Annales scientifiques de l'É.N.S.

S. Alinhac

Non-unicité pour des opérateurs différentiels à caractéristiques complexes simples

Annales scientifiques de l'É.N.S. 4e série, tome 13, nº 3 (1980), p. 385-393

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1980_4_13_3_385_0>

Ann. scient. Éc. Norm. Sup.
4e série, t. 13, 1980, p. 385 à 393.

NON-UNICITÉ POUR DES OPÉRATEURS DIFFÉRENTIELS A CARACTÉRISTIQUES COMPLEXES SIMPLES

PAR S. ALINHAC

Introduction

Dans cet article, nous énonçons et prouvons (de façon constructive) un théorème de non-unicité pour des équations aux dérivées partielles (elliptiques ou non) à caractéristiques complexes simples (et à coefficients de classe C^∞). En particulier, il apparaît que les opérateurs elliptiques à caractéristiques simples, qui ont l'unicité de Cauchy à partir de toute hypersurface (d'après Calderón [8]), n'ont pas, en général, d'unicité forte à partir d'une sous-variété de codimension supérieure à un.

Cela souligne le caractère exceptionnel du résultat classique d'Aronszajn et Cordes ([5], [9]) et de la propriété de forte unicité en général.

I. — Le résultat principal

Considérons au voisinage de l'origine dans $\mathbb{R}^n$ ($n \geqq 2$), une sous-variété M, de classe C^∞, de codimension 2, que nous supposerons donnée localement par les équations $x=y=0$ [les coordonnées dans $\mathbb{R}^n$ étant notées (x, y, t), $t \in \mathbb{R}^{n-2}$].

Soit $P=P(x, y, t, D_x, D_y, D_t)$ un opérateur différentiel d'ordre m ($m \geqq 2$) à coefficients de classe C^∞ près de 0, de symbole principal $P_m(x, y, t, \xi, \eta, \tau)$.

Rappelons qu'une fonction u, de classe C^∞, est dite plate sur M, si pour tout α, $D^\alpha u=0$ sur M. Nous pouvons énoncer le théorème principal.

THÉORÈME. — *Supposons que* $p_m(0, 0, 0, 1, \eta, 0)$ *possède deux racines simples non réelles et non conjuguées.*

Alors il existe un voisinage V *de* 0, *et des fonctions* $a \in C^\infty(V)$, $u \in C^\infty(V)$, *plates sur* $M \cap V$, *telles que* $Pu-au=0$ *dans* V, *et* supp u *est un voisinage de* 0.

Remarques. — (i) Dans cet énoncé, on ne suppose pas que P est elliptique, ni même transversalement elliptique à M.

(ii) L'hypothèse du théorème est indépendante du choix des coordonnées, puisque c'est une propriété de p_m restreint au plan conormal à M en 0.

Précisons quelques termes. Nous dirons que P a la propriété de forte unicité en un point m d'une sous-variété M (de codimension quelconque), si « $\mathrm{P}u=0$ et u plate sur M » près de m, implique « $u\equiv 0$ près de m ». La forte unicité est dite stable si, pour toute fonction a, plate sur M, l'opérateur $\mathrm{P}+a$ a la forte unicité en M.

C'est un résultat classique d'Aronszajn [5] et Cordes [9] que si P est elliptique d'ordre 2, à coefficients réels (assez réguliers), P a la propriété de forte unicité stable en tout point. Ce théorème a été affiné par Alinhac et Baouendi [4] qui montrent que P a la forte unicité stable en 0 si $\mathrm{P}_2(0, \mathrm{D}_x)$ est à coefficients réels.

Cela n'est plus vrai si on considère des opérateurs à coefficients peu réguliers; Alinhac et Baouendi [3] construisent un exemple, dans le plan, d'opérateur P, homogène d'ordre 2, à coefficients continus, satisfaisant $\mathrm{P}(0, \mathrm{D}_x)=\Delta$, qui n'a pas la forte unicité en 0.

