

ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

PAUL GÉRARDIN

PHILIP KUTZKO

Facteurs locaux pour $GL(2)$

Annales scientifiques de l'É.N.S. 4^e série, tome 13, n° 3 (1980), p. 349-384

http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1980_4_13_3_349_0

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1980, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (<http://www.elsevier.com/locate/ansens>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

FACTEURS LOCAUX POUR $GL(2)$

PAR PAUL GÉRARDIN et PHILIP KUTZKO

On dispose actuellement de plusieurs méthodes pour construire les représentations supercuspidales du groupe $GL(2)$ sur un corps local p -adique k :

(a) d'une part, à l'aide de la représentation de Weil relative à l'algèbre de quaternions sur k ([7], § 1 et 4), ce qui ramène à la construction des représentations irréductibles du groupe multiplicatif de l'algèbre de quaternions;

(b) d'autre part, par induction à partir d'un sous-groupe ouvert de $GL(2)$, compact modulo le centre k^\times ([5], [8], [11]);

(c) enfin, la représentation de Weil relative à une extension quadratique séparable E de k fournit en se décomposant des représentations supercuspidales de $GL(2)$ paramétrées par les caractères réguliers du groupe E^\times ([7], § 1 et 4).

On s'intéresse donc au dictionnaire entre ces réalisations. L'objet de cet article est le calcul des facteurs locaux des représentations obtenues par la seconde méthode; le facteur L vaut 1 pour les représentations supercuspidales, et le facteur ε s'obtient à partir d'une formule que donnent Jacquet et Langlands ([7], th. 2.18), à savoir l'équation fonctionnelle de Tate ([2] a, 3.2.3(E)). Nous donnons alors la correspondance cherchée pour les extensions quadratiques qui ne sont pas sauvagement ramifiées; le cas général est traité dans [8].

Le plan est le suivant. Les deux premiers paragraphes rappellent la définition des facteurs ε relatifs au groupe de Weil du corps k et au groupe $GL(2)$. On y trouvera des résultats épars dans la littérature ([7], [2], [6]), ou que P. Cartier exposa au premier semestre 1977 au séminaire sur les groupes réductifs et les formes automorphes de l'Université Paris-VII. Ensuite, le paragraphe 3 traite le cas des représentations supercuspidales relatives à l'extension quadratique non ramifiée de k (toutes les extensions considérées sont supposées contenues dans une extension algébriquement close fixée); le paragraphe 4 s'occupe du cas ramifié mais modéré. Au paragraphe 5, nous rappelons la construction des autres représentations supercuspidales suivant la méthode d'induction [8] : le groupe de la droite affine sur le corps de base et sa représentation non dégénérée jouent un rôle essentiel, comme on le sait par le modèle de Kirillov [7], et notre exposition met systématiquement en valeur ce point de vue, en s'efforçant de limiter tout arbitraire dans les choix des paramètres. Le calcul des facteurs ε est alors effectué au paragraphe 6.

Les méthodes données sont assez générales pour devoir fonctionner également dans le cas des algèbres simples centrales de dimension quelconque n^2 . Ceci vient d'être vérifié pour les

représentations supercuspidales relatives aux caractères réguliers de l'extension non ramifiée de degré n [5]. Pour les algèbres de quaternions, on peut également faire les calculs directement.

1. Facteurs locaux des groupes de Weil

1.1. Soit k un corps local non archimédien; on note \mathcal{O} l'anneau de ses entiers, \mathfrak{p} l'idéal maximal de \mathcal{O} , q l'ordre du corps résiduel \mathcal{O}/\mathfrak{p} , \mathcal{O}^\times le groupe des unités, noyau de l'application val de valuation

$$1 \rightarrow \mathcal{O}^\times \rightarrow k^\times \xrightarrow{\text{val}} \mathbf{Z} \rightarrow 0;$$

on écrit $\mu = \mu_k = q^{-\text{val}}$ pour la valeur absolue normalisée.

1.2. La donnée d'un caractère non trivial ψ du groupe additif de k définit un isomorphisme entre ce groupe et son dual de Pontrjagin, par l'accouplement

$$(x, y) \mapsto \psi(xy);$$

la mesure de Haar sur k qui est autoduale pour ce bicaractère est caractérisée par

$$\int_{\mathcal{O}} d_\psi x = q^{-\text{ord } \psi/2};$$

où $\text{ord } \psi$, l'ordre de ψ , est le plus grand entier n pour lequel la restriction de ψ au groupe \mathfrak{p}^{-n} est triviale.

1.3. Appelons ici *caractères* de k^\times les représentations continues de degré 1 du groupe k^\times ; on dit qu'un caractère χ de k^\times est *non ramifié* si sa restriction au groupe des unités est triviale; il se factorise donc à travers l'application val ; dans le cas contraire, on dit que le caractère est *ramifié*; le *conducteur* $a(\chi)$ du caractère est 0 s'il est non ramifié, et, sinon le plus petit entier m tel que la restriction $\chi|_{1+\mathfrak{p}^m}$ soit triviale. Pour $a(\chi) = 1$, on dit que χ est modérément ramifié.

Pour tout entier n , on note n' la partie entière de $n/2$ et $n'' = (n+1)'$. Pour un caractère χ dont le conducteur est au moins 2, l'application

$$x \mapsto \chi(1+x),$$

est un caractère du sous-groupe de k formé des x de $\text{val } x \geq a(\chi)''$; si l'on s'est donné en plus un caractère non trivial ψ du groupe additif de k , alors il y a un élément $\chi_\psi \in k^\times$, de valuation $-a(\chi) - \text{ord } \psi$, unique modulo le sous-groupe $1 + \mathfrak{p}^{a(\chi)'}$, tel que

$$\chi(1+x) = \psi(\chi_\psi x), \quad \text{val } x \geq a(\chi)'.$$

1.4. Les caractères non ramifiés de k^\times s'écrivent μ^s , où $s \in \mathbf{C}/(2\pi i/\text{Log } q)\mathbf{Z}$; ils possèdent donc naturellement une structure analytique complexe; les caractères de \mathcal{O}^\times groupe compact,

formant un groupe discret, l'ensemble des caractères de k^\times peut donc être naturellement muni d'une structure analytique. On définit une fonction méromorphe L sur l'ensemble $\mathcal{A}_1(k)$ des caractères de k^\times en posant

$$\begin{aligned} L(\chi) &= 1 && \text{si } \chi \text{ est ramifié;} \\ L(\chi) &= (1 - q^{-s})^{-1} && \text{pour } \chi = \mu^s. \end{aligned}$$

Il y a alors, pour chaque caractère non trivial ψ du groupe additif de k , et pour chaque caractère χ de k^\times , un nombre $\varepsilon(\chi, \psi) \in \mathbb{C}^\times$, tel que, pour toute fonction f sur k qui est localement constante à support compact, on ait la relation suivante ([1], chap. VII, 2), où les intégrales sont prises en prolongement analytique

$$\frac{\int_{k^\times} f_\psi(x) \chi(x)^{-1} d_\psi x}{L(\chi^{-1} \mu)} = \varepsilon(\chi, \psi) \frac{\int_{k^\times} f(x) \chi(x) \mu(x)^{-1} d_\psi x}{L(\chi)}$$

avec

$$f_\psi(x) = \int_k f(y) \psi(xy) d_\psi y.$$

Plus explicitement, on a les formules suivantes :

$$\begin{aligned} \varepsilon(\chi, \psi) &= q^{-(s-1/2)\text{ord}\psi} && \text{pour } \chi = \mu^s, \\ \varepsilon(\chi, \psi) &= \int_{k^\times} \chi(x)^{-1} \psi(x) d_\psi x && \text{pour } \chi \text{ ramifié,} \end{aligned}$$

cette seconde formule s'obtenant en prenant pour f la fonction caractéristique d'un sous-groupe $1 + \mathfrak{p}^m$ avec $m \geq a(\chi)$; elle s'écrit aussi

$$\varepsilon(\chi, \psi) = \int_{\text{val } x = -\text{ord}\psi - a(\chi)} \chi(x)^{-1} \psi(x) d_\psi x = q^{\text{ord}\psi/2} \sum_{\mathfrak{o}^\times / (1 + \mathfrak{p}^{a(\chi)})} (\chi^{-1} \psi)(\pi^{-\text{ord}\psi - a(\chi)} x),$$

en notant π un élément premier de k ; lorsque $a(\chi)$ est > 1 , choisissons un élément χ_ψ de k^\times tel que

$$\chi(1+x) = \psi(\chi_\psi x), \quad \text{val } x \geq a(\chi)'';$$

alors, par sommation sur les classes modulo $1 + \mathfrak{p}^{a(\chi)''}$ on a la formule

$$\varepsilon(\chi, \psi) = \mu(\chi_\psi)^{1/2} \chi(\chi_\psi)^{-1} \psi(\chi_\psi) \int_{\mathfrak{p}^{a(\chi)'} / \mathfrak{p}^{a(\chi)''}} \chi(1+x)^{-1} \psi(\chi_\psi x) \quad \text{pour } a(\chi) > 1,$$

en notant \int_A pour un groupe commutatif fini A , l'expression $(\text{Card } A)^{-1/2} \sum_A$.

On notera $G(\chi, \psi_{\chi_\psi})$ le dernier facteur de l'expression précédente : c'est 1 si $a(\chi)$ est pair >0 , et si $a(\chi)$ est impair >1 , c'est la somme de Gauss $G(Q)$ associée au caractère quadratique non dégénérée

$$Q : x \in \mathfrak{p}^{a(\chi)'} / \mathfrak{p}^{a(\chi)''} \mapsto \chi(1+x)^{-1} \psi(\chi_\psi x),$$

défini sur un espace vectoriel de dimension 1 sur le corps résiduel \mathbf{F}_q ; lorsque q est pair, le nombre $G(Q)$ est une racine huitième de l'unité, vérifiant :

$$G(Q)^2 = q(c) \text{ où } c \text{ est donné par } \chi(1+x^2) = \chi(1+cs) \text{ sur } x \in \mathfrak{p}^{a(\chi)'},$$

$$G(Q)^4 = (-1)^r \quad \text{si } q = 2^r;$$

lorsque q est impair, il y a un unique $\chi_\psi \in k^\times / (1 + \mathfrak{p}^{a(\chi)'})$ tel que $Q(x) = \chi(1+x^2/2)$ sur $\mathfrak{p}^{a(\chi)'}$, et dans ce cas

$$G(Q)^2 = (-1)^{(q-1)/2}$$

(pour ces formules, classiques, voir par exemple [5], I. 1. 1).

D'autre part, pour un caractère χ' de k^\times de conducteur au plus $a(\chi)'$, où χ est un caractère de conducteur $a(\chi) > 1$, on a

$$\varepsilon(\chi\chi', \psi) = \chi'(\chi_\psi)^{-1} \varepsilon(\chi, \psi), \quad a(\chi') \leq a(\chi) \geq 1,$$

comme on le voit facilement.

Remarquons enfin que si $a(\chi)$ est > 1 , et ψ prolonge le caractère $x \mapsto \chi(1+x)$ de $\mathfrak{p}^{a(\chi)'}$, alors on peut prendre $\chi_\psi = 1$ et que dans ce cas

$$\varepsilon(\chi, \psi) = \psi(1) G(\chi, \psi)$$

avec la convention précédente $G(\chi, \psi) = 1$ pour $a(\chi)$ pair.

1.5. Soit $W = W_k$ le groupe de Weil du corps local k ([12], App. 2); son quotient par l'adhérence du sous-groupe engendré par les commutateurs s'identifie canoniquement au groupe multiplicatif k^\times ; soit $\tau = \tau_k : W \rightarrow k^\times$ la surjection correspondante. Pour chaque extension séparable finie E de k , le groupe de Weil W_E est naturellement plongé dans W , et, si l'extension E/k est galoisienne, le groupe W est extension du groupe de Galois de E/k par W_E , la classe du 2-cocycle de cette extension étant la classe fondamentale de $H^2(\text{Gal}(E/k), E^\times)$ ([1], chap. VI).

1.6. Appelons *admissible* toute représentation de dimension finie sur \mathbf{C} et continue du groupe W dont les opérateurs sont diagonalisables; notons $\mathcal{A}(k)$ l'ensemble des classes de représentations admissibles de W , $\mathcal{A}_n(k)$ celles de degré n et $\mathcal{A}_n^0(k)$ celles de degré n qui sont irréductibles. A chaque $\chi \in \mathcal{A}_1(k)$, c'est-à-dire à chaque caractère de k^\times (1.4), on associe l'application $\omega \mapsto \omega\chi^{-1}$, qui conserve le degré et l'irréductibilité; on peut donc munir $\mathcal{A}(k)$

d'une structure analytique sur \mathbf{C} ; on définit alors une fonction analytique $L = L_k$ sur $\mathcal{A}(k)$ par les formules suivantes :

- (a) $L(\omega) = L(\chi)$ pour $\omega \in \mathcal{A}_1(k)$, $\omega = \chi_w$ où $\chi_w = \chi \circ \tau$;
 (b) $L(\omega_1 \oplus \omega_2) = L(\omega_1)L(\omega_2)$;
 (c) $L(\theta_w) = L_E(\theta)$ où $\theta_w = \text{Ind}_w^W \theta$, $\theta \in \mathcal{A}(E)$.

1.7. Le théorème suivant est dû à R. P. Langlands, et une démonstration par voie globale a été donnée par P. Deligne ([2], b)).

THÉORÈME. — *Étant donné un caractère non trivial du groupe additif de k , soit ψ , il y a une unique façon d'associer à chaque extension séparable finie E de k un nombre $\lambda_{E/k}(\psi)$ et à chaque représentation $\omega \in \mathcal{A}(k)$ un nombre $\varepsilon(\omega, \psi) = \varepsilon_k(\omega, \psi)$ de façon à avoir les propriétés suivantes :*

- (a) $\varepsilon(\omega, \psi) = \varepsilon(\chi, \psi)$ pour $\omega \in \mathcal{A}_1(k)$, $\omega = \chi \circ \tau$;
 (b) $\varepsilon(\omega_1 \oplus \omega_2, \psi) = \varepsilon(\omega_1, \psi)\varepsilon(\omega_2, \psi)$;
 (c) $\varepsilon(\theta_w, \psi) = \lambda_{E/k}(\psi)^{\dim \theta} \varepsilon_E(\theta, \psi_{E/k})$ pour $\theta \in \mathcal{A}(E)$,

en notant $\psi_{E/k} = \psi \circ \text{Tr}_{E/k}$.

En prenant E/k quadratique séparable et en faisant $\theta = 1$ dans (c), on en déduit que dans ce cas

$$\lambda_{E/k}(\psi) = \frac{\varepsilon(1, \psi)}{\varepsilon(1, \psi_{E/k})} \varepsilon(\hat{\sigma}, \psi)$$

où, $\hat{\sigma}$ désigne le caractère non trivial de k^\times égal à 1 sur l'image $N_{E/k} E^\times$ de la norme; comme le conducteur de $\hat{\sigma}$, qui est celui de l'extension E/k , est égal à l'exposant différentiel $d_{E/k}$, et que $\text{ord } \psi_{E/k} = d_{E/k} + e_{E/k} \text{ord } \psi$, où $e_{E/k}$ est l'indice de ramification de E/k , on a donc le résultat suivant.

COROLLAIRE. — *Pour une extension quadratique séparable E de k , le nombre $\lambda_{E/k}(\psi)$ est égal à la partie unitaire de $\varepsilon(\hat{\sigma}, \psi)$; de plus, son carré vaut $\hat{\sigma}(-1)$.*

La dernière assertion vient de ce que, pour un caractère χ de k^\times , on a la formule

$$\varepsilon(\chi \mu^{1/2}, \chi) \varepsilon(\chi^{-1} \mu^{1/2}, \psi) = \chi(-1);$$

obtenue en appliquant deux fois l'équation fonctionnelle, et en remarquant que la fonction $(f_\psi)_\psi$ est $x \mapsto f(-x)$.

Remarque. — Avec des intégrales prises en valeur principale, on a

$$\begin{aligned} 0 &= \int_k \psi(x) d_\psi x = \int_{x \in N_{E/k} E^\times} \psi(x) d_\psi x + \int_{x \notin N_{E/k} E^\times} \psi(x) d_\psi x \\ &= \int_{\hat{\sigma}(x)} \psi(x) d_\psi x = \int_{x \in N_{E/k} E^\times} \psi(x) d_\psi x - \int_{x \notin N_{E/k} E^\times} \psi(x) d_\psi x = 2 \int_{N_{E/k} E^\times} \psi(x) d_\psi x \end{aligned}$$

il en résulte donc, par le corollaire précédent, la formule (cf. [7], p. 6) :

$$\lambda_{E/k}(\psi) = \int_{E^\times} \psi(N_{E/k} x) d_{\psi_{E/k}} x.$$

On donnera en paragraphes 3.3 et 3.4 une autre formule pour $\lambda_{E/k}(\psi)$ à l'aide d'un caractère du groupe k^\times .

2. Facteurs locaux des algèbres simples déployées centrales de rang 4

2.1. Soit A une algèbre simple déployée centrale de rang 4 sur le corps k . Elle est donc isomorphe à l'algèbre $M_2(k)$ des matrices d'ordre 2 à coefficients dans k , l'isomorphisme étant déterminé à un automorphisme intérieur près. On note $\text{Tr}_{A/k}$ et $N_{A/k}$ la trace et la norme réduites sur A . Pour un caractère non trivial ψ du groupe additif de k , le bicaractère

$$x, y \in A \mapsto \psi_{A/k}(xy) \quad \text{où} \quad \psi_{A/k} = \psi \circ \text{Tr}_{A/k},$$

identifie A à son dual de Pontrjagin, et la mesure de Haar correspondante est notée $d_{A, \psi}$; elle donne à un ordre maximal de A la masse $q^{-2 \text{ord} \psi}$.

Pour un caractère χ de k^\times , on note $\chi_{A/k}$ la représentation de degré 1 du groupe multiplicatif A^\times de A donnée par

$$\chi_{A/k} = \chi \circ N_{A/k};$$

on obtient de cette façon toutes les représentations (continues) de degré 1 du groupe A^\times ; en particulier, le module μ sur k^\times donne la représentation

$$\mu_{A/k} = \mu \circ N_{A/k} = q^{-\text{val} N_{A/k}}.$$

2.2. On note $\mathcal{A}(A)$ l'ensemble des classes de représentations admissibles irréductibles du groupe A^\times ([7], p. 23). A chaque $\alpha \in \mathcal{A}(A)$, on sait associer un facteur eulérien $L(\alpha)$, fonction analytique sur $\mathcal{A}(A)$, dont la structure analytique provient de $s \mapsto \alpha \otimes \mu_{A/k}^s$, et un facteur $\varepsilon(\alpha, \psi)$ dès qu'on s'est donné un caractère non trivial ψ du groupe additif de k ; ils sont caractérisés par l'équation fonctionnelle suivante ([2], a. 3.2.3(3)), pour toute fonction f de Schwartz-Bruhat sur A , la convergence des intégrales étant obtenue par prolongement analytique

$$\frac{\int_{A^\times} f_\psi(x) \alpha(x)^{-1} \mu_{A/k}(x)^{-1/2} d_{A, \psi} x}{L(\alpha^\vee \otimes \mu_{A/k})} = \varepsilon(\alpha, \psi) \frac{\int_{A^\times} f(x) \alpha(x) \mu_{A/k}(x)^{-3/2} d_{A, \psi} x}{L(\alpha)}$$

où α^\vee désigne la représentation de A^\times contragrédiente de α , et f_ψ la transformée de Fourier de f relativement au bicaractère $\psi_{A/k}(xy)$.

2.3. Si la représentation α est supercuspidale ([2], a, 3.2.3 (B)), le facteur $L(\alpha)$ vaut 1; si, de plus, la représentation α est induite par une représentation, κ , de dimension finie, d'un sous-groupe ouvert K de A^\times compact modulo le centre k^\times de A^\times , alors κ intervient avec multiplicité 1 dans α , ce qui donne

$$\int_K f_\psi(x) \kappa(x)^{-1} \mu_{A/k}(x)^{-1/2} d_{A,\psi} = \varepsilon(\alpha, \psi) \int_K f(x) \alpha(x) \mu_{A/k}(x)^{-3/2} d_{A,\psi} x;$$

en prenant dans cette formule pour fonction f la fonction caractéristique de $1 + \mathfrak{p}^n \mathcal{O}_A$, \mathcal{O}_A étant un ordre maximal de A , et n est pris assez grand pour que κ soit trivial sur $1 + \mathfrak{p}^n \mathcal{O}_A$, on obtient l'expression suivante, où on note $\psi_{A/k} = \psi \circ \text{Tr}_{A/k}$, la convergence se faisant par valeur principale et prolongement analytique

$$\varepsilon(\alpha, \psi) = \int_K \psi_{A/k}(x) \kappa(x)^{-1} \mu_{A/k}(x)^{-1/2} d_{A,\psi} x.$$

2.4. Pour les représentations supercuspidales, on a le théorème suivant, dû à H. Jacquet et R. P. Langlands ([7], cor. 2.19, p. 79) :

THÉORÈME. — Soient α_1 et α_2 deux représentations admissibles irréductibles supercuspidales du groupe A^\times , dont la restriction au centre coïncident. Alors, elles sont équivalentes si et seulement si, pour tout caractère χ de k^\times , on a l'égalité

$$\varepsilon(\alpha_1 \otimes \chi_{A/k}, \psi) = \varepsilon(\alpha_2 \otimes \chi_{A/k}, \psi).$$

2.5. Soit $\mathcal{A}^0(A)$ l'ensemble des représentations admissibles irréductibles supercuspidales de A^\times . Langlands prédit l'existence d'une bijection

$$\omega \in \mathcal{A}_2^0(k) \mapsto \omega_A \in \mathcal{A}^0(A),$$

satisfaisant aux relations suivantes ([2], a, 3.2.3) :

(a) soit $(\det)\omega$ le caractère de k^\times que définit la représentation de degré 1 $\det \omega$ de W ; la première relation est

$$(\det)\omega = \omega_A |k^\times \quad (\text{restriction de } \omega_A \text{ au centre});$$

(b) pour tout caractère χ de k^\times , on a

$$(\omega \otimes \chi_W)_A = \omega_A \otimes \chi_{A/k};$$

(c) pour les représentations contragrédientes, on a la correspondance

$$(\omega^\vee)_A = (\omega_A)^\vee;$$

(d) les facteurs locaux se correspondent

$$L(\omega) = L(\omega_A) = 1, \quad \varepsilon(\omega, \psi) = \varepsilon(\omega_A, \psi);$$

(e) le conducteur d'Artin $a(\omega)$ de ω est le conducteur de la représentation ω_A (au sens de [2], a, 2.2.7).

Cette bijection est déterminée par les conditions (a), (b), (d).

2.6. Les représentations admissibles irréductibles de degré 2 du groupe de Weil W de k sont classées par leur image dans le groupe projectif $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{C})$; cette image $g(\omega)$ est un groupe fini non cyclique, donc de l'un des 5 types suivants :

- (a) diédral d'ordre $2n$, $n > 2$;
- (b) diédral d'ordre 4;
- (c) tétraédral : groupe alterné \mathfrak{A}_4 ;
- (d) octaédral : groupe symétrique \mathfrak{S}_4 ;
- (e) icosaédral : groupe alterné \mathfrak{A}_5 .

Les deux premiers groupes sont imprimitifs, le premier d'une seule façon, le deuxième de trois manières; les trois autres types sont primitifs; le dernier ne se présente pas, puisqu'il produirait alors une extension galoisienne du corps local k dont le groupe de Galois serait \mathfrak{A}_5 , groupe simple.

2.7. Pour chaque extension quadratique séparable E de k , on note $\sigma^E = \sigma_k^E$ l'élément non trivial de son groupe de Galois sur k , et $\widehat{\sigma^E}$ le caractère, d'ordre 2, de k^\times dont le noyau est $N_{E/k} E^\times$. Le groupe des caractères de k^\times opérant sur $\mathcal{A}(k)$ comme indiqué en 1.6, il conserve le groupe fini $g(\omega)$. Les points fixes de cette action sur $\mathcal{A}_2^0(k)$ sont donnés par le résultat suivant [8] :

PROPOSITION. — *Pour qu'une représentation $\omega \in \mathcal{A}_2^0(k)$ soit fixée par un caractère non trivial χ de k^\times , il faut et il suffit qu'elle soit de type diédral D_{2n} . Pour $n > 2$, alors $\chi = \sigma^E$, où E est l'extension quadratique de k que définit, via ω , l'unique sous-groupe d'indice 2 de D_{2n} , et il y a exactement deux caractères θ et θ' de E^\times , $\theta' = \theta^{\sigma^E}$, tels que ω soit la représentation de W induite par la représentation de degré 1 correspondante de W_E . Pour $n = 2$, alors χ est l'un quelconque des trois caractères de k^\times que définissent, via ω , les trois sous-groupes d'indice 2 de D_4 : σ^{E_1} , σ^{E_2} , σ^{E_3} ; pour chaque i , il y a exactement deux caractères θ_i de θ'_i de E_i^\times , $\theta'_i = \theta_i^{\sigma^{E_i}}$, tels que ω soit la représentation de W induite par la représentation de degré 1 de W_E correspondant à ce caractère; de plus, la composée des extensions E_i est une extension biquadratique K de k , le caractère $(\widehat{\theta}_i)_{K/E_i}$ de K^\times ne dépend pas de i , et $\theta'_i = \theta_i \widehat{\sigma_{E_i}^K}$ pour tout i .*

Inversement, toute représentation de type diédral dans $\mathcal{A}_2^0(k)$ est de la forme précédente.

Enfin, en caractéristique résiduelle impaire, toute représentation de $\mathcal{A}_2^0(k)$ est de type diédral; en caractéristique résiduelle 2, il y a des représentations de $\mathcal{A}_2^0(k)$ qui sont primitives.

2.8. Pour les représentations de type diédral, la bijection de Langlands (2.5) a été démontrée par H. Jacquet et R. P. Langlands ([7], th. 4.6, p. 144, et th. 4.7, p. 150) au moyen de la représentation de Weil. Elle associe donc à chaque caractère régulier θ du groupe multiplicatif E^\times d'une extension quadratique séparable E de k , une classe de représentations θ_A admissibles irréductibles supercuspidales du groupe A^\times , de façon que l'on ait les relations suivantes :

$$(\theta^\sigma)_A = \theta_A, \quad \sigma = \sigma^E \quad (\text{action du groupe de Galois});$$

$$\theta_A|_{k^\times} = \widehat{\sigma} \cdot \theta|_{k^\times} \quad (\text{restriction au centre});$$

$$\theta_A \otimes \chi_{A/k} = (\theta \cdot \chi_{E/k})_A \quad (\text{action des caractères de } k^\times);$$

$$(\theta_A)^\vee = (\theta^{-1})_A \quad (\text{contragrédiente});$$

$$\varepsilon(\theta_A, \psi) = \lambda_{E/k}(\psi) \varepsilon(\theta, \psi_{E/k}) \quad (\text{facteur local});$$

$$a(\theta_A) = d_{E/k} + f_{E/k} a(\theta) \quad (\text{conducteur}),$$

où $d_{E/k}$ désigne le conducteur de l'extension E/k , $f_{E/k}$ le degré modulaire (degré du corps résiduel de E sur le corps résiduel de k).

L'ensemble de ces classes de représentations s'appelle la *série supercuspidale relative à l'extension E* ; l'ensemble des séries supercuspidales relatives aux différentes extensions quadratiques séparables de k s'appelle la *série de type diédral*. Pour les représentations supercuspidales, J.-P. Labesse et R. P. Langlands ont prouvé l'analogie de la proposition de 2.7, l'action des caractères de k^\times sur $\mathcal{A}^0(A)$ étant donnés par $\alpha \mapsto \alpha \otimes \chi_{A/k}^{-1}$ ([9], § 5). La formulation ci-dessous est due à P. Cartier.

PROPOSITION. — *Pour qu'une classe $\alpha \in \mathcal{A}^0(A)$ soit fixée par un caractère non trivial de k^\times , il faut et il suffit qu'elle soit de type diédral; si χ est unique, alors $\chi = \sigma^E$, pour une extension quadratique séparable E de k et $\alpha = \theta_A$, où θ est un caractère régulier de E^\times , déterminé à conjugaison près par σ^E ; s'il y a plus d'un caractère χ tel, alors il y en a exactement trois possibles : σ^{E_1} ou σ^{E_2} ou σ^{E_3} où E_1, E_2, E_3 sont les trois extensions quadratiques de k contenues dans une extension biquadratique K de k que détermine α , et $\alpha = (\theta_i)_A$ pour tout i , où θ_i vérifie $\theta_i / (\theta_i)^{\sigma^{E_i}} = \widehat{\sigma_{E_i}^K}$; de plus, les trois caractères $(\theta_i)_{K/E_i}$ sont égaux.*

Inversement, la donnée d'une extension biquadratique de k détermine la représentation $\sigma \in \mathcal{A}^0(A)$ à l'action près par les caractères de k^\times .

3. Série supercuspidale non ramifiée

3.1. Soit E l'extension quadratique non ramifiée de k . Prenons pour A l'algèbre des endomorphismes de l'espace vectoriel E sur le corps k ; notons σ la conjugaison de E sur k ; alors, A est somme directe des deux sous-espaces vectoriels E et $E \sigma$ de dimension 2 sur k ; les éléments de $E \sigma$ ont leur trace réduite nulle.

Pour un caractère non trivial ψ du groupe additif de k , le caractère $\psi_{E/k} = \psi \circ \text{Tr}_{E/k}$ a même ordre que ψ , et la mesure autoduale sur E associée $d_{\psi_{E/k}} = d_{E,\psi}$ donne à l'anneau \mathcal{O}_E des entiers de E la masse $q^{-\text{ord } \psi}$.

Le groupe A^\times permute les réseaux de l'espace vectoriel E sur k ; en identifiant deux réseaux homothétiques, et en disant que deux classes de réseaux sont liées si elles ont des représentants R et R' avec $R \subset R'$ et R d'indice q dans R' , on obtient l'arbre du groupe A^\times ; il est muni d'une action de A^\times , en fait de A^\times/k^\times , transitive sur ses sommets; cet arbre est marqué du sommet que définit le réseau \mathcal{O}_E , formé des réseaux \mathfrak{p}_E^m , en notant \mathfrak{p}_E l'idéal maximal de \mathcal{O}_E : ce sommet est l'unique point fixe du groupe E^\times opérant sur l'arbre; soit A_E le sous-groupe d'isotropie de ce sommet dans A^\times , compact modulo le centre k^\times , et le quotient A_E/k^\times est un sous-groupe compact maximal spécial du groupe projectif A^\times/k^\times .

3.2. Pour chaque caractère θ de E^\times , on dispose de son conducteur $a(\theta)$ (1.3), et du conducteur du caractère θ/θ^σ , appelé *conducteur relatif* de θ , et noté $a_{E/k}(\theta)$; comme $(\theta/\theta^\sigma)(x) = \theta(x/x^\sigma)$, on a $a_{E/k}(\theta) \leq a(\theta)$. On dira que θ est *primordial (relativement au corps k)*, s'il est régulier et si $a(\theta) = a_{E/k}(\theta)$.

L'action du groupe des caractères de k^\times sur les caractères de E^\times :

$$\chi : \theta \mapsto \theta \cdot \chi_{E/k}^{-1}, \quad \chi_{E/k} = \chi \circ N_{E/k},$$

ne modifie pas le conducteur relatif; par le théorème 90 de Hilbert ([10], p. 158), l'orbite d'un caractère θ de E^\times sous $\mathcal{A}_1(k)$ est donc formée des caractères θ' de E^\times tels que $\theta'/\theta'^\sigma = \theta/\theta^\sigma$. Comme le caractère θ/θ^σ est trivial sur k^\times , il définit un caractère du noyau de la norme $N_{E/k}$; or, l'extension E/k n'étant pas ramifiée, l'application $x \mapsto x/x^\sigma$ est compatible avec la filtration définie par la valuation, et il y a donc un caractère θ_0 de E dont le conducteur est celui de θ/θ^σ et tel que $\theta(x/x^\sigma) = \theta_0(x/x^\sigma)$; ainsi, dans toute orbite sous l'action des caractères de k^\times dans l'ensemble des caractères réguliers de E^\times , il y a des caractères primordiaux.

3.3. Donnons un lemme sur les caractères de k^\times ; la notation $\hat{\int}$ a été introduite en 1.4.

LEMME. — Soit χ un caractère de k^\times , dont le conducteur $a(\chi)$ est au moins égal à 2. Alors E étant l'extension quadratique non ramifiée de k , et σ la conjugaison de E/k , on a, pour $a(\chi) \geq 2m > 1$:

$$\hat{\int}_{\mathbb{F}_E^m / \mathfrak{p}_E^{a(\chi)-m}} \chi(1 - \sigma xx)^{-1} = (-1)^{a(\chi)}.$$

Preuve. — On commence par vérifier que l'expression du lemme a bien un sens : pour $x \in \mathfrak{p}_E^m$ et $y \in \mathfrak{p}_E^{a(\chi)-m}$, on a $xy \in \mathfrak{p}_E^{a(\chi)}$ et donc

$$N_{E/k}(x+y) = \sigma xx + \text{Tr}_{E/k}(\sigma xy) + \sigma yy \in \sigma xx + \mathfrak{p}_E^{a(\chi)},$$

ce qui montre que l'application $x \in \mathfrak{p}_E^m \mapsto \chi(1 - \sigma xx)^{-1}$ est constante sur les classes modulo $\mathfrak{p}_E^{a(\chi)-m}$. Ensuite on voit que la formule est satisfaite lorsque $a(\chi) - m = m$, i. e., $a(\chi) = 2m$; puis, pour $a(\chi) - m = m + 1$, elle se ramène à vérifier que, pour le corps fini \mathbb{F}_q muni d'un caractère non trivial τ de son groupe additif, on a, la barre désignant la conjugaison de \mathbb{F}_{q^2} sur \mathbb{F}_q :

$$\hat{\int}_{\mathbb{F}_{q^2}} \tau(x\bar{x}) = -1,$$

ce qui est dû à la surjectivité de la norme et à ce que son noyau est d'ordre $q+1$:

$$\hat{\int}_{\mathbb{F}_{q^2}} \tau(x\bar{x}) = q^{-1} [1 + (\sum_{\mathbb{F}_q} \tau(y))(q+1)] = q^{-1} (1 + (-1)(q+1)) = -1.$$

Si maintenant $a(\chi)$ est $> 2m + 1$, on décompose la somme sur les classes modulo $\mathfrak{p}_E^{a(\chi)-m-1} / \mathfrak{p}_E^{a(\chi)-m}$ en utilisant le fait que la restriction de χ au sous-groupe

$1 + \mathfrak{p}^{2(a(\chi)-m-1)}$ est triviale, et la restriction au sous-groupe $1 + \mathfrak{p}^{a(\chi)-1}$ est triviale sur $1 + \mathfrak{p}^{a(\chi)}$:

$$\int_{\widehat{\mathfrak{p}_E^m / \mathfrak{p}_E^{a(\chi)-m}}} \chi(1 - \sigma_{xx})^{-1} = \int_{\widehat{\mathfrak{p}_E^m / \mathfrak{p}_E^{a(\chi)-m-1}}} \chi(1 - \sigma_{xx})^{-1} \int_{\widehat{\mathfrak{p}_E^{a(\chi)-m-1} / \mathfrak{p}_E^{a(\chi)-m}}} \chi(1 + \sigma_{xy} + \sigma_{yx});$$

le second terme est nul quand le caractère

$$y \in \mathfrak{p}_E^{a(\chi)-m-1} / \mathfrak{p}_E^{a(\chi)-m} \mapsto \chi(1 + \sigma_{xy} + \sigma_{yx})$$

n'est pas trivial, c'est-à-dire lorsque $\text{Tr}_{E/k} x \mathfrak{p}_E^{a(\chi)-m-1} \not\subset \mathfrak{p}^{a(\chi)}$, ce qui équivaut à $x \notin \mathfrak{p}_E^{m+1}$; on a ainsi montré que pour $a(\chi) \geq 2m+2$, on a

$$\int_{\widehat{\mathfrak{p}_E^m / \mathfrak{p}_E^{a(\chi)-m}}} \chi(1 - \sigma_{xx})^{-1} = \int_{\widehat{\mathfrak{p}_E^{m+1} / \mathfrak{p}_E^{a(\chi)-m-1}}} \chi(1 - \sigma_{xx})^{-1},$$

ce qui, par récurrence sur m , ramène à l'un des deux cas : $a(\chi) = 2m$ ou $2m+1$.

Remarquons que si ψ est un caractère de k qui prolonge le caractère $x \mapsto \chi(1+x)$ de $\mathfrak{p}^{a(\chi)}$, alors :

$$(-1)^{a(\chi)} = \lambda_{E/k}(\psi).$$

3.4. Soit θ un caractère régulier de E^\times dont le conducteur relatif $a_{E/k}(\theta)$ est pair, égal à $2m$. Posons $K_\theta = E^\times(1 + \mathfrak{p}_E^m)$; c'est un sous-groupe ouvert de A^\times , compact modulo le centre k^\times . On définit alors une représentation κ_θ de K_θ par

$$\kappa_\theta|_{E^\times} = \theta \quad \text{et} \quad \kappa_\theta(1+x\sigma) = \chi_{A/k}(1+x\sigma) \quad \text{pour } x \in \mathfrak{p}_E^m,$$

où χ est un caractère de k^\times tel que le caractère $\theta \chi_{E/k}^{-1}$ soit primordial. Cette définition a bien un sens, puisque pour $x \in \mathfrak{p}_E^{2m}$ on a $\theta(x) = \chi_{E/k}(x) = \chi_{A/k}(x)$, et, d'autre part, parce que $\chi_{A/k}(1+x\sigma) = \chi(1 - \sigma_{xx})$, pour $x \in \mathfrak{p}_E^m$, ne dépend pas du choix du caractère χ qui rend θ primordial. On définit alors une représentation α_θ de A^\times par

$$\alpha_\theta = \text{Ind}_{K_\theta}^{A^\times} \kappa_\theta.$$

PROPOSITION. — La représentation α_θ ainsi définie est admissible irréductible supercuspidale, son degré formel relativement à la mesure de Haar sur A^\times / k^\times qui donne à A_E / k^\times la masse 1 est $q^{a_{E/k}(\theta)-1} (q-1)$, et

$$\varepsilon(\alpha_\theta, \psi) = (-1)^{a(\theta)} \varepsilon(\theta, \psi_{E/k}).$$

Preuve. — La première partie de l'énoncé est due à T. Shintani ([11], th. 4 et cor. 1). Le degré formel est donné par l'indice de K_θ dans A_E , produit de $[A_E : E^\times(1 + \mathfrak{p}_E \sigma)]$ par

$[E^\times (1 + \mathfrak{p}_E^\sigma) : E^\times (1 + \mathfrak{p}_E^m \sigma)]$: c'est donc $q(q-1)(q^2)^{m-1} = q^{2m-1}(q-1)$. Pour la dernière partie, utilisons 2.3 :

$$\varepsilon(\alpha_\theta, \psi) = \int_{K_\theta} \psi_{A/k}(x) \kappa_\theta(x)^{-1} \mu_{A/k}(x)^{-1/2} d_{A,\psi} x;$$

puis, la mesure de Haar vérifiant $d_{A,\psi}(u+v\sigma) = d_{E,\psi} u \cdot d_{E,\psi} v$, on a

$$\begin{aligned} \varepsilon(\alpha_\theta, \psi) &= \int_{E^\times} \psi_{E,k}(t) \theta(t)^{-1} \mu_E(t)^{1/2} d_{E,\psi} t \int_{\mathfrak{p}_E^m} \chi(1 - \sigma x x)^{-1} d_{E,\psi} x \\ &= \varepsilon(\theta, \psi_{E/k}) q^{a(\theta) + \text{ord } \psi} \int_{\mathfrak{p}_E^m} \chi(1 - \sigma x x)^{-1} d_{E,\psi} x. \end{aligned}$$

Lorsque θ est primordial, on a $a(\theta) = 2m$ et on peut prendre $\chi = 1$, ce qui donne alors $\varepsilon(\alpha_\theta, \psi) = \varepsilon(\theta, \psi_{E/k})$; lorsque θ n'est pas primordial, on a $a(\theta) = a(\chi_{E/k}) = a(\chi)$, cette dernière égalité provenant de ce que E est non ramifié sur k ([10], V, § 2), et donc $a(\chi) > 2m$, ce qui permet d'appliquer le lemme du 3 :

$$\varepsilon(\alpha_\theta, \psi) = \varepsilon(\theta, \psi_{E/k}) \int_{\mathfrak{p}_E^m / \mathfrak{p}_E^{a(\chi)-m}} \chi(1 - \sigma x x)^{-1} = (-1)^{a(\chi)} \varepsilon(\theta, \psi_{E/k}),$$

ce qui montre la relation cherchée.

3.5. Supposons maintenant le conducteur relatif $a_{E/k}(\theta)$ du caractère θ de E^\times égal à 1. Posons alors $K_\theta = A_E$ (3.1), et $K_\theta^+ = E^\times (1 + \mathfrak{p}_E \sigma)$; le sous-groupe $k^\times (1 + \mathfrak{p}_E) \cap K_\theta^+ \subset K_\theta$ est distingué, et le groupe quotient est isomorphe au groupe $\text{PGL}_2(\mathbb{F}_q)$, puisque c'est le groupe projectif de la droite projective sur le corps résiduel de k que définit le corps résiduel de E . Notons S sa représentation de Steinberg, et aussi S la représentation de K_θ qu'elle définit : elle se réalise dans l'espace des fonctions complexes sur E^\times invariantes par le sous-groupe $k^\times (1 + \mathfrak{p}_E)$ et dont la somme des valeurs sur $E^\times / k^\times (1 + \mathfrak{p}_E)$ est nulle, l'action du groupe K_θ sur cet espace se faisant par translations. D'autre part, soit κ_θ^+ la représentation de degré 1 du groupe K_θ^+ définie par

$$\kappa_\theta^+ |_{E^\times} = \theta \quad \text{et} \quad \kappa_\theta^+(1+x\sigma) = \chi_{A/k}(1+x\sigma) \quad \text{pour } x \in \mathfrak{p}_E,$$

où χ est un caractère de k^\times tel que $\theta \chi_{E/k}^{-1}$ soit primordial; cette représentation de κ_θ^+ ne dépend pas du choix de χ . Il y a alors une représentation irréductible κ_θ de K_θ , unique à équivalence près, dont le produit tensoriel par S soit la représentation induite à K_θ par la représentation κ_θ^+ de K_θ^+ (il suffit de voir cette propriété sur le groupe $\text{GL}_2(\mathbb{F}_q)$ pour qui l'on dispose de la table des caractères; on peut également invoquer un résultat général de Deligne-Lusztig : [3], prop. 7.3). Soit $\theta_0 = \theta \chi_{E/k}^{-1}$; alors $\kappa_\theta = \kappa_{\theta_0} \otimes \chi_{A/k}$, par construction même. Soit alors α_θ la représentation de A^\times définie par

$$\alpha_\theta = \text{Ind}_{K_\theta}^{A^\times} \kappa_\theta.$$

PROPOSITION. — La représentation α_θ ainsi définie est admissible irréductible supercuspidale et son degré formel relativement à la mesure de Haar sur A^\times/k^\times qui donne à A_E/k^\times la masse 1 est $q-1$; si, de plus, le caractère θ est primordial, alors :

$$\varepsilon(\alpha_\theta, \psi) = -\varepsilon(\theta, \psi_{E/k}).$$

Preuve. — La première partie se démontre exactement comme pour le théorème 5, p. 168 de [5], en utilisant la cuspidalité de κ_θ ; le degré formel en question est le degré $q-1$ de κ_θ ; pour la dernière formule, on part de l'expression

$$\varepsilon(\alpha_\theta, \psi) = \int_{A_E} \psi_{A/k}(x) \kappa_\theta(x)^{-1} \mu_{A/k}(x)^{-1/2} d_{A,\psi} x.$$

On utilise le fait que la restriction de κ_θ à $1 + \mathfrak{p}_E + \mathfrak{p}_E \sigma$ est triviale pour sommer tout d'abord sur ces classes où seul $\psi_{A/k}$ intervient

$$\varepsilon(\alpha_\theta, \psi) = q^{\text{ord } \psi} \theta(\pi)^{\text{ord } \psi + 1} q^{-1} \sum \psi_{A/k}(\pi^{-\text{ord } \psi - 1} x) \kappa_\theta(x)^{-1},$$

où la somme porte sur les classes modulo $1 + \mathfrak{p}_E + \mathfrak{p}_E \sigma$ du sous-groupe de A^\times formé des automorphismes du réseau \mathcal{O}_E , c'est-à-dire sur un groupe $GL_2(\mathbf{F}_q)$. On est donc ramené à calculer des sommes du type

$$\sum_{GL_2(\mathbf{F}_q)} \tau(\text{Tr } x) \vartheta(x)^{-1};$$

où τ est un caractère non trivial du groupe additif de \mathbf{F}_q et ϑ est une représentation cuspidale irréductible du groupe $GL_2(\mathbf{F}_q)$; cet opérateur est scalaire, puisque c'est l'opérateur de convolution par une fonction centrale; pour le déterminer, il suffit d'en calculer la trace; comme la représentation $\vartheta \otimes S$ est induite par un caractère du groupe $\mathbf{F}_{q^2}^\times$, et que S a son caractère supporté par les éléments semi-simples, on a $\text{Tr } \vartheta(x) = 0$ pour les éléments x qui sont diagonalisables réguliers; la cuspidalité de ϑ signifie que pour tout sous-groupe horicyclique U de $GL_2(\mathbf{F}_q)$, on a $\sum_U \vartheta(u) = 0$; comme la trace est constante égale à 2 sur U , on a donc, pour tout $a \in \mathbf{F}_q^\times$ le centre du groupe, la relation $\sum_U \tau(\text{Tr } au) \vartheta(au)^{-1} = 0$; or, il y a $q+1$ sous-groupes horicycliques, donc

$$\sum_{GL_2(\mathbf{F}_q)} \tau(\text{Tr } x) \text{Tr } \vartheta(x)^{-1} = -q \sum_{\mathbf{F}_q^\times} \tau(2a) \text{Tr } \vartheta(a)^{-1} + \sum' \tau(\text{Tr } x) \text{Tr } \vartheta(x)^{-1},$$

où \sum' désigne la somme sur les éléments semi-simples qui ne sont pas déployés; comme il y a $(1/2) \text{Card}(GL_2(\mathbf{F}_q)/\text{Card}(\mathbf{F}_{q^2})) = q(q-1)/2$ éléments conjugués à un élément semi-simple non déployé donné cette seconde somme va être $q(q-1)/2$ fois la somme sur les classes de conjugaison correspondantes; si donc $\vartheta \otimes S$ est induite par le caractère λ de $\mathbf{F}_{q^2}^\times$, on a $\text{Tr } \vartheta(t) = -\lambda(t) - \lambda(\bar{t})$ pour $t \in \mathbf{F}_{q^2}$, $t \notin \mathbf{F}_q$ et $\text{Tr } \vartheta(a) = (q-1)\lambda(a)$ pour $a \in \mathbf{F}_q^\times$: la somme vaut alors :

$$\sum_{GL_2(\mathbf{F}_q)} \tau(\text{Tr } x) \text{Tr } \vartheta(x)^{-1} = -q(q-1) \sum_{\mathbf{F}_{q^2}^\times} \tau(t + \bar{t}) \lambda(t)^{-1}.$$

Ceci montre que l'on a

$$q^{-1} \sum \psi_{A/k} (\pi^{-\text{ord } \psi - 1} x) \kappa_\theta(x)^{-1} = - \sum_{0_{E^*/(1+p_E)}} \psi_{E/k} (\pi^{-\text{ord } \psi - 1} t) \theta(t)^{-1},$$

et donc que $\varepsilon(\alpha_\theta, \psi) = -\varepsilon(\theta, \psi_{E/k})$ par le 1.4.

3.6. Supposons enfin que le conducteur relatif $a_{E/k}(\theta)$ soit impair $a_{E/k}(\theta) = 2m + 1 \geq 3$; soit K_θ le sous-groupe de A^\times défini par $K_\theta = E^\times (1 + \mathfrak{p}_E^m \sigma)$, et posons $K_\theta^+ = E^\times (1 + \mathfrak{p}_E^{m+1} \sigma)$. On définit une représentation κ_θ^+ de degré 1 du groupe K_θ^+ par

$$\kappa_\theta^+ | E^\times = \theta \quad \text{et} \quad \kappa_\theta^+ (1 + x \sigma) = \chi_{A/k} (1 + x \sigma) \quad \text{pour} \quad x \in \mathfrak{p}_E^{m+1},$$

où χ est un caractère de k^\times tel que le caractère $\theta \chi_{E/k}^{-1}$ soit primordial. On définit également une fonction centrale S_θ sur le groupe K_θ par

$$S_\theta(1 + x \sigma) = 0 \quad \text{pour} \quad x \in \mathfrak{p}_E^m \quad \text{et} \quad x \notin \mathfrak{p}_E^{m+1},$$

$$S_\theta(t) = \begin{cases} -1 & \text{pour} \quad t \notin k^\times (1 + \mathfrak{p}_E), \\ q & \text{pour} \quad t \in k^\times (1 + \mathfrak{p}_E); \end{cases}$$

il y a alors une représentation irréductible κ_θ du groupe K_θ , unique à équivalence près, dont le caractère tensorisé par S_θ est celui de la représentation qu'induit κ_θ^+ ; de plus, celui-ci est somme des représentations $\kappa_{\theta'}$, de K_θ pour les q caractères $\theta' \neq \theta$ de E^\times qui sont égaux à θ sur les $t \in k^\times (1 + \mathfrak{p}_E)$ ([5], I, 1.3.7 et 1.3.11). La représentation κ_θ de K_θ induit une représentation du groupe A^\times :

$$\alpha_\theta = \text{Ind}_{K_\theta}^{A^\times} \kappa_\theta.$$

PROPOSITION. — La représentation α_θ ainsi définie est admissible irréductible supercuspidale et son degré formel relativement à la mesure de Haar sur A^\times / k^\times qui donne à A_E / k^\times la masse 1 est $q^{a_{E/k}(\theta)-1} (q-1)$; si, de plus, le caractère θ est primordial, alors :

$$\varepsilon(\alpha_\theta, \psi) = -\varepsilon(\theta, \psi_{E/k}).$$

Preuve. — La première partie est due à T. Shintani ([11], th. 4 et cor. 2; voir aussi [5], th. 5, p. 168). Le degré formel est le produit de l'indice $[A_E : K_\theta]$ par le degré q de κ_θ , ce qui donne la formule voulue. Pour la dernière formule, on part de l'expression suivante (où $\mu_E = \mu_{E/k}$ est le module sur E) :

$$\begin{aligned} \varepsilon(\alpha_\theta, \psi) &= \int_{K_\theta} \psi_{A/k}(x) \kappa_\theta(x)^{-1} \mu_{A/k}(x)^{-1/2} d_{A,\psi} x \\ &= \int_{E^\times} \psi_{E/k}(t) \mu_E(t)^{1/2} \left(\int_{\mathfrak{p}_E^m} \kappa_\theta(1+x\sigma)^{-1} d_{E,\psi} x \right) \kappa_\theta(t)^{-1} d_{E,\psi} t \\ &= \int_{\mathfrak{p}_E^m} \kappa_\theta(1+x\sigma)^{-1} d_{E,\psi} x \int_{E^\times} \psi_{E/k}(t) \mu_E(t)^{1/2} \kappa_\theta(t)^{-1} d_{E,\psi} t. \end{aligned}$$

La seconde intégrale se décompose par rapport aux classes modulo $1 + \mathfrak{p}_E^{m+1}$; utilisons pour cela un élément θ_ψ de E tel que

$$\theta(1 + \mu) = \psi_{E/k}(\theta_\psi u) \quad \text{pour } u \in \mathfrak{p}_E^{m+1},$$

on a donc val $\theta_\psi = -a(\psi) - \text{ord } \psi$ et

$$\begin{aligned} & \int_{E^\times} \psi_{E/k}(t) \mu_E(t)^{1/2} \chi_\theta(t)^{-1} d_{E,\psi} t \\ &= \sum_{E^\times/(1+\mathfrak{p}_E^{m+1})} \psi_{E/k}(t) \mu_E(t)^{3/2} \int_{\mathfrak{p}_E^{m+1}} \psi_{E/k}(tu) \psi_{E/k}(\theta_\psi u)^{-1} d_{E,\psi} u \chi_\theta(t)^{-1}, \\ &= \sum_{\theta_\psi(1+\mathfrak{p}_E^m)/(1+\mathfrak{p}_E^{m+1})} \psi_{E/k}(t) \mu_E(t)^{3/2} \chi_\theta(t) \int_{\mathfrak{o}_E^{m+1}} d_{E,\psi} u \\ &= \mu_E(\theta_\psi)^{1/2} \psi_{E/k}(\theta_\psi) \sum_{\mathfrak{p}_E^m/\mathfrak{p}_E^{m+1}} \psi_{E/k}(\theta_\psi u) \chi_\theta(1+u)^{-1} \chi_\theta(\theta_\psi)^{-1}. \end{aligned}$$

Ceci montre que le facteur $\varepsilon(\alpha_\theta, \psi)$ est égal à l'expression

$$\mu_E(\theta_\psi)^{1/2} \psi_{E/k}(\theta_\psi) \int_{\mathfrak{p}_E^m} \chi_\theta(1+x\sigma)^{-1} d_{E,\psi} x \int_{\mathfrak{p}_E^m/\mathfrak{p}_E^{m+1}} \psi_{E/k}(\theta_\psi u) \theta(1+u)^{-1} \theta(\theta_\psi)^{-1}.$$

Sur cette formule, on voit que le nombre $\theta(\theta_\psi)\varepsilon(\alpha_\theta, \psi)$ est le même pour tous les caractères θ' de E qui coïncident avec θ sur $k^\times(1+\mathfrak{p}_E)$:

$$\varepsilon(\alpha_{\theta'}, \psi) = (\theta/\theta')(\theta_\psi) \varepsilon(\alpha_\theta, \psi),$$

d'où

$$\sum_{\theta' \neq \theta} \varepsilon(\alpha_{\theta'}, \psi) = -\varepsilon(\alpha_\theta, \psi).$$

D'autre part, la représentation $\sum_{\theta' \neq \theta} \chi_{\theta'}$, de K_θ est induite par la représentation χ_θ^+ de K_θ^+ , sous-groupe d'indice égal à q^2 dans K_θ , et donc

$$\begin{aligned} \sum_{\theta' \neq \theta} \varepsilon(\alpha_{\theta'}, \psi) &= q \int_{K_\theta^+} \psi_{A/k}(x) \chi_\theta^+(x)^{-1} \mu_{A/k}(x)^{-1/2} d_{A,\psi} x \\ &= q \int_{E^\times} \psi_{E/k}(t) \theta(t)^{-1} \mu_{E/k}(t)^{1/2} d_{E,\psi} t \int_{\mathfrak{p}_E^{m+1}} d_{E,\psi} v \\ &= q^{1-2m-2-\text{ord } \psi + a(\theta) + \text{ord } \psi} \int_{E^\times} \psi_{E/k}(t) \theta(t)^{-1} d_{E,\psi} t = \varepsilon(\theta, t_{E/k}). \end{aligned}$$

En comparant avec la relation obtenue précédemment, on a bien la formule annoncée

$$\varepsilon(\alpha_\theta, \psi) = -\varepsilon(\theta, \psi_{E/k}).$$

3.7. On a donc déjà montré dans beaucoup de cas le résultat suivant :

THÉORÈME. — Pour chaque caractère régulier θ de E^\times , soit α_θ la représentation admissible irréductible supercuspidale du groupe A^\times définie en 3.4, 3.5, 3.6; alors :

$$\varepsilon(\alpha_\theta, \psi) = (-1)^{a(\theta)} \varepsilon(\theta, \psi_{E/k}).$$

Preuve. — Il reste à vérifier cette formule pour les caractères réguliers de E^\times qui ne sont pas primordiaux, et dont le conducteur relatif est impair. Soit $\theta_{\chi_{E/k}}$ un tel caractère non primordial : $a(\theta) = a_{E/k}(\theta) = 2m + 1$ et χ est un caractère de k^\times avec $a(\theta_{\chi_{E/k}}) = a(\chi) > a(\theta)$. Le facteur ε de α_θ est :

$$\varepsilon(\alpha_\theta, \psi) = \int_{E^\times} \psi_{E/k}(t) \mu_E(t)^{1/2} \int_{\mathfrak{p}_E^m} \chi_{A/k}(1+x\sigma)^{-1} \times \kappa_\theta(1+x\sigma)^{-1} d_{E,\psi} x (\chi_{A/k} \kappa_\theta)(t)^{-1} d_{E,\psi} t$$

comme on a $a(\chi) \geq 2m + 2$, l'intégrale intermédiaire s'écrit sur les classes modulo $\mathfrak{p}_E^{a(\chi)-m-1}$ en utilisant le fait que l'application $x \in \mathfrak{p}_E^m \mapsto \kappa_\theta(1+x\sigma)$ est constante sur chacune de ces classes

$$\begin{aligned} & \int_{\mathfrak{p}_E^m} \chi(1-\sigma x x)^{-1} \kappa_\theta(1+x\sigma)^{-1} d_{E,\psi} x \\ &= \int_{\mathfrak{p}_E^{a(\chi)-m-1}} d_{E,\psi} x \sum_{\mathfrak{p}_E^{m+1}/\mathfrak{p}_E^{a(\chi)-m-1}} \chi(1-\sigma x x)^{-1} \\ &= q^{-a(\chi)-\text{ord } \psi} \int_{\mathfrak{p}_E^{m+1}/\mathfrak{p}_E^{a(\chi)-m-1}} \chi(1-\sigma x x)^{-1} = (-1)^{a(\chi)} q^{-a(\chi)-\text{ord } \psi}. \end{aligned}$$

D'autre part, l'intégrale portant sur E^\times se décompose suivant les classes modulo $1 + \mathfrak{p}_E^{a(\chi)-m-1}$, et donne, en utilisant un élément $\chi_\psi \in k^\times$ tel que

$$\chi(1+x) = \psi(\chi_\psi x) \quad \text{pour } \text{val } x \geq a(\chi) - 1 \geq a(\theta) :$$

$$\begin{aligned} & \sum_{E^\times/(1+\mathfrak{p}_E^{a(\chi)-1})} \psi_{E/k}(t) \mu_E(t)^{1/2} \kappa_\theta(t)^{-1} \chi_{E/k}(t)^{-1} \\ & \quad \times \int_{\mathfrak{p}_E^{a(\theta)-1}} \psi_{E/k}(tu) \psi_{E/k}(\chi_\psi u)^{-1} d_{E,\psi} u \\ &= q^{-2a(\chi)+2-\text{ord } \psi} \sum_{\chi_\psi(1+\mathfrak{p}_E)/(1+\mathfrak{p}_E^{a(\chi)-1})} \psi_{E/k}(t) \mu_E(t)^{1/2} \chi_{E/k}(t)^{-1} \theta(t)^{-1} \\ &= q \int_{\chi_\psi(1+\mathfrak{p}_E)/(1+\mathfrak{p}_E^{a(\theta)-1})} \psi_{E/k}(t) (\theta_{\chi_{E/k}})(t)^{-1} \end{aligned}$$

puisque μ_E restreint à k^\times est μ^2 ; on est ainsi arrivé à l'expression

$$\varepsilon(\alpha_\theta, \psi) = q^{-a(\chi)+1-\text{ord } \psi} (-1)^{a(\chi)} \int_{\chi_\psi(1+\mathfrak{p}_E)/(1+\mathfrak{p}_E^{a(\theta)-1})} \psi_{E/k}(t) (\theta_{\chi_{E/k}})^{-1}.$$

D'un autre côté, on a, par décomposition de l'intégrale qui donne $\varepsilon(\theta\chi_{E/k}, \psi_{E/k})$ (1.4);

$$\begin{aligned} \varepsilon(\theta\chi_{E/k}, \psi_{E/k}) &= \int_{\mathfrak{p}_E^{a(\theta)-1}} d_{E,\psi} v \sum_{\chi_\psi(1+\mathfrak{p}_E)/(1+\mathfrak{p}_E^{a(\theta)-1})} \psi_{E/k}(t) (\theta\chi_{E/k})(t)^{-1} \\ &= q^{-a(\theta)+1-\text{ord } \psi} \int_{\chi_\psi(1+\mathfrak{p}_E)/(1+\mathfrak{p}_E^{a(\theta)-1})} \psi_{E/k}(t) (\theta\chi_{E/k})^{-1}, \end{aligned}$$

ce qui donne

$$(-1)^{a(\theta)} \varepsilon(\theta\chi_{E/k}, \psi_{E/k}) = \varepsilon(\alpha_{\theta\chi_{E/k}}, \psi).$$

c'est bien la formule voulue, puisque $a(\theta\chi_{E/k}) = a(\chi_{E/k}) = a(\chi)$. Ceci achève la démonstration du théorème.

3.8. On peut, écrire la formule du théorème sous la forme

$$\varepsilon(\alpha_\theta, \psi) = (-1)^{\text{ord } \psi} (-1)^{a(\theta)+\text{ord } \psi} \varepsilon(\theta, \psi_{E/k}),$$

Le caractère de k^\times que définit l'extension quadratique non ramifiée E de k est $(-1)^{\text{val}}$; par le corollaire de 1.7 et 1.4, on a donc ici

$$\lambda_{E/k}(\psi) = (-1)^{\text{ord } \psi};$$

la formule ci-dessus prend donc la forme

$$\varepsilon(\alpha_\theta, \psi) = \lambda_{E/k}(\psi) (-1)^{a(\theta)+\text{ord } \psi} \varepsilon(\theta, \psi_{E/k}).$$

Introduisant l'unique prolongement non ramifié $\tilde{\sigma}$ de $\hat{\sigma}$ à E^\times : $\tilde{\sigma} = (-1)^{\text{val}}$, on a $(-1)^{a(\theta)+\text{ord } \psi} \varepsilon(\theta\tilde{\sigma}, \psi_{E/k})$, et donc

$$\varepsilon(\alpha_\theta, \psi) = \lambda_{E/k}(\psi) \varepsilon(\theta\tilde{\sigma}, \psi_{E/k}).$$

Remarquons que la connaissance du facteur $\varepsilon(\alpha_\theta, \psi)$ détermine le conducteur de la représentation α_θ : c'est $2a(\theta)$.

Le théorème de 3.7 et celui de 2.4 montrent que l'on a donc le théorème suivant:

THÉORÈME. — *Pour chaque caractère régulier θ du groupe E^\times , soit α_θ la représentation admissible irréductible supercuspidale du groupe A^\times construite en 3.4, 3.5, 3.6. Alors, si $\tilde{\sigma}$ est le prolongement non ramifié du caractère de k^\times que définit l'extension E , on a*

$$\alpha_\theta = (\tilde{\theta})_A \quad \text{avec} \quad \tilde{\theta} = \theta\tilde{\sigma}.$$

C'est le dictionnaire cherché dans le cas de la série supercuspidale non ramifiée.

4. Série supercuspidale modérément ramifiée

4.1. Soit E une extension quadratique séparable de k , dont la ramification est modérée; la caractéristique résiduelle du corps k est donc impaire, et il y a exactement deux telles

extensions; le sous-groupe $1 + \mathfrak{p}$ de k^\times est alors formé de carrés, et le conducteur de l'extension E de k est égal à 1 : c'est aussi le conducteur du caractère $\hat{\sigma}$ de k^\times que définit l'extension; on note σ la conjugaison de E sur k .

Soit A l'algèbre des endomorphismes de E considéré comme espace vectoriel sur k ; l'espace vectoriel sous-jacent est somme directe de E et de $E\sigma$; les éléments de $E\sigma$ sont de trace réduite nulle; pour un caractère non trivial ψ du groupe additif de k , le caractère $\psi_{E/k} = \psi \circ \text{Tr}_{E/k}$ du groupe additif de E a pour ordre

$$\text{ord } \psi_{E/k} = 2 \text{ ord } \psi + 1.$$

Il en résulte que la mesure de Haar autoduale sur E qui lui correspond, soit $d_{E,\psi}$, donne à l'anneau \mathcal{O}_E des entiers de E la mesure $q^{-\text{ord } \psi - 1/2}$. La mesure de Haar autoduale sur A qui correspond au bicalectère $\psi_{A/k}(xy) = \psi \circ \text{Tr}_{A/k}(xy)$ est donnée par la formule suivante dans la décomposition $A = E + E\sigma$:

$$d_{A,\psi}(u + v\sigma) = d_{E,\psi} u d_{E,\psi} v.$$

L'action du groupe A^\times sur les classes de réseaux de l'espace vectoriel E sur k est en fait une action du groupe projectif A^\times/k^\times ; si \mathfrak{p}_E est l'idéal maximal de \mathcal{O}_E , les deux réseaux \mathcal{O}_E et \mathfrak{p}_E ne sont pas homothétiques, et le second est d'indice q dans le premier : ils définissent une arête de l'arbre de A^\times , arête conservée sous l'action de E^\times , et dont les extrémités sont permutées par l'action des éléments de E^\times dont la valuation est impaire; on peut dire que le milieu de cette arête est l'unique point fixe de E^\times opérant sur l'arbre; le sous-groupe d'isotropie correspondant dans le groupe projectif A^\times/k^\times est un sous-groupe compact maximal non spécial.

4.2. Le noyau de l'application composée

$$E^\times \xrightarrow{\text{val}} \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$$

est formé des éléments de valuation paire : c'est le sous-groupe $k^\times(1 + \mathfrak{p}_E)$. On en déduit que le caractère $\hat{\sigma}$ de k^\times que définit E admet exactement deux prolongements $\tilde{\sigma}'$ et $\tilde{\sigma}''$ modérément ramifiés, et ils se déduisent l'un de l'autre par le caractère $(-1)^{\text{val}}$ de E^\times , qui est d'ordre 2. Comme le corps E contient un élément premier que la conjugaison σ envoie sur son opposé, chacun de ces prolongements $\tilde{\sigma}$ vérifie :

$$\tilde{\sigma}^2 = (-1)^{\text{val}} = (-1)^{(q-1)/2 \text{ val}}.$$

On en déduit :

(a) si -1 est un carré, alors $\tilde{\sigma}'$ et $\tilde{\sigma}''$ sont d'ordre 2, fixés par σ ; ce sont les deux caractères d'ordre 2 de E^\times relatifs à ses deux extensions quadratiques ramifiées;

(b) si -1 n'est pas un carré, alors $\tilde{\sigma}'$ et $\tilde{\sigma}''$ sont d'ordre 4, échangés par σ et complexes conjugués; chacun d'eux vérifie la relation (cf. prop. 2.7) :

$$\tilde{\sigma}^\sigma = (-1)^{\text{val}} \tilde{\sigma}.$$

4.3. Appelons encore *régulier* tout caractère θ de E^\times qui ne se factorise pas à travers la norme $N_{E/k}$ en un caractère de k^\times ; ceci revient à dire $\theta \neq \theta^\sigma$. Le conducteur relatif $a_{E/k}(\theta)$ du caractère θ est le conducteur de θ/θ^σ ; la relation suivante, pour $x \in \mathfrak{p}_E$:

$$(1-x)(1-\sigma x)^{-1} = 1 + (\sigma x - x)(1 + \sigma x + (\sigma x)^2 + \dots)$$

montre que $(\theta/\theta^\sigma)(1-x) = \theta(1 + (\sigma x - x)(1 + \sigma x + \dots))$; il en résulte que l'inégalité $a_{E/k}(\theta) > 1$ implique que le conducteur de θ/θ^σ est pair. Si, par contre, θ/θ^σ est trivial sur $1 + \mathfrak{p}_E$, alors le caractère θ n'est régulier que si $\theta/\theta^\sigma = (-1)^{\text{val}}$: en effet, l'action de σ sur $\mathcal{O}_E/\mathfrak{p}_E$ est triviale et donc θ/θ^σ est trivial sur \mathcal{O}_E^\times dès qu'il l'est sur $1 + \mathfrak{p}_E$. On a ainsi prouvé l'énoncé suivant :

LEMME. — *Lorsque l'extension quadratique E est modérément ramifiée sur k, les caractères réguliers de E^\times , ou bien ont leur conducteur relatif pair, ou bien ont leur conducteur relatif égal à 1, et, dans ce second cas, ils se déduisent de leur conjugué par σ par le produit par le caractère $(-1)^{\text{val}}$.*

Pour $n \geq 1$, on a les formules ([10], V, § 3) :

$$N_{E/k}(1 + \mathfrak{p}_E^{2n-1}) = N_{E/k}(1 + \mathfrak{p}_E^{2n}) = 1 + \mathfrak{p}^n.$$

On en déduit que si un caractère χ de k^\times a son conducteur $a(\chi) > 1$, alors le conducteur $a(\chi_{E/k})$ du relèvement $\chi_{E/k} = \chi \circ N_{E/k}$ de χ à E^\times est $2a(\chi) - 1$; pour $a(\chi) = 1$, on a aussi $a(\chi_{E/k}) = 1$ sauf si $\chi = \hat{\sigma}$, le caractère d'ordre 2 de k^\times que définit l'extension E, auquel cas $\chi_{E/k}$ est trivial.

Un caractère θ de E^\times est appelé *primordial* s'il est régulier et si son conducteur est minimal parmi les conducteurs de tous les caractères $\theta\chi_{E/k}^{-1}$ où χ parcourt les caractères de k^\times ; d'après ce qui précède, ceci revient à dire que, ou bien le conducteur de θ est pair, ou bien qu'il est trivial sur $1 + \mathfrak{p}_E$ et que $\theta^\sigma = (-1)^{\text{val}}\theta$.

4.4. On dispose d'un lemme analogue à celui de 3.3.

LEMME. — *Soit χ un caractère de k^\times ; alors, E étant une extension quadratique modérément ramifiée de k et σ la conjugaison de E sur k, on a, pour $a(\chi) > m \geq 1$:*

$$\int_{\mathfrak{p}_E/\mathfrak{p}_E}^m \chi(1 - \sigma xx)^{-1} = \lambda_{E/k}(\psi),$$

où ψ est un caractère du groupe additif de k tel que

$$\chi(1+x) = \psi(x) \quad \text{pour} \quad \text{val } x \geq a(\chi) - 1.$$

Preuve. — Pour tout entier r, on a $\text{Tr}_{E/k} \mathfrak{p}_E^{2r} = \text{Tr}_{E/k} \mathfrak{p}_E^{2r-1} = \mathfrak{p}^r$ ([10], V, § 3); la fonction $x \in \mathfrak{p}_E^m \rightarrow \chi(1 - \sigma xx)^{-1}$ est donc constante sur les classes modulo $\mathfrak{p}_E^{a(\chi_{E/k})-m}$: pour $x \in \mathfrak{p}_E$, $y \in \mathfrak{p}_E^{a(\chi_{E/k})-m}$ on a σyy et $\text{Tr}_{E/k} \sigma xy \in \mathfrak{p}^{a(\chi)}$, d'où :

$$\begin{aligned} \chi(1 - \sigma(x+y)(x+y))^{-1} &= \chi(1 - \sigma xx)^{-1} \chi(1 - \sigma yy)^{-1} \chi(1 - \sigma xy - \sigma yx)^{-1} \\ &= \chi(1 - \sigma xx)^{-1} \chi(1 - \sigma yy)^{-1} \chi(\text{Tr}_{E/k} \sigma xy) = \chi(1 - \sigma xx)^{-1}. \end{aligned}$$

Ensuite, vérifions la formule pour $a(\chi) = m + 1$: il faut voir que l'on a

$$\sum_{\mathfrak{p}_E/\mathfrak{p}_E^{m+1}} \chi(1 - \sigma_{xx})^{-1} = q^{1/2} \lambda_{E/k}(\psi);$$

or, le premier nombre est aussi la somme sur le même ensemble des $\psi(\sigma_{xx})$; choisissons un élément premier π_E de E de trace nulle, et soit π sa norme; écrivons $x = \pi_E^m u$, u entier : $\psi(\sigma_{xx}) = \psi(\pi^m \sigma_{uu}) = \psi(\pi^m v^2)$, en notant v l'image de u dans le corps résiduel de E , qui est celui de k , et en remarquant que l'ordre de ψ étant $-(m + 1)$, l'application $y \rightarrow \psi(\pi^m y)$ définit un caractère de \mathcal{O}_E trivial sur \mathfrak{p}_E donc un caractère du groupe additif de ce corps résiduel. D'autre part, comme on l'a vu en 1.7 :

$$q^{1/2} \lambda_{E/k}(\psi) = q^{-\text{ord } \psi/2} \varepsilon(\hat{\sigma}, \psi) = \sum_{(\mathcal{O}/\mathfrak{p})^\times} \hat{\sigma}(v) \psi(\pi^m v).$$

On est donc ramené à prouver que, pour un caractère non trivial du groupe additif du corps F_q , on a la formule suivante, où figure le symbole de Legendre :

$$\sum_{F_q} \tau(x^2) = \sum_{F_q^\times} \left(\frac{x}{q}\right) \tau(x),$$

et qui est facile à vérifier.

Il reste à voir que la formule de l'énoncé est encore vraie pour $a(\chi) > m + 1$, à savoir que l'on a

$$\sum_{\mathfrak{p}_E/\mathfrak{p}_E^{2a(\chi)-m-1}} \chi(1 - \sigma_{xx})^{-1} = q^{a(\chi)-m-1/2} \lambda_{E/k}(\psi).$$

Pour cela on somme sur les classes modulo $\mathfrak{p}_E^{2a(\chi)-m-2} / \mathfrak{p}_E^{2a(\chi)-m-1}$, ce qui fait apparaître $\psi(\text{Tr}_{E/k} xy)$ à sommer sur les y dans ce groupe, nul sauf si $x \in \mathfrak{p}_E^{m+1}$, et ainsi la formule à prouver pour l'indice m se ramène à la formule pour l'indice $m + 1$; ceci permet de revenir au cas $a(\chi) = m + 1$, ce qu'on vient de traiter, et la formule est donc établie.

Remarque. — Ce lemme et celui de 3.3 peuvent se mettre sous la forme commune suivante, pour un caractère χ de k^\times tel que $a(\chi_{E/k}) \geq 2m \geq 2$:

$$\int_{\mathfrak{p}_E^m/\mathfrak{p}_E^q(\chi_{E/k})^{-m}} \chi(1 - N_{E/k} x)^{-1} = \lambda_{E/k}(\psi)$$

le caractère ψ étant défini comme dans le lemme 4.4.

4.5. Soit θ un caractère régulier du groupe E^\times dont le conducteur relatif est pair : $a_{E/k}(\theta) = 2m$. Soit $K_\theta = E^\times(1 + \mathfrak{p}_E^m \sigma)$: c'est un sous-groupe ouvert de A^\times , compact modulo le centre k^\times . On en définit une représentation K_θ de degré 1 par

$$\alpha_\theta|_{E^\times} = \theta \quad \text{et} \quad \alpha_\theta(1 + N\sigma) = \chi_{A/k}(1 + N\sigma) \quad \text{pour } x \in \mathfrak{p}_E^m.$$

où χ est un caractère de k^\times tel que le caractère $\theta\chi_{E/k}^{-1}$ soit primordial; cette définition ne dépend pas du choix de χ . On définit alors une représentation de A^\times induisant α_θ :

$$\alpha_\theta = \text{Ind}_{K_\theta}^{A^\times} \alpha_\theta.$$

PROPOSITION. — La représentation ainsi définie par un caractère régulier θ de E^\times de conducteur relatif pair α_0 de A^\times est admissible irréductible supercuspidale; son degré formel relativement à la mesure de Haar sur A^\times/k^\times qui donne à A_E/k^\times la masse 1 est $q^{a_{E/k}(\theta)/2-1} (q-1)$, et son facteur ε est donné par

$$\begin{aligned}\varepsilon(\alpha_\theta, \psi) &= \varepsilon(\theta, \psi_{E/k}) \text{ quand } \theta \text{ est primordial} \\ \varepsilon(\alpha_\theta, \psi) &= \lambda_{E/k}(\psi_\theta) \varepsilon(\theta, \psi_{E/k}) \text{ sinon,}\end{aligned}$$

où ψ_θ désigne un caractère du groupe additif de k qui vérifie

$$\chi(1+x) = \psi_\theta(x) \quad \text{pour } \text{val } x \geq a(\chi) - 1,$$

le caractère χ de k^\times étant tel que le caractère $\theta\chi_{E/k}^{-1}$ de E^\times soit primordial.

Preuve. — La première partie est démontrée par T. Shintani ([11], th. 4 et cor. 1); le degré formel est égal à l'indice de K_θ dans A_E : c'est donc le produit de $[A_E : E^\times(1 + \mathfrak{p}_E \sigma)]$ par $[E^\times(1 + \mathfrak{p}_E \sigma) : E^\times(1 + \mathfrak{p}_E^m \sigma)]$, c'est-à-dire $(q-1)q^{m-1}$. Quant au facteur ε on a, par 2.3, l'expression

$$\begin{aligned}\varepsilon(\alpha_\theta, \psi) &= \int_{K_\theta} \psi_{A/k}(x) \varkappa_\theta(x)^{-1} \mu_{A/k}(x)^{-1/2} d_{A,\psi} x \\ &= \int_{E^\times} \psi_{E/k}(t) \mu_E(t)^{1/2} \theta(t)^{-1} d_{E,\psi} t \int_{\mathfrak{p}_E^m} \chi(1 - \sigma yy)^{-1} d_{E,\psi} y \\ &= q^{(2m+2\text{ord } \psi+1)/2} \varepsilon(\theta, \psi_{E/k}) \int_{\mathfrak{p}_E^m} \chi(1 - \sigma yy)^{-1} d_{E,\psi} y;\end{aligned}$$

pour θ primordial, on a $a(\chi) \leq m$ et donc $\chi(1 - \sigma yy) = 1$ sur \mathfrak{p}_E^m ; dans ce cas, on a donc

$$\varepsilon(\alpha_\theta, \psi) = q^{-m-(2\text{ord } \psi+1)/2} q^{(2m+2\text{ord } \psi+1)/2} \varepsilon(\theta, \psi_{E/k}) = \varepsilon(\theta, \psi_{E/k}).$$

Quand θ n'est pas primordial, la mesure $q^{a(\chi)+\text{ord } \psi} d_{E,\psi} y$ donne à \mathcal{O}_E la masse $q^{a(\chi)-1/2}$: c'est donc la mesure autoduale par rapport à un caractère ψ_θ pris comme dans l'énoncé; le lemme de 4.4 appliqué ici donne

$$\int_{\mathfrak{p}_E^m/\mathfrak{p}_E^{2a(\chi)-m-1}} \chi(1 - \sigma yy)^{-1} = q^{a(\chi)+\text{ord } \psi} \int_{\mathfrak{p}_E^m} \chi(1 - \sigma yy)^{-1} d_{E,\psi} y = \lambda_{E/k}(\psi_\theta),$$

et donc

$$\varepsilon(\alpha_\theta, \psi) = \lambda_{E/k}(\psi_\theta) \varepsilon(\theta, \psi_{E/k}) \text{ pour } \theta \text{ non primordial.}$$

Une autre démonstration de cette proposition sera donnée aux paragraphes 5 et 6.

4.6. On va montrer maintenant que le bon paramétrage des séries supercuspidales modérément ramifiées (2.8) s'obtient à partir des représentations que l'on vient de construire grâce à un décalage convenable, analogue à celui du cas non ramifié (3.8).

THÉORÈME. — Pour chaque caractère régulier θ du groupe E^\times dont le conducteur relatif est pair, il y a un unique prolongement $\tilde{\sigma}$ du caractère $\hat{\sigma}$ de k^\times que définit l'extension E , qui soit trivial sur $1 + \mathfrak{p}_E$ et tel que

$$\alpha_\theta = (\tilde{\theta})_A \quad \text{où} \quad \tilde{\theta} = \theta \tilde{\sigma}.$$

Preuve. — On va se placer dans les conditions d'application du théorème rappelé en 2.4. Comme $a(\tilde{\sigma}) = 1$, les deux caractères θ et $\tilde{\theta}$ de E^\times ont même conducteur relatif, et sont donc tous deux réguliers; par construction, la restriction de la représentation α_θ au centre k^\times est celle de θ à k^\times : c'est le produit de $\hat{\sigma}$ par $\tilde{\theta} | k^\times$. Voyons donc que pour tout caractère χ de k^\times on a l'égalité

$$\varepsilon((\tilde{\theta})_A \otimes \chi_{A/k}, \psi) = \varepsilon(\alpha_\theta \otimes \chi_{A/k}, \psi).$$

Pour chaque caractère θ en question, fixons un élément θ_ψ de E^\times pour lequel

$$\theta(1+t) = \psi_{E/k}(\theta_\psi t) \quad \text{pour} \quad t \in \mathfrak{p}_E^{a(\theta)-1}.$$

Si $\tilde{\sigma}$ est un caractère de E^\times trivial sur $1 + \mathfrak{p}_E$, alors $\tilde{\sigma}(\theta_\psi) = \tilde{\sigma}((\theta\chi_{E/k})_\psi)$ pour θ et $\theta\chi_{E/k}$ primordiaux: en effet on a alors $a(\chi) \leq a(\theta)/2$ et donc $a(\chi_{E/k}) < a(\theta)$, ce qui donne

$$\tilde{\sigma}((\theta\chi_{E/k})_\psi) = \tilde{\sigma}(\theta_\psi + \chi_{E/k,\psi}) = \tilde{\sigma}(\theta_\psi).$$

D'autre part, on sait que $\varepsilon(\theta_A, \psi) = \lambda_{E/k}(\lambda) \varepsilon(\theta, \psi_{E/k})$, donc (1.4):

$$\varepsilon((\tilde{\theta})_A, \psi) = \lambda_{E/k}(\psi) \tilde{\sigma}(\theta_\psi)^{-1} \varepsilon(\theta, \psi_{E/k}).$$

Comme chaque membre de l'identité voulue ne dépend que de $\theta\chi_{E/k}$, on voit que, par le théorème de 4.5, il s'agit de trouver un prolongement $\tilde{\sigma}$ de $\hat{\sigma}$ à E^\times qui soit trivial sur $1 + \mathfrak{p}_E$ et tel que

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}(\theta_\psi) &= \lambda_{E/k}(\psi) \text{ pour } \theta \text{ primordial,} \\ \tilde{\sigma}(\theta_\psi) &= \lambda_{E/k}(\psi) / \lambda_{E/k}(\psi_\theta) \text{ sinon.} \end{aligned}$$

Lorsque θ n'est pas primordial et que $\theta\chi_{E/k}^{-1}$ l'est, on a

$$\begin{aligned} a(\chi_{E/k}) &= 2a(\chi) - 1 = a(\theta) \quad \text{et pour} \quad \text{val } x \geq a(\theta) - 1; \\ \theta(1+x) &= \chi_{E/k}(1+x) = \chi(1 + \text{Tr}_{E/k} x) = \psi_{E/k}(\theta_\psi x) = \psi_\theta(\text{Tr}_{E/k} x); \end{aligned}$$

ceci montre qu'on peut prendre pour θ_ψ un élément $\chi_\psi \in k^\times$ tel que

$$\chi(1+x) = \psi(\chi_\psi x) \quad \text{dès que} \quad \text{val } x \geq a(\chi) - 1,$$

et pour caractère ψ_θ le caractère $\psi \cdot \chi_\psi$; mais alors:

$$\begin{aligned} \lambda_{E/k}(\psi_\theta) &= \hat{\sigma}(\chi_\psi)^{-1} \lambda_{E/k}(\psi), \\ \lambda_{E/k}(\psi) / \lambda_{E/k}(\psi_\theta) &= \hat{\sigma}(\chi_\psi) = \tilde{\sigma}(\theta_\psi). \end{aligned}$$

Il reste à voir la condition imposée à $\tilde{\sigma}$ lorsque le caractère θ de E^\times est primordial; un élément $\theta_\psi \in E$ qui satisfait à $\theta(1+x) = \psi_{E/k}(\theta_\psi x)$ pour val $x \geq a(\theta) - 1$ a pour valuation $-a(\theta) - \text{ord } \psi_{E/k} = -a(\theta) - 2 \text{ ord } \psi - 1$, qui est un entier impair; or, pour un élément $x \in E^\times$ dont la valuation est impaire, on a, par 4.2 :

$$\tilde{\sigma}(x)^2 = \hat{\sigma}(-1);$$

d'autre part, on a aussi (cor. de 1.7) :

$$\lambda_{E/k}(\psi)^2 = \hat{\sigma}(-1);$$

avec ce qu'on a dit en 4.2, on voit que la formule suivante, pour un caractère primordial de conducteur pair

$$\tilde{\sigma}(\theta_\psi) = \lambda_{E/k}(\psi),$$

détermine le prolongement $\tilde{\sigma}$ de $\hat{\sigma}$ si on lui impose d'être trivial sur $1 + \mathfrak{p}_E$.

4.7. Il reste le cas des caractères réguliers de E^\times dont le conducteur relatif est égal à 1; dans cette hypothèse, notons F l'extension quadratique non ramifiée de k , et K l'extension composée $E.F$: c'est l'extension quadratique non ramifiée de E ; elle définit le caractère $\hat{\sigma}_E^K = (-1)^{\text{val}}$ sur E^\times ; on a vu en 4.3 qu'un caractère de E^\times dont le conducteur relatif est égal à 1 vérifie $\theta^\sigma = \hat{\sigma}_E^K \theta$; ceci montre que le relèvement à K^\times : $\theta_{K/E} = \theta \circ N_{K/E}$ de θ s'écrit de deux façons exactement comme relèvement d'un caractère de F^\times , à savoir $\varphi_{K/E}$ et $(\varphi^{\sigma^F})_{K/F}$, avec $\varphi^{\sigma^F} = \hat{\sigma}_E^K \varphi$. Pour satisfaire à la correspondance de Langlands, on pose donc

$$\theta_A = \varphi_A.$$

On sait que les représentations construites aux numéros 3 et 4 constituent toutes les représentations supercuspidales de A^\times , à équivalence près, lorsque la caractéristique résiduelle est impaire.

5. Construction des autres représentations supercuspidales

5.1. On note désormais E une extension quadratique séparable ramifiée du corps k , et σ le conjugaison de E sur k . On sait que le conducteur $d = d_{E/k}$ de E sur k est donné par l'une des propriétés suivantes [10] :

- plus grand entier $n \geq 0$ tel que σ opère trivialement sur $\mathcal{O}_E / \mathfrak{p}_E^n$;
- plus petit entier $n \geq 0$ tel que $1 + \mathfrak{p}^n$ soit formé de normes de E ;
- plus grand entier $n \geq 0$ tel que la trace de \mathfrak{p}_E^{-n} soit dans \mathcal{O} ;
- valuation du discriminant de \mathcal{O}_E relativement à \mathcal{O} ;
- conducteur du caractère $\hat{\sigma}$ d'ordre 2 de k^\times qui a $N_{E/k} E^\times$ pour noyau;
- valuation de $\pi_E - \sigma \pi_E$ pour tout élément premier π_E de E .

Si la ramification est sauvage, ce qui équivaut au fait que la caractéristique résiduelle est 2, le conducteur est aussi le plus grand entier $n > 1$ tel que $1 + \mathfrak{p}_E^{n-1}$ contienne le noyau de la norme.

On notera toujours $N_{E/k}$ et $T_{E/k}$ la norme et la trace de E sur k .

La formule $\pi_E - {}^\sigma\pi_E = T_{E/k} \pi_E - 2 {}^\sigma\pi_E$ pour un élément premier π_E montre que l'on a :

(a) $d=2$ val $T_{E/k} \pi_E$ si $d \leq 2$ val 2;

(b) $d=2$ val $2+1$ sinon, et alors $\mathfrak{p}_E^{-d+1} = (1/2)\mathcal{O}$.

Rappelons que pour tout entier n on note n' la partie entière de $n/2$ et $n'' = n - n'$. On a alors :

$$T_{E/k} \mathfrak{p}_E^m = \mathfrak{p}_E^{(m+d)'} \text{ pour tout entier } m,$$

$$N_{E/k} (1 + \mathfrak{p}_E^m) = 1 + \mathfrak{p}_E^{(m+d)'} \text{ pour tout entier } m \geq d.$$

5.2. Comme en 3.2 et 4.3, un caractère de E^\times peut être régulier, ou primordial relativement au corps k , et il possède un conducteur et un conducteur relatif.

LEMME. — Soit θ un caractère régulier de E^\times . Alors :

(a) $a(\theta) \geq d$;

(b) si $a(\theta) = d$ alors θ est primordial et $\theta/\theta^\sigma = (-1)^{\text{val}_E}$;

(c) si $a(\theta) > d$ alors θ est primordial si et seulement si $a(\theta) - d$ est impair, et, dans ce cas, on a

$$a_{E/k}(\theta) = a(\theta) - d + 1.$$

Preuve. — (a) vient de la première caractérisation du conducteur d ;

(b) résulte de ce qui alors θ/θ^σ est trivial sur les unités de E ;

(c) d'abord si $a(\theta) - d$ est impair, alors θ est primordial : en effet, si non il y a un caractère χ de k^\times , de conducteur $a(\chi) > d$, tel que $a(\theta\chi_{E/k}) < a(\theta)$, et donc $a(\theta) = a(\chi_{E/k}) = 2a(\chi) - d$ a la même parité que d . Ensuite, si $a(\theta) - d$ est pair > 0 , la restriction de θ à $1 + \mathfrak{p}_E^{a(\theta)-1}$ donne un caractère de $\mathfrak{p}_E^{a(\theta)-1}/\mathfrak{p}_E^{a(\theta)}$ fixé par σ qui se factorise à travers la trace : il y a donc un caractère χ de k^\times tel que, pour $x \in \mathfrak{p}_E^{a(\theta)-1}$, on ait

$$\theta(1+x) = \chi(1 + T_{E/k} x) = \chi(N_{E/k}(1+x))$$

et ainsi $a(\theta\chi_{E/k}^{-1})$ est plus petit que $a(\theta)$, ce qui prouve que θ n'est pas primordial. Prouvons la formule $a_{E/k}(\theta) = a(\theta) - d + 1$; on observe que, pour $x \in \mathfrak{p}_E^{a(\theta)-d}$, on a, sachant que $a(\theta) > d$:

$$(\theta/\theta^\sigma)(1+x) = \theta\left(\frac{1+x}{1+{}^\sigma x}\right) = \theta\left(1 + \frac{x-{}^\sigma x}{1+{}^\sigma x}\right) = \theta(1+x-{}^\sigma x),$$

or, du fait de la parité de $a(\theta) - d + 1$, on a

$$T_{E/k} \mathfrak{p}_E^{a(\theta)-1} = T_{E/k} \mathfrak{p}_E^{a(\theta)};$$

il en résulte que θ ne peut être trivial sur les $1 + x - {}^\sigma x$, $x \in \mathfrak{p}_E^{a(\theta)-d}$ puisque dans le cas contraire il se factoriserait à travers $T_{E/k} x$ et serait donc trivial pour $x \in \mathfrak{p}_E^{a(\theta)-1}$, contredisant la définition de $a(\theta)$; ceci montre que θ/θ^σ n'est pas trivial sur $1 + \mathfrak{p}_E^{a(\theta)-d}$ et comme il l'est sur $1 + \mathfrak{p}_E^{a(\theta)-d+1}$, on a bien la formule annoncée.

5.3. La filtration de E par les puissances \mathfrak{p}_E^n , $n \in \mathbb{Z}$, de l'idéal premier définit une filtration (\mathfrak{p}_A^m) sur l'algèbre A des endomorphismes de E , espace vectoriel sur k : par définition, un $u \in A$ est dans \mathfrak{p}_A^m s'il décale de m la filtration sur E :

$$u \in \mathfrak{p}_A^m \iff u(\mathfrak{p}_E^n) \subset \mathfrak{p}_E^{m+n} \text{ pour tout } n$$

(en fait deux entiers de parité distincte suffisent). On écrit $\mathfrak{p}_A^1 = \mathfrak{p}_A$ et $\mathfrak{p}_A^0 = \mathcal{O}_A$; on a alors $\mathfrak{p}_A^{m+n} = \mathfrak{p}_A^m \mathfrak{p}_A^n$ pour tous entiers m, n ; de plus \mathcal{O}_A^\times , le groupe des unités de \mathcal{O}_A , est un sous-groupe d'Iwahori de A^\times ; pour chaque m , le groupe E^\times et la conjugaison σ normalisent \mathfrak{p}_A^m .

Pour $m \geq 1$, on pose

$$A^\times(m) = 1 + \mathfrak{p}_A^m;$$

c'est un sous-groupe distingué de \mathcal{O}_A^\times , les sous-groupes $E^\times A^\times(m)$ sont ouverts, compacts modulo le centre k^\times de A^\times , et distingués dans le groupe $A_E = E^\times \mathcal{O}_A^\times$ fixateur de l'arête de l'arbre de A^\times déterminée par E ; on a aussi

$$E^\times \cap A^\times(m) = 1 + \mathfrak{p}_E^m.$$

Le groupe quotient $\mathfrak{p}_A^m / \mathfrak{p}_A^{m+1}$ est aussi un \mathcal{O}_A -module, qui en fait un espace vectoriel de dimension 2 sur le corps résiduel de E , égal à celui de k ; si q est leur ordre commun, l'indice de $E^\times A^\times(m)$ dans A_E est $q^{m-1}(q-1)$. Remarquons aussi que $\sigma \in A^\times(m)$ pour $m < d$.

L'écriture de A comme somme directe $E + \sigma E$ permet de parler des *réseaux décomposables* de A : ce sont les sous-modules sur \mathcal{O}_E , ouverts et compacts, qui s'écrivent $\mathfrak{p}_E^m + \sigma \mathfrak{p}_E^n$ avec m, n entiers; dans l'arbre défini par le plan A sur E , ils correspondent aux sommets situés sur la géodésique définie par les droites E et σE . Pour chaque entier m , on appelle \mathfrak{p}_A^{m-} et \mathfrak{p}_A^{m+} les deux réseaux décomposables extrêmes encadrant \mathfrak{p}_A^m :

$$\mathfrak{p}_A^{m-} \subset \mathfrak{p}_A^m \subset \mathfrak{p}_A^{m+};$$

autrement dit, \mathfrak{p}_A^{m-} est la somme $\mathfrak{p}_E^m + \sigma \mathfrak{p}_E^m$ des traces de \mathfrak{p}_A^m sur E et σE , et \mathfrak{p}_A^{m+} la somme des projections de \mathfrak{p}_A^m sur E et σ .

LEMME. — *Les deux inclusions*

$$\mathfrak{p}_A^{m-} \subset \mathfrak{p}_A^m \subset \mathfrak{p}_A^{m+}$$

sont d'indice q^{d-1} .

Preuve. — La forme linéaire trace $T_{A/k}$ sur A définit une forme bilinéaire sur A : $x, y \mapsto T_{A/k}(xy)$; celle-ci permet de parler du réseau complémentaire d'un réseau donné; on voit que \mathfrak{p}_A^m a pour réseau complémentaire \mathfrak{p}_A^{-m-1} et que le réseau décomposable $\mathfrak{p}_E^m + \sigma \mathfrak{p}_E^n$ a pour réseau complémentaire $\mathfrak{p}_E^{-m-d} + \sigma \mathfrak{p}_E^{-n-d}$; les deux inclusions de l'énoncé se renversent en inclusions sur les réseaux complémentaires, et donnent donc les réseaux décomposables extrêmes encadrant \mathfrak{p}_A^{m-1} ; en particulier

$$\mathfrak{p}_A^{(-m-1)+} = \mathfrak{p}_E^{-m-d} + \sigma \mathfrak{p}_E^{-m-d}$$

ce qui donne, par décalage de $2m+1$:

$$p_A^{m+} = p_E^{m-d+1} + \sigma p_E^{m-d+1}.$$

Ceci montre que p_A^{m-} est d'indice $q^{2(d-1)}$ dans p_A^{m+} , et le lemme résulte des égalités

$$[p_A^m : p_A^{m-}] = [p_A^{(-m-1)+} : p_A^{-m-1}] = [p_A^{m+} : p_A^m] = [p_A^{m+} : p_A^{m-}]^{1/2}.$$

Ce lemme montre que dans l'arbre défini par le plan A sur E, le sommet défini par les réseaux (p_A^m) est à la distance $d-1$ de la géodésique que définissent E et σE .

Il résulte du lemme que, pour $m \geq 1$, on a

$$A^\times(m) = 1 + p_E^m + \sigma p_E^m + (\sigma - 1) p_E^{m-d+1} = (1 + p_E^m)(1 + (\sigma - 1) p_E^{m-d+1});$$

c'est une décomposition avec unicité de l'écriture, en produit de deux groupes $1 + p_E^m = A^\times(m) \cap E^\times$, et $H(m) = 1 + (\sigma - 1) p_E^{m-d+1}$.

5.4. Soit H le fixateur dans A^\times de la forme linéaire trace $T_{E/k}$ sur E : c'est donc le groupe affine de la droite de E formée des éléments de trace 1. Comme l'élément $u = 1 + x + \sigma y$ de A vérifie $T_{E/k} u(t) = T_{E/k} t$ pour tout $t \in E$ si et seulement si $x + y = 0$, on pose

$$h(x) = 1 + (\sigma - 1)x, \quad x \in E,$$

de sorte que $h(x)t = (1 - T_{E/k} x)t + \sigma x$ pour $T_{E/k} t = 1$; la « dérivée » $1 - T_{E/k} x$ de $h(x)$ est son déterminant, et H est donc formée des $h(x)$ pour $T_{E/k} x \neq 1$. En particulier $h(0) = 1$ et $h(1) = \sigma$.

On a les formules suivantes, pour $x, y \in E$:

$$\begin{aligned} h(x)h(y) &= h(x + y - (T_{E/k} x)y), \\ h(x)h(y) &= h(y + \sigma yx - \sigma xy)h(x) = h(\sigma yx - \sigma xy)h(y)h(x) \end{aligned}$$

et, pour

$$T_{E/k} x \neq 1, \quad h(x)^{-1} = h(-(1 - T_{E/k} x)^{-1}x).$$

LEMME. — On a la décomposition suivante, avec unicité de l'écriture

$$A^\times = E^\times H.$$

Preuve. — La forme bilinéaire sur E définie par $t, u \mapsto T_{E/k}(t^\sigma u)$ donne à l'endomorphisme $x + \sigma y \in A$ l'adjoint ${}^\sigma x + \sigma y$; cet antiautomorphisme de A envoie H sur le fixateur H_1 de la droite k de E. Comme E^\times est un espace homogène sous A, principal sous E^\times , on a $A^\times = E^\times H_1$, avec unicité de l'écriture; le lemme s'obtient alors par application de l'inverse de l'adjoint sur cette décomposition.

Le groupe $H(m)$ de 5.3 n'est autre que la trace de H sur $A^\times(m)$, et la décomposition $A^\times(m) = (1 + p_E^m)H(m)$ est celle induite par celle du lemme : $A^\times = E^\times H$.

Il résulte du lemme que l'application

$$h \in H \mapsto E^\times h E^\times$$

définit une projection sur les doubles classes

$$H(m) \backslash H/H(m) \rightarrow E^\times A^\times(m) \backslash A^\times/E^\times A^\times(m).$$

Le radical unipotent N de H est le groupe des translations de la droite affine de E formée des éléments de trace 1 : c'est donc le noyau du déterminant dans H , et l'application h définit un isomorphisme du groupe noyau de la trace sur N . C'est aussi le groupe des commutateurs de H .

Il est classique que le groupe H admette une unique classe de représentations lisses irréductibles de dimension > 1 ; on appellera ces représentations les représentations non dégénérées de H : elles ne contiennent aucun vecteur fixé par N . On en a une réalisation dans l'espace des fonctions sur la droite affine des éléments de trace 1, localement constantes, à support compact et d'intégrale nulle pour n'importe quelle mesure invariante sous l'action de N , le groupe H opérant par

$$f(t) \mapsto f(h(x)^{-1}t) = f\left(\frac{t - \sigma x}{1 - T_{E/k} x}\right).$$

Cette représentation est équivalente à ses tordues par les caractères du déterminant. On en a d'autres réalisations par induction d'un caractère non trivial quelconque de N .

Si π_E est un élément premier de E , alors $\pi_E - \sigma \pi_E$ est une base du noyau de la trace, et donc $\text{Ker } T_{E/k} \cap \mathfrak{p}_E^{m-d}$ ne dépend que de m' ; il en résulte que $N \cap H(m)$ ne dépend que de $(m+1)'' = m' + 1$. On écrit donc $N \cap H(m) = N(m')$.

La formule des commutateurs sur H montre que le groupe des commutateurs de $H(m)$ est $N(m)$. Pour qu'un caractère de $N(m')$ se prolonge en une représentation de degré 1 de $H(m)$, il faut et il suffit qu'il soit trivial sur $N(m)$, et alors son fixateur dans H contient $H(m)N$. On dira qu'un caractère de $N(m')$ est *non dégénérée* pour $H(m)$ si son fixateur est $H(m)N$: modulo N , c'est donc $\det(H(m)N) = 1 + \mathfrak{p}^{m'}$; ceci revient à dire que son conducteur est $N(m)$. On dira aussi qu'une représentation de degré 1 de $H(m)$ est non dégénérée si sa restriction à $N(m')$ est non dégénérée pour $H(m)$; cette restriction la détermine à torsion près par un caractère du déterminant sur $H(m)$. Comme $N(m) = H(2m) \cap N$ et que $H(m)/H(2m)$ est commutatif, on en déduit que les représentations non dégénérées de $H(m)$ de conducteur minimal $H(2m)$ sont données par les caractères de \mathfrak{p}_E^{m-d+1} dont le conducteur est $2m - d + 1$, par la formule

$$h(x) \mapsto \eta(x), \quad x \in \mathfrak{p}_E^{m-d+1}.$$

PROPOSITION. — *La représentation de H induite par une représentation non dégénérée de $H(m)$ est non dégénérée.*

Preuve. — (a) Soit ν un caractère de N dont le conducteur est $N(m)$: sa restriction à $N(m')$ est donc non dégénérée pour $H(m)$; les relations de commutation montrent que si $n = h(x) \in N$ et $k = h(y) \in H$ alors $nkn^{-1}k^{-1} = h((T_{E/k} y)x)$, et donc que l'application

$$n \in N, \quad k \in H(m) \mapsto \nu(nkn^{-1}k^{-1})$$

est constante sur les classes $nN(m')$, $kN(m')$, et met en dualité les deux groupes commutatifs $N/N(m')$ et $H(m)/N(m')$. On note dn et dk des mesures de Haar sur ces groupes en dualité pour cet accouplement.

(b) Soit η une représentation non dégénérée de $H(m)$; on appelle ν un prolongement en un caractère de N de la restriction de η à $N(m')$. La proposition sera démontrée si l'on prouve que la représentation de H induite de $H(m)$ par η est équivalente à la représentation de H induite de N par ν . Pour une fonction f dans l'espace de celle-ci, on pose

$$(A f)(h) = \int_{H(m)/N(m')} \eta(k) f(k^{-1}h) dk, \quad h \in H,$$

alors $A f$ est dans l'espace de la représentation induite par η , et l'opérateur A entrelace les représentations. Pour une fonction g dans l'espace de la représentation induite par η , on pose

$$(B g)(h) = \int_{N/N(m')} \overline{\nu(n)} g(nh) dn, \quad h \in H,$$

alors $B g$ est dans l'espace de la représentation induite par ν , et l'opérateur B entrelace les représentations. Le composé BA s'écrit :

$$(BA f)(h) = \int_{N/N(m')} dn \int_{H(m)/N(m')} \nu(n) \eta(k) f(k^{-1}nh) dk;$$

comme $f(k^{-1}nh) = \nu(k^{-1}nk) f(k^{-1}h)$, c'est aussi

$$\int_{N/N(m')} dn \int_{H(m)/N(m')} \nu(nkn^{-1}k^{-1}) \eta(k) f(k^{-1}h) dk,$$

et, par (a), la formule d'inversion dit que c'est la valeur à l'origine de la fonction $k \mapsto \eta(k) f(k^{-1}h)$, à savoir $f(h)$. De même, le composé AB s'écrit :

$$(AB g)(h) = \int_{H(m)/N(m')} dk \int_{N/N(m')} \overline{\eta(k)} \overline{\nu(n)} g(nkh) dn$$

qui, par le changement de variable $n \mapsto knk^{-1}$ se met sous la forme

$$\int_{H(m)/N(m')} dk \int_{N/N(m')} \nu(nkn^{-1}k^{-1}) \overline{\nu(n)} g(nh) dn$$

et, comme précédemment, ceci est la valeur à l'origine de $n \mapsto \overline{\nu(n)} g(nh)$ à savoir $g(h)$. On a bien montré que A et B sont des opérateurs d'entrelacement inverses l'un de l'autre, et la proposition est prouvée.

5.5. Pour $t \in E^\times$ et $h = h(x) \in H(m)$, on a la formule

$$th(x) = h(x') t'$$

avec $t' = t(1 + \delta(t)x)$, $x' = x(1 + \delta(t))(1 + \delta(t)x)^{-1}$, $\delta(t) = {}^\sigma t t^{-1} - 1$. Lorsque t parcourt E^\times et x parcourt \mathfrak{p}_E^{m-d+1} , alors $\delta(t)x$ parcourt \mathfrak{p}_E^m et $x' - x \in \delta(t)x + \mathfrak{p}_E^{2m-d+1}$. On en déduit qu'une représentation non dégénérée de $H(m)$ de conducteur $H(2m)$:

$$h(x) \mapsto \eta(x), \quad x \in \mathfrak{p}_E^{m-d+1},$$

et un caractère θ de E^\times définissent par

$$th(x) \mapsto \theta(t) \eta(x)$$

une représentation de degré 1 de $E^\times H(m)$ si et seulement si on a

$$\theta(1+y) \eta(y) = 1 \quad \text{pour } y \in \mathfrak{p}_E^m,$$

et, dans ce cas, cette représentation est triviale sur $1 + \mathfrak{p}_E^m \sigma$ puisque

$$1 + \sigma y = h(y(1+y)^{-1})(1+y) \in h(y)(1+y) H(2m).$$

De plus, si on a $m < d$, c'est-à-dire $m \geq 2m - d + 1$, alors η est trivial sur \mathfrak{p}_E^m et on peut prendre $\theta = 1$; si par contre on a $m \geq d$, alors le conducteur de θ est celui de η , à savoir $2m - d + 1$, et donc, par le lemme de 5.2, le caractère θ est primordial. Ceci donne le lemme suivant, où, par représentation *non dégénérée* de $E^\times A^\times(m)$ on entend représentation de degré 1 prolongeant une représentation non dégénérée de $H(m)$.

LEMME. — *Pour qu'un caractère de E^\times se prolonge en une représentation non dégénérée de $E^\times H(m)$, il faut et il suffit que :*

- (a) *si $m < d$, ce soit le relèvement d'un caractère de k^\times , et il y a alors $q^{m-1}(q-1)$ tels prolongements;*
- (b) *si $m \geq d$, ce soit le tordu d'un caractère primordial de E^\times de conducteur $2m - d + 1$, et il y a alors q^{d-1} tels prolongements.*

Le résultat important est le suivant.

THÉORÈME. — *Soit m un entier ≥ 1 . Alors, la représentation de A^\times induite par une représentation non dégénérée de $E^\times A^\times(m)$ est admissible irréductible supercuspidale, et son degré formel pour la mesure de Haar sur A^\times/k^\times qui donne à A_E/k^\times la masse 1 est $q^{m-1}(q-1)$.*

Preuve. — Cette représentation induite se restreint à H en une représentation non dégénérée, par la proposition de 5.4 et la décomposition $A^\times = E^\times H$: ceci donne l'irréductibilité; par construction les coefficients sont à support compact modulo le centre, ce qui prouve la première partie. Quant au degré formel pour la mesure indiquée, c'est l'indice du sous-groupe $E^\times A^\times(m) = E^\times H^\times(m)$ dans $A_E = E^\times \mathcal{O}_\Lambda^\times$, qui a été calculé en 5.3.

On sait que toutes les représentations supercuspidales ont été obtenues, et on connaît les équivalences entre elles [8].

6. Calculs des facteurs locaux

6.1. On commence par donner un paramétrage des représentations obtenues en 5; rappelons que m est un entier ≥ 1 , et que n'' est la partie entière de $(n+1)/2$.

LEMME. — *Les représentations non dégénérées de $E^\times H(m)$ sont les tordues par les caractères de k^\times des représentations*

$$th(x) \mapsto \theta(t) \eta(x), \quad t \in E^\times, \quad x \in \mathfrak{p}_E^{m-d+1},$$

où η est un caractère de \mathfrak{p}_E^{m-d+1} de conducteur $2m-d+1$, où,

(a) si $m < d$, θ a son conducteur $\leq m$ et relève un caractère de k^\times ;

(b) si $m \geq d$, θ est un caractère primordial de conducteur $2m-d+1$ tel que $\theta(1+t) \eta(t) = 1$ pour tout $t \in \mathfrak{p}_E^{m-d''+1}$.

Preuve. — Étant donnée une représentation non dégénérée de $E^\times H(m)$, en la tordant éventuellement par un caractère du déterminant, on peut supposer qu'elle est de la forme

$$th(x) \mapsto \theta(t) \eta(x)$$

où η est comme dans l'énoncé, et θ est un caractère de E^\times tel que (voir 5.5) : $\theta(1+t) \eta(t) = 1$ pour $t \in \mathfrak{p}_E^m$.

Si on a $m < d$, alors $a(\theta) \leq m < d$ montre que $\theta = \chi_{E/k}$ pour un caractère χ de k^\times , et inversement, est la tordue par χ de

$$th(x) \mapsto \eta'(x) = \eta(x) \chi(1 - T_{E/k} x)^{-1} = \eta(x) \chi(1 + T_{E/k} x),$$

ce qui prouve le lemme dans ce cas. Si par contre on a $m \geq d$, le lemme sera démontré si l'on trouve un caractère χ de k^\times , de conducteur au plus m , tel que, pour $t \in \mathfrak{p}_E^{m-d''+1}$, on ait

$$\theta(1+t) \eta(t) = \chi_{E/k}(1+t) \chi(1 - T_{E/k} t),$$

puisqu'alors le tordu par χ^{-1} de $th(x) \mapsto \theta(t) \eta(x)$ satisfait aux conditions du lemme; comme $a(\chi) \leq m$, on a $(T_{E/k} t)(N_{E/k} t)$ et $(T_{E/k} t)^2$ dans $\mathfrak{p}^{a(\chi)}$ pour $t \in \mathfrak{p}_E^{m-d''+1}$, et donc le second membre de l'identité voulue est $\chi(1 + N_{E/k} t)$; c'est un caractère en $t \in \mathfrak{p}_E^{m-d''+1}$, tout comme le premier membre; or, tout caractère de $\mathfrak{p}_E^{m-d''+1}$ trivial sur \mathfrak{p}_E^m est du type $t \mapsto \chi(1 + N_{E/k} t)$ pour un caractère χ de k^\times de conducteur au plus m , puisque le groupe additif engendré par les normes de $\mathfrak{p}_E^{m-d''+1}$ est $\mathfrak{p}_E^{m-d''+1}$; ceci prouve le lemme quand m est au moins d .

Dans le cas modéré ($d=1$), le caractère θ détermine alors η .

Pour $m < d$, on note π_η la représentation de A^\times induite par la représentation non dégénérée $th(x) \mapsto \eta(x)$ de $E^\times H(m)$; en général, soit $\pi_{\theta, \eta}$ la représentation de A^\times induite par la représentation $th(x) \mapsto \theta(t) \eta(x)$ de $E^\times H(m)$, où θ et η sont comme dans le lemme, et $\pi_{\theta, \eta} \otimes \chi_{A/k} = \pi_{\chi_{E/k}, \eta, \chi}$.

6.2. Le facteur $\varepsilon(\pi, \psi)$ d'une représentation π construite au n° 5 par induction depuis le sous-groupe $E^\times H(m)$ d'une représentation non dégénérée \varkappa est donné par la formule (2.3) :

$$\varepsilon(\pi, \psi) = \int_{E^\times H(m)} \psi_{A/k}(x) \varkappa(x)^{-1} \mu_{A/k}(x)^{-1/2} d_{A, \psi}.$$

Sur $E^\times H(m)$, on observe que la mesure de Haar $d_{A,\psi}$ se lit en $\mu_E(t) d_{E,\psi} t d_{E,\psi} x$ dans le paramétrage $th(x)$, $t \in E^\times$, $x \in \mathfrak{p}_E^{m-d+1}$: en effet, cette mesure est invariante par translation multiplicative à droite par $H(m)$, et les formules du début de 5.5 montrent que la mesure $\mu_E(t)^{-1} d_{E,\psi} t d_{E,\psi} x$ est invariante par multiplication à droite par $t_0 \in E^\times$, elle est donc une mesure de Haar sur le groupe $E^\times H(m)$; il en résulte que son produit par $\mu_E(t)^2$ est la restriction à $E^\times H(m)$ d'une mesure de Haar sur A ; il reste à calculer la masse de $A^\times(m) = (1 + \mathfrak{p}_E^m) H(m)$ pour vérifier que c'est bien la restriction de $d_{A,\psi}$.

On peut donc écrire, si $d_\psi h = d_{E,\psi} x$ pour $h = h(x) \in H(m)$:

$$\varepsilon(\pi, \psi) = \int_{E^\times} \Psi_{E/k}(t) \theta(t)^{-1} \mu_E(t)^{1/2} \left(\int_{H(m)} \Psi_{A/k}(t(h-1)) \eta_H(h)^{-1} \chi_{A/k}(h)^{-1} d_\psi h \right) d_{E,\psi} t$$

pour $\pi = \pi_{\theta, \eta, \chi}$, en écrivant $\eta_H(h)$ pour $\eta(x)$ si $h = h(x) \in H(m)$.

Dans l'énoncé du théorème, on a noté, comme dans le paragraphe 1.4, $G(\chi, \psi \chi_\psi)$.

THÉORÈME. — *Le facteur $\varepsilon(\pi, \psi)$ de la représentation $\pi = \pi_{\theta, \eta, \chi}$ est donné par les formules suivantes :*

$$\begin{aligned} \varepsilon(\pi, \psi) &= \mu_E(\pi_\psi)^{1/2} \Psi_{E/k}(\pi_\psi) \theta(\pi_\psi)^{-1} & \text{si } a(\chi) \leq m, \\ \varepsilon(\pi, \psi) &= \mu_E(\pi_\psi)^{1/2} \Psi_{E/k}(\pi_\psi) \theta(\pi_\psi)^{-1} G(\chi, \psi \chi_\psi)^2 & \text{si } a(\chi) > m, \end{aligned}$$

où $\chi_\psi = 0$ si $a(\chi) \leq 1$ et sinon est un élément de k^\times tel que

$$\chi(1+x) = \psi(\chi_\psi x) \quad \text{pour } x \in \mathfrak{p}^{a(\chi)'},$$

$\pi_\psi = \chi_\psi + \eta_\psi$, η_ψ étant un élément du E tel que

$$\eta(h) = \Psi_{A/k}(\eta_\psi(h-1)) \quad \text{pour } h \in H(m).$$

Preuve. — (a) On commence par sommer sur les classes $H(m)/N(m')$, sachant que $N(m')$ est le noyau du déterminant sur $H(m)$; on a les relations suivantes, pour $n \in N(m')$, $h \in H(m)$:

$$\begin{aligned} \Psi_{A/k}(t(nh-1)) &= \Psi_{A/k}(t(h-1)) \Psi_{A/k}(t(n-1)), \\ \chi_{A/k}(nh) &= \chi_{A/k}(h), \\ \eta_H(nh) &= \eta_H(n) \eta_H(h); \end{aligned}$$

on fait donc apparaître une somme portant sur les caractères de $N(m)$:

$$\int_{N(m')} \Psi_{A/k}(t(n-1)) \overline{\eta_H(n)} dn = \int_{N(m')} \Psi_{A/k}((t - \eta_\psi)(n-1)) dn$$

cette contribution sera non nulle seulement pour $t - \eta_\psi$ dans l'orthogonal des éléments de trace nulle dans \mathfrak{p}_E^{m-d+1} , relativement à $\Psi_{E/k}$, c'est-à-dire dans $k + \mathfrak{p}_E^{-m-1}$ (on a pris ψ d'ordre 0, ce qui est loisible). On écrit alors $t = \eta_\psi + x + u$, $x \in k$, $u \in \mathfrak{p}_E^{-m-1}$, ce qui donne

$\Psi_{E/k}(u(h-1))=1$ pour $h \in H(m)$, et donc la somme sur $H(m)$ se réduit à

$$\text{mes}_\psi(N(m')) \int_{H(m)/N(m')} \Psi_{A/k}(x(h-1)) \chi_{A/k}(h)^{-1} d_\psi h;$$

mais $H(m)/N(m')$ est l'image $1 + \mathfrak{p}^{m''}$ du déterminant sur $H(m)$, et donc ceci vaut

$$\text{mes}_\psi N(m') q^{-d} \int_{\mathfrak{p}^{m''}} \Psi(xy) \chi(1+y)^{-1} d_\psi y.$$

(b) Dans le cas $a(\chi) \leq m$, on intègre le caractère $y \rightarrow \Psi[(x - \chi_\psi)y]$ de $\mathfrak{p}^{m''}$: la contribution ne sera non nulle que pour $x \in \chi_\psi(1 + \mathfrak{p}^{m'})$, ce qui donne

$$\varepsilon(\pi, \psi) = \text{mes}_\psi H(m) \int \Psi_{E/k}(t) \theta(t)^{-1} \mu_E(t)^{1/2} d_{E,\psi} t$$

où la somme porte sur les $t \in \pi_\psi(1 + \mathfrak{p}^{m'}) + \mathfrak{p}_E^{-m-1}$; mais $\pi_\psi \mathfrak{p}^{m'} \subset \mathfrak{p}_E^{-m-1}$ donc on somme en fait sur $\pi_\psi(1 + \mathfrak{p}_E^m)$; or la fonction à intégrer est constante sur ce domaine vu que l'on a

$$\theta(1+v) = \eta(-v) \chi_{E/k}(1+v) = \Psi_{E/k}[(\eta_\psi + \chi_\psi)v]$$

pour $v \in \mathfrak{p}_E^m$; ceci donne la formule voulue quand $a(\chi) \leq m$.

(c) Supposons désormais $a(\chi) > m$; on a donc $a(\chi) \geq 2m''$, et l'expression $\int_{\mathfrak{p}^{m''}} \Psi(xy) \chi(1+y)^{-1} d_\psi y$ se calcule par sommation sur les classes modulo $\mathfrak{p}^{a(\chi)-m''}$, ce qui fait apparaître des sommes $\int_{\mathfrak{p}^{a(\chi)-m''}} \Psi((x - \chi_\psi)z) d_\psi z$, et permet de se limiter aux $x \in \chi_\psi(1 + \mathfrak{p}^{m''})$; écrivons $x = \chi_\psi(1+a)$, ce qui donne

$$\int_{\mathfrak{p}^{m''}/\mathfrak{p}^{a(\chi)-m''}} \Psi(xy) \chi(1+y)^{-1} = \Psi(-\chi_\psi a) \chi(1+a) \int_{\mathfrak{p}^{m''}/\mathfrak{p}^{a(\chi)-m''}} \Psi(\chi_\psi) \chi(1+y)^{-1}$$

et la dernière somme n'est autre que $G(\chi, \psi \chi_\psi)$, avec la convention précédent l'énoncé du théorème. L'intégrale en t porte seulement sur les $t = \pi_\psi + \chi_\psi x + u$, $x \in \mathfrak{p}^{m''}$, $u \in \mathfrak{p}_E^{-m-1}$; pour ces t , on a

$$\Psi_{E/k}(t) = \Psi_{E/k}(\pi_\psi) \Psi(2\chi_\psi x) \Psi_{E/k}(u)$$

$$\theta(t) = \theta(\pi_\psi) \theta\left(1 + \frac{\chi_\psi}{\pi_\psi} x + \frac{u}{\pi_\psi}\right);$$

mais $\chi_\psi/\pi_\psi \in \mathcal{O}_E^\times$, et le produit de $\chi_\psi/\pi_\psi x$ par u/π_ψ a sa valuation au moins égale à $2m'' + 2a(\chi) - m - 1$, à la fois supérieur à $a(\chi)$ et $2a(\chi) - d$, donc certainement $\geq a(\theta)$; ceci permet d'écrire :

$$\theta\left(1 + \frac{\chi_\psi}{\pi_\psi} x + \frac{u}{\pi_\psi}\right) = \theta\left(1 + \frac{\chi_\psi}{\pi_\psi} x\right) \theta\left(1 + \frac{u}{\pi_\psi}\right);$$

comme la valuation de u/π_ψ est au moins $a(\theta)''$, ce dernier terme vaut $\psi_{E/k}((\theta_\psi/\pi_\psi)u)$, où θ_ψ est l'élément suivant de E^x :

$$\theta_\psi = \eta_\psi + \chi_\psi + \chi_\psi c_{E,\chi} = \pi_\psi + \chi_\psi c_{E,\chi},$$

en notant $c_{E,\chi}$ un élément de E de valuation $a(\chi) - d$ tel que

$$\chi(1 + N_{E/k} x) = \chi(1 + T_{E/k} c_{E,\chi} x) \quad \text{pour } x \in \mathfrak{p}_E^{a(\chi)-d'} \cap \mathfrak{p}_E.$$

Comme

$$\frac{\theta_\psi}{\pi_\psi} = 1 + \frac{\chi_\psi c_{E,\chi}}{\pi_\psi} \in 1 + \mathfrak{p}_E^{a(\chi)-d},$$

on a

$$\psi_{E/k} \left(\frac{\theta_\psi}{\pi_\psi} u \right) = \psi_{E/k}(u).$$

Ceci montre qu'il n'y a pas en fait à sommer sur $u \in \mathfrak{p}_E^{-m-1}$: la fonction à intégrer n'en dépend pas. Il ne reste finalement comme sommation que la suivante, le terme $\mu_E(\pi_\psi)^{1/2} \psi_{E/k}(\pi_\psi) \theta(\pi_\psi)^{-1}$ se mettant devant :

$$\int_{\mathfrak{p}^{m''}} \psi(\chi_\psi x) \chi(1+x) \theta \left(1 + \frac{\chi_\psi}{\pi_\psi} x \right)^{-1} d_\psi x.$$

On observe alors que sur $\mathfrak{p}^{m''}$ on a

$$\theta \left(1 + \frac{\chi_\psi}{\pi_\psi} x \right) = \chi(1+x)^2;$$

en effet, vu que $2m'' \geq m - d'' + 1$, on a une contribution en η :

$$\begin{aligned} \theta \left(1 + \frac{\chi_\psi}{\pi_\psi} x \right) &= \eta \left(-\frac{\chi_\psi}{\pi_\psi} x \right) \chi_{E/k} \left(1 + \chi_\psi \pi_\psi^{-1} x \right) \\ &= \psi_{E/k} \left(\frac{\eta_\psi \chi_\psi}{\pi_\psi} x \right) \chi_{E/k} \left((1+x) \left(1 - \frac{\eta_\psi}{\chi_\psi} \frac{x}{1+x} \right) \right) \\ &= \chi(1+x)^2 \psi_{E/k} \left(\frac{\eta_\psi \chi_\psi}{\pi_\psi} x \right) \chi_{E/k} \left(1 - \frac{\eta_\psi}{\chi_\psi} \frac{x}{1+x} \right), \end{aligned}$$

mais la norme de $(\eta_\psi/\chi_\psi)(x/(1+x))$ est dans $\mathfrak{p}^{2a(\chi)-2m-1+2m''}$ contenu dans $\mathfrak{p}^{a(\chi)}$, et sa trace est dans $\mathfrak{p}^{a(\chi)-m+d''-1+m''}$ contenu dans $\mathfrak{p}^{a(\chi)''}$, donc

$$\chi_{E/k} \left(1 - \frac{\eta_\psi}{\chi_\psi} \frac{x}{1+x} \right) = \psi_{E/k} \left(\chi_\psi \frac{\eta_\psi}{\chi_\psi} \frac{x}{1+x} \right),$$

et

$$\theta \left(1 + \frac{\chi_\psi}{\pi_\psi} x \right) = \chi(1+x)^2 \psi_{E/k} \left(\frac{\chi_\psi \eta_\psi}{\pi_\psi} \frac{x^2}{1+x} \right);$$

le dernier facteur vaut $\psi(\chi_\psi(x^2/1+x) T_{E/k}(\eta_\psi/\pi_\psi))$: c'est 1 puisqu'il s'agit de la valeur de ψ sur un élément de valuation au moins

$$-a(\chi) + 2m'' + a(\chi) - m + d'' - 1 = 2m'' - m - 1 + d'' \geq 0.$$

Le terme qui reste à sommer se réduit donc à

$$\int_{\mathfrak{p}^{m''}} \psi(\chi_\psi x) \chi(1+x)^{-1} d_\psi x$$

qui fournit le facteur $G(\chi, \psi\chi_\psi)$, et prouve la formule de l'énoncé.

COROLLAIRE. — Avec les mêmes notations, on a :

- (a) $\varepsilon(\pi_\eta, \psi) = q^{m+1/2+\text{ord } \psi} \eta_H(\sigma)$;
 (b) $\varepsilon(\pi_{\theta, \eta}, \psi) = G(\theta, \psi_{E/k} \eta_\psi) \varepsilon(\theta, \psi_{E/k})$ pour $m \geq d$;
 (c) pour $a(\chi) \geq 2m+1$,

$$\varepsilon(\pi, \psi) = \varepsilon(\chi, \psi) \varepsilon(\chi^{-1} \theta, \psi).$$

Preuve. — (a) Dans ce cas, on a $\chi = \theta = 1$, et $\pi_\psi = \eta_\psi$, donc de valuation $-2m-1-2 \text{ ord } \psi$, et $\psi_{E/k}(\eta_\psi) = \eta(-1)$. $2\varepsilon \rho_E^{d-1}$; on se trouve dans le cas $m < d$, on a $2 \in \mathfrak{p}_E^{2m-d+1}$ et donc $\eta(2) = 1$, ce qui donne $\eta(-1) = \eta(1) = \eta_H(\sigma)$.

(b) On a ici $\chi = 1$ encore, et $a(\theta) = 2m-d+1$, $m \geq d$; comme $\theta(1+t) = \psi_{E/k}(\eta_\psi t)$ pour $t \in \mathfrak{p}_E^{m-d''+1}$, la formule résulte alors de celle donnant $\varepsilon(\theta, \psi_{E/k})$ (1.4).

(c) Pour $a(\chi) \geq 2m+1$, on a

$$\mu_E(\pi_\psi) = \mu_E(\chi_\psi) \mu_E(1 + \chi_\psi^{-1} \eta_\psi) = \mu(\chi_\psi)^2,$$

et donc, sachant que

$$\varepsilon(\chi, \psi) = \mu(\chi_\psi)^{1/2} \psi \chi(\chi_\psi)^{-1} G(\chi, \psi\chi_\psi),$$

on a

$$\varepsilon(\pi, \psi) = \varepsilon(\chi, \psi) \mu(\chi_\psi)^{1/2} \psi(\chi_\psi + T_{E/k} \eta_\psi) \chi(\chi_\psi) \theta(\pi_\psi)^{-1} G(\chi, \psi\chi_\psi);$$

écrivons $\theta = \theta_0 \chi_{E/k}$; on a $\theta_0 = 1$ pour $m < d$, et

$$\theta_0(1+t) = \psi(t T_{E/k} \eta_\psi) \quad \text{pour } t \in \mathfrak{p}^{m-d''+1} \text{ si } m \geq d;$$

on fait apparaître systématiquement $\chi_\psi + T_{E/k} \eta_\psi$; grâce à $a(\chi) > 2m$, on a

$$\begin{aligned} \chi(\chi_\psi) \theta(\pi_\psi)^{-1} &= \chi(\chi_\psi)^{-1} \chi_{E/k} \left(1 + \frac{\eta_\psi}{\chi_\psi}\right)^{-1} \theta_0(\pi_\psi)^{-1} \\ &= \chi(\chi_\psi)^{-1} \chi \left(1 + T_{E/k} \frac{\eta_\psi}{\chi_\psi}\right)^{-1} \theta_0(\chi_\psi)^{-1} = \chi(\chi_\psi + T_{E/k} \eta_\psi)^{-1} \theta_0(\chi_\psi + T_{E/k} \eta_\psi)^{-1} \\ &= (\chi\theta_0)(\chi_\psi + T_{E/k} \eta_\psi)^{-1}; \end{aligned}$$

enfin $G(\chi, \psi\chi_\psi) = G(\chi\theta_0, \psi\chi_\psi)$, et donc on a fait apparaître $\varepsilon(\chi\theta_0, \psi)$ dans $\varepsilon(\pi, \psi)$, ce qui donne la formule du corollaire, puisque $\chi\theta_0 = \chi^{-1} \theta$ sur k^x .

On vérifie aussi que les formules du théorème correspondent bien à celles qu'on a obtenues lorsque l'extension quadratique est modérément ramifiée. Dans ce cas, on a $d=1$, et le caractère η de $N(m')$ est déterminé par θ si $\chi=1$. Pour θ primordial, il faut voir que

$$\varepsilon(\theta, \psi_{E/k}) = \mu_E(\pi_\psi)^{1/2} \psi_{E/k}(\pi_\psi) \theta(\pi_\psi)^{-1};$$

mais alors $\pi_\psi \in \theta_\psi(1 + \mathfrak{p}_E^m)$ si $a(\theta) = 2m$, et donc on peut remplacer π_ψ par θ_ψ dans le second membre. Lorsque θ n'est plus primordial mais que $\theta\chi_{E/k}^{-1}$ l'est, on a $a(\theta) = 2a(\chi) - 1$, et comme

$$\theta(1+t) = \psi_{E/k}(\pi_\psi t) \quad \text{pour } t \in \mathfrak{p}_E^{a(\chi)} = \mathfrak{p}_E^{a(\theta)''},$$

on a

$$\varepsilon(\theta, \psi_{E/k}) = \mu_E(\pi_\psi)^{1/2} \psi_{E/k}(\pi_\psi) \theta(\pi_\psi)^{-1} G(\theta, \psi_{E/k}, \pi_\psi)$$

avec

$$G(\theta, \psi_{E/k}, \pi_\psi) = \int_{\mathfrak{p}_E^{a(\chi)-1}/\mathfrak{p}_E^{a(\chi)}} \theta(1+t)^{-1} \psi_{E/k}(\pi_\psi t);$$

comme $a(\chi) - 1 \geq a(\theta\chi_{E/k})'' = m$, on a

$$\theta(1+t)^{-1} \psi_{E/k}(\pi_\psi t) = \chi_{E/k}(1+t)^{-1} \psi_{E/k}(\chi_\psi t)$$

et donc $G(\theta, \psi_{E/k}, \pi_\psi) = G(\chi_{E/k}, \psi_{E/k}, \chi_\psi)$; mais par la formule d'induction des facteurs $\varepsilon(1.7)$ appliquée au caractère $\chi_{E/k}$ de E^\times , le second membre vaut $\lambda_{E/k}(\psi\chi_\psi)^{-1} G(\chi, \psi\chi_\psi)^2$; comme la proposition de 4.5 donnait

$$\varepsilon(\alpha_\theta, \psi) = \chi_{E/k}(\psi\chi_\psi) \varepsilon(\theta, \psi_{E/k}),$$

et que $\alpha_\theta = \pi_{\theta, \eta, \chi}$, on a bien la formule du théorème précédent

$$\varepsilon(\alpha_\theta, \psi) = \mu_E(\pi_\psi)^{1/2} \psi_{E/k}(\pi_\psi) \theta(\pi_\psi)^{-1} G(\chi, \psi\chi_\psi)^2.$$

Remarques. — (1) Le principe de la construction des représentations qui a été donné au n° 5 s'applique également lorsqu'on a affaire à l'extension quadratique non ramifiée. On introduit dans ce cas aussi le sous-groupe H fixateur de la trace $T_{E/k}$ dans le groupe A^\times des automorphismes sur k de l'extension E , et la filtration par les $H(m)$ (cf. 5.3; 5.4); à un caractère régulier θ de E^\times de conducteur relatif pair $2m$ (resp. impair > 1 , resp. 1), on associe une représentation non dégénérée de $H(m)$ — en ce sens qu'elle induit à H une représentation non dégénérée — de degré 1 (resp. q , resp. $q-1$), et on retrouve ainsi les résultats du n° 3.

(2) Pour $m'' \geq d$, la torsion par le caractère $\hat{\sigma}$ de k^\times que définit E ne modifie pas la représentation de $E^\times H(m)$ qui induit $\pi_{\theta, \eta, \chi}$; par le critère de Labesse-Langlands, cette dernière figure donc dans la série de type diédral définie par E . La correspondance est explicitée dans [8]', pour tous les cas.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] J. CASSELS et A. FROHLICH, *Algebraic Number Theory*, Academic Press, New York, 1967.
- [2] P. DELIGNE, (a) *Formes modulaires et représentations de GL (2)*; (b) *Les constantes des équations fonctionnelles des fonctions L*; *Modular Functions of One Variable II (Lecture Notes 349)*, Springer, Berlin, 1972.
- [3] P. DELIGNE et G. LUSZTIG, *Representations of Reductive Groups Over Finite Fields (Ann. of Math., vol. 103, 1976, p. 103-162)*.
- [4] I. M. GELFAND et M. I. GRAEV, *Representations of Quaternion Groups Over Locally Compact Fields and Functional Fields (Funct. Anal. Appl., vol. 2, 1968, p. 19-33)*.
- [5] P. GÉRARDIN, *Construction de séries discrètes p-adiques (Lecture Notes 462)*, Springer, Berlin, 1975.
- [5]' P. GÉRARDIN, *Cuspidal Unramified Series for Central Simple Algebras Over Local Fields, Automorphic forms, representations, and L-functions*, P.S.P.M., XXIII, I, p. 157-170; Amer. Math. Soc., 1979.
- [6] G. HENNIART, *Représentations de degré 2 de Gal ($\overline{\mathbf{Q}}_2/\mathbf{Q}_2$) (C.R. Acad. Sc., Paris, 1977)*.
- [7] H. JACQUET et R. P. LANGLANDS, *Automorphic Forms on GL (2) (Lecture Notes 114)*, Springer, Berlin, 1966.
- [8] P. KUTZKO, *On the Supercuspidal Representations of GL (2), I, II (Amer. J. Math., vol. 100, 1978, p. 43-60 et 705-716)*.
- [8]' P. KUTZKO, *The Exceptional Representations of GL (2) (à paraître)*.
- [9] R. P. LANGLANDS, *Base change for GL (2)*, Institute for Advanced Study, 1975.
- [10] J.-P. SERRE, *Corps locaux*, Hermann, Paris, 1968.
- [11] T. SHINTANI, *On Certain Square Integrable Irreducible Unitary Representations of Some p-Adic Linear Groups (J. Math. Soc. Japan, vol. 20, 1968, p. 522-565)*.
- [12] A. WEIL, *Basic Number Theory*, 2nd edition, Springer, 1973.

(Manuscrit reçu le 19 octobre 1979.)

Paul GÉRARDIN,
U.E.R. de Mathématique,
Université Paris-VII, 2, place Jussieu,
75221 Paris Cedex 05.

Philip KUTZKO,
Department of Mathematics,
The University of Iowa, Iowa
City, Iowa 52242, U.S.A.