Annales scientifiques de l'É.N.S.

Jürgen Bingener

Darstellbarkeitskriterien für analytische Funktoren

Annales scientifiques de l'É.N.S. 4e série, tome 13, nº 3 (1980), p. 317-347

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1980_4_13_3_317_0>

Ann. scient. Éc. Norm. Sup.
4e série, t. 13, 1980, p. 317 à 347.

DARSTELLBARKEITSKRITERIEN FÜR ANALYTISCHE FUNKTOREN

VON JÜRGEN BINGENER

INHALT

EINLEITUNG

In [2] hat M. Artin gezeigt, daβ man in der algebraischen Geometrie formale Deformationen eines Funktors unter relativ schwachen Voraussetzungen algebraisieren kann. Aus diesem Resultat konnte er sehr allgemeine Darstellbarkeitskriterien für Funktoren ableiten, mit denen dann beispielsweise die Existenz von Hilbertschen und Picardschen Modulräumen nachgewiesen werden konnte.

Es war das Bestreben des Verfassers, diese Resultate in den analytischen Kontext zu übertragen. Daβ dies in der Tat möglich ist, wird in der vorliegenden Arbeit gezeigt. Als entscheidend erwies sich dabei im Grunde nur, die bei Artin getrennt auftretenden Bedingungen über induktive und projektive Limiten durch eine einzige zu ersetzen.

Daβ die Ergebnisse von Artin im globalen algebraischen Fall so überaus wirkungsvoll sind, hängt auch damit zusammen, daβ man dort den Grothendieckschen Existenzsatz zur Verfügung hat. Es ist daher von Bedeutung zu wissen, inwieweit der letztere auch im analytischen Fall gilt. Wir zeigen unter Verwendung der in [26] bewiesenen Existenz verseller Deformationen kohärenter Moduln, daβ der Existenzsatz auch im analytischen Fall richtig bleibt, falls man sich auf Moduln beschränkt, welche flach über der Basis sind. Ein elementarerer Beweis wäre äuβerst wünschenswert.

Als eine erste Anwendung betrachten wir den *Picardschen Funktor* $\mathrm{Pic}_{X/S}$ für eine holomorphe Abbildung $X \to S$ und beweisen den folgenden Satz :

Ist $X \xrightarrow{f} S$ *eigentlich und flach und überdies kohomologisch flach in der Dimension* 0, *so wird* $\mathrm{Pic}_{X/S}$ *durch einen (nicht notwendig separierten) komplexen Raum über* S *repräsentiert, den Picardschen Modulraum von f.*

Dieses Ergebnis löst eine Vermutung von A. Grothendieck aus dem Jahre 1961, vgl. [15], Exp. 16.3. Ein naheliegender Ansatz zum Beweis ist es, sich die Exponentialsequenz zunutze zu machen. Ist f topologisch lokaltrivial und darüberhinaus kohomologisch flach in der Dimension 1, so führt dieser Ansatz direkt zum Ziel, wie Grothendieck in *loc. cit.* zeigte. Insbesondere war damit bewiesen, daβ Pic_X für jeden kompakten komplexen Raum X darstellbar ist. Im allgemeinen Fall jedoch versagt diese Methode, da man Schwierigkeiten beim Übergang zum Quotienten hat.

Wir zeigen dieses Resultat, indem wir die Voraussetzungen unseres Darstellbarkeitskriteriums verifizieren. Als entscheidend erweist sich dabei wieder die Exponentialsequenz ! Zum Beweis der Darstellbarkeit von $\mathrm{Pic}_{X/S}$ benötigt man also, abgesehen von dem Grauertschen Kohärenzsatz und dem Satz von M. Artin über die Lösungen analytischer Gleichungen, keine Konvergenzuntersuchungen. Wichtig beim Beweis ist auβerdem der Satz von der Offenheit der Versalität, der in [6] bewiesen wird.

Als weitere Anwendung geben wir einen *einfachen neuen Beweis des Satzes von Douady und Pourcin über die Darstellbarkeit des Hilbertschen Funktors* $H_{X/S}$ *einer separierten holomorphen Abbildung* $X \to S$, *der ohne die Technik der banachanalytischen Räume auskommt*. Dieser Beweis verwendet die Tatsache, daβ H_X stets konvergente (formal) verselle Deformationen besitzt, die von Jobst in [17] mit der Potenzreihenmethode gezeigt wurde.

Ferner betrachten wir Deformationen von Kohomologieklassen und beweisen den folgenden Satz : *Ist* $X \to (S, s)$ *ein Keim einer eigentlichen holomorphen Abbildung und* $\mathscr{F}$ *ein* S-*flacher kohärenter* $\mathscr{O}_X$-*Modul, so besitzt jede Kohomologieklasse* $a_0 \in H^p(X_s, \mathscr{F}_s)$ *eine konvergente semiuniverselle Deformation.* Man kann die Deformationen von Kohomologieklassen mit den Deformationen von kohärenten Moduln und von Räumen koppeln (in naheliegender Weise). *Aus dem eben erwähnten Resultat folgert man leicht, daβ auch für solche gekoppelten Deformationen stets verselle Objekte existieren.* Die Anregung zur Betrachtung derartiger Situationen verdanke ich G. Trautmann.

Die *Bezeichnungen* und *Konventionen* sind wie in [6]. So brauchen komplexe Räume nicht notwendig separiert zu sein. Ist S ein komplexer Raum und $\mathscr{M}$ ein kohärenter $\mathscr{O}_S$-Modul, so sei $S[\mathscr{M}]$ die Idealisierung von S durch $\mathscr{M}$. Mit (An/S) bezeichnen wir die Kategorie der komplexen Räume über S. Ist F ein Gruppoid über (An/S), a ein Objekt von F(T) und $g : Z \to T$ eine holomorphe S-Abbildung, so sei $a_z = g^*(a)$ das Urbild von a

unter g. Ist g speziell die kanonische Injektion eines reduzierten Punktes $t \in \mathrm{T}$, so schreiben wir $a(t)$ anstelle von $a_{\{t\}}$. Die Begriffe Versalität, Semiuniversalität, ..., bei Gruppoiden und Funktoren werden wie in [6] verwendet. Objekte einer Kategorie und die zugehörigen Funktoren bezeichnen wir in der Regel mit demselben Symbol.

KAPITEL I

1. Aufbereitungen von Moduln

In diesem Paragraphen betrachten wir Aufbereitungen von Moduln. Diese lassen sich nach M. Artin dazu verwenden, um die Injektivität gewisser Ringhomomorphismen sicherzustellen. Das erhaltene Resultat [Satz (1.6)] ist lediglich eine explizite Formulierung dessen, was implizit in [2] enthalten ist. Weil die diesbezüglichen Beweise in *loc. cit.* sehr knapp gehalten sind (vgl. auch [3], Appendix), haben wir uns dazu entschlossen, den Beweis für diesen wichtigen Satz in aller Ausführlichkeit auszuführen.

Im folgenden sei k ein Körper und $\mathrm{P} := k\langle x_1, \ldots, x_n\rangle$ die Henselisierung des Polynomringes $k[x_1, \ldots, x_n]$ bezüglich des kanonischen maximalen Ideals. Ist N ein P-Modul, so setzen wir abkürzend $\mathrm{N}_\nu := \mathrm{N}/(x_1, \ldots, x_\nu)\,\mathrm{N}$ für $0 \leqq \nu \leqq n$.

Sei $l=(l_0, \ldots, l_n) \in \mathbb{N}^{n+1}$. Ist A eine P-Algebra und M ein endlicher A-Modul, so ist eine *Aufbereitung vom Typ l von* M ein System von A-Homomorphismen

$$\mathrm{A}_\nu^{l_\nu} \underset{v_\nu}{\overset{u_\nu}{\rightleftarrows}} \mathrm{M}_\nu$$

mit

$$u_\nu \circ v_\nu = x_{\nu+1}.\mathrm{id}_{\mathrm{M}_\nu}, \qquad v_\nu \circ u_\nu = x_{\nu+1}.\mathrm{id}\, \mathrm{A}_\nu^{l_\nu}$$

für $0 \leqq \nu \leqq n$. Hierbei haben wir $x_{n+1} := 1$ gesetzt.

In naheliegender Weise erklärt man den Begriff des Morphismus von A-Moduln mit Aufbereitungen desselben Typs. Ist $\mathrm{A} \to \mathrm{A}'$ ein P-Algebrahomomorphismus und M ein aufbereiteter A-Modul, so trägt der A'-Modul $\mathrm{M} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{A}'$ in natürlicher Weise eine Aufbereitung desselben Typs. — Über die Existenz von Aufbereitungen gibt das anschließende Lemma Auskunft.

(1.1) Lemma. — *Seien* $\mathrm{M}^{(i)}$, $1 \leqq i \leqq r$, *endliche Moduln über* $k\,[y_1, \ldots, y_n]$. *Dann gibt es ein Parametersystem* $x_1, \ldots, x_n$ *in* $k\,[y_1, \ldots, y_n]$ *derart, daß jedes* $\mathrm{M}^{(i)}$, *aufgefaßt als Modul über* $\hat{\mathrm{P}} = k\,[x_1, \ldots, x_n]$, *eine Aufbereitung besitzt.*

Dies ist ein Spezialfall von [2], Proposition 2.2.

