $C(s, \mu, \lambda)$ agit sur la composante de type τ (qui est irréductible) par un scalaire $c^\tau(s, \mu, \lambda)$ multiplié par un opérateur unitaire fixe, et [6] :

$$(\pm 1)(\lambda+|\mu|)c^\tau(s, \mu, \lambda)=\frac{(\lambda-|\mu|-2)(\lambda-|\mu|-4)\dots(\lambda-\tau)}{(-\lambda-|\mu|-2)\dots(-\lambda-\tau)}.$$

Si $\operatorname{Re}\lambda>0$, on a $|\lambda-\tau|<|-\lambda-\tau|$, etc., d'où :

$$|c^\tau(s, \mu, \lambda)|<|\lambda+|\mu||^{-1}\leqq|\mu|^{-1},$$

ce qui majore uniformément $C(s, \mu, \lambda)$. Ceci démontre le lemme 6.14. □

Nous pouvons maintenant passer à la limite dans l'expression $(\star)$ de $\operatorname{trace}(\Pi_\lambda(\psi)A(\lambda))$ avant le lemme 6.14, donc :

$$\operatorname{trace}(\Pi(\psi)A)=\prod_{\alpha>0}|\mu(H_\alpha)|\int_B \psi(nmau)\,m^\mu a^{-\rho}\,dn\,dm\,da\,du,$$

$\psi\in C_c^\infty(B)$, $\psi(kxk^{-1})\equiv\psi(x)$. Rappelons que la mesure sur $G_{\mathbb{C}}$ (lemme 6.12, remarque) était $dg=dk\,dn\,da$, dk de masse 1. Sous cette hypothèse, l'expression de dg sur $N_{\mathbb{C}}^- MAN_{\mathbb{C}}$ est $dg=a^{2\rho}d_1u\,dm\,da\,dn$, où $d_1 u$ est la mesure de Haar sur $N_{\mathbb{C}}^-$ normalisée par :

$$\int_{N_{\mathbb{C}}^-}\underline{a}(u)^{-2\rho}d_1u=1$$

(*cf.* Warner [30], II, p. 73). Comme la mesure du sur $N_{\mathbb{C}}^-$ avait été normalisée par :

$$\int_{N_{\mathbb{C}}^-}\underline{a}(u)^{-2\rho}du=\prod_{\alpha>0}\rho(H_\alpha)^{-1},$$

on a donc :

$$du\,dm\,da\,dn=\Big(\prod_{\alpha>0}\rho(H_\alpha)^{-1}\Big)a^{-2\rho}dg,$$

soit, en composant avec l'involution σ qui laisse stable dg, échange du et dn, et envoie a sur a^{-1} :

$$dn\,dm\,da\,du=\Big(\prod_{\alpha>0}\rho(H_\alpha)^{-1}\Big)a^{2\rho}dg$$

sur B, soit :

$$\operatorname{trace}(\Pi(\psi)A)=\prod_{\alpha>0}\frac{|\mu(H_\alpha)|}{\rho(H_\alpha)}\int_{G_{\mathbb{C}}}\psi(g)\,m^\mu a^\rho\,dg.$$

Prenant une suite (ψ_n) telle que $\psi_n\,dg\to\delta_e$, on en déduit :

$$T(1)=\prod_{\alpha>0}\frac{|\mu(H_\alpha)|}{\rho(H_\alpha)}.$$

D'après la formule de Weyl, ceci est précisément la dimension de la représentation π de plus haut poids $(\mu-\rho)$ i.e. $T(1)=\operatorname{trace}\pi(1)$. Ceci démontre la proposition 6.6 et donc le théorème 6.1. □

7. Relèvement de la série discrète

Soit G réductif connexe/$\mathbb{R}$. On dit qu'une représentation irréductible π de $G_{\mathbb{R}}$ appartient à la série discrète s'il existe un caractère χ de $G_{\mathbb{R}}$ tel que les coefficients matriciels de $\pi\otimes\chi$ sont de carré intégrable modulo le centre sur $G_{\mathbb{R}}$. Il revient au même de dire que $\pi|_{G\mathrm{der}(\mathbb{R})}$ est somme de représentations de la série discrète pour le groupe dérivé. Pour que $G_{\mathbb{R}}$ ait une série discrète, il faut et il suffit que $G_{\mathrm{der}}(\mathbb{R})$ ait un tore maximal compact (Harish-Chandra). Ceci équivaut au fait que G possède une forme intérieure dont le groupe dérivé est compact.

Nous supposons dans ce chapitre que tel est le cas.

D'après Langlands [14], les représentations de la série discrète de $G_{\mathbb{R}}$ sont paramétrées, à L-indiscernabilité près, par les classes de sections discrètes (chap. 1, § 2) du L-groupe de G. Soit φ une telle section, $\Pi_\varphi=\{\pi_1, \ldots, \pi_r\}$ le L-paquet associé à φ. Nous noterons $\pi=\pi_\varphi$ la représentation de $G_{\mathbb{R}}$, somme directe avec multiplicité 1 des π_i.

Par restriction, φ donne une section Φ du L-groupe complexe. Soit $\Pi=\Pi_\Phi$ la représentation irréductible de $G_{\mathbb{C}}$ associée à Φ ([11]). On choisit une réalisation de Π dans un espace de Hilbert $\mathscr{H}$.

La représentation Π est σ-stable. Nous voulons fixer un opérateur involutif A_σ entrelaçant Π et $\Pi\circ\sigma$. Si $G_{\mathrm{der}}(\mathbb{R})$ est compact, nous procédons comme dans le chapitre 6 : $\Pi|_{G\mathrm{der}(\mathbb{C})}$ reste irréductible, et $U=G_{\mathrm{der}}(\mathbb{R})$ est un compact maximal de $G_{\mathrm{der}}(\mathbb{C})$. Nous imposons à A_σ de valoir 1 sur le U-type minimal de Π.

En général, G est forme intérieure d'un groupe G^1 tel que $G^1_{\mathrm{der}}(\mathbb{R})$ est compact. Soit τ la conjugaison de $G_{\mathbb{C}}$ par rapport à $G^1(\mathbb{R})$: on a donc $\sigma=\mathrm{Ad}(g)\circ\tau$, $g\in G_{\mathbb{C}}$, $\mathrm{Ad}(gg^\tau)=1$. On peut supposer que $g\in G_{\mathrm{der}}(\mathbb{C})$. Le groupe $G^1_{\mathrm{der}}(\mathbb{R})=U$ est maximal compact dans $G_{\mathrm{der}}(\mathbb{C})$, et contient donc le centre. On voit donc que $gg^\tau\in U$.

Soit A_τ l'opérateur entrelaçant Π et $\Pi\circ\tau$, normalisé comme indiqué. Alors $A'_\sigma=\Pi(g)A_\tau$ entrelace Π et $\Pi\circ\sigma$. On a :

$$A'_\sigma . A'_\sigma=\Pi(g)A_\tau\Pi(g)A_\tau=\Pi(g.g^\tau),$$

qui n'est pas l'identité en général.

Les groupes G et G^1 ont le même L-groupe; la section discrète φ définit une représentation irréductible de $G^1(\mathbb{R})$ que nous notons $\pi^1_\varphi=\pi^1$ ([12]). L'application norme de $G_{\mathbb{C}}$ dans $G^1_{\mathbb{R}}$ peut être définie sur le centre $Z_{\mathbb{C}}=Z(G_{\mathbb{C}})$: si $z\in Z_{\mathbb{C}}$, la norme de z est $z.z^\tau\in Z^1_{\mathbb{R}}=Z(G^1_{\mathbb{R}})$. On déduit alors facilement des formules de relèvement dans le cas compact (*cf.* proposition 8.5):

LEMME 7.1. — $\Pi(z)=\pi^1(zz^\tau)$, $z\in Z_{\mathbb{C}}$.

(Pour z central, ρ irréductible, on a assimilé $\rho(z)$, scalaire d'après le lemme de Schur, à un nombre complexe.)

Comme $g.g^\tau$ est central, on voit donc que :

$$(A'_\sigma)^2=\Pi(gg^\tau)=\pi^1(gg^\tau g^\tau g)=\pi^1(gg^\tau)^2.$$

([11]) Pour éviter toute confusion, nous n'utilisons plus par la suite la notation Π_φ pour le L-paquet.

([12]) Si l'on préfère, on peut se contenter de considérer ici les groupes dérivés; π^1_φ est alors décrite en 6, paragraphe 3.

Nous posons :

$$A_\sigma = \pi^1 (g g^\tau)^{-1} \Pi(g) A_\tau.$$

L'opérateur A_σ est involutif et entrelace Π et $\Pi \circ \sigma$.