Le théorème présenté ici, au contraire, suppose les coefficients C^∞, et s'applique au cas où les coefficients en 0 ne sont pas réels; il fournit, en dimension 2, la réciproque suivante : si P est elliptique d'ordre 2 à caractéristiques simples, P a la forte unicité stable en 0 si et seulement si $\mathrm{P}_2(0, \mathrm{D}_x)$ est à coefficients réels.

Plus généralement, on a le corollaire :

COROLLAIRE. — *Soit* P *un opérateur elliptique d'ordre* 2 *à caractéristiques simples. Si* $\mathrm{P}_2(0, \mathrm{D}_x)$ *n'est pas a coefficients réels, il existe une sous-variété* M *de classe* C^∞, *de codimension* 2, $\mathrm{M}\ni 0$, *pour laquelle* P *n'a pas la forte unicité stable en* 0.

Remarques. — (i) En fait, dans ce corollaire, presque toutes les sous-variétés M (de codimension 2) conviennent.

(ii) D'après le théorème d'unicité de Calderón [8], P a la forte unicité stable en 0 pour tout hyperplan M.

Le résultat du corollaire est vrai aussi lorsque P est elliptique à caractéristiques simples, et d'ordre $m\geqq 3$; cela éclaire la condition du théorème 3 de [4] et montre que le résultat conjecturé par Sitnikova [10] n'est jamais vrai.

Il faut noter ici le contraste avec le cas où M est analytique réelle et P est à coefficients analytiques; on sait alors, d'après un travail de Baouendi et Zachmanoglou [6], que l'ellipticité de P transversalement à M implique la forte unicité de P en M.

Enfin, si P a des caractéristiques réelles simples (normales ou non à M), P n'a que rarement la forte unicité en M. Cela résulte des travaux de Baouendi, Treves et Zachmanoglou [7] (dans le cas analytique) et de Alinhac et Baouendi [4] (dans le cas C^∞), si p_m est complexe; si p_m est réel, il est souvent possible de construire une hypersurface $\mathrm{S}\supset\mathrm{M}$, en laquelle P n'a pas l'unicité de Cauchy stable (*cf.* la discussion en [1], et la bibliographie citée à ce propos).

II. — Preuve du théorème : construction des fonctions u et a

1. LES PHASES ET LEUR GÉOMÉTRIE. — (*a*) Le problème étant local au voisinage d'un point de M, on peut supposer que ce point est l'origine et que

$$\mathrm{M}=\{(x, y, t)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^{n-2},\ x=y=0\}\qquad\text{localement.}$$

L'hypothèse du théorème signifie alors que le polynôme $P_m(0, 0, 0, 1, X, 0)$ possède deux racines en X non réelles, simples et non conjuguées, notées $\lambda_\pm^0$ [on a désigné par $p_m(x, y, t, \xi, \eta, \tau)$ le symbole principal de l'opérateur $P(x, y, t, D_x, D_y, D_t)$].

Si l'on pose $p_m = \sum_{|\alpha|+|\beta|+|\gamma|=m} a_{\alpha\beta\gamma}\, \xi^\alpha \eta^\beta \tau^\gamma$, on voit en appliquant le théorème des fonctions implicites à p_m considéré comme fonction des $a_{\alpha\beta\gamma}$ et de (ξ, η, τ) au point $(a_{\alpha\beta\gamma}(0), (1, \lambda_\pm^0, \tau))$, qu'il existe des fonctions $\lambda_\pm(x, y, t, \xi, \tau)$, C^∞ et homogènes de degré 1 en (ξ, τ) dans un voisinage conique de $(0, 0, 0, 1, 0)$, holomorphes en (ξ, τ) au voisinage de $(1, 0)$, telles que $\lambda_\pm(0, 0, 0, 1, 0) = \lambda_\pm^0$, et

$$p_m(x, y, t, \xi, \lambda_\pm, \tau) \equiv 0.$$

(*b*) On considère le problème de Cauchy :

$$\frac{\partial}{\partial y}\varphi_\pm = \lambda_\pm\left(x, y, t, \frac{\partial}{\partial x}\varphi_\pm, \frac{\partial}{\partial t}\varphi_\pm\right),$$
$$\varphi_\pm|_{y=0} = x.$$