(1.2). — *Sei* $\mathrm{M} \neq 0$ *ein endlicher* $\hat{\mathrm{P}}$-*Modul mit einer Aufbereitung vom Typ* $l=(l_0, \ldots, l_n)$ *und* μ *die kleinste Zahl mit* $l_\mu \neq 0$. *Dann ist*

$$\dim_{\hat{\mathrm{P}}}(\mathrm{M}) = n - \mu.$$

Beweis. — Ist $l_0 = \ldots = l_{\nu-1} = 0$, so folgt sukzessive $x_1 \mathrm{M} = 0, \ldots, (x_1, \ldots, x_\nu)\mathrm{M} = 0$, d.h. also $\mathrm{M} = \mathrm{M}_\nu$. Weil $\mathrm{Kokern}(u_\mu)$ von $x_{\mu+1}$ annulliert wird, gilt

$$\dim_{\hat{\mathrm{P}}}(\mathrm{Kokern}\,(u_\mu)) < n - \mu.$$

Aus der exakten Sequenz

$$0 \to \hat{\mathrm{P}}_\mu^{l_\mu} \xrightarrow{u_\mu} \mathrm{M}_\nu \to \mathrm{Kokern}\,(u_\mu) \to 0$$

folgt daher wegen $\dim_{\hat{\mathrm{P}}} (\hat{\mathrm{P}}_\mu^{l_\mu}) = n - \mu$ die Behauptung.—

Seien A eine endliche $\hat{\mathrm{P}}$-Algebra und M ein endlicher A-Modul. Wir setzen dann $\mathrm{I}_\mathrm{A}^{-1}(\mathrm{M}) := 0$ und

$$\mathrm{I}_\mathrm{A}^\nu (\mathrm{M}) := \{ m \in \mathrm{M} : \dim_\mathrm{A} (\mathrm{A}.m) \leqq \nu \}$$

für $0 \leqq \nu \leqq n$. Offenbar ist $\mathrm{I}_\mathrm{A}^\nu(\mathrm{M})$ der größte Untermodul M′ von M mit $\dim_\mathrm{A} (\mathrm{M}') \leqq \nu$. Es ist

$$0 = \mathrm{I}_\mathrm{A}^{-1}(\mathrm{M}) \subseteqq \ldots \subseteqq \mathrm{I}_\mathrm{A}^\nu(\mathrm{M}) \subseteqq \mathrm{I}_\mathrm{A}^{\nu+1}(\mathrm{M}) \subseteqq \ldots \subseteqq \mathrm{I}_\mathrm{A}^n(\mathrm{M}) = \mathrm{M}.$$

Ist $\mathrm{A} \to \mathrm{A}'$ ein endlicher Homomorphismus von endlichen $\hat{\mathrm{P}}$-Algebren und M′ ein endlicher A′-Modul, so gilt $\mathrm{I}_\mathrm{A}^\nu(\mathrm{M}') = \mathrm{I}_{\mathrm{A}'}^\nu(\mathrm{M}')$ für $-1 \leqq \nu \leqq n$. Für einen endlichen $\hat{\mathrm{P}}$-Modul M setzen wir $\mathrm{I}^\nu(\mathrm{M}) := \mathrm{I}_{\hat{\mathrm{P}}}^\nu(\mathrm{M})$.

(1.3) Lemma. — *Sei* M *ein endlicher* $\hat{\mathrm{P}}$*-Modul mit einer Aufbereitung. Dann sind die kanonischen Abbildungen*

$$\mathrm{I}^{n-\nu}(\mathrm{M}) \to \mathrm{M}_\nu = \mathrm{M}/(x_1, \ldots, x_\nu)\mathrm{M}, \qquad 1 \leqq \nu \leqq n,$$

injektiv. Insbesondere ist $\mathrm{I}^{n-\nu}(\mathrm{M})$ *ein endlicher* $\hat{\mathrm{P}}_\nu$*-Modul.*

Beweis. — Es ist $\mathrm{I}^{n-\nu-1}(\hat{\mathrm{P}}_\nu^{l_\nu}) = 0$ für alle ν. Weil $x_1 \mathrm{M}$ im Bild des injektiven Homomorphismus u_0 liegt, ist $\mathrm{I}^{n-1}(\mathrm{M}) \cap x_1 \mathrm{M} = 0$. Daher ist $\mathrm{I}^{n-1}(\mathrm{M}) \to \mathrm{M}_1$ injektiv. So fortfahrend erhalten wir die Behauptung.
Wir benötigen ferner :

(1.4) Lemma. — *Seien* A *eine endliche* $\hat{\mathrm{P}}$*-Algebra mit Strukturhomomorphismus* $\alpha : \hat{\mathrm{P}} \to \mathrm{A}$, s *eine Zahl mit* $0 \leqq s < n$ *und* M *ein endlicher* A*-Modul mit* $(x_1, \ldots, x_s)\mathrm{M} = 0$. *Ferner sei* $\hat{\mathrm{P}}_s := k [x_{s+1}, \ldots, x_n]$. *Sei* $\beta : \hat{\mathrm{P}} \to \mathrm{A}$ *ein k-Algebrahomomorphismus mit*

$$\alpha \equiv \beta \bmod (\alpha(x_1), \ldots, \alpha(x_n))^{\mathrm{N}+1}\mathrm{A}$$

für ein $\mathrm{N} \in \mathbb{N}_+$. *Dann ist* $\mathrm{M}_{[\beta]}$ *ein endlicher* $\hat{\mathrm{P}}_s$*-Modul und die* $\hat{\mathrm{P}}_s$*-Moduln* $\mathrm{M}_{[\beta]}/\beta(\mathfrak{m}_{\hat{\mathrm{P}}_s})^\mathrm{N}\mathrm{M}_{[\beta]}$ *und* $\mathrm{M}_{[\alpha]}/\alpha(\mathfrak{m}_{\hat{\mathrm{P}}_s})^\mathrm{N}\mathrm{M}_{[\alpha]}$ *sind kanonisch isomorph.*

Beweis. — In der Aussage bezeichnet $\mathrm{G}_{[\alpha]}$ bzw. $\mathrm{G}_{[\beta]}$ für einen A-Modul G die Gruppe G, versehen mit der durch α bzw. β definierten $\hat{\mathrm{P}}$-Modulstruktur. Offenbar können wir ohne Einschränkung $s = 0$, d.h. $\hat{\mathrm{P}}_s = \hat{\mathrm{P}}$ annehmen. Wegen $\alpha(\mathfrak{m}_{\hat{\mathrm{P}}})^\mathrm{N}\mathrm{A} = \beta(\mathfrak{m}_{\hat{\mathrm{P}}})^\mathrm{N}\mathrm{A} + \alpha(\mathfrak{m}_{\hat{\mathrm{P}}})^{\mathrm{N}+1}\mathrm{A}$ gilt $\beta(\mathfrak{m}_{\hat{\mathrm{P}}})^\mathrm{N}\mathrm{A} = \alpha(\mathfrak{m}_{\hat{\mathrm{P}}})^\mathrm{N}\mathrm{A}$ nach dem Lemma von Nakayama. Weil $\mathrm{N} \geqq 1$ ist, ist $\mathrm{A}_{[\beta]}$ mithin eine endliche $\hat{\mathrm{P}}$-Algebra und $\mathrm{M}_{[\beta]}$ ein endlicher $\hat{\mathrm{P}}$-Modul. Hieraus folgt die Behauptung.

(1.5). — Sei nun $\bar{A}$ eine endliche lokale $\hat{P}$-Algebra derart, daß die $\hat{P}$-Moduln $\bar{A}$ und $I^{\nu}(\bar{A})$, $0 \leqq \nu \leqq n$, mit einer Aufbereitung versehen sind. Für eine henselsche lokale noethersche P-Algebra P′ betrachten wir Tupel

$$(A', J^{\nu} \to A', 0 \leqq \nu \leqq n),$$

wobei A′ eine endliche aufbereitete P′-Algebra mit $l_{\mu}(A') = l_{\mu}(\bar{A})$ ist, $J^{\nu} \to A'$ ein Homomorphismus von endlichen A′-Moduln ist und jedes J^{ν} als P′-Modul eine Aufbereitung mit $l_{\mu}(J^{\nu}) = l_{\mu}(I^{\nu}(\bar{A}))$ trägt. Diese Tupel bilden in naheliegender Weise eine Kategorie G (P′). Jeder Homomorphismus $P' \to P''$ von solchen Algebren gibt Anlaß zu einem Funktor $G(P') \to G(P'')$.

Es sei $\bar{G}(P')$ die Menge der Isomorphieklassen der Objekte von G (P′). Dann ist $\bar{G}$ ein kovarianter mengenwertiger Funktor auf der Kategorie der henselschen lokalen noetherschen P-Algebren. Offenbar ist $\bar{G}$ *limeserhaltend*, d. h. ist $P^{(i)}$, $i \in I$, ein induktives System von solchen Algebren derart, daß $\varinjlim P^{(i)}$ noethersch ist, so ist die kanonische Abbildung

$$\varinjlim_{i} \bar{G}(P^{(i)}) \to \bar{G}(\varinjlim_{i} P^{(i)})$$

bijektiv. Ferner ist die natürliche Abbildung

$$\bar{G}(P') \to \varprojlim_{n} \bar{G}(P'/\mathfrak{m}_{P'}^{n+1})$$

surjektiv, wenn P′ eine *komplette* P-Algebra ist. Das folgende wichtige Resultat zeigt, daß man die Injektivität von Ringhomomorphismen in gewissen Fällen unter Verwendung von Aufbereitungen sicherstellen kann.

(1.6) Satz (M. Artin). — *Es gibt eine Zahl* $N \in \mathbb{N}_{+}$ *mit folgender Eigenschaft: Ist* $(B, J^{\nu} \to B) \in G(\hat{P})$ *und* $\psi : \bar{A} \to B$ *ein Homomorphismus von k-Algebren, welcher einen Isomorphismus zwischen den Bildern von* $(\bar{A}, I^{\nu}(\bar{A}) \xrightarrow{\text{kan.}} \bar{A})$ *und* $(B, J^{\nu} \to B)$ *in* $G(\hat{P}/\mathfrak{m}_{\hat{P}}^{N+1})$ *induziert, so ist* ψ *ein Isomorphismus.*

Beweis. — Wegen $N \geqq 1$ ist ψ in jedem Falle surjektiv. Sei $K := \operatorname{Kern}(\psi)$ und nehmen wir $K \neq 0$ an. Es gelte

$$K \subseteqq I^{n-\nu}(\bar{A}), \qquad K \nsubseteqq I^{n-\nu-1}(\bar{A})$$

mit einem $\nu \geqq 0$. Es ist $I^{\mu}(\bar{A})$ die Menge aller $a \in \bar{A}$ mit $\dim_{\bar{A}}(\operatorname{Supp}(a)) \leqq \mu$. Insbesondere ist $I^{\mu}(\bar{A})$ unabhängig von der $\hat{P}$-Algebrastruktur von $\bar{A}$ definiert. Analoges gilt für B. Sei $a \in \bar{A}$ mit $\psi(a) \in I^{n-\nu}(B)$. Dann liegt der Träger $\operatorname{Supp}(a)$ von a in der

Vereinigung von $\operatorname{Supp}(\psi(a))$ mit $\operatorname{Supp}(K)$, und somit ist $a \in I^{n-\nu}(\bar{A})$ wegen $K \subseteqq I^{n-\nu}(\bar{A})$. Die Sequenz

$$(1.7) \qquad 0 \to K \to I^{n-\nu}(\bar{A}) \to I^{n-\nu}(B) \to 0$$

von k-Vektorräumen ist also exakt.