Il nous faut vérifier que A_σ ne dépend pas des différents choix faits. Tout d'abord, si h est un autre cocycle entrelaçant σ et τ, on a :

$$\mathrm{Ad}\, h \circ \tau = \mathrm{Ad}\, g \circ \tau, \qquad \text{donc} \quad g = zh, \quad z \in Z_{\mathbb{C}}.$$

Mais alors :

$$\Pi(g) = \Pi(z)\Pi(h) = \pi^1 (z z^\tau) \Pi(h),$$

donc :

$$\pi^1 (g g^\tau)^{-1} \Pi(g) A_\tau = \pi^1 (z z^\tau)^{-1} \pi^1 (h h^\tau)^{-1} \Pi(g) A_\tau = \pi^1 (h h^\tau)^{-1} \Pi(h) A_\tau :$$

la construction de A_σ ne dépend pas du choix de g, τ étant fixé. Soit maintenant G^1, G^2 deux choix de la forme anisotrope, τ_1, τ_2 les conjugaisons de $G_{\mathbb{C}}$ associées. Les groupes $G^1(\mathbb{R})$ et $G^2(\mathbb{R})$ sont conjugués dans $G_{\mathbb{C}}$ (unicité de la forme anisotrope de G_{der}), soit par exemple $G^1(\mathbb{R}) = \mathrm{Ad}(h) G^2(\mathbb{R})$, $h \in G_{\mathbb{C}}$. On a alors $\tau_2 = \mathrm{Ad}(h^{-1} . h^{\tau_1}) \tau_1$. Soit $\sigma = \mathrm{Ad}(g_1) \circ \tau_1 = \mathrm{Ad}(g_2) \circ \tau_2 = \mathrm{Ad}(g_2 h^{-1} h^{\tau_1}) \circ \tau_1$. On doit vérifier que les deux définitions possibles de A_σ coïncident, i. e. :

$$(\star) \qquad \pi^1 (g_1 g_1^{\tau_1})^{-1} \Pi(g_1) A_{\tau_1} = \pi^2 (g_2 g_2^{\tau_2})^{-1} \Pi(g_2) A_{\tau_2}.$$

Puisque $\sigma = \mathrm{Ad}(g_1) . \tau_1 = \mathrm{Ad}(g_2 h^{-1} . h^{\tau_1}) \circ \tau_1$, on sait d'après le cas déjà traité que :

$$\begin{aligned}\pi^1 (g_1 g_1^{\tau_1})^{-1} \Pi(g_1) A_{\tau_1} &= \pi^1 (g_2 h^{-1} . h^{\tau_1} . g_2^{\tau_2} (h^{-1})^{\tau_1} h)^{-1} \Pi(g_2 h^{-1} h^{\tau_1}) A_{\tau_1} \\ &= \pi^1 (g_2 . g_2^{\tau_2})^{-1} \Pi(g_2) \Pi(h^{-1} h^{\tau_1}) A_{\tau_1}.\end{aligned}$$

Il est clair que π^1 et π^2 coïncident sur $Z^1(\mathbb{R}) = Z^2(\mathbb{R})$; par conséquent l'égalité $(\star)$ se réduit à :

$$A_{\tau_2} = \Pi(h^{-1} h^{\tau_1}) A_{\tau_1}.$$

Soit $\mathscr{H}$ l'espace de Hilbert de Π, $\mathscr{H}_{\min}(\tau_i)$ les espaces isotypiques minimaux associés à $G^i_{\mathrm{der}}(\mathbb{R}) = U^i$. Il nous faut vérifier que si $A_{\tau_1} = 1$ sur $\mathscr{H}_{\min}(\tau_1)$, $A'_{\tau_2} = \Pi(h^{-1} h^{\tau_1}) A_{\tau_1}$ vaut 1 sur $\mathscr{H}_{\min}(\tau_2)$. Soit $v \in \mathscr{H}_{\min}(\tau_1)$. Comme $U^1 = \mathrm{Ad}(h) U^2$, il est clair que $\Pi(h^{-1}) v \in \mathscr{H}_{\min}(\tau_2)$. Mais alors :

$$A'_{\tau_2} \Pi(h^{-1}) v = \Pi(h^{-1} h^{\tau_1}) A_{\tau_1} \Pi(h^{-1}) v = \Pi(h^{-1}) \Pi(h^{\tau_1}) \Pi((h^{-1})^{\tau_1}) A_{\tau_1} v = \Pi(h^{-1}) v;$$

donc A'_{τ_2} laisse invariant $\Pi(h^{-1}) v$ et vaut donc 1 sur $\mathscr{H}_{\min}(\tau_2)$. $\square$

D'après le résultat de Shelstad rappelé dans le chapitre 2, le caractère stabilisé $\operatorname{trace} \pi_\varphi = \sum \operatorname{trace} \pi_i$ est stablement invariant, i. e. invariant par l'effet de la conjugaison superstable sur les sous-groupes de Cartan. Si x est σ-régulier, $\mathrm{N}x$ est défini à conjugaison superstable près. Donc $\operatorname{trace} \pi_\varphi(\mathrm{N}x)$ est bien défini.

Enfin, soit Z le centre de G, K un compact maximal de $G_{\mathbb{R}}$, $\varepsilon(G) = (-1)^{(1/2)\dim(G_{\mathbb{R}}/KZ(\mathbb{R}))}$.

THÉORÈME 7.2. — *Soit* φ=*section discrète du* L-*groupe réel*, Φ *son relèvement*, π, Π *les représentations associées*, $A = A_\sigma : \Pi \cong \Pi . \sigma$ *l'opérateur défini plus haut. Alors :*

$$\operatorname{trace}(\Pi(x)A) = \varepsilon(G)\operatorname{trace}\pi(Nx),$$

pour tout $x \in G_{\mathbb{C}}$, σ-*régulier*, σ-*conjugué à un élément de* $G_{\mathbb{R}}$.

En particulier, si G est quasi déployé sur $\mathbb{R}$, ceci donne le caractère tordu pour tout x σ-régulier. En général, si G^1 est une forme intérieure de G, le théorème 7.2 implique (au moins sur les carrés réguliers) les identités entre caractères des L-paquets pour G et G^1 démontrées par Shelstad : ceci sera détaillé à la fin du chapitre 8.

Le *théorème* 7.2 sera obtenu à la fin du paragraphe 3.

2. RÉDUCTION AU CAS SEMI-SIMPLE. — Le résultat suivant, moins fort que le lemme 6.2, suffit à nos besoins :

LEMME 7.3. — G *réductif connexe*/$\mathbb{R}$, G_{rad}=*radical de* G, $G(\mathbb{R})^2$=*ensemble des carrés de* $G(\mathbb{R})$. *Alors* $G(\mathbb{R})^2 \subset G_{\text{rad}}(\mathbb{R})\,G_{\text{der}}(\mathbb{R})$.

Il est clair en effet que le membre de droite contient la composante neutre topologique de $G(\mathbb{R})$; remarquer alors que d'après le théorème de Matsumoto cité dans la démonstration du *lemme* 6.2, tout élément de $\Pi_0(G_{\mathbb{R}})$ est d'ordre 2, donc tout carré est dans la composante neutre. $\square$

Comme l'image de la norme est l'ensemble des carrés réguliers de $G_{\mathbb{R}}$, nous pouvons maintenant utiliser le raisonnement du chapitre 6, paragraphe 2, pour déduire le relèvement pour G du relèvement pour G_{rad} et G_{der} et des principes généraux de la fonctorialité. Cependant, si φ est une section admissible discrète de ${}^LG$, la représentation $\pi_\varphi = \pi_1 \oplus \ldots \oplus \pi_r$ n'est plus irréductible; de plus, les composantes π_i ($i = 1, \ldots, r$) ne restent pas nécessairement irréductibles si on les restreint à $G_{\text{der}}(\mathbb{R})$.

Nous devons donc montrer :

LEMME 7.4. — φ=*section admissible cuspidale de* ${}^LG$. φ_0=*composée de* φ *avec le* L-*homomorphisme* ${}^LG \to {}^L(G_{\text{der}})$. *Soit* $\pi_\varphi = \pi_1 \oplus \ldots \oplus \pi_r$, $\pi_i|_{G_{\text{der}}(\mathbb{R})} = \pi_{i,1} \oplus \ldots \oplus \pi_{i,s_i}$. *Alors* $\pi_{\varphi_0} = \bigoplus_i (\pi_{i,1} \oplus \ldots \oplus \pi_{i,s_i}) = \pi_\varphi|_{G_{\text{der}}(\mathbb{R})}$.

Démonstration. — Ceci se trouve essentiellement dans Langlands [14], p. 54-57. Soit S un tore maximal, maximalement anisotrope de G : $S(\mathbb{R}) \cap G_{\text{der}}(\mathbb{R})$ est compact. On peut construire le L-groupe de G à partir du tore S. Soit $\varphi : W_{\mathbb{R}} \to {}^LG$. Soit L le réseau des caractères de S, $L^\vee$ son dual. On suppose que $\varphi(W_{\mathbb{R}})$ normalise ${}^LS^0$; $\varphi(\tau)$ agit donc sur $L^\vee$. Si la section φ est cuspidale, l'action de $\varphi(\tau)$ est la même que celle obtenue par dualité partir de l'action de $\operatorname{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R})$ sur L donnée par la structure réelle de S ([14], p. 50); autrement dit, ${}^LS^0 \rtimes \{1, \sigma\}$, avec σ agissant par $s \mapsto \varphi(\tau)s\varphi(\tau)^{-1}$, est le L-groupe de S. Notons $\bar{\sigma}$ cette action de σ.

Soit $\varphi(z) = z^\mu \bar{z}^\nu$ pour $z \in \mathbb{C}^\times \subset W_{\mathbb{R}}$; μ, $\nu \in L \otimes \mathbb{C}$, $\mu - \nu \in L$. On vérifie alors que $\langle \mu + \nu, \check{\alpha} \rangle = 0$ et $\langle \mu, \check{\alpha} \rangle \neq 0$ pour toute coracine $\check{\alpha}$. Donc μ définit un choix de racines et de coracines positives; soit $\delta = 1/2 \sum_{\alpha>0} \alpha$. Soit :

$$\mu_1 = \mu - \delta, \qquad \nu_1 = \nu - \delta;$$

on a :

$$\mu_1 = \bar{\sigma}\nu_1, \qquad \mu_1 - \nu_1 \in \mathrm{L}.$$

Supposons que $\varphi(\tau) = (h, \tau)$. Si $\lambda^{\vee} \in \mathrm{L}^{\vee}$ vérifie $\langle \alpha, \lambda^{\vee} \rangle = 0$, tout α, $\lambda^{\vee}$ définit un caractère rationnel de ${}^{\mathrm{L}}\mathrm{G}^0$: en particulier $\lambda^{\vee}(h)$ est défini. On peut choisir $\lambda_0 \in \mathrm{L} \otimes \mathrm{C}$ tel que $\lambda^{\vee}(h) = e^{2i\pi} \langle \lambda_0, \hat{\lambda} \rangle$ pour de tels $\lambda^{\vee}$: λ_0 est défini modulo $\mathrm{L} + \sum_{\alpha \in \Delta} \mathbb{C}\alpha$. De plus, (h, σ) est défini à conjugaison près sous ${}^{\mathrm{L}}\mathrm{S}^0$, qui change h en $t^{-1} h t^{\bar{\sigma}}$. En définitive, on en déduit que λ_0 est défini modulo :

$$\mathrm{L} + \sum_{\alpha \in \Delta} \mathbb{C}\alpha + \{ \lambda - \bar{\sigma}\lambda, \lambda \in \mathrm{L} \otimes \mathbb{C} \} = \mathrm{L} + \{ \lambda - \bar{\sigma}\lambda \},$$

puisque $\bar{\sigma}$ agit par (-1) sur Δ par cuspidalité. L'analogue du *lemme* 6.4 (lemme 3.2 de Langlands) implique alors que :

$$\lambda_0 + \bar{\sigma}\lambda_0 \equiv \frac{\mu_1 - \bar{\sigma}\mu_1}{2} \operatorname{mod} \mathrm{L}.$$

([14], p. 49). On peut alors définir un caractère χ de $\mathrm{S}(\mathbb{R})$ de la façon suivante. Si $s \in \mathrm{S}(\mathbb{C})$, soit $s = \exp(\mathrm{H})$, $\mathrm{H} \in \mathrm{L}^{\vee} \otimes \mathbb{C}$. On a $s \in \mathrm{S}(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \mathrm{H} - \bar{\sigma}\overline{\mathrm{H}} \in 2i\pi\mathrm{L}^{\vee}$, où $\overline{\mathrm{H}}$ est donné par conjugaison de $\mathrm{L}^{\vee} \otimes \mathbb{C}$ par rapport à $\mathrm{L}^{\vee} \otimes \mathbb{R}$. On pose alors :

$$\chi(s) = e^{\langle \lambda_0, \mathrm{H} - \bar{\sigma}\overline{\mathrm{H}} \rangle} e^{\langle \mu_1/2, \mathrm{H} + \bar{\sigma}\overline{\mathrm{H}} \rangle}.$$

(*cf.* [14], p. 27).

Nous pouvons maintenant définir les représentations π_i associées à φ. Soit $\mathrm{G}_{\mathrm{der}}(\mathbb{R})^0$ la composante neutre (topologique) de $\mathrm{G}_{\mathrm{der}}(\mathbb{R})$, $\mathrm{G}_0(\mathbb{R}) = \mathrm{S}(\mathbb{R})\,\mathrm{G}_{\mathrm{der}}(\mathbb{R})^0$. Soit $\mathrm{W} = \mathrm{W}(\mathrm{G}, \mathrm{S})$ le groupe de Weyl complexe, W_1 le sous-groupe formé des éléments réalisés dans $\mathrm{G}_{\mathrm{der}}(\mathbb{R})^0$, W_2 celui réalisé dans $\mathrm{G}(\mathbb{R})$. Si $g \in \mathrm{G}(\mathbb{R})$, g envoie $\mathrm{S}(\mathbb{R})$ sur un tore du même type, qui est conjugué sous $\mathrm{G}_{\mathrm{der}}(\mathbb{R})^0$ à $\mathrm{S}(\mathbb{R})$; par conséquent on a un homomorphisme surjectif $\mathrm{G}(\mathbb{R}) \to \mathrm{W}_2/\mathrm{W}_1$. Son noyau est $\mathrm{G}_0(\mathbb{R})$ ([14], p. 52). A la section φ, nous avons associé un caractère χ de $\mathrm{S}(\mathbb{R})$. On vérifie que χ est défini modulo W par la classe de φ; soit X_{φ} cette orbite de W ([13]).

Soit $\chi \in \mathrm{X}_{\varphi}$, μ_1 comme ci-dessus; choisissons un ordre sur les racines tel que $\langle \mu_1, \alpha^{\vee} \rangle \geqq 0$ si $\alpha > 0$; soit δ associé à cet ordre. D'après Harish-Chandra, il existe une seule représentation $\pi_0(\chi, \delta)$ de $\mathrm{G}_0(\mathbb{R})$, appartenant à la série discrète, dont le caractère sur un élément régulier $s = \exp(\mathrm{H})$ de $\mathrm{S}(\mathbb{R})$ est égal à :

$$\varepsilon(\mathrm{G}) \sum_{w \in \mathrm{W}_1} \frac{\varepsilon(w)\,\chi(ws)\,e^{\delta(w\mathrm{H} - \mathrm{H})}}{\Delta(s)} \qquad \text{où} \quad \Delta(s) = \prod_{\alpha>0} (1 - e^{-\alpha(\mathrm{H})}).$$

([13]) On obtient ainsi *tous* les caractères de $\mathrm{S}(\mathbb{R})$ modulo W.

Pour χ, donc μ_1, fixé, le nombre de δ possibles est l'ordre du stabilisateur $W^{\mu_1}=W^{\chi}$. On a $\pi_0(\chi, \delta)\cong\pi_0(\chi', \delta')$ si et seulement si $(\chi, \delta)=w(\chi', \delta')$, $w\in W_1$; comme $G(\mathbb{R})/G_0(\mathbb{R})\hookrightarrow W/W_1$, on en déduit que les représentations $\pi(\chi, \delta)=\operatorname{ind}_{G_0(\mathbb{R})}^{G(\mathbb{R})}\pi_0(\chi, \delta)$ sont irréductibles.

De nouveau $\pi(\chi, \delta)\cong\pi(\chi', \delta')\Leftrightarrow(\chi, \delta)=w(\chi', \delta')$, $w\in W_2$.

On a alors :

$$\pi_\varphi=\bigoplus_{\substack{\chi\in X_\varphi\\ \chi\bmod W_2}}\ \bigoplus_{\substack{\delta\text{ associé à }\chi\\ \delta\bmod W_2^\chi}}\pi(\chi, \delta).$$

Si $\chi\in X_\varphi$, le nombre de composantes de π_φ est donc :

$$|W/W^\chi|\ |W_2/W_2^\chi|^{-1}\,|W^\chi/W_2^\chi|=|W/W_2|.$$

Si l'on compose φ avec ${}^LG\to{}^L(G_{\mathrm{der}})$, il est facile de voir que le caractère χ_0 associé au composé φ_0 est $\chi|_{S(\mathbb{R})\cap G_{\mathrm{der}}(\mathbb{R})}$. On définit $\pi_0(\chi_0, \delta)$ comme précédemment : c'est évidemment la restriction de $\pi_0(\chi, \delta)$ à $G^0_{\mathrm{der}}(\mathbb{R})$. Soit W_2^{der} l'analogue de W_2 pour G_{der}. En induisant par étages, on voit que :

$$\pi(\chi, \delta)|_{G_{\mathrm{der}}(\mathbb{R})}\cong\bigoplus_{w\in W_2/W_2^{\mathrm{der}}}\pi(w\chi_0, w\delta).$$

Enfin :

$$\pi_\varphi|_{G_{\mathrm{der}}(\mathbb{R})}=\bigoplus_{\substack{\chi\in X_\varphi\\ \chi\bmod W_2}}\ \bigoplus_{\substack{\delta\text{ associé à }\chi\\ \delta\bmod W_2^\chi}}\ \bigoplus_{w\in W_2/W_2^{\mathrm{der}}}\pi(w\chi_0, w\delta),$$

$$\text{i. e.}\quad \pi_{\varphi|G_{\mathrm{der}}(\mathbb{R})}=\bigoplus_{\substack{\chi_0\in X_{\varphi_0}\\ \chi_0\bmod W_2^{\mathrm{der}}}}\ \bigoplus_{\substack{\delta\text{ associé à }\chi_0\\ \delta\bmod (W_2^{\mathrm{der}})^{\chi_0}}}\pi(\chi_0, \delta).$$

On voit donc que $\pi_\varphi|_{G_{\mathrm{der}}(\mathbb{R})}\cong\pi_{\varphi_0}$. $\square$

3. Nous pouvons maintenant supposer G semi-simple. S est alors anisotrope, $S(\mathbb{R})$ connexe; $G_0(\mathbb{R})=S(\mathbb{R})G(\mathbb{R})^0=G(\mathbb{R})^0$; $W_2/W_1=G(\mathbb{R})/G(\mathbb{R})^0$. Soit $\Theta_0(\chi, \delta)$, $\Theta(\chi, \delta)$, Θ_φ les caractères distributions de $\pi_0(\chi, \delta)$, $\pi(\chi, \delta)$ et π_φ. On a, sur les éléments réguliers de la forme $s=\exp(H)\in S_{\mathbb{R}}$:

$$\Theta_0(\chi, \delta)=\varepsilon(G)\sum_{w\in W_1}\frac{\varepsilon(w)\chi(ws)e^{\delta(wH)}}{\prod_{(\alpha, \delta)>0}(e^{\alpha(H)/2}-e^{-\alpha(H)/2})}.$$

Restreinte à $G_0(\mathbb{R})\supset S(\mathbb{R})$, $\pi(\chi, \delta)=\bigoplus_{\tau\in W_2/W_1}\pi_0(\chi, \delta)\circ\tau$, où $\tau\in W_2/W_1\cong G(\mathbb{R})/G(\mathbb{R})^0$ agit par un automorphisme de $S(\mathbb{R})$; on en déduit facilement :

$$\Theta(\chi, \delta)=\varepsilon(G)\sum_{w\in W_2}\frac{\varepsilon(w)\chi(ws)e^{\delta(wH)}}{\prod_{(\alpha, \delta)>0}(e^{\alpha(H)/2}-e^{-\alpha(H)/2})}.$$

Enfin, d'après la décomposition de π_φ donnée plus haut, on a :

$$\Theta_\varphi = \frac{|W_2^\chi|}{|W^\chi|.|W_2|} \sum_{w \in W} \sum_{\substack{\delta' \text{ associé à } \chi \\ \delta' \bmod W_2^\chi}} \Theta(w\chi, w\delta'),$$

où χ est un élément quelconque de X_φ, donc puisque les δ' associés à χ sont de la forme $\sigma.\delta$, δ fixé et $\sigma \in W^\chi$:

$$\Theta_\varphi = \frac{|W_2^\chi|}{|W^\chi|.|W_2|} \sum_{w \in W} \frac{1}{|W_2^\chi|} \sum_{\sigma \in W^\chi} \Theta(w\chi, w\sigma\delta)$$

$$= \frac{1}{|W^\chi||W_2|} \sum_{w \in W} \sum_{\sigma \in W^\chi} \Theta(w\chi, w\sigma\delta) = \frac{1}{|W_2|} \sum_{w \in W} \Theta(w\chi, w\delta).$$

On en déduit :

$$\Theta_\varphi = \varepsilon(G) \sum_{w \in W} \frac{\varepsilon(w)\chi(ws)e^{\delta(wH)}}{\prod_{(\alpha,\delta)>0} (e^{\alpha(H)/2} - e^{-\alpha(H)/2})}$$

(*cf.* D. Shelstad [20]).

Soit maintenant G^1 une forme intérieure anisotrope de G. On suppose que S est dans $G \cap G^1$. Le L-groupe de G^1 s'identifie à celui de G; la section discrète détermine une représentation (irréductible) π_φ^1 de G^1. On a supposé que $\varphi : \mathbb{C}^\times \to {}^L S^0$ était de la forme $z^\mu(\bar{z})^{-\mu}$. Si on définit un choix de racines positives à l'aide de μ, et δ leur demi-somme, on a (démonstration du *lemme* 7.4.) :

$$\chi(\exp H) = e^{\langle(\mu-\delta)/2,\, H - \bar{H}\rangle}, \qquad H \in L^\vee \otimes \mathbb{C}, \qquad H + \bar{H} \in 2i\pi L^\vee \cap L^\vee \otimes \mathbb{R} = \{0\},$$

donc :

$$\chi(\exp H) = e^{\langle(\mu-\delta,\, 2H)/2\rangle} = e^{\langle\mu-\delta,\, H\rangle},$$

c'est-à-dire $\chi(h) = h^{\mu-\delta}$. Donc χ est le plus haut poids de la représentation π_φ^1 (chap. 6, § 3); d'après la formule de Weyl, le caractère de π_φ^1 sur $R_\mathbb{R}$ est bien :

$$\Theta_\varphi^1 = \sum_{w \in W} \frac{\varepsilon(w)\chi(ws)e^{\delta(wH)}}{\prod_{\alpha>0} (e^{\alpha(H)/2} - e^{-\alpha(H)/2})}.$$

Ceci vérifie que la définition de π_φ^1 (qu'on notera simplement π^1) à l'aide de son plus haut poids (chap. 6, § 3) coïncide avec celle de Langlands.

Soit $\mathscr{H}$ l'espace de Π, A_τ l'opérateur d'entrelacement associé à G^1, $A_\sigma = \pi^1(gg)^{-1}\Pi(g)A_\tau$ comme dans le paragraphe. On a $x^\sigma = gx^\tau g^{-1}$, $gg^\tau \in Z(G_\mathbb{R}^1)$. Si $x \in S_\mathbb{R}$ est σ-régulier, $xg(xg)^\tau = xx^\sigma.gg^\tau = x^2 gg^\tau$ est donc un élément régulier de $G_\mathbb{R}^1$; donc xg est τ-régulier et τ-

conjugué à un élément de $G^1_{\mathbb{R}}$, d'après les résultats du chapitre 2. Ceci donne un sens aux égalités suivantes :

$$\begin{aligned}\operatorname{trace}(\Pi(x)\mathrm{A}_\sigma)&=\pi^1(gg^\tau)^{-1}\operatorname{trace}(\Pi(xg)\mathrm{A}_\tau)=\pi^1(gg^\tau)^{-1}\operatorname{trace}\pi^1(xgx^\tau g^\tau)\\&=\pi^1(gg^\tau)^{-1}\operatorname{trace}\pi^1(xx^\sigma gg^\tau)=\operatorname{trace}\pi^1(xx^\sigma)=\operatorname{trace}\pi^1(\mathrm{N}x);\end{aligned}$$

on a utilisé le relèvement dans le cas compact (chap. 6) pour écrire trace $(\Pi(xg)\mathrm{A}_\tau)=$ trace $\pi^1(xgx^\tau g^\tau)$.

Comparant les expressions de Θ_φ et Θ^1_φ sur les éléments elliptiques, on voit donc que :

$$(\star)\qquad \operatorname{trace}(\Pi(x)\mathrm{A}_\sigma)=\varepsilon(\mathrm{G})\operatorname{trace}\pi_\varphi(\mathrm{N}x),$$

pour tout $x\in\mathrm{S}_{\mathbb{R}}$ de carré régulier; utilisant l'invariance par σ-conjugaison, on voit que ceci est vrai pour tout élément x de $\mathrm{G}_{\mathbb{C}}$ de norme elliptique.

Nous voulons étendre l'identité $(\star)$ à tous les x σ-conjugués à un élément de carré régulier de $\mathrm{G}_{\mathbb{R}}$. Tout d'abord, on peut supposer que x est dans la composante neutre (topologique) $\mathrm{H}^0_{\mathbb{R}}$ d'un sous-groupe de Cartan de $\mathrm{G}_{\mathbb{R}}$ (lemme 2.9). Notons $\mathrm{H}''_{\mathbb{R}}$ l'ouvert $\mathrm{H}^0_{\mathbb{R}}\cap{}^\sigma\mathrm{H}'_{\mathbb{R}}(\mathrm{R})$ (*cf.* avant la proposition 5.7) : $\mathrm{H}''_{\mathbb{R}}=\{h\in\mathrm{H}^0_{\mathbb{R}}\mid\xi_\alpha(h)\neq\pm1$ pour toute racine *réelle* $\alpha\}$.

Soit $\mathrm{T}(g)=\operatorname{trace}(\Pi(g)\mathrm{A})$. On sait (prop. 5.7) que $\mathrm{F}_\mathrm{T}(g)=\Delta_\sigma(g)\mathrm{T}(g)$ définit une fonction analytique sur $\mathrm{H}''_{\mathbb{R}}$. D'après l'analogue non tordu de la proposition 5.7, $\Delta(g)$ trace $\pi_\varphi(g)$ est analytique sur l'ouvert $\mathrm{H}'_{\mathbb{R}}(\mathrm{R})=\{h\in\mathrm{H}_{\mathbb{R}}\mid\xi_\alpha(h)\neq1$ pour α réelle$\}$. Donc $\Delta(g^2)$ trace $\pi_\varphi(g^2)$, qui est égal, à multiplication près par ±1, à $\Delta_\sigma(g)$ trace $\pi_\varphi(\mathrm{N}g)$, est aussi analytique sur $\mathrm{H}''_{\mathbb{R}}$. Il suffit donc de démontrer $(\star)$ dans un ouvert rencontrant chaque composante de $\mathrm{H}''_{\mathbb{R}}$.

Remarquons que toute composante de $\mathrm{H}''_{\mathbb{R}}$ contient 1 dans son adhérence. Soit en effet $\mathrm{H}^0_{\mathbb{R}}=\mathrm{S}\times\mathrm{V}$, S un tore compact, V vectoriel. La racine $\alpha\in\Delta(\mathrm{G},\mathrm{H})$ est réelle si et seulement si $\xi_\alpha=1$ sur S. On a alors $\xi_\alpha(\mathrm{H}^0_{\mathbb{R}})=\mathbb{R}^\times_+$. Si $h=(s,a)\in\mathrm{S}\times\mathrm{V}$ est dans $\mathrm{H}''_{\mathbb{R}}$, on a $\xi_\alpha(a)\neq1$. On en déduit que $\xi_\alpha(a^t)\neq1$ pour tout $t>0$, et donc $a^t\in\mathrm{H}''_{\mathbb{R}}$. Si $t\mapsto s_t$ est continu et tel que $s_t\underset{t\to0}{\to}1$, l'élément $h_t=(s_t,a^t)$ est dans $\mathrm{H}''_{\mathbb{R}}$ et tend vers 1 pour $t\to0$.

Par conséquent, il suffit de vérifier $(\star)$ au voisinage de l'élément neutre de $\mathrm{G}_{\mathbb{R}}$.

Nous construisons un tel voisinage. Soit :

- $\mathscr{U}\subset\mathscr{G}^0_{\mathbb{R}}$: $\mathscr{U}=\{\mathrm{X}\mid\operatorname{ad}\mathrm{X}$ n'a que des valeurs propres λ telles que $\operatorname{Im}\lambda\in]-\pi/2,\pi/2[\}$.
- $\mathrm{U}=\exp(\mathscr{U})\subset\mathrm{G}_{\mathbb{R}}$,
- $\mathrm{V}=\exp(2\mathscr{U})=\mathrm{U}^2\subset\mathrm{G}^2_{\mathbb{R}}$.

LEMME 7.5. — $\exp:2\mathscr{U}\to\mathrm{V}$ *est un difféomorphisme* (Warner [30], II.8.1.6.2).

Donc $q:\mathrm{U}\to\mathrm{V}$ est un difféomorphisme.

Rappelons la classe d'ouverts $\mathscr{E}(\mathrm{G}_{\mathbb{R}})$ de Harish-Chandra. Si $y\in\mathrm{G}_{\mathbb{R}}$, y se décompose de façon unique en $y=y_sy_u=y_ey_hy_u$, y_s semi-simple, y_e elliptique, y_h hyperbolique, y_u unipotent (Varadarajan [27], II, § 2). Un ouvert W de $\mathrm{G}_{\mathbb{R}}$ appartient à $\mathscr{E}(\mathrm{G}_{\mathbb{R}})$ s'il est complètement invariant (W invariant, et $y\in\mathrm{W}\Rightarrow y_s\in\mathrm{W}$) et si, pour $y\in\mathrm{W}$, tout $x\in\mathrm{G}_{\mathbb{R}}$ tel que $x_e=y_e$ appartient à W.

LEMME 7.6. — *V appartient à* $\mathscr{E}(G_{\mathbb{R}})$.

Il est clair que V est complètement invariant (la définition de $\mathscr{U}$ ne porte que sur x_s). Vérifions la deuxième condition. Soit :

$$y = \exp Y = \exp(Y_r + Y_i + Y_n) \qquad \text{où} \quad Y_r + Y_i = Y_s$$

est la partie semi-simple de Y, décomposé en parties réelles et imaginaire (*cf.* Sugiura [25]). On a :

$$Y \in 2\mathscr{U}, \qquad \text{donc} \quad Y_i \in 2\mathscr{U}, \qquad y_e = \exp(Y_i) \in V.$$

Soit $x = x_e hu$, $u = \exp(N)$, $h = \exp(H)$ avec H semi-simple hyperbolique, et supposons que $x_e = y_e = \exp(Y_i)$. Alors h, u commutent à y_e donc à Y_i par injectivité de l'exponentielle sur $2\mathscr{U}$; on en déduit de nouveau que Y_i commute à H, N, donc $x = \exp(Y_i + H + N)$, donc $x \in \exp(2\mathscr{U})$.

Nous appliquons maintenant le *théorème* 4.8 à l'ouvert U de $G_{\mathbb{R}}$. Il implique qu'il existe une distribution t sur V, invariante, propre pour l'action de $Z(\mathfrak{g}_{\mathbb{R}})$, donnée par une fonction localement intégrable, analytique sur $V \cap G'_{\mathbb{R}}$, telle que :

$$T(x) = t(x^2) \qquad \text{pour} \quad x \in U.$$

Par ailleurs, la représentation Π de $G_{\mathbb{C}}$ est *tempérée* : elle est dans la série principale unitaire. Soit de plus χ le caractère infinitésimal de t. On sait que $t(x) = \varepsilon$ trace $\pi_\varphi(N x)$ pour x σ-elliptique. Le caractère infinitésimal χ est donc celui de π_φ, qui est une somme de représentation de la série discrète. Donc χ est *régulier*. On peut alors appliquer le *théorème* 5.2 pour obtenir :

$$|T(x)| \leqq C |D_\sigma(x)|^{-1/2},$$

x σ-régulier. Comme $D_\sigma(x) = 2^l D(x^2)$, $x \in G_{\mathbb{R}}$ (chap. 5, avant la *proposition* 5.7) on voit que :

$$|t(x)| \leqq C_1 |D(x)|^{-1/2}, \qquad x \in V \cap G'_{\mathbb{R}}.$$

Nous pouvons maintenant utiliser le théorème suivant d'Harish-Chandra (*cf.* Varadarajan [27], II, p. 68).

THÉORÈME 7.7. — *Soit* $V \in \mathscr{E}(G_{\mathbb{R}})$, $V \subset Z_{\mathbb{R}} G^0_{\mathbb{R}}$. *Soit* Θ_1, Θ_2 *des distributions invariantes sur* V, *propres et de caractère infinitésimal régulier elliptique sous* $Z(\mathfrak{g}_{\mathbb{R}})$. *Supposons que :*

(i) $$|\Theta_i(x)| \leqq C |D(x)|^{-1/2}, \; x \in V \cap G'_{\mathbb{R}},$$

(ii) $$\Theta_1(b) = \Theta_2(b) \qquad b \textit{ elliptique régulier dans } V.$$

Alors $\Theta_1 = \Theta_2$.

Les représentations π_i, qui sont dans la série discrète, ont des caractères satisfaisant (i); il en est donc de même pour $\varepsilon(G)$ trace π_φ, et, comme on vient de voir, pour t. Comme ces deux distributions coïncident sur les éléments elliptiques réguliers, elles sont égales partout. Ceci termine la démonstration du *théorème* 7.2. □

8. Relèvement des représentations tempérées et des séries principales généralisées

1. Représentations tempérées. — Nous sommes maintenant en mesure d'obtenir le relèvement des représentations tempérées. Soit G réductif connexe défini sur $\mathbb{R}$. Une représentation de $G_{\mathbb{R}}$ ou $G_{\mathbb{C}}$ est *tempérée* si son caractère s'étend à l'espace de Schwartz (chap. 5) ([14]).

Soit $F=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, ${}^LG={}^LG^0\times\Gamma_F$ le L-groupe de G sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Les représentations tempérées de G_F sont classifiées, à L-indiscernabilité près, par les classes de sections admissibles tempérées (c'est-à-dire *à image bornée*) du L-groupe (Langlands [14], Borel [1]). Plus précisément, on a la description suivante :

Soit $\varphi\in\Phi_{\mathbb{R}}(G)$; $\varphi : W_{\mathbb{R}}\to{}^LG$ est une section admissible dont l'image n'est dans aucun parabolique non pertinent (chap. 1). Soit ${}^LP$ un parabolique de ${}^LG$ minimal parmi ceux qui contiennent l'image de φ. A conjugaison près, on peut supposer que ${}^LP={}^LP^0\rtimes\Gamma_{\mathbb{R}}$; si ${}^LM={}^LM^0\rtimes\Gamma_{\mathbb{R}}$ est un sous-groupe de Levi de ${}^LP$, ${}^LM$ est associé à un sous-groupe de Levi M du parabolique P de G (le tout sur $\mathbb{R}$!). Modulo conjugaison dans $G_{\mathbb{R}}$, M est alors unique et l'on peut supposer que $\varphi : W_{\mathbb{R}}\to{}^LM$ ([14], p. 79-80).

D'après la minimalité de ${}^LP$, la section φ de ${}^LM$ est alors *discrète* et détermine une famille $\{\pi_1^M, \ldots, \pi_r^M\}$ de représentations de la série discrète de $M_{\mathbb{R}}$. Ces représentations sont *unitaires* pour φ bornée [1], ce qu'on peut voir comme suit : soit C le plus grand tore central de M; on a $C_{\mathbb{R}}(M_{der})_{\mathbb{R}}$ d'indice fini dans $M_{\mathbb{R}}$. La restriction de π_i à $(M_{der})_{\mathbb{R}}$ est une somme finie de séries discrètes pour un groupe semi-simple, donc est unitaire. Sa restriction à $C_{\mathbb{R}}$ est donnée par la fonctorialité pour C et l'homomorphisme ${}^LG\to{}^LC$; le composé de φ avec cet homomorphisme reste borné, et il suffit de vérifier que les représentations unitaires (i. e. tempérées !) des tores sont données par les sections bornées.

Par conséquent, la représentation $\mathrm{ind}_{P_{\mathbb{R}}M_{\mathbb{R}}N_{\mathbb{R}}}^{G_{\mathbb{R}}}(\pi_i^M\otimes 1)$ est unitaire et se décompose en une somme (finie d'après des résultats généraux) de représentations irréductibles unitaires de $G_{\mathbb{R}}$; notons-les $\pi_{i,1}, \ldots, \pi_{i,r_i}$. Les $\pi_{i,j}$ sont tempérées (Harish-Chandra); elles sont inéquivalentes — et en particulier apparaissent avec multiplicité 1 dans $\mathrm{ind}(\pi_i^M)$! (Knapp [10], [11]); on obtient ainsi toutes les représentations tempérées de $G_{\mathbb{R}}$ (Trombi, Langlands, Knapp-Zuckermann). Les $\pi_{i,j}$ forment le L-paquet associé à φ. Nous notons :

$$\pi_\varphi=\pi_\varphi^G=\bigoplus_{i,j}\pi_{i,j};$$

en particulier :

$$\pi_\varphi^G=\mathrm{ind}_{M_{\mathbb{R}}N_{\mathbb{R}}}^{G_{\mathbb{R}}}(\pi_\varphi^M\otimes 1).$$

Par restriction à $W_{\mathbb{C}}$, la section φ définit des représentations de $G_{\mathbb{C}}$ et $M_{\mathbb{C}}$, notées $\Pi_\varphi=\Pi_\varphi^G$ et Π_φ^M.

([14]) Plus généralement, une représentation π est *essentiellement tempérée* (Langlands [14], p. 83) si elle est de la forme $\pi_0\otimes\chi$, χ un caractère de G_F, π_0 tempérée. Tous les résultats de ce chapitre s'étendent alors trivialement aux représentations essentiellement tempérées.

Grâce au théorème d'induction par étages appliqué à un sous-groupe de Borel $B_{\mathbb{C}} \subset M_{\mathbb{C}} N_{\mathbb{C}} \subset G_{\mathbb{C}}$, on vérifie facilement que $\Pi_{\varphi}^{G} = \mathrm{ind}_{M_{\mathbb{C}} N_{\mathbb{C}}}^{G_{\mathbb{C}}} (\Pi_{\varphi}^{M} \otimes 1)$; ces représentations sont irréductibles.

Dans ces conditions, la représentation Π_{φ}^{M} relève la représentation de la série discrète π_{φ}^{M} de $M_{\mathbb{R}}$. D'après le chapitre 7, il existe un opérateur d'entrelacement involutif A_M bien défini de Π_{φ}^{M} et $\Pi_{\varphi}^{M} \circ \sigma$ tel que :

$$(\star) \qquad \operatorname{trace}(\Pi_{\varphi}^{M}(g) A_M) = \varepsilon(M) \operatorname{trace} \pi_{\varphi}^{M}(Ng),$$

pour g σ-régulier dans $M_{\mathbb{C}}$, σ-conjugué à $M_{\mathbb{R}}$. Soit A'_G l'opérateur $\mathrm{ind}_{M_{\mathbb{C}} N_{\mathbb{C}}}^{G_{\mathbb{C}}} (A_M \otimes 1)$; on vérifie facilement (*cf.* Repka [18], Lemma 2.1) que l'opérateur A_G obtenu par composition de A'_G avec l'opérateur donné par $f(g) \mapsto f(g^{\sigma})$ dans la réalisation standard de l'induite, entrelace Π_{φ}^{G} et $\Pi_{\varphi}^{G} \circ \sigma$. Dans ces conditions d'après Hiraï [9], le caractère de la représentation induite π_{φ}^{G} peut se calculer explicitement comme la valeur sur la diagonale (dans G/P) d'un noyau intégral; on obtient une expression donnant le caractère de π_{φ}^{G} sur les éléments réguliers de $G_{\mathbb{R}}$ à partir du caractère de π_{φ}^{M}. Repka [18] a montré qu'un calcul analogue permet d'obtenir le caractère tordu trace $(\Pi_{\varphi}^{G} A_G)$ à partir du caractère tordu pour M. Il démontre ainsi :

THÉORÈME 8.1 (Repka [18] pour G quasi déployé). — *Supposons que l'identité* $(\star)$ *soit vérifiée par* Π_{φ}^{M} et π_{φ}^{M}. *Alors la distribution* trace $(\Pi_{\varphi}^{G} A_G)$ *vérifie :*

$$(\star\star) \qquad \operatorname{trace}(\Pi_{\varphi}^{G}(g) A_G) = \varepsilon(M) \operatorname{trace} \pi_{\varphi}^{G}(Ng),$$

g σ-régulier, σ-conjugué à $G_{\mathbb{R}}$.

Remarque 8.2. — Le membre de droite dans $(\star\star)$ a un sens à cause de l'invariance stable de trace π_{φ}^{G} (th. 2.13).

Remarque 8.3. — Repka énonce ce théorème sous l'hypothèse que G est quasi déployé. En fait, sa démonstration (modulo l'application norme pour G quelconque, *cf* chapitre 2) prouve l'identité des caractères pour tout g σ-conjugué à un élément de $M_{\mathbb{R}}$ [18], théorème 6.1, démonstration. Si g est σ-conjugué à un élément de carré *fortement régulier* de $G_{\mathbb{R}}$, mais pas à $M_{\mathbb{R}}$, il ne peut être σ-conjugué à un élément de $M_{\mathbb{C}}$, d'après la proposition 2.14. Dans ce cas, on voit facilement que les deux membres de $(\star\star)$ sont nuls. Par densité, c'est vrai pour tous les éléments σ-réguliers, σ-conjugués à $G_{\mathbb{R}}$ mais non à $M_{\mathbb{R}}$.

En définitive, on a le théorème de relèvement tempéré :

THÉORÈME 8.4. — *Soit* φ *une section tempérée de* ${}^{L}G$, Φ *sa restriction à* $W_{\mathbb{C}}$, $\pi = \pi_{\varphi}$, $\Pi = \Pi_{\Phi}$ *les représentations de* $G_{\mathbb{R}}$, $G_{\mathbb{C}}$ *associées. Soit* $A = A_G : \Pi \sim \Pi \circ \sigma$ *l'opérateur d'entrelacement défini plus haut, et* M *un des sous-groupes de Levi cuspidaux associés à* φ. *Alors :*

$$\operatorname{trace}(\Pi_{\Phi}(g) A_G) = \varepsilon(M) \operatorname{trace} \pi_{\varphi}(Ng),$$

pour tout g σ-régulier, σ-conjugué à un élément de $G_{\mathbb{R}}$.

Il est facile de voir comment le relèvement tempéré se comporte par rapport à la fonctorialité (homomorphismes à noyaux et images abéliens, etc.) Nous voulons expliciter ceci pour les caractères centraux, puisque nous l'utilisons dans le chapitre 7.

Soient donc φ, Φ comme dans le théorème 8.4. Soit Z le centre de G. Les sections φ et Φ définissent (Langlands [14], § 2]) des caractères χ et X de $Z_{\mathbb{R}}$ et $Z_{\mathbb{C}}$; la construction de π_φ et Π_Φ est alors telle que χ et X sont respectivement les caractères centraux de ces représentations.

Soit :

$$\begin{aligned} N: \quad & Z_{\mathbb{C}} \to Z_{\mathbb{R}}, \\ & z \mapsto z z^{\sigma}. \end{aligned}$$

PROPOSITION 8.5. — *Soient* π, Π *comme dans le théorème* 8.4, χ *et* X *leurs caractères centraux. Alors :*

$$X = \chi \circ N.$$

Ceci est une conséquence immédiate du relèvement des caractères. (On pourrait aussi le démontrer directement à l'aide de la définition fonctorielle; cette identité est vérifiée même si le relèvement des caractères n'existe pas.)

On a un résultat analogue pour les caractères infinitésimaux.

PROPOSITION 8.6. — *Soit* $\varkappa : Z(\mathscr{G}_{\mathbb{R}}) \to \mathbb{C}$, $K : Z(\mathscr{G}_{\mathbb{C}}) \to \mathbb{C}$ *les caractères infinitésimaux de* π, Π, $N : Z(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}) \to Z(\mathfrak{g}_{\mathbb{R}})$ *l'application norme. Alors* $\varkappa = K \circ N$.

De nouveau, ceci pourrait être déduit directement de la fonctorialité (*cf.* lemme 6.11). Le relèvement des caractères étant connu, c'est une conséquence du théorème 4.8.

2. SÉRIES PRINCIPALES GÉNÉRALISÉES. — Les résultats sur le relèvement des séries discrètes, joints à celui de Repka, impliquent plus généralement un théorème de relèvement pour des caractères *non tempérés* qui ne sont plus des caractères de L-paquets. Soit P un sous-groupe parabolique cuspidal de G, M un sous-groupe de Levi de P, définis sur $\mathbb{R}$. Soit φ une section discrète du L-groupe réel de M, $\{\pi_1, \ldots, \pi_r\}$ le L-paquet associé à φ, $\pi^M = \pi_\varphi^M = \pi_1 \oplus \ldots \oplus \pi_r$. (On *ne suppose pas* les π_i unitaires : rappelons que π est dite appartenir à la série discrète si $\pi \otimes \chi$ est de carré intégrable pour un caractère χ de $M_{\mathbb{R}}$). Soit N le radical unipotent de P.

Soit :

$$\rho_\varphi^G = \operatorname{ind}_{M_{\mathbb{R}} N_{\mathbb{R}}}^{G_{\mathbb{R}}} (\pi_\varphi^M \otimes 1) = \oplus \operatorname{ind}_{M_{\mathbb{R}} N_{\mathbb{R}}}^{G_{\mathbb{R}}} (\pi_i \otimes 1).$$

On peut considérer φ comme une section de L-groupe réel de G (Langlands [14], p. 78-80); par construction les représentations du L-paquet de représentations de $G_{\mathbb{R}}$ associées à φ sont alors certains sous-quotients de ρ_φ^G ([14], p. 8.2). En général, cependant, tous les sous-quotients n'apparaissent pas; si π_φ^G est la somme des représentations du L-paquet, on peut avoir :

$$\operatorname{trace} \pi_\varphi^G \neq \operatorname{trace} \rho_\varphi^G.$$

Par composition avec l'injection $W_{\mathbb{C}} \to W_{\mathbb{R}}$ des groupes de Weil, on obtient une représentation (irréductible) Π_φ^M de $M_{\mathbb{C}}$; Π_φ^M est σ-stable et, d'après le chapitre 7, pour un opérateur A_M bien défini, on a :

$$\operatorname{trace}(\Pi_\varphi^M(m) A_M) = \varepsilon(M) \operatorname{trace} \pi_\varphi^M(N m),$$

$m \in M_{\mathbb{C}}$, m σ-régulier et σ-conjugué à $M_{\mathbb{R}}$. (On n'a pas fait d'hypothèse d'unitarité dans le chapitre 7.) Soit $P_\varphi^G = \mathrm{ind}_{M_{\mathbb{C}}N_{\mathbb{C}}}^{G_{\mathbb{C}}}(\Pi^M \otimes 1)$. La représentation P_φ^G peut être réductible et contient Π_φ^G comme sous-quotient. L'opérateur $A_G = \mathrm{ind}_{M_{\mathbb{C}}N_{\mathbb{C}}}^{G_{\mathbb{C}}}(A_M \otimes 1)$ entrelace P_φ^G et $P_\varphi^G \circ \sigma$. Comme le remarque Repka, son théorème d'induction s'applique à $P_\varphi = P_\varphi^G$ et $\rho_\varphi = \rho_\varphi^G$. En définitive :

PROPOSITION 8.7. — *Soit* φ *une section du* L-*groupe réel*, $P = MN$ *un parabolique cuspidal de* G *associé à un parabolique minimal de* ${}^LG$ *contenant l'image de* φ. *Soit* ρ_φ, P_φ *les représentations de* $G_{\mathbb{R}}$, $G_{\mathbb{C}}$ (*séries principales généralisées*), $A_G : P_\varphi \cong P_\varphi \circ \sigma$ *comme ci-dessus. Alors :*

$$\mathrm{trace}(P_\varphi(g) A_G) = \varepsilon(M)\ \mathrm{trace}\ \rho_\varphi(Ng),$$

g σ-régulier dans $G_{\mathbb{C}}$, σ-conjugué à $G_{\mathbb{R}}$.

Ceci donne des relations entre relèvements de différents sous-quotients de ρ_φ. Par exemple, si $G = GL(2)$, on peut ainsi déduire le relèvement des séries discrètes du relèvement des séries principales et des représentations de dimension finie [5].

3. FORMES INTÉRIEURES ET RELÈVEMENT. — Rappelons certains résultats de D. Shelstad [19]. Soient G^1 et G^2 deux groupes (connexes réductifs/$\mathbb{R}$) qui sont formes intérieures l'un de l'autre : on peut supposer que $G^1_{\mathbb{C}} = G^2_{\mathbb{C}} = G_{\mathbb{C}}$, et il existe $c \in G_{\mathbb{C}}$ tel que $\sigma_2 = \mathrm{Ad}(c) \circ \sigma_1$. Dans ce cas, G^1 et G^2 ont même L-groupe. Certaines sections de ce L-groupe sont pertinentes (chap. 1, § 2) pour G^1 et G^2 à la fois, et définissent donc des L-paquets de représentations de $G^1_{\mathbb{R}}$ et $G^2_{\mathbb{R}}$. Dans la même situation, certains sous-groupes de Cartan (réels !) de G^1 et G^2 sont conjugués par $G_{\mathbb{C}}$: G^1 et G^2 ont « des sous-groupes de Cartan en commun ». Soit φ une section *tempérée* du L-groupe réel, pertinente pour G^1 et G^2; soient π^1_φ, π^2_φ les sommes des L-paquets associés; ce sont des représentations de $G^1_{\mathbb{R}}$, $G^2_{\mathbb{R}}$. Soient T^1, T^2 des tores de G^1, G^2 tels que $T^2_{\mathbb{R}} = \mathrm{Ad}(x) T^1_{\mathbb{R}}$, $x \in G_{\mathbb{C}}$. Alors :

THÉORÈME 8.8 (D. Shelstad) :

$$\mathrm{trace}\ \pi^1_\varphi(t) = \varepsilon(G^1)\varepsilon(G^2)\ \mathrm{trace}\ \pi^2_\varphi(xtx^{-1}), \qquad t \text{ régulier} \in T^1_{\mathbb{R}}.$$

Nous voulons indiquer la relation de ce résultat avec le changement de base. Soit $\Phi = \varphi|_{W_{\mathbb{C}}}$, $\Pi = \Pi_\Phi$ la représentation (irréductible) de $G_{\mathbb{C}}$ associée. Supposons d'abord φ *discrète*. On peut supposer que G^1, par exemple, est quasi déployé; dans ce cas, tous les tores de G^2 s'envoient dans ceux de G^1 par conjugaison. Soit G une forme intérieure de G^1 et G^2, G_{der} *anisotrope* : un tel G existe puisque φ est discrète. Soient σ_1, σ_2, τ les conjugaisons associées à G^1, G^2, G; soient A_{σ_1}, A_{σ_2}, A_τ les opérateurs d'entrelacement dans l'espace de Π correspondants (chap. 7). Rappelons que $\sigma_2 = \mathrm{Ad}(c) \circ \sigma_1$, $cc^{\sigma_1} = z^{-1} \in Z(G_{\mathbb{C}})$. Comme G est anisotrope, $Z(G_{\mathbb{C}}) \subset G_{\mathbb{R}}$. Soit δ la représentation de $G_{\mathbb{R}}$ associée à φ par la fonctorialité; $\delta(z)$ est assimilé à un nombre complexe.

LEMME 8.9. — *On a :*

$$A_{\sigma_2} = \delta(z)\,\Pi(c)\,A_{\sigma_1}.$$

En effet, soit :

$$\sigma_1 = \mathrm{Ad}(x)\circ\tau \qquad \text{d'où} \quad A_{\sigma_1} = \delta(xx^\tau)^{-1}\,\Pi(x)\,A_\tau,$$
$$\sigma_2 = \mathrm{Ad}(cx)\circ\tau, \qquad A_{\sigma_2} = \delta(cxc^\tau x^\tau)^{-1}\,\Pi(cx)\,A_\tau.$$

On a défini z par $z^{-1} = cc^{\sigma_1}$; comme $g^{\sigma_1} \equiv xg^\tau x^{-1}$, on a :

$$z^{-1} = cxc^\tau x^{-1} \qquad \text{d'où} \quad \delta(z) = \delta(z^{-1})^{-1} = \delta(cxc^\tau x^{-1})^{-1} = \delta(cxc^\tau x^\tau)^{-1}\,\delta(x^\tau x),$$

d'où le résultat. $\square$

Par ailleurs, $g \mapsto gc$ échange presque (exactement si G est adjoint) les applications N_2 et N_1; plus précisément :

$$gg^{\sigma_2} = gcg^{\sigma_1}c^{-1} = gc(gc)^{\sigma_1}z, \qquad g \in G_{\mathbb{C}}.$$

Soit alors T un tore maximal commun à G^1 et G^2 (on peut y ramener le cas de tores conjugués par $G_{\mathbb{C}}$, en changeant par exemple G^1).

Soit $x = g^2 = gg^{\sigma_2}$ le carré d'un élément g de $T_{\mathbb{R}}$, x régulier. On a d'après le théorème de relèvement (th. 7.2), en donnant aux valeurs des caractères un sens convenable :

$$\varepsilon(G^2)\ \mathrm{trace}\ \pi^2(x) = \varepsilon(G^2)\ \mathrm{trace}\ \pi^2(gg^{\sigma_2}) = \mathrm{trace}(\Pi(g)\,A_{\sigma_2})$$
$$= \delta(z)\ \mathrm{trace}\ (\Pi(gc)\,A_{\sigma_1}) = \delta(z)\,\varepsilon(G^1)\ \mathrm{trace}\ \pi^1(gc(gc)^1);$$

on sait que $(gc)(gc)^{\sigma_1}$, qui est régulier (chap. 2, § 1), est conjugué à un élément de $G^1_{\mathbb{R}}$, ce qui donne un sens à la dernière expression.

L'élément $z = (cc^{\sigma_1})^{-1}$ est dans $Z(G^1_{\mathbb{R}})$.

Il est facile de vérifier que pour $z \in Z(G^1_{\mathbb{R}}) = Z(G_{\mathbb{R}})$ on a $\delta(z) = \chi^1(z)$ où χ^1 est le caractère central de π^1; par exemple, on pourrait se ramener à G semi-simple et considérer un tore maximal compact $B \subset G^1 \cap G$, où les caractères de δ et π^1 sont connus, et qui contient $Z(G^1_{\mathbb{R}})$. On a donc :

$$\varepsilon(G^2)\ \mathrm{trace}\ \pi^2(x) = \varepsilon(G^1)\,\chi^1(z)\ \mathrm{trace}\ \pi^1(gc(gc)^{\sigma_1})$$
$$= \varepsilon(G^1)\ \mathrm{trace}\ \pi^1(gc(gc)^{\sigma'}z) = \varepsilon(G^1)\ \mathrm{trace}\ \pi^1(x).$$

En définitive, on voit que pour la série discrète, les identités de changement de base sont compatibles avec celles de Shelstad et en fait les impliquent sur les éléments semi-simples qui sont des carrés. Plus généralement on peut faire la même démonstration pour tous les L-paquets tempérés : on obtient d'abord les identités sur les sous-groupes de Levi M^1, M^2 de G^1, G^2 associés à une même section tempérée φ, et on les induit à l'aide des formules de Repka, en remarquant que dans cette situation (Shelstad) :

$$\varepsilon(G^1)\,\varepsilon(G^2) = \varepsilon(M^1)\,\varepsilon(M^2). \quad \square$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. BOREL, *Automorphic* L-*Functions* (*Proc. Sym. Pure Math.*, vol. 33, n° 2, 1979, p. 27-61).

[2] A. BOREL et J. TITS, *Groupes réductifs* (*I.H.E.S. Publ. Math.*, vol. 27, 1975, p. 55-150).

[3] A. BOREL et N. WALLACH, *Continuous Cohomology, Discrete Subgroups, and Representations of Reductive Groups* (*Ann. of Math. Studies*, vol. 94, Princeton U.P. 1980).

[4] L. CLOZEL, « *Base Change* » *géométrique : Relèvement de la série principale de* GL $(n, \mathbb{C}/\mathbb{R})$, Springer LN 728, 1979, p. 17-41.

[5] L. CLOZEL, *Sur le « base change » pour les formes réelles de* GL $(2, \mathbb{C})$, Université Paris-VII, U.E.R. de Math., 1980.

[6] M. DUFLO, *Représentations irréductibles des groupes semi-simples complexes*, Springer LN 497, 1975, p. 26-88.

[7] P. GERARDIN, *La classification de R.P. Langlands des représentations irréductibles des groupes réductifs réels* (notes non publiées).

[8] S. HELGASON, *Differential Geometry and Symmetric Spaces*, Academic Press, 1959.

[9] T. HIRAI, *The Characters of Some Induced Representations of Semi-Simple Lie Groups* (*J. Math. Kyoto Univ.*, vol. 8, 1968, p. 313-363).

[10] A. KNAPP, *Commutativity of Intertwining Operators* II (*Bull. A. M. S.* vol. 82, 1976, p. 271-273).

[11] A. KNAPP, *Commutativity of Intertwining Operators for Semi-Simple Groups* (preprint).

[12] A. KNAPP et E. M. STEIN, *Intertwining Operators for Semi-Simple Groups* (*Ann. of Math.*, vol. 93, 1971, p. 489-578).

[13] R. P. LANGLANDS, *Problems in the Theory of Automorphic Forms*, Springer LN 170, 1970, p. 18-86.

[14] R. P. LANGLANDS, *On the Classification of Irreducible Representations of Real Algebraic Groups*, preprint (sic), I.A.S., Princeton, 1973.

[15] R. P. LANGLANDS, *Stable Conjugacy: Definitions and Lemmas* (*Can. J. Math.*, vol. 31, n° 4, 1979, p. 700-725).

[16] J. REPKA, *Base Change Lifting and Galois Invariance* (preprint).

[17] J. REPKA, *Base Change for Tempered Irreductible Representations of* GL $(n, \mathbb{R})$ (à paraître).

[18] J. REPKA, *Base Change and Induced Representations of Real Reductive Groups* (preprint).

[19] D. SHELSTAD, *Characters and Inner Forms of a Quasi-Split Group Over* $\mathbb{R}$, (*Comp. Math.*, vol. 39, 1979, p. 11-45).

[20] D. SHELSTAD, *Some Character Relations for Real Reductive Algebraic Groups* (*Thèse*, Yale, 1974).

[21] D. SHELSTAD, *Base Change and a Matching Theorem for Real Groups* (preprint).

[22] T. SHINTANI, *On Irreductible Unitary Characters of a Certain Group Exention of GL* $(2, \mathbb{C})$ (*J. Math. Soc. Japan*, vol. 29, n° 1, 1977).

[23] R. STEINBERG, *Regular Elements of Semi-Simple Algebraic Groups* (*I.H.E.S. Pbl. Math.*, vol. 25, 1965, p. 49-80).

[24] R. STEINBERG et T. A. SPRINGER, *in* A. BOREL et coll., *Seminar on Algebraic Groups and Related Finite Groups*, Springer LN 131, 1970.

[25] M. SIGIURA, *Conjugate Classes of Cartan Subalgebras in Real Semi-Simple Lie algebras* (*J. Math. Soc. Japon*, vol. 11, 1959, p. 374-434).

[26] J. TATE, *Number Theoretic Background* (*Proc. Symp. Pure Math.*, vol. 33, n° 2, 1979, p. 3-26).

[27] V. S. VARADARAJAN, *Harmonic Analysis on Real Reductive Groups*, Springer LN 576, 1977.

[28] N. WALLACH, *Representations of Reductive Lie Groups* (*Proc. Symp. Pure Math.*, vol. 33, n° 1, 1979, p. 71-86).

[29] N. WALLACH, *Harmonic Analysis on Homogeneous Spaces*, Marcel Dekker, 1973.

[30] G. WARNER, *Harmonic Analysis on Semi-Simple Lie Groups*, I-II, Springer, 1972.

(Manuscrit reçu le 28 avril 1981.)

L. CLOZEL
U.E.R. de Mathématiques,
L.A. n° 212 du C.N.R.S.,
2, place Jussieu,
75251 Paris Cedex 05.