Comme $\lambda_\pm$ est complexe, et la surface $\{y=0\}$ est non caractéristique, on choisit pour $\varphi_\pm$ l'une des fonctions C^∞ dont toutes les traces sur $\{y=0\}$ sont formellement données par l'équation à résoudre, en sorte que l'on aura

$$\frac{\partial}{\partial y}\varphi_\pm - \lambda_\pm\left(x, y, t, \frac{\partial\varphi_\pm}{\partial x}, \frac{\partial\varphi_\pm}{\partial t}\right) \text{ plate sur } \{y=0\}.$$

On a

$$\varphi_\pm(x, y, t) = x + y\lambda_\pm(x, 0, t, 1, 0) + O(y^2) = x + y\lambda_\pm(0, 0, t, 1, 0) + O(\rho^2),$$

où (ρ, θ) sont les coordonnées polaires dans le plan (x, y).

Notons que, comme $\lambda_\pm$ est non réel, pour $\rho \leqq \rho_0$:

$$\frac{1}{c}\rho \leqq |\varphi_\pm(x, y, t)| \leqq c\rho \qquad (c>0),$$

on posera

$$l_\pm = x + y\lambda_\pm(0, 0, t, 1, 0)$$

(« partie linéaire » de $\varphi_\pm$), en sorte que $\varphi_\pm = l_\pm(1 + O(\rho))$.

(*c*) Posons (avec α proche de 1 à choisir plus tard) :

$$s(\theta) = \left|\frac{\alpha\, l_+}{l_-}\right|$$

(où comme dans la suite, on omet d'écrire la dépendance en t, pour alléger).

— Soit $\lambda_\pm(0,0,t,1,0)=b_\pm+ic_\pm$; si s est constante, $s=\alpha$ (car $l_+=l_-$ sur $y=0$), donc

$$|l_+|^2=|l_-|^2, \qquad \text{soit} \quad 2(b_+-b_-)\cos\theta+(c_+^2-c_-^2)\sin\theta=0$$

ce qui n'est possible que si $b_+=b_-$, $c_+^2=c_-^2$;

Par hypothèse, ceci est exclu pour $t=0$, donc aussi pour t petit;

— Par un calcul direct, on voit facilement que s' a au plus quatre zéros sur le cercle. Comme s est π-périodique, elle possède donc exactement deux maximums θ_- et $\theta_-+\pi$, et deux minimums θ_+ et $\theta_++\pi$ (dépendant de façon C^∞ de t). On a

$$\frac{s}{\alpha}(\theta_-)\geqq 1\geqq\frac{s}{\alpha}(\theta_+), \qquad \frac{s}{\alpha}(\theta_-)>\frac{s}{\alpha}(\theta_+);$$

on peut donc choisir $\alpha=\alpha_0$ pour obtenir

$$s(\theta_-)>1>s(\theta_+).$$

Il y a alors exactement quatre points $\theta_i(\alpha)$ $(i=1,2,3,4)$ où $s=1$ et en ces points, $s'\neq 0$.

(d) Désignons par $\chi_\pm(\theta)$ des fonctions C^∞ sur le cercle unité, indépendantes de t, nulles dans un petit voisinage $V_\pm$ de $\theta_\pm$ (valeurs pour $t=0$), identiquement égales à 1 hors d'un voisinage un peu plus grand $\tilde{V}_\pm$ (avec $\tilde{V}_+\cap\tilde{V}_-=\emptyset$; ces voisinages seront précisés ultérieurement).

Dorénavant, les phases $\varphi_\pm$ ne seront considérées qu'en des points (x, y, t) t petit, $\theta\in\operatorname{supp}\chi_\pm$, $0<\rho\leqq\rho_0$ petit. Il est clair alors que les valeurs de $\varphi_\pm$ évitent un rayon fixe dans $\mathbb{C}$, et l'on notera $\arg\varphi_\pm$ des choix continus quelconques (éventuellement différents pour φ_+ et φ_- mais déterminés une fois pour toutes dans la suite) de l'argument dans ces zones.

(e) Posons alors

$$Z=\frac{1}{\varphi_-^\nu}-\frac{1}{(\alpha\varphi_+)^\nu}, \qquad \nu>0 \text{ à choisir.}$$

On a

$$Z=\frac{1}{l_-^\nu}(1+0(\rho))^\nu-\frac{1}{(\alpha l_+)^\nu}(1+0(\rho))^\nu=\frac{1}{(\alpha l_+)^\nu}\left[\frac{(\alpha l_+)^\nu}{(l_-)^\nu}-1+O(\rho)\right]=\frac{1}{(\alpha\rho)^\nu}f(\theta)+O(\rho),$$

avec

$$f(\theta)=\left(\frac{l_+}{\rho}\right)^{-\nu}\left[\frac{(\alpha l_+)^\nu}{(l_-)^\nu}-1\right].$$

Calculons une expression approchée de $\operatorname{Re} f(\theta)$:

$$\frac{(\alpha l_+)^\nu}{(l_-)^\nu}=s^\nu[\cos\nu(\arg l_+-\arg l_-)+i\sin\nu(\arg l_+-\arg l_-)],$$

$$\left(\frac{l_+}{\rho}\right)^{-\nu}=\frac{|l_+|^{-\nu}}{\rho}(\cos\nu\arg l_++i\sin\nu\arg l_+),$$

d'où

$$\operatorname{Re} f(\theta)=\left(\frac{|l_+|}{\rho}\right)^{-\nu}(s^\nu-1+\mathrm{O}(\nu^2))=\nu(\log s+\mathrm{O}(\nu)).$$

Cela montre, compte tenu des propriétés de s indiquées en (c), que pour $0<\nu\leqq\nu_0$ assez petit, $\operatorname{Re} f(\theta)$ possède sur le cercle exactement quatre zéros $\theta_i(\alpha, \nu)$, qui sont ceux, voisins des $\theta_i(\alpha)$, donnés par le théorème des fonctions implicites.

2. Solutions approchées dans le noyau de P. — Pour éviter de doubler les formules posons $\tilde\varphi_+=\alpha\varphi_+$, $\tilde\varphi_-=\varphi_-$.

(a) Nous cherchons des solutions approchées sous la forme familière de l'optique géométrique

$$v_\pm=\sum_{j=0}^{+\infty} a_\pm^j\, \mathrm{E}_j(\tilde\varphi_\pm),$$

où les E_j satisfont $\mathrm{E}_j'=\mathrm{E}_{j-1}$ pour $j\geqq 1$. On a

$$\mathrm{P}(a^j\,\mathrm{E}_j(\varphi))=\sum_{l=0}^{m} \mathrm{E}_j^{(m-l)}(\varphi)\, \mathrm{L}_l\, a^j,$$

où L_l est un opérateur différentiel d'ordre l (indépendant de j, mais dépendant de φ). En particulier

$$\mathrm{L}_0=i^{-m}\,p_m(\nabla\varphi),$$

$$\mathrm{L}_1=i^{-m}\left[p'_{m\xi}(\nabla\varphi).\frac{\partial}{\partial x}+p'_{m\eta}(\nabla\varphi)\frac{\partial}{\partial y}+p'_{m\tau}\frac{\partial}{\partial t}+q\right],$$

où q est C^∞,

$$\mathrm{L}_m=\mathrm{P}.$$

La somme $v_\pm$ est une solution formelle de $\mathrm{P}\,v_\pm=0$ pourvu que les $a_\pm^j$ vérifient les équations de transport

$$\mathrm{L}_1\, a_\pm^j=-\sum_{l=2}^{m} \mathrm{L}_l\, a_\pm^{j-l+1}\qquad (j=0, 1, \ldots),$$

avec la convention $a_\pm^p=0$ pour $p<0$.

Ici, on choisit $\mathrm{E}_0(z)=e^{-1/z^\nu}$:

$$\mathrm{E}_1(z)=\int_0^z \mathrm{E}_0(s)\, ds,\qquad \ldots$$

Lorsque z évite un rayon de $\mathbb{C}$ et $\nu>0$ est assez petit, les $E_j(z)$ sont bien définies, plates en $z=0$ [i.e. $E_j(z)\sim 0$ dans son secteur de définition] et de plus

$$\left|\frac{E_j}{E_0}\right|\leqq C_j|z|^j \qquad (j\geqq 1)$$

(pour plus de détails sur ce paragraphe, *voir* [7] ou [2]).

Comme $\lambda^0_\pm$ est une racine simple, la surface $\{y=0\}$ est non caractéristique pour L_1 (près de 0), et l'on peut résoudre les équations de transport à une fonction plate sur $\{y=0\}$ près [comme on l'a fait en 1 (*a*) avec les équations de phase], avec des données initiales $a^0_\pm|_{y=0}=1$, $a^j_\pm|_{y=0}=0$ $(j>1)$.

(*b*) En répétant les arguments de [2], on montre que l'on peut choisir des fonctions C^∞ plates en M :

$$v_\pm\sim\sum_{j=0}^{+\infty} a^j_\pm\, E_j(\tilde\varphi_\pm)$$

$$\left[\text{ou de façon équivalente } v_\pm=E_0(\tilde\varphi_\pm)\, a_\pm\,,\; a_\pm\sim\sum_{j=0}^{\infty} a^j_\pm\left(\frac{E_j}{E_0}\right)(\tilde\varphi_\pm)\right]$$

en sorte que $P v_\pm=r_\pm\, v_\pm$ et $r_\pm$ est C^∞ plate sur M (bien entendu, $v_\pm$ n'ont de sens que sur support $\chi_\pm$).

(*c*) Étudions l'ensemble E des points voisins de M où $|v_+|=|v_-|$. On écrit $v_\pm=E_0(\tilde\varphi_\pm)\, a^0_\pm(1+\tilde a_\pm)$. De la construction même de $v_\pm$ (*cf.* [2]) il résulte que a est une fonction C^1, nulle, ainsi que ses dérivées premières sur M; elle est C^∞ hors de M, et toutes ses dérivées ont, au voisinage de M, une singularité au plus polynomiale en $1/\rho$.

Alors

$$\log\left|\frac{v_+}{v_-}\right|=\operatorname{Re} Z+\log\left|\frac{a^0_+}{a^0_-}\right|+\log\left|\frac{1+\tilde a_+}{1+\tilde a_-}\right|=\frac{1}{(\alpha\rho)^\nu}\,[\operatorname{Re} f(\theta)+O(\rho)]+O(\rho) \qquad \text{d'après } 1\,(e).$$

Les points (ρ,θ) de E sont les solutions de

$$\operatorname{Re} f(\theta)=O(\rho),$$

où $O(\rho)$ dénote précisément ici une fonction de classe C' en (θ,ρ) qui est, ainsi que sa dérivée en θ, $O(\rho)$; elle est de plus C^∞ pour $\rho\neq 0$, avec singularités polynomiales des dérivées. Cela montre que, pour $\rho\leqq\rho_0$ petit, $\log|v_+/v_-|$ n'a pas d'autres zéros que les quatre « branches » différentiables $\theta=\theta_i(\alpha,\nu,\rho)$, avec $\theta_i(\alpha,\nu,0)=\theta_i(\alpha,\nu)$, données par le théorème des fonctions implicites. Ici encore, θ_i est C^∞ de ρ pour $\rho\neq 0$ et ses dérivées sont à singularités polynomiales en $\rho=0$.

3. Modification des solutions approchées. — On pose $u_\pm=v_\pm(1+w_\pm)$, où $w_\pm$ seront des fonctions C^∞ plates sur M choisies telles que $P u_\pm=R_\pm\, u_\pm$, $R_\pm$ étant C^∞ plates sur M et sur E.

(*a*) On a

$$\mathrm{P}\, u_\pm = v_\pm\, \mathrm{P}_m(w_\pm) + (1+w_\pm)\, \mathrm{P}\, v_\pm + \sum_{0<l<m} (\mathrm{Q}_{m-l}\, v_\pm)\, \mathrm{D}^l w_\pm ,$$

où Q_{m-l} sont certains opérateurs d'ordre $m-l$, d'où

$$\mathrm{R}_\pm = r_\pm + \frac{\mathrm{P}_m(w_\pm)}{1+w_\pm} + \frac{1}{1+w_\pm} \sum_{0<l<m} \frac{\mathrm{Q}_{m-}\, v_\pm}{v_\pm}\, \mathrm{D}^l w_\pm .$$

Les fonctions $\mathrm{Q}_{m-l}\, v_\pm / v_\pm$ sont C^∞ hors de M, et possèdent ainsi que leurs dérivées, des singularités au plus polynomiales près de M.

On choisit $w_\pm$ nul sur E, ainsi que ses dérivées normales (sur chaque branche, hors de M) d'ordre au plus $m-1$.

La condition $\mathrm{R}_\pm |_\mathrm{E} = 0$ sera satisfaite pour un choix convenable de la dérivée normale d'ordre m de $w_\pm$ pourvu que chacune des branches de E soit non caractéristique pour P.

(*b*) Un vecteur normal à la *i*-ième branche de E en 0 est le vecteur $(-\sin\theta_i(\alpha, \nu), \cos\theta_i(\alpha, \nu), 0)$.

D'après 1 (*c*) et (*e*),

$$\frac{\partial \theta_i}{\partial \alpha}(\alpha_0, 0) = \frac{d\theta_i}{d\alpha}(\alpha_0) \neq 0$$

donc pour $\nu > 0$ assez petit, $\partial\theta_i/\partial\alpha\,(\alpha_0, \nu) \neq 0$.

Comme P ne possède, dans le plan $\{t=0\}$, qu'un nombre fini de vecteurs caractéristiques, on peut toujours supposer, quitte à remplacer α_0 par un α arbitrairement proche, que E est non caractéristique pour P.

(*c*) Cela étant, on réalisera $\mathrm{R}_\pm$ nul sur E en prenant pour dérivée normale d'ordre m de $w_\pm$ sur E la trace d'une fonction C^∞ plate en M. On voit alors que, grâce aux propriétés de E expliquées en 2 (*c*), toute dérivée de $w_\pm$, normale d'ordre m et tangentielle d'ordre quelconque, calculée à partir de la dérivée normale d'ordre m de $w_\pm$, est en fait aussi la trace sur E d'une fonction C^∞ plate en M.

Pour annuler sur E les dérivées d'ordre supérieur de $\mathrm{R}_\pm$, on procède de même avec les dérivées (d'ordre normal supérieur à m) de $w_\pm$. On obtient ainsi une collection de « dérivées » de $w_\pm$, de tous ordres, dont chaque élément est la trace sur E d'une fonction C^∞ plate en M (différente pour chaque branche, bien entendu).

Cela permet de vérifier aisément les conditions de compatibilité de Whitney [11] pour cette collection et le fermé de E. Il existe donc des fonctions $w_\pm$, C^∞ plates en M, avec les propriétés voulues.

4. Fin de la preuve du théorème. — (*a*) Posons $u = \chi_+ u_+ + \chi_- u_-$. On choisit les fonctions de troncature $\chi_\pm$ en sorte que, sur $\tilde{\mathrm{V}}_\pm$, $\pm \operatorname{Re} f(\theta) \leqq -\varepsilon\, (\varepsilon > 0)$. Nous allons étudier $a = \mathrm{P}\, u/u$ hors de M, et par secteurs en θ.

Soit $\eta>0$ tel que, dans le secteur S_η^i,

$$S_\eta^i=\{(\rho,\,\theta,\,t),\,|\theta-\theta_i(\alpha,\,\nu)|<\eta\},$$

on a

$$|\operatorname{Re} f'(\theta)|>\varepsilon_1\geqq 0 \qquad \text{et} \qquad \chi_\pm\equiv 1$$

au voisinage de $\overline{S}_\eta^i$.

En notant $F(\theta,\,\rho)=(\alpha\rho)^\nu\log|v_+/v_-|$ on a, avec $\theta^*\in S_\eta^i$,

$$\log\left|\frac{u_+}{u_-}\right|=\frac{1}{(\alpha\rho)^\nu}F(\theta,\,\rho)+\log\left|\frac{1+w_+}{1+w_-}\right|=(\theta-\theta_i(\rho))\left[\frac{1}{(\alpha\rho)^\nu}F'_\theta(\theta^*,\,\rho)+G(\theta,\,\rho)\right],$$

où G est bornée, et $F'_\theta(\theta^*,\rho)=\operatorname{Re} f'(\theta^*)+O(\rho)$. Pour $\rho\leqq\rho_0$ petit, $\log|u_+/u_-|$ n'a donc pas d'autres zéros dans S_η^i que la i-ième branche de E.

Supposons par exemple que $|u_+|\leqq|u_-|$ pour $\theta\geqq\theta_i(\rho)$; alors

$$\begin{aligned}|u_++u_-|=|u_-|\left|1+\frac{u_+}{u_-}\right|&\geqq|u_-|\left(1-\frac{|u_+|}{|u_-|}\right)\\&\geqq|u_-|\inf\left(1/2,\,\frac{-1}{4}\log\left|\frac{u_+}{u_-}\right|\right)\geqq|u_-|\inf\left(1/2,\,\frac{C}{\rho^\nu}(\theta-\theta_i(\rho))\right),\end{aligned}$$

pour $C>0$ [on a une estimation analogue pour $\theta\leqq\theta_i(\rho)$].

Donc, dans S_η^i,

$$a=\frac{Pu_++Pu_-}{u_++u_-}=\frac{R_+u_++R_-u_-}{u_++u_-},$$

est C^∞ (grâce aux propriétés de $R_\pm$), et

$$|a|\leqq\frac{|R_+|+|R_-|}{\inf(1/2),\,C/\rho^\nu|(\theta-\theta_i(\rho)|)}\leqq C_N\,\rho^N,\quad \text{pour tout N}.$$

On a aussi sans autres difficultés $|D^\alpha a|\leqq C_{N,\alpha}\,\rho^N$, pour tout N.

(*b*) En dehors de la réunion des secteurs $S_{\eta/2}^i$, on a

$$\frac{1}{c}e^{\operatorname{Re} Z}\leqq\left|\frac{u_+}{u_-}\right|\leqq c\,e^{\operatorname{Re} Z} \qquad (c>0),$$

et en fait

$$\pm\operatorname{Re} Z\leqq\frac{-C'}{\rho^\nu}$$

la où

$$\pm\left|\frac{u_+}{u_-}\right|\leqq\pm 1.$$

Dans une zone où $\chi_{\pm} \equiv 1$, si par exemple $|u_+/u_-| \leqq 1$,

$$a = \frac{\mathrm{P}u}{u} = \frac{\mathrm{R}_+ u_+ + \mathrm{R}_- u_-}{u_-(1+(u_+/u_-))}$$

est C^α et peut être estimée comme en (a).

(c) Supposons enfin $\theta \in \tilde{\mathrm{V}}_+$, par exemple; alors $\chi_- \equiv 1$, et

$$\mathrm{P}u = \chi_+ \mathrm{R}_+ u_+ + \mathrm{R}_- u_- + [\mathrm{P}, \chi_+]\, u_+.$$

Près de θ_+, $\mathrm{Re}\, \mathrm{Z} \leqq -\mathrm{C}'/\rho^{\nu'}$, donc

$$\left| \mathrm{D}^\alpha \frac{u_+}{u_-} \right| \leqq \mathrm{C}_{\mathrm{N}, \alpha}\, \rho^{\mathrm{N}}$$

(pour tout N), et comme $[\mathrm{P}, \chi_+]$ a au plus des singularités en $1/\rho^m$, $a = \mathrm{P}u/u$ est C^α et peut être estimée comme en (a). On procède de même dans $\tilde{\mathrm{V}}_-$, où $\mathrm{Re}\, \mathrm{Z} \geqq \mathrm{C}'/\rho^{\nu}$.

La conjonction de (a), (b), (c) montre que $a = \mathrm{P}u/u$ est C^∞ et plate sur M dans un voisinage de 0.

Enfin u est C^∞ et plate sur M, comme somme de deux telles fonctions, et la propriété de Supp u résulte du fait que u n'a de zéros que sur E.

BIBLIOGRAPHIE

[1] S. Alinhac, *Non-unicité pour des opérateurs à caractéristiques simples* (*Séminaire Goulaouic-Schwartz*, 1979-1980, exposé n° 4).

[2] S. Alinhac et M. S. Baouendi, *Construction de solutions nulles et singulières pour des opérateurs de type principal* (*Séminaire Goulaouic-Schwartz*, 1978-1979, exposé XXII, École polytechnique, Paris, et article à paraître).

[3] S. Alinhac et M. S. Baouendi, *Counter Examples to Strong Uniqueness for Elliptic Operators* (à paraître).

[4] S. Alinhac et M. S. Baouendi, *Uniqueness for the Characteristic Cauchy Problem and Strong Unique Continuation for Higher Order Partial Differential Inequalities* [*Amer. J. Math.* (*à paraître*)].

[5] N. Aronszajn, *A Unique Continuation Theorem for Solutions of Elliptic Partial Differential Equations or Inequalities of Second Order* [*J. Math. pures et appl.*, *t.* 36, (9), 1957, p. 235-249].

[6] M. S. Baouendi et E. C. Zachmanoglou, *Unique Continuation of Solutions of Partial Differential Equations and Inequations from Manifolds of Any Dimension* (*Duke Math. J.*, vol. 45, 1978, p. 1-13).

[7] M. S. Baouendi, F. Treves et E. C. Zachmanoglou, *Flat Solutions and Singular Solutions of Homogeneous Linear Partial Differential Equations with Analytic Coefficients* (*Duke Math. J.*, vol. 46, 1979, p. 409-440).

[8] A. P. Calderón, *Existence and Uniqueness Theorems for Systems of Partial Differential Equations* (*Proc. Symp. Fluid Dynamics and Appl. Math.*, Univ. of Maryland, 1961, Gordon and Breach, New York, 1962, p. 147-195).

[9] H. Cordes, *Über die Bestimmtheit der Lösungen elliptischer Differentialgleichungen durch Anfangsvorgaben* (*Nachr. Akad. Wiss. Göttingen II*, vol. *a*, 1956, p. 230-258).

[10] E. G. Sitnikova, *A Strong Zero Theorem for an Elliptic Equation of High Order* [*Mat. Sbornik*, vol. 81, (123), 1970; *Math. U.S.S.R. Sbornik*, vol. 10, 1978, p. 349-367].

[11] H. Whitney, *Analytic Extensions of Differentiable Functions Defined in Closed Sets* [*Trans. Amer. Math. Soc.*, (36), 1934, p. 63-89].

(Manuscrit reçu le 7 janvier 1980).

S. Alinhac,
Université de Paris-Sud, 91405 Orsay.