Sei $x_i^{(1)}$ das Bild von x_i unter dem Strukturhomomorphismus $\hat{P} \to \bar{A}$, $1 \leqq i \leqq n$. Weil ψ surjektiv ist, findet man Elemente $x_i^{(2)} \in \bar{A}$, so daß $\psi(x_i^{(2)})$ gleich dem Bild von x_i unter dem Strukturhomomorphismus $\hat{P} \to B$ ist. Es ist $x_i^{(1)} \equiv x_i^{(2)}$ modulo $\mathfrak{m}_{\hat{P}}^{N+1} \bar{A}$. Durch die $x_i^{(2)}$ wird auf $\bar{A}$ eine neue $\hat{P}$-Algebrastruktur definiert, die wir mit $\bar{A}^{(2)}$ bezeichnen wollen. Dann ist auch $\bar{A}^{(2)}$ eine endliche $\hat{P}$-Algebra, vgl. (1.4). Ferner ist $\psi : \bar{A}^{(2)} \to B$ ein Homomorphismus von $\hat{P}$-Algebren. Wegen (1.3) und (1.7) ist

$$(1.8) \qquad 0 \to K^{(2)} \to I^{n-\nu}(\bar{A})^{(2)} \to I^{n-\nu}(B) \to 0$$

eine exakte Sequenz von endlichen Moduln über $D := \hat{P}_\nu$, vgl. (1.4). Hierbei bezeichne $M^{(2)}$ für einen $\bar{A}$-Modul M den zugehörigen $A^{(2)}$-Modul. Wäre $\operatorname{Rang}_D(K^{(2)}) = 0$, so folgte $K^{(2)} \subseteqq I^{n-\nu-1}(\bar{A})$, im Widerspruch zur Wahl von ν. Daher gilt

$$\operatorname{Rang}_D(I^{n-\nu}(B)) < \operatorname{Rang}_D(I^{n-\nu}(\bar{A})^{(2)}).$$

Aus dem anschließenden Lemma (1.12), angewandt auf $A = D$ und $M = I^{n-\nu}(\bar{A})^{(1)}$, folgt : es gibt ein $c \in \mathbb{N}$ derart, daß

$$\operatorname{Rang}_D(I^{n-\nu}(\bar{A})^{(2)}) \leqq \operatorname{Rang}_D(I^{n-\nu}(\bar{A}))$$

für $N \geqq c$ gilt. Insgesamt ist

$$(1.9) \qquad \operatorname{Rang}_D(I^{n-\nu}(B)) < \operatorname{Rang}_D(I^{n-\nu}(\bar{A})).$$

Weil J^μ eine Aufbereitung von demselben Typ wie $I^\mu(\bar{A})$ hat und $\dim_{\hat{P}}(I^\mu(\bar{A})) \leqq \mu$ gilt, folgt aus (1.2), daß auch $\dim_{\hat{P}}(J^\mu) \leqq \mu$ ist. Daher gilt $\operatorname{Bild}(J^\mu \to B) \subseteqq I^\mu(B)$ für alle μ.

Die Zahl N sei überdies so groß gewählt, daß $\mathfrak{m}_{\hat{P}}^N \bar{A} \cap I^{n-\nu}(\bar{A})$ in $\mathfrak{m}_{\hat{P}} I^{n-\nu}(\bar{A})$ liegt. Wir behaupten, daß dann

$$(1.10) \qquad \operatorname{Bild}(J^{n-\nu} \xrightarrow{\alpha} B) = I^{n-\nu}(B)$$

gilt. Nach dem oben Bemerkten ist die linke Seite in der rechten enthalten. Zum Nachweis der umgekehrten Inklusion setzen wir abkürzend $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_{\hat{P}}$ und betrachten das folgende kanonische kommutative Diagramm mit exakten Zeilen

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 \to & \mathfrak{m}^N \bar{A} \cap I^{n-\nu}(\bar{A})/\mathfrak{m}^N I^{n-\nu}(\bar{A}) & \to & I^{n-\nu}(\bar{A}) \otimes \hat{P}/\mathfrak{m}^N & \to & \bar{A} \otimes \hat{P}/\mathfrak{m}^N & \to 0 \\
& \downarrow \psi_1 & & \downarrow \psi_2 & & \downarrow \psi_3 & \\
0 \to & \mathfrak{m}^N B \cap I^{n-\nu}(B)/\mathfrak{m}^N I^{n-\nu}(B) & \to & I^{n-\nu}(B) \otimes \hat{P}/\mathfrak{m}^N & \to & B \otimes \hat{P}/\mathfrak{m}^N & \to 0,
\end{array}$$

in dem die Abbildungen ψ_i von ψ induziert werden und $\hat{P}$-linear sind. Weil ψ_2 nach (1.8) surjektiv ist, gilt dies auch für ψ_1 und es folgt aufgrund unserer Wahl von N, daß $\mathfrak{m}^N B \cap I^{n-\nu}(B)$ in $\mathfrak{m}\, I^{n-\nu}(B)$ enthalten ist. Die von α induzierte Abbildung von $J^{n-\nu}$ in $I^{n-\nu}(B)/\mathfrak{m}^N B \cap I^{n-\nu}(B)$ ist offenbar surjektiv. Die Beziehung (1.10) ergibt sich nun aus dem Lemma von Nakayama.

Weil $\bar{A}$ und B eine Aufbereitung desselben Typs haben, gilt

$$\mathrm{Rang}_{\hat{P}}(\bar{A}) = \mathrm{Rang}_{\hat{P}}(B).$$

Wegen (1.9) ist daher notwendig $\nu > 0$. Wir betrachten die B-lineare Abbildung

$$J^{n-\nu} \xrightarrow{\alpha'} I^{n-\nu}(B),$$

die nach (1.10) surjektiv ist. Weil $J^{n-\nu}$ und $I^{n-\nu}(\bar{A})$ eine Aufbereitung desselben Typs besitzen, haben sie als $\hat{P}$-Moduln denselben Rang. Wäre $\alpha' \otimes_{\hat{P}} Q(\hat{P})$ injektiv, so ergäbe sich ein Widerspruch zu (1.9). Also ist $\alpha' \otimes Q(\hat{P})$ nicht injektiv. Wir zeigen nun andererseits, daß die von α induzierte Abbildung

$$(1.11) \qquad J^{n-\nu} \xrightarrow{\varepsilon'_\nu} B_\nu = B/(x_1, \ldots, x_\nu)\, B$$

auf $D(x_{\nu+1})$ injektiv ist. Dies ergibt dann einen endgültigen Widerspruch. Um zu beweisen, daß $(\varepsilon'_\nu)_{x_{\nu+1}}$ injektiv ist, genügt es zu zeigen, daß der Homomorphismus

$$\varphi'_\nu := v_\nu(B) \circ \varepsilon'_\nu \circ u_\nu(J^{n-\nu}) : \hat{P}^{l_\nu}_\nu \to \hat{P}^{l'_\nu}_\nu$$

injektiv ist; hierbei ist $l_\nu := l_\nu(I^{n-\nu}(\bar{A})) = l_\nu(J^{n-\nu})$ und $l'_\nu := l_\nu(B)$. Die Abbildung φ'_ν ist modulo $\mathfrak{m}^{N+1}$ kongruent zu

$$\varphi_\nu := v_\nu(\bar{A}) \circ \varepsilon_\nu \circ u_\nu(I^{n-\nu}(\bar{A})),$$

falls ε_ν die kanonische Injektion $I^{n-\nu}(\bar{A}) \to \bar{A}$ bezeichnet. Weil ε_ν injektiv ist, gilt dies auch für φ_ν, wie man leicht einsieht. Nun gilt bekanntlich ganz allgemein : sind M und M′ endliche Moduln über einem lokalen noetherschen Ring A, so ist die Menge der injektiven Homomorphismen offen in $\mathrm{Hom}_A(M, M')$. Ist daher die Zahl N hinreichend groß, so ist φ'_ν injektiv!

Im Beweis von (1.6) haben wir die folgende Aussage verwendet.

(1.12) LEMMA. — *Seien* A *ein lokaler noetherscher Integritätsring und* M *ein endlicher* A-*Modul. Dann gibt es eine Zahl* $c \in \mathbb{N}$ *mit folgender Eigenschaft :*

Ist M′ *ein weiterer endlicher* A-*Modul mit* $M'/\mathfrak{m}_A^c M' \cong M/\mathfrak{m}_A^c M$, *so gilt* $\mathrm{Rang}_A(M') \leqq \mathrm{Rang}_A(M)$.

Beweis. — Für einen endlichen A-Modul N bezeichne $\mathfrak{f}_i(N)$ das i-te Fitting-Ideal von N. Dann ist $\mathrm{Rang}_A(N)$ die kleinste Zahl i mit $\mathfrak{f}_i(N) \neq 0$. Sei $s := \mathrm{Rang}_A(M)$. Nach dem Krullschen Durchschnittssatz gibt es ein $c \in \mathbb{N}$ mit $\mathfrak{f}_s(M) \nsubseteq \mathfrak{m}_A^c$. Sei M′ ein endlicher Modul wie in der Aussage. Dann ist $\mathfrak{f}_s(M') \equiv \mathfrak{f}_s(M)$ modulo $\mathfrak{m}_A^c$, woraus $\mathfrak{f}_s(M') \neq 0$ folgt. Es ist also $\mathrm{Rang}_A(M') \leqq s = \mathrm{Rang}_A(M)$.

2. Ein Kriterium für die Existenz verseller Deformationen

Für eine konvergente analytische $\mathbb{C}$-Algebra Λ bezeichne $\mathscr{C}_\Lambda$ bzw. $\hat{\mathscr{C}}_\Lambda$ die Kategorie der konvergenten bzw. kompletten analytischen Λ-Algebren. Wir setzen $\mathscr{C} := \mathscr{C}_\mathbb{C}$ und $\hat{\mathscr{C}} = \hat{\mathscr{C}}_\mathbb{C}$. Sei F ein (kovarianter) mengenwertiger Funktor auf $\mathscr{C}_\Lambda$. Setzen wir für A aus $\hat{\mathscr{C}}_\Lambda$:

$$\hat{F}(A) := \varprojlim_n F(A/\mathfrak{m}_A^{n+1}),$$

so ist $\hat{F}$ ein ebensolcher Funktor auf $\hat{\mathscr{C}}_\Lambda$. Für jedes $A \in \mathscr{C}_\Lambda$ hat man eine natürliche Abbildung $F(A) \to \hat{F}(\hat{A})$, $a \mapsto \hat{a}$, welche funktoriell in A ist.

Jede Algebra R aus $\mathscr{C}_\Lambda$ gibt Anlaβ zu einem Funktor auf $\mathscr{C}_\Lambda$, den wir wieder mit R bezeichnen. Es ist also $R(A) = \mathrm{Hom}_\Lambda(R, A)$ für $A \in \mathscr{C}_\Lambda$. Die Funktormorphismen von R in einen Funktor F entsprechen umkehrbar eindeutig den Elementen aus F (R). Analog definiert jede Algebra R aus $\hat{\mathscr{C}}_\Lambda$ einen Funktor auf $\hat{\mathscr{C}}_\Lambda$.

Sei F ein Funktor auf $\mathscr{C}_\Lambda$ und a_0 ein Element aus $F(k_\Lambda)$. Dann sei F_{a_0} der Unterfunktor von F, für den $F_{a_0}(A)$ aus allen über a_0 liegenden Elementen von F (A) besteht.

Ein Paar (a, A) mit $a \in F_{a_0}(A)$ heiβt *konvergente formal verselle* (bzw. *semiuniverselle* bzw. *universelle*) *Deformation* von $a_0 \in F(k_\Lambda)$, wenn der Funktormorphismus $a : A \to F_{a_0}$ formal glatt ist (bzw. formal glatt ist and für $\mathbb{C}[\varepsilon]$ bijektiv ist bzw. für artinsche Algebren bijektiv ist). Entsprechend nennen wir ein Paar $(\bar{a}, \bar{A})$ mit $\bar{a} \in \hat{F}_{a_0}(\bar{A})$ eine *formale formal verselle* (bzw. *semiuniverselle* bzw. *universelle*) *Deformation* von a_0, wenn $\bar{a} : A \to \hat{F}_{a_0}$ formal glatt ist (bzw. formal glatt ist und für $\mathbb{C}[\varepsilon]$ bijektiv ist bzw. für artinsche Algebren bijektiv ist). Dabei heiβt allgemein ein Morphismus $G \to H$ von Funktoren auf $\mathscr{C}_\Lambda$ bzw. $\hat{\mathscr{C}}_\Lambda$ formal glatt, wenn die Abbildung

$$G(B') \to G(B) \times_{H(B)} H(B')$$

surjektiv ist für jede Surjektion $B' \to B$ von artinschen Algebren aus $\mathscr{C}_\Lambda$ bzw. $\hat{\mathscr{C}}_\Lambda$. Ein Paar (a, A) mit $a \in F_{a_0}(A)$ ist offenbar genau dann eine konvergente formal verselle (bzw. semiuniverselle bzw. universelle) Deformation von a_0, wenn $(\hat{a}, \hat{A})$ die analoge Eigenschaft hat.

Sei F ein Funktor auf $\mathscr{C}_\Lambda$. Ist $A \in \hat{\mathscr{C}}_\Lambda$ und $A = \varinjlim A^{(i)}$ mit einem induktiven System $A^{(i)}$, $i \in I$, konvergenter analytischer Λ-Algebren, so haben wir eine kanonische Abbildung

$$\varinjlim_{i \in I} F(A^{(i)}) \to \hat{F}(A). \tag{2.1}$$

(2.2) Definition. — F *erfüllt die Bedingung* (L1) (*bzw.* (L2) *bzw.* (L3)), *wenn die Abbildung* (2.1) *stets dichtes Bild hat* (*bzw. stets injektiv bzw. bijektiv ist*).

Natürlich erfüllt jeder darstellbare Funktor die Bedingung (L3). Allgemeiner gilt :

(2.3) Aussage. — *Sei* F *ein Funktor auf* $\mathscr{C}_\Lambda$ *derart, daβ es ein* $R \in \mathscr{C}_\Lambda$ *und einen Funktormorphismus* $u : R \to F$ *gibt, so daβ* $R(A) \to F(A)$ *surjektiv ist für jede artinsche Algebra* A *aus* $\mathscr{C}_\Lambda$. *Dann erfüllt* F *die Bedingung* (L1).

Beweis. — Sei A eine Algebra aus $\hat{\mathscr{C}}_\Lambda$ und $A = \varinjlim A^{(i)}$ eine Darstellung von A als direkter Limes konvergenter analytischer Λ-Algebren. In dem kanonischen kommutativen Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \varinjlim_i R(A^{(i)}) & \to & \hat{R}(A) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \varinjlim_i F(A^{(i)}) & \to & \hat{F}(A) \end{array}$$

ist dann die obere horizontale Abbildung nach dem zuvor Bemerkten bijektiv. Daher genügt es zu zeigen, daβ $R(A) = \hat{R}(A) \to \hat{F}(A)$ dichtes Bild hat. Sei $(a_n) \in \hat{F}(A)$ und $n_0 \in \mathbb{N}$ vorgegeben. Nach [28], Theorem I_n, gibt es eine Zahl $m_0 \geqq n_0$ derart, daβ zu jedem $h_{m_0} \in R(A/\mathfrak{m}_A^{m_0+1})$ ein $h' \in R(A)$ existiert mit $h' \equiv h_{m_0}$ modulo $\mathfrak{m}_A^{n_0+1}$. Weil die Abbildung $R(A/\mathfrak{m}_A^{m_0+1}) \to F(A/\mathfrak{m}_A^{m_0+1})$ aufgrund der getroffenen Voraussetzung surjektiv ist, finden wir ein Urbild $h_{m_0} \in R(A/\mathfrak{m}_A^{m_0+1})$ von a_{m_0}. Für $a' := u(h') \in \hat{F}(A)$ gilt dann $a' \equiv (a_n)$ modulo $\mathfrak{m}_A^{n_0+1}$.

Aus (2.3) folgt insbesondere, daβ jeder Funktor F, für den die Elemente aus $F(k_\Lambda)$ stets konvergente formal verselle Deformationen besitzen, die Bedingung (L1) erfüllt. Der folgende Satz zeigt, daβ hiervon auch die Umkehrung gilt.

(2.4) SATZ. — *Seien* F *ein mengenwertiger Funktor auf* $\mathscr{C}_\Lambda$, *der die Bedingung* (L1) *erfüllt, und* $a_0 \in F(k_\Lambda)$. *Es gebe eine formale formal verselle Deformation* $(\bar{a}, \bar{A})$ *von* a_0. *Dann gilt :*

(1) (Existenz einer Analytisierung). *Es gibt eine analytische Algebra* $A \in \mathscr{C}_\Lambda$, *ein* $a \in F(A)$ *und einen* Λ-*Isomorphismus* $\varphi : \hat{A} \xrightarrow{\sim} A$ *mit* $\hat{F}(\varphi)(\hat{a}) = \bar{a}$.

(2) (Eindeutigkeit). *Erfüllt* F *überdies* (L2), *so ist das Paar* (a, A) *bis auf (nicht eindeutige) Isomorphie eindeutig, d.h. ist* (a', A') *ein weiteres derartiges Paar, so gibt es einen* Λ-*Isomorphismus* $A \xrightarrow{\sim} A'$, *der* a *in* a' *überführt.*

Bevor wir (2.4) beweisen, notieren wir die folgenden Korollare.

(2.5) KOROLLAR. — *Sei* F *wie in* (2.3). *Überdies erfülle* F *die Schlessinger-Bedingung* (S1) *für artinsche Algebren* ([1]). *Dann besitzt das Element* $a_0 \in F(k_\Lambda)$ *eine konvergente formal semiuniverselle Deformation.*

Beweis. — Nach dem Satz von Schlessinger besitzt a_0 eine formale formal semiuniverselle Deformation. Weil F nach (2.3) die Bedingung (L1) erfüllt, folgt die Behauptung aus (2.4).

(2.6) KOROLLAR. — *Seien* $F : \mathscr{C}_\Lambda \to$ (Mengen) *ein Funktor*, $A \in \mathscr{C}_\Lambda$ *und* a, b *Elemente aus* F(A) *mit* $a_{k_A} = b_{k_A}$. *Für eine* A-*Algebra* B *aus* $\mathscr{C}_\Lambda$ *sei* $G(B) = \{\emptyset\}$, *falls* $a_B = b_B$ *ist, und* $G(B) = \emptyset$ *sonst. Dann ist der so definierte Funktor* $G : \mathscr{C}_A \to$ (Mengen) *darstellbar, falls gilt :*

(1) F *erfüllt* (S1′) *für artinsche Algebren;*

(2) F *erfüllt* (L2).

([1]) vgl. [6], (1.8) (2).

Beweis. — Offenbar genügt G unter den getroffenen Voraussetzungen der Bedingung (L3) und den Bedingungen (S1′) und (S2) für artinsche Algebren. Nach dem Satz von Schlessinger besitzt G daher eine formale universelle Deformation. Aus (2.3) folgt nun, daβ es sogar eine konvergente formal universelle Deformation für G gibt. Daβ diese universell ist, d.h. G darstellt, ergibt sich leicht aus (2.8) und dem Artinschen Approximationssatz.

(2.7) KOROLLAR. — *Sei* F *ein Kogruppoid über* $\mathscr{C}_\Lambda$ *derart, daβ* F (k_Λ) *aus einem Element besteht, welches nur einen Automorphismus hat. Folgende Bedingungen mögen gelten :*

(1) F *erfüllt* (S1), (S2) *für artinsche Algebren;*

(2) *Der zu* F *gehörige Funktor* $\overline{\mathrm{F}}$ *erfüllt* (L1).

Dann gibt es eine analytische Λ*-Algebra* A *und ein formal verselles Element* $a \in \mathrm{F}(\mathrm{A})$.

Beweis. — Der Funktor $\overline{\mathrm{F}}$ besitzt nach dem Satz von Schlessinger eine formale formal verselle Deformation. Nach (2.4) gibt es ein $\mathrm{A} \in \mathscr{C}_\Lambda$ und ein Element $a \in \mathrm{F}(\mathrm{A})$, dessen Bild $\bar{a}$ in $\overline{\mathrm{F}}(\mathrm{A})$ formal versell ist. Aus [24], (1.13), folgt dann, daβ a selbst formal versell ist.

Beweis von (2.4). — Ohne Einschränkung sei $\mathrm{F}(k_\Lambda) = \{a_0\}$ einelementig. Zu (1). Wir überlegen uns zunächst, daβ es genügt, die Behauptung für den Fall $\Lambda = \mathbb{C}$ zu beweisen. Für eine konvergente analytische $\mathbb{C}$-Algebra A und einen $\mathbb{C}$-Homomorphismus $\mu : \Lambda \to \mathrm{A}$ bezeichne $\mathrm{A}_{[\mu]}$ den Ring A, versehen mit der durch μ induzierten Λ-Algebrastruktur. Durch

$$\mathrm{F}'(\mathrm{A}) := \{(\mu, a) : \mu \in \mathrm{Hom}(\Lambda, \mathrm{A}),\ a \in \mathrm{F}(\mathrm{A}_{[\mu]})\}$$

wird dann ein Funktor F′ auf $\mathscr{C}$ definiert. Offenbar erfüllt F′ wieder die Bedingung (L1). Ist $\bar{\nu} : \Lambda \to \bar{\mathrm{A}}$ der Strukturhomomorphismus von $\bar{\mathrm{A}}$, so ist $(\bar{\nu}, \bar{a}) \in \hat{\mathrm{F}}'(\bar{\mathrm{A}})$ eine formale formal verselle Deformation von $a_0 \in \mathrm{F}'(k_\Lambda)$. Eine Analytisierung von $(\bar{\nu}, \bar{a})$ liefert dann auch eine Analytisierung von $\bar{a}$.

Sei daher ohne Einschränkung $\Lambda = \mathbb{C}$. Es gibt einen endlichen injektiven $\mathbb{C}$-Homomorphismus $\hat{\mathrm{P}} = \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n] \to \mathrm{A}$; hierbei sei $\mathrm{P} := \mathbb{C}\langle\langle x_1, \ldots, x_n \rangle\rangle$. Nach eventueller Abänderung der x_i dürfen wir annehmen, daβ $\bar{\mathrm{A}}$ und die $\mathrm{I}^{\mu}_{\hat{\mathrm{P}}}(\bar{\mathrm{A}})$, $0 \leqq \mu \leqq n$, über $\hat{\mathrm{P}}$ eine Aufbereitung besitzen, vgl. (1.1).

Für P′ aus $\mathscr{C}_{\mathrm{P}}$ betrachten wir Tupel

$$((\mathrm{A}', \mathrm{J}^{\nu} \to \mathrm{A}', 0 \leqq \nu \leqq n), a'),$$

wobei $(\mathrm{A}', \mathrm{J}^{\nu} \to \mathrm{A}')$ aus G (P′) ist, vgl. (1.5), A′ analytische $\mathbb{C}$-Algebra, und a' ein Element aus F(A′) ist. Diese Tupel bilden wieder eine Kategorie H(P′), und zu einem P-Algebrahomomorphismus P′ → P″ gehört ein Funktor H(P′) → H(P″). Es sei $\overline{\mathrm{H}}$ (P′) die Menge der Isomorphieklassen der Objekte aus H(P′). Dann ist $\overline{\mathrm{H}}$ ein Funktor auf $\mathscr{C}_{\mathrm{P}}$, welcher offenbar die Bedingung (L1) erfüllt.

Sei N eine Zahl zu dem Element $(\bar{\mathrm{A}}, \mathrm{I}^{\nu}_{\hat{\mathrm{P}}}(\bar{\mathrm{A}}) \to \bar{\mathrm{A}}) \in \mathrm{G}(\hat{\mathrm{P}})$ gemäβ (1.6). Nach (2.8) gibt es zu $((\bar{\mathrm{A}}, \mathrm{I}^{\nu}_{\hat{\mathrm{P}}}(\bar{\mathrm{A}}) \to \bar{\mathrm{A}}), \bar{a}) \in \hat{\mathrm{H}}(\hat{\mathrm{P}})$ ein Element $((\mathrm{A}, \mathrm{J}^{\nu} \to \mathrm{A}), a)$ aus H(P) derart, daβ die Bilder dieser beiden Elemente in $\mathrm{H}(\hat{\mathrm{P}}/\mathfrak{m}^{\mathrm{N}+1}_{\hat{\mathrm{P}}})$ isomorph sind. Ein Isomorphismus zwischen den beiden Objekten liefert einen $\hat{\mathrm{P}}$-Algebrahomomorphismus

$$\bar{\mathrm{A}} \xrightarrow{\psi} \mathrm{A}/\mathfrak{m}^{\mathrm{N}+1}_{\mathrm{P}}\mathrm{A},$$

der $\bar{a}$ auf das kanonische Bild a' von a in $F(A/\mathfrak{m}_P^{N+1} A)$ abbildet. Wegen der formalen Versalität von $(\bar{a}, \bar{A})$ findet man einen $\mathbb{C}$-Homomorphismus

$$\bar{A} \xrightarrow{\psi} \hat{A}$$

mit $\hat{F}(\psi)(\bar{a}) = \hat{a}$, der $\bar{\psi}$ liftet. Aus (1.6) folgt nun, daß ψ ein Isomorphismus ist. Offenbar ist dann ψ^{-1} ein Isomorphismus der gewünschten Art.

Zu (2). Seien (a, A) und (a', A') zwei Analytisierungen von $(\bar{a}, \bar{A})$. Für eine A'-Algebra C aus $\mathscr{C}_{A'}$ sei $T(C)$ die Menge aller $u \in \operatorname{Hom}_\Lambda(A, C)$, für die $F(u)(a)$ mit dem Bild von a' in $F(C)$ übereinstimmt. Dann ist T ein Funktor auf $\mathscr{C}_{A'}$, der die Bedingung (L1) erfüllt. Nach (2.8) gibt es daher einen Λ-Homomorphismus $v : A \to A'$, der modulo $\mathfrak{m}_{A'}^2$ mit der Komposition $A \hookrightarrow \hat{A} \xrightarrow{\sim} \bar{A} \xrightarrow{\sim} \hat{A}'$ übereinstimmt, und a auf a' abbildet. Offenbar ist v ein Isomorphismus.

Die folgende Aussage bleibt nachzutragen.

(2.8) Lemma. — *Sei* F *ein mengenwertiger Funktor auf* $\mathscr{C}_\Lambda$, *der* (L1) *erfüllt. Dann hat die kanonische Abbildung*

$$F(A) \to \hat{F}(\hat{A})$$

dichtes Bild für jedes A *aus* $\mathscr{C}_\Lambda$.

Beweis. — Sei $\bar{a} \in \hat{F}(\hat{A})$. Zu vorgegebenem $n \in \mathbb{N}$ gibt es aufgrund der Voraussetzung einen Λ-Homomorphismus

$$A\langle\langle X_1, \ldots, X_m\rangle\rangle/(f_1, \ldots, f_r) \xrightarrow{\bar{\varphi}} \hat{A}.$$

und ein a' aus $F(A\langle\langle X\rangle\rangle/(f))$ mit $\hat{F}(\bar{\varphi})(a') \equiv \bar{a}$ modulo $\mathfrak{m}_{\hat{A}}^{n+1}$. Nach dem Artinschen Approximationssatz [1] findet man einen Λ-Homomorphismus

$$A\langle\langle X_1, \ldots, X_m\rangle\rangle/(f_1, \ldots, f_r) \xrightarrow{\varphi} A$$

mit $\varphi \equiv \bar{\varphi}$ modulo $\mathfrak{m}_{\hat{A}}^{n+1}$. Dann ist $a := F(\varphi)(a')$ ein Element aus $F(A)$ mit $\hat{a} \equiv \bar{a}$ modulo $\mathfrak{m}_{\hat{A}}^{n+1}$.

3. Darstellbarkeitskriterien I

Es seien S ein komplexer Raum und F ein mengenwertiger Funktor auf (An/S). Sei $s \in S$ ein Punkt. Dann definiert F in natürlicher Weise einen Funktor

$$\mathscr{C}_{\mathcal{O}_{S,s}} \to (\text{Mengen}),$$

den wir wieder mit F bezeichnen wollen. Hierbei ist $\mathscr{C}_{\mathcal{O}_{S,s}}$ die Kategorie der analytischen $\mathcal{O}_{S,s}$-Algebren. $k(s)$ bezeichne stets den Restekörper von $\mathcal{O}_{S,s}$.

Sei v_0 ein Element von $F(k(s))$. Ein Tripel (U, x, v) bestehend aus einem komplexen Raum U über S, einem Punkt $x \in U$ über s und einem Element $v \in F(U)$ mit $v(x) = v_0$ heißt (konvergente) *formal verselle* (bzw. *semiuniverselle* bzw. *universelle*) *Deformation* von v_0, wenn das Bild von v in $F(\mathcal{O}_{U,x})$ eine formal verselle (bzw. semiuniverselle bzw. universelle) Deformation von v_0 im Sinne von Paragraph 2 ist.

Entsprechend nennen wir ein Element $a \in F(Z)$ in einem Punkte $z \in Z$ *formal versell* (bzw. *semiuniversell* bzw. *universell*), wenn a eine formal verselle (bzw. semiuniverselle bzw. universelle) Deformation von $a(z) \in F(k(z)) = F(k(s))$ ist. Hierbei ist $s \in S$ das Bild von z.

Die folgende Aussage ist das analytische Analogon eines Satzes von M. Artin aus der algebraischen Geometrie.

(3.1) SATZ. — *Ein Funktor* $F : (An/S) \to$ (Mengen) *wird genau dann durch einen komplexen Raum über* S (*bzw. über* S *separierten komplexen Raum*) *dargestellt, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind :*

(1) (Garbenaxiom) F *ist von lokaler Natur* [2];

(2) (Relative Darstellbarkeit) *Seien* Y *ein komplexer Raum über* S *und* a, b *Elemente aus* F (Y). *Dann wird der durch die Bedingung* $a = b$ *definierte Funktor durch einen lokal abgeschlossenen* (*bzw. abgeschlossenen*) *analytischen Unterraum von* Y *dargestellt;*

(3) (Existenz universeller Deformationen) *Ist* $s \in S$, *so besitzt jedes Element* $v_0 \in F(k(s))$ *eine konvergente formal universelle Deformation;*

(4) (Offenheit der Versalität) *Ist* Y *ein komplexer Raum und* v *ein Element aus* F (Y), *so ist die Menge der Punkte* $y \in Y$, *in denen* v *formal versell ist, Zariski-offen in* Y.

Beweis. — Wir zeigen zunächst, daß die angegebenen Bedingungen hinreichend für die Darstellbarkeit sind. Wegen (3) und (4) gibt es zu $s \in S$ und $v_0 \in F(k(s))$ einen komplexen Raum U_{v_0} über S, einen Punkt $x \in U_{v_0}$ über s und ein Element v aus $F(U_{v_0})$ mit $v(x) = v_0$, welches in x formal universell und in jedem Punkte von U_{v_0} formal versell ist. v definiert einen Funktormorphismus $U_{v_0} \to F$. Nach (2) ist das Faserprodukt $U_{v_0} \times_F U_{v_0}$ ein analytischer Unterraum von $U_{v_0} \times_S U_{v_0}$. Weil v in x formal universell ist, sind die Projektionen $U_{v_0} \times_F U_{v_0} \to U_{v_0}$ im Punkte (x, x) Isomorphismen. Indem wir U_{v_0} als Umgebung von x verkleinern, können wir erreichen, daß die Projektionen Isomorphismen sind. Dann induziert die Diagonalabbildung einen Isomorphismus von U_{v_0} auf $U_{v_0} \times_F U_{v_0}$. Hieraus folgt aber, daß v in jedem Punkte von U_{v_0} formal universell ist.

Ist Z ein beliebiger komplexer Raum über S und $Z \xrightarrow{a} F$ eine Abbildung von Funktoren, so ist das Faserprodukt $U_{v_0} \times_F Z$ wegen (2) ein komplexer Raum und die Projektion

$$U_{v_0} \times_F Z \to Z$$

ein lokaler Isomorphismus. Wir setzen

$$U := \coprod U_{v_0},$$

[2] d. h. für jeden komplexen Raum Y über S ist die Prägarbe $V \mapsto F(V)$, $V \subseteq Y$ offen, eine Garbe.

wobei die Summe über alle $v_0 \in F(k(s))$ und alle $s \in S$ zu erstrecken ist. Es ist $F(U) = \prod F(U_{v_0})$ nach (1). Somit definieren die Elemente $v \in F(U_{v_0})$ ein Element $w \in F(U)$. Ist dann $a : Z \to F$ eine Abbildung, so ist die Projektion

$$U \times_F Z = \coprod U_{v_0} \times_F Z \to Z$$

ein lokaler Isomorphismus. Sie ist auch surjektiv. Ist nämlich $z \in Z$ ein Punkt mit Bild $s \in S$ und $v_0 \in F(k(s)) = F(k(z))$ das durch a definierte Element, so gibt es nach Definition von U eine Faktorisierung

$$\begin{tikzcd} U \arrow[d, "w"'] & \mathrm{Spec}(k(z)) \arrow[l] \arrow[dl, "v_0"] \\ F & \end{tikzcd}$$

von v_0, woraus folgt, daß z im Bild von $U \times_F Z \to Z$ liegt. Im übrigen ist $U \times_F Z$ wieder nach (2) ein lokal abgeschlossener (bzw. abgeschlossener) analytischer Unterraum von $U \times_S Z$.

Auf $Z = U$ angewandt, ergibt sich hieraus, daß $R := U \times_F U$ ein lokal abgeschlossener (bzw. abgeschlossener) analytischer Unterraum von $U \times_S U$ ist, und daß die beiden Projektionen $R \to U$ surjektive lokale Isomorphismen sind. R ist sogar eine analytische Äquivalenzrelation auf U im Sinne von [19]. Aus *loc. cit.*, Theorem 2.1, folgt, daß der Kokern (X, p) von $R \rightrightarrows U$ in der Kategorie der komplexen Räume über S existiert, daß

$$U \xrightarrow{p} X$$

ein surjektiver lokaler Isomorphismus ist und $R = U \times_X U$ gilt. Wegen (1) ist die Sequenz

$$F(X) \xrightarrow{F(p)} F(U) \rightrightarrows F(R)$$

exakt. Somit gibt es ein $u \in F(X)$ mit $F(p)(u) = w$. Offenbar ist X im eingeklammerten Fall separiert über S.

Wir behaupten, daß (u, X) den Funktor F repräsentiert, daß also für jeden komplexen Raum T über S die Abbildung

$$\mathrm{Hom}_S(T, X) \to F(T), \qquad h \mapsto F(h)(u),$$

bijektiv ist. Sei dazu a ein Element aus $F(T)$. Durch Basiserweiterung mit der Abbildung $a : T \to F$ erhalten wir das folgende kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd} R \times_F T \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] \arrow[d, "h_1"'] & U \times_F T \arrow[r] \arrow[d, "h_0"'] & T \arrow[d, "a"'] \\ R \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & U \arrow[r] & F, \end{tikzcd}$$

in dem die oberen horizontalen Pfeile surjektive lokale Isomorphismen sind. $R \times_F T$ ist eine analytische Äquivalenzrelation auf $U \times_F T$ mit Quotient T, vgl. [19], Folgerung 3.5. Die Abbildung h_0 definiert daher eine holomorphe Abbildung $h : T \to X$, die das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} U \times_F T & \longrightarrow & T \\ {\scriptstyle h_0}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle h} \\ U & \longrightarrow & X \end{array}$$

kommutativ macht. Offenbar sind die kanonischen Bilder von a und $F(h)(u)$ in $F(U \times_F T)$ gleich. Weil $F(T) \to F(U \times_F T)$ injektiv ist, folgt $a = F(h)(u)$. Dies zeigt, daß obige Abbildung surjektiv ist.

Zum Nachweis der Injektivität dürfen wir annehmen, daß T einpunktig ist. Seien g, $h : T \to X$ zwei S-Morphismen mit $F(g)(u) = F(h)(u)$. Weil $p : U \to X$ lokal Schnitte besitzt, lassen sich g und h zu holomorphen Abbildungen $\bar{g}, \bar{h} : T \to U$ hochheben. Dann liefern die Kompositionen von $\bar{g}$ und $\bar{h}$ mit $U \to F$ denselben Morphismus. Folglich gibt es eine holomorphe Abbildung $T \to U \times_F U = R$, deren Komposition mit den beiden Abbildungen $R \to U$ gerade $\bar{g}$ bzw. $\bar{h}$ ergibt. Wegen $R = U \times_X U$ folgt hieraus $g = h$.

Umgekehrt werde vorausgesetzt, daß F durch einen komplexen Raum (bzw. über S separierten komplexen Raum) X über S dargestellt wird. Offenbar gilt dann (1). Ist $u \in F(X)$ das zu id_X gehörige Element, so ist u trivialerweise in jedem Punkt von X formal universell. Dies zeigt, daß (3) erfüllt ist. Zum Nachweis von (2) seien g, $h : Y \to X$ die holomorphen S-Abbildungen mit $F(g)(u) = a$ und $F(h)(u) = b$. Dann ist

$$Z := \mathrm{Kern}\,(Y \underset{h}{\overset{g}{\rightrightarrows}} X)$$

ein lokal abgeschlossener (bzw. abgeschlossener) Unterraum von Y. Offenbar stellt Z den durch die Bedingung $a = b$ definierten Funktor dar. Zu (4). Daß v formal versell in y ist, bedeutet, daß die durch v definierte Abbildung $h : Y \to X$ in y glatt ist. Dann ist h in einer vollen Umgebung von y glatt, woraus die Behauptung folgt.

Die folgende Aussage zeigt, daß man in (3.1) unter bestimmten Bedingungen auf die Voraussetzung (4) verzichten kann.

(3.2) Satz. — *Seien* $F : (An/S) \to (\text{Mengen})$ *ein Funktor, der die Bedingungen* (3.1), (1) *und* (2), *erfüllt, und für den überdies gilt :*

(3′) *Es gibt eine Zahl* $d \in \mathbb{N}$ *mit: Ist* $s \in S$, *so besitzt jedes Element* $v_0 \in F(k(s))$ *eine konvergente formal universelle Deformation, deren lokaler Ring d-dimensional und nullteilerfrei ist.*

Dann ist F *durch einen komplexen Raum über* S (*bzw. über* S *separierten komplexen Raum*) *darstellbar.*

Beweis. — Seien X ein komplexer Raum über S, x ein Punkt von X und $a \in F(X)$ ein Element, das formal universell in x ist. Wir zeigen, daß a formal universell in jedem Punkt einer Umgebung von x ist. Dann folgt die Behauptung wie im Beweis von (3.1).

Sei Y ein komplexer Raum über S und $Y \xrightarrow{b} F$ eine Abbildung. Aus (3.1) (2) folgt dann, daß das Faserprodukt $X \times_F Y$ ein komplexer Raum ist. Weil a in x formal universell ist, ist die Projektion $X \times_F Y \to Y$ in jedem über x liegenden Punkte ein lokaler Isomorphismus. Indem wir dies auf $b = a$ anwenden, folgt, daß die Diagonalabbildung Δ_X nach eventueller Verkleinerung von X als Umgebung von x einen Isomorphismus von X auf $X \times_F X$ induziert. Dann ist auch der Diagonalmorphismus von $Z := X \times_F Y$ ein Isomorphismus von Z auf $Z \times_Y Z$. Dies bedeutet aber, daß $Z \to Y$ eine injektive lokale Immersion ist.

Nach Voraussetzung ist $\mathcal{O}_{X,x}$ d-dimensional und nullteilerfrei. Indem wir X gegebenenfalls weiter verkleinern, können wir erreichen, daß X reduziert und rein d-dimensional ist. Wir behaupten, daß dann a in jedem Punkte $x' \in X$ formal universell ist. Sei $s \in S$ der Bildpunkt von x'. Nach (3′) gibt es einen komplexen Raum Y über S, einen Punkt $y \in Y$ über s und ein Element $b \in F(Y)$ mit $b(y) = a(x')$, welches formal universell in y ist. Wir betrachten das kanonische kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc} Z = X \times_F Y & \xrightarrow{q} & Y \\ {\scriptstyle p}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle b} \\ X & \xrightarrow[a]{} & F. \end{array}$$

Weil b formal universell in y ist, ist p in (x', y) ein lokaler Isomorphismus. Somit ist $\mathcal{O}_{Z,(x',y)}$ reduziert und rein d-dimensional. Nach dem oben Bewiesenen ist der Homomorphismus $\mathcal{O}_{Y,y} \to \mathcal{O}_{Z,(x',y)}$ surjektiv und aus Dimensionsgründen auch bijektiv. Hieraus folgt die Behauptung.

Wenden wir (3.2) speziell auf gruppenwertige Funktoren an, so erhalten wir im absoluten Fall das folgende Resultat.

(3.3) SATZ. — *Seien* F :(An) → (Gruppen) *ein gruppenwertiger Funktor auf der Kategorie der komplexen Räume. Dann wird* F *genau dann durch eine komplexe Lie-Gruppe dargestellt, wenn* F *die Bedingungen* (1), (2) *und* (3) *von* (3.1) *erfüllt.*

Der *Beweis* ergibt sich unmittelbar aus (3.2), wenn man beachtet, daß die dortige Bedingung (3′) nach einem Satz von Cartier (vgl. [21]) erfüllt ist.

4. Darstellbarkeitskriterien II

In diesem Paragraphen wird das Kriterium (3.1) unter Verwendung der Ergebnisse von Paragraph 2 weiterentwickelt. Dabei kommt es uns darauf an, die Voraussetzungen über die Existenz (uni)verseller Deformationen und die relative Darstellbarkeit abzuschwächen. In ähnlicher Weise kann man dann auch den allgemeineren Fall von Gruppoiden behandeln. Wir setzen in diesem Paragraphen stets voraus, daß die Diagonalabbildung für alle betrachteten komplexen Räume ein lokal konstruierbares Bild hat.

(4.1) SATZ. — *Seien* S *ein komplexer Raum und* $F:(\mathrm{An}/S)\to(\text{Mengen})$ *ein Funktor. Dann wird* F *genau dann durch einen komplexen Raum (bzw. über* S *separierten komplexen Raum) über* S *dargestellt, wenn gilt :*

(1) F *ist von lokaler Natur;*

(2) F *genügt den Schlessinger-Bedingungen* (S1′), (S2) und (S3) [3];

(3) *Für jeden Punkt* $s\in S$ *erfüllt der Funktor*

$$F:\mathscr{C}_{\mathcal{O}_{S,s}}\to(\text{Mengen})$$

die Bedingungen (L1) *und* (L2) [*vgl.* (2.2)];

(4) *Seien* Y *ein komplexer Raum über* S *und* a, b *Elemente aus* F (Y). *Dann ist die Menge* Y′ *der Punkte* $y\in Y$, *für die* $a(y)=b(y)$ [*in* $F(k(y))$] *ist, lokal konstruierbar in* Y;

(5) *Ist in* (4) Y *überdies eine integre Kurve und* Y′ *dicht in* Y, *so ist* Y′ *offen in* Y (*bzw.* $Y'=Y$) *und* $a_{Y'}=b_{Y'}$;

(6) *Ist* Y *ein komplexer Raum über* S *und* $v\in F(Y)$, *so ist die Menge der Punkte* $y\in Y$, *in denen* v *formal versell ist, Zariski-offen in* Y.

Beweis. — Zunächst wird gezeigt, daβ die angegebenen Bedingungen hinreichend für die Darstellbarkeit sind. Wegen (4.1), (2) und (3), folgt aus (2.4) in Verbindung mit dem Satz von Schlessinger, daβ jedes Element $v_0\in F(k(s))$, $s\in S$, eine konvergente formal verselle Deformation hat. Daher erfüllt F die Voraussetzungen von (3.1) mit Ausnahme von (3.1) (2).

Können wir zeigen, daβ auch diese Bedingung gilt, so folgt die Behauptung aus (3.1). Seien also Y ein komplexer Raum über S und a, b Elemente aus F (Y). Für einen komplexen Raum T über Y sei

$$N(T):=\begin{cases}\{\emptyset\} & \text{falls die Bilder } a_T,\ b_T \text{ von } a,\ b \text{ in } F(T) \text{ gleich sind,}\\ \emptyset & \text{sonst.}\end{cases}$$

Wir haben zu zeigen, daβ der so definierte Funktor N durch einen lokal abgeschlossenen (bzw. abgeschlossenen) analytischen Unterraum von Y dargestellt wird.

N ist von lokaler Natur, weil F diese Eigenschaft hat, und mit F erfüllt auch N die Bedingung (S1′). Ist T ein komplexer Raum über Y mit $a_T=b_T$ und $\mathscr{M}$ ein kohärenter $\mathcal{O}_T$-Modul, so ist $N(T[\mathscr{M}])=0$ der Nullmodul. Somit erfüllt N die Bedingungen (1), (2), (4) und (5) von (4.1). Seien $y\in Y$ ein Punkt, A eine komplette analytische $\mathcal{O}_{Y,y}$-Algebra und $A=\varinjlim A^{(i)}$ mit konvergenten analytischen $\mathcal{O}_{Y,y}$-Algebren $A^{(i)}$, $i\in I$. Weil F die Bedingung (3) erfüllt, ist die Abbildung

$$\varinjlim_{i\in I} N(A^{(i)})\to\hat{N}(A)=\varprojlim_{n} N(A/\mathfrak{m}_A^{n+1})$$

bijektiv. Somit gilt auch (4.1) (3) für N. Es sei $T\subsetneq T'$ eine infinitesimale Erweiterung von komplexen Räumen über Y mit $a_T=b_T$ derart, daβ $\mathscr{M}:=\mathrm{Kern}(\mathcal{O}_{T'}\to\mathcal{O}_T)$ ein Ideal vom

[3] vgl. [6], (1.3), (1.4) und (1.5).

Quadrat Null ist. Weil F die Bedingung (S1′) erfüllt, gibt es genau ein Element $d \in \mathrm{F}_{a_{\mathrm{T}}}(\mathrm{T}[\mathscr{M}])$ mit $da_{\mathrm{T}'} = b_{\mathrm{T}'}$. Genau dann ist d Null, wenn $a_{\mathrm{T}'} = b_{\mathrm{T}'}$ ist. Somit definieren die Moduln $\mathrm{F}_{a_{\mathrm{T}}}(\mathrm{T}[\mathscr{M}])$ und d eine Obstruktionstheorie für N, welche die Bedingungen (01), (02) erfüllt, vgl. [6], (1.6) und (1.7). Aus dem Satz von der Offenheit der Versalität ([6], (4.1)) folgt nun, daß N auch (4.1) (6) erfüllt.

Trivialerweise genügt N der Bedingung (3.1) (2). Aus der Vorbemerkung, angewandt auf F = N, ergibt sich nun, daß N auch die restlichen Bedingungen von (3.1) erfüllt. Somit ist N nach (3.1) durch einen komplexen Raum Z über Y darstellbar. Offenbar ist die Strukturabbildung $i : \mathrm{Z} \to \mathrm{Y}$ eine injektive locale Immersion, und es ist $\mathrm{Y}' := i(\mathrm{Z})$ die Menge der Punkte $y \in \mathrm{Y}$ mit $a(y) = b(y)$. Wegen (4) und (5) ist Y′ eine konstruierbare (bzw. analytische) Teilmenge von Y. Aus dem anschließenden Lemma (4.2) ergibt sich nun, daß i einen Isomorphismus auf einen lokal abgeschlossenen (bzw. abgeschlossenen) analytischen Unterraum von Y induziert.

Auf den einfachen Beweis dafür, daß die angegebenen Bedingungen auch notwendig für die Darstellbarkeit von F sind, verzichten wir.

Die folgende Aussage bleibt nachzutragen.

(4.2) LEMMA (Immersionskriterium). — *Sei* $\mathrm{Z} \xrightarrow{i} \mathrm{Y}$ *eine injektive lokale Immersion komplexer Räume. Dann induziert i einen Isomorphismus auf einen lokalabgeschlossen* (*bzw. abgeschlossenen*) *analytischen Unterraum von* Y, *falls gilt :*

(1) $i(\mathrm{Z})$ *ist eine lokal konstruierbare Teilmenge von* Y;

(2) *Ist* C *eine integre Kurve in* Y *derart, daß* $\mathrm{V} := i(\mathrm{Z}) \cap \mathrm{C}$ *dicht in* C *liegt, so ist* V *offen in* C (*bzw.* V = C) *und die Inklusion* $\mathrm{V} \to \mathrm{Y}$ *faktorisiert sich über eine holomorphe Abbildung* $\mathrm{V} \to \mathrm{Z}$.

Beweis. — Es genügt offenbar zu zeigen, daß i in jedem Punkte $y_0 \in \mathrm{Y}' := i(\mathrm{Z})$ eine Immersion ist. Weil i eine lokale Immersion ist, findet man nach eventueller Verkleinerung von Y als Umgebung von y_0 einen abgeschlossenen Unterraum $\mathrm{Y}'' \subseteqq \mathrm{Y}$ und eine offene Menge $\mathrm{W} \subseteqq \mathrm{Z}$ derart, daß i einen Isomorphismus $\mathrm{W} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Y}''$ induziert.

Weil $\mathrm{W}' := \mathrm{Z} \setminus \mathrm{W} = i^{-1}(\mathrm{Y} \setminus \mathrm{Y}'')$ offen in Z ist, ist W offen und abgeschlossen in Z. Wegen $i(\mathrm{W}') = \mathrm{Y}' \setminus \mathrm{Y}''$ und (1) ist $i(\mathrm{W}')$ eine lokal konstruierbare Teilmenge von Y. Insbesondere ist der Abschluß $\overline{i(\mathrm{W}')}$ analytisch in Y. Ist $y_0 \notin \overline{i(\mathrm{W}')}$, so gilt W = Z nach Schrumpfung von Y als Umgebung von y_0, und i ist in y_0 eine Immersion.

Sei daher $y_0 \in \overline{i(\mathrm{W}')}$. Es gibt eine integre Kurve C in $\overline{i(\mathrm{W}')}$, welche durch y_0 läuft, so daß $i(\mathrm{W}') \cap \mathrm{C}$ dicht in C ist. Nach (2) ist $\mathrm{V} := \mathrm{Y}' \cap \mathrm{C}$ dann offen in C und die Inklusion $\mathrm{V} \to \mathrm{Y}$ faktorisiert sich über eine holomorphe Abbildung $\varphi : \mathrm{V} \to \mathrm{Z}$. Wegen $y_0 \in \mathrm{V}$ ist der Durchschnitt von $\varphi(\mathrm{V})$ mit W nicht leer. Weil $\varphi(\mathrm{V})$ zusammenhängend und W offen und abgeschlossen ist, gilt $\varphi(\mathrm{V}) \subseteqq \mathrm{W}$ und $\mathrm{V} \subseteqq \mathrm{Y}''$. Dies steht aber im Widerspruch dazu, daß $i(\mathrm{W}') \cap \mathrm{C}$ in V liegt!

Wir zeigen nun ein zu (4.1) analoges Resultat für den allgemeineren Fall von Gruppoiden. Zu den verwendeten Bezeichnungen vgl. [6].

(4.3) SATZ. — *Sei* F *ein Gruppoid über der Kategorie* (An/S) *der komplexen Räume über* S *mit folgenden Eigenschaften :*

(1) *Ist* Y *ein komplexer Raum über* S *und sind a, b Elemente aus* F(Y), *so ist der Funktor* Isom(a, b) *von lokaler Natur;*

(2) F *erfüllt* (S1′), (S2), (S3), *und für jedes* $a \in \mathrm{F}(\mathrm{Y})$ *genügt der Funktor* Aut(a) *den Bedingungen* (S2) *und* (S3);

(3) *Ist* $s \in \mathrm{S}$, A *eine komplette analytische* $\mathcal{O}_{\mathrm{S}, s}$*-Algebra und* $\mathrm{A} = \varinjlim \mathrm{A}^{(i)}$ *mit konvergenten analytischen* $\mathcal{O}_{\mathrm{S}, s}$*-Algebren* $\mathrm{A}^{(i)}$, $i \in \mathrm{I}$, *so ist der kanonische Funktor*

$$\varinjlim_{i \in \mathrm{I}} \mathrm{F}(\mathrm{A}^{(i)}) \to \varprojlim_{n \in \mathbb{N}} \mathrm{F}(\mathrm{A}/\mathfrak{m}_{\mathrm{A}}^{n+1})$$

volltreu und hat dichtes Bild;

(4) *Ist* $v \in \mathrm{F}(\mathrm{Y})$, *so ist die Menge der Punkte* $y \in \mathrm{Y}$, *in denen v formal versell ist, Zariski-offen in* Y;

(5) *Sei* $a \in \mathrm{F}(\mathrm{Y})$ *und* φ *ein Element aus* $\mathrm{Aut}_{\mathrm{F}(\mathrm{Y})}(a)$. *Dann ist die Menge* Y′ *der Punkte* $y \in \mathrm{Y}$ *mit* $\varphi(y) = \mathrm{id}$ [*in* Aut$(a(y))$] *lokal konstruierbar in* Y. *Ist* Y *eine integre Kurve und* Y′ *dicht in* Y, *so ist* Y′ *offen in* Y (*bzw.* Y′ = Y) *und* $\varphi_{\mathrm{Y}'} = \mathrm{id}$.

Dann gilt :

(α) *Ist* $s \in \mathrm{S}$ *und* v_0 *ein Objekt aus* $\mathrm{F}(k(s))$, *so gibt es einen komplexen Raum* T *über* S, *einen Punkt* $t \in \mathrm{T}$ *über* s *und ein Element* $v \in \mathrm{F}(\mathrm{T})$ *mit* $v(t) = v_0$, *welches in jedem Punkt von* T *versell ist;*

(β) *Die Funktoren* Isom(a, b) *sind durch komplexe Räume* (*bzw. separierte komplexe Räume*) *darstellbar;*

(γ) *Ist* $v \in \mathrm{F}(\mathrm{Y})$, *so ist die Menge der Punkte* $y \in \mathrm{Y}$, *in denen* v *universelle Deformation von* $v(y)$ *ist, Zariski-offen in* Y.

Beweis. — Aus den getroffenen Voraussetzungen ergibt sich fast unmittelbar, daß der Funktor $\mathrm{I} = \mathrm{Isom}(a, b)(a, b \in \mathrm{F}(\mathrm{Y}))$ die Bedingungen (1)-(5) von (4.1) erfüllt. Sei $\mathrm{T} \subsetneq \mathrm{T}'$ eine infinitesimale Erweiterung von komplexen Räumen über Y durch einen kohärenten $\mathcal{O}_{\mathrm{T}}$-Modul $\mathcal{M}$, und φ ein Element aus I(T). Dann definieren $a_{\mathrm{T}} \to a_{\mathrm{T}'}$ und die Komposition von $b_{\mathrm{T}} \to b_{\mathrm{T}'}$ mit φ zwei Elemente u, v aus $\overline{\mathrm{F}}_{a_{\mathrm{T}}}(\mathrm{T}')$. Weil F nach Voraussetzung die Bedingung (S1′) erfüllt, gibt es genau ein d aus $\mathrm{D}_{a_{\mathrm{T}}}(\mathcal{M})$ mit $du = v$. Offenbar ist d genau dann Null, wenn $\mathrm{I}_{\varphi}(\mathrm{T}') \neq \emptyset$ ist. Dies zeigt, daß die Moduln $\mathrm{D}_{a_{\mathrm{T}}}(\mathcal{M})$ eine Obstruktionstheorie für I definieren. Aus [6], (4.1), folgt nun, daß für I die Offenheit der formalen Versalität gilt.

Die Behauptung (β) ergibt sich somit aus (4.1). (α) folgt dann aus (2.7) und [6], (3.2) (2). Zeigen wir nun (γ). Sei $v \in \mathrm{F}(\mathrm{Y})$ im Punkt $y_0 \in \mathrm{Y}$ universelle Deformation von $v(y_0)$. Wegen (4), (β) und [6], (3.2) (2), dürfen wir annehmen, daß v in jedem Punkt von Y versell ist. Seien p, q die beiden Projektionen von $\mathrm{Y} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{Y}$ und Z der Raum über $\mathrm{Y} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{Y}$, der den Funktor Isom$(p^*(v), q^*(v))$ darstellt. Dann faktorisiert sich die Diagonalabbildung von Y über eine holomorphe Abbildung $\varphi : \mathrm{Y} \to \mathrm{Z}$. Offenbar ist v genau dann in $y \in \mathrm{Y}$

universell, wenn die beiden Projektionen von $(Z, \varphi(y))$ in (Y, y) gleich sind. Bezeichnet $\mathscr{F}$ das Diagonalideal, so bedeutet dies gerade, daß $\mathscr{F}\mathcal{O}_{Z,\varphi(y)}=0$ ist. Letzteres ist eine Zariskioffene Bedingung.

KAPITEL II. ANWENDUNGEN

5. Vorbereitungen : Kohomologie und Basiswechsel

Wir stellen hier zur späteren Verwendung einige Aussagen über das Verhalten von Kohomologiegarben bei Basiswechsel zusammen. Seien $f : X \to S$ eine separierte holomorphe Abbildung und $\mathscr{F}$ ein kohärenter S-flacher $\mathcal{O}_X$-Modul, dessen Träger eigentlich über S liegt. Sei T ein komplexer Raum über S. Für einen kohärenten $\mathcal{O}_T$-Modul $\mathscr{M}$ und $p \in \mathbb{Z}$ setzen wir

$$\mathrm{F}^p_{\mathrm{T}}(\mathscr{M}) :=\mathrm{R}^p f_{\mathrm{T}*}(\mathscr{F}_{\mathrm{T}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathrm{T}}} \mathscr{M});$$

hierbei bezeichnet $\mathscr{F}_{\mathrm{T}}$ wie üblich das Urbild von $\mathscr{F}$ unter der Projektion $X_T \to X$. Dann ist $\mathrm{F}^{\bullet}_{\mathrm{T}}$ ein Kohomologiefunktor von der Kategorie der kohärenten $\mathcal{O}_T$-Moduln in sich. Für $T=S$ setzen wir abkürzend $\mathrm{F}^{\bullet}=\mathrm{F}^{\bullet}_{\mathrm{S}}$. Die folgenden Aussagen lassen sich wegen [20] unter Verwendung Steinscher Kompakta wie in [16], (III 7), beweisen.

(5.1) Satz. — *Mit den obigen Voraussetzungen und Bezeichnungen sind für* $p \in \mathbb{Z}$ *äquivalent :*

(1) F^p *ist rechtsexakt;*

(1′) *Es gibt einen kohärenten* $\mathcal{O}_S$*-Modul* $\mathscr{N}$ *derart, daß* $\mathrm{F}^p(\mathscr{M})$ *funktoriell isomorph ist zu* $\mathscr{N} \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathscr{M}$*;*

(2) F^{p+1} *ist linksexakt;*

(2′) *Es existiert ein kohärenter* $\mathcal{O}_S$*-Modul* $\mathscr{Q}$ *mit* $\mathrm{F}^{p+1} \cong \mathscr{H}\underline{om}_{\mathcal{O}_S}(\mathscr{Q}, \cdot)$*;*

(3) *Für jede holomorphe Abbildung* $T \to S$ *ist der kanonische Homomorphismus* $\mathrm{R}^p f_*(\mathscr{F})_{\mathrm{T}} \to \mathrm{R}^p f_{\mathrm{T}*}(\mathscr{F}_{\mathrm{T}})$ *bijektiv.*

Die Moduln $\mathscr{N}$ *und* $\mathscr{Q}$ *sind dann bis auf einen eindeutigen Isomorphismus eindeutig bestimmt.*

Wenden wir dies auf $p=-1$ *an*, so folgt wegen $\mathrm{T}^{-1}=0$:

(5.2) Korollar. — *Der Funktor* F^0 *ist darstellbar, d.h. es gibt einen kohärenten* $\mathcal{O}_S$*-Modul* $\mathscr{Q}$ *und eine Funktorisomorphie* $\mathrm{F}^0 \simeq \mathscr{H}\underline{om}_{\mathcal{O}_S}(\mathscr{Q}, \cdot)$.

Ist s ein Punkt aus S, so bezeichne F_s den durch

$$\mathrm{M} \mapsto \mathrm{R}^p f_*(\mathscr{F} \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathscr{M})_s, \qquad p \in \mathbb{Z},$$

auf der Kategorie der endlichen $\mathcal{O}_{S,s}$-Moduln definierten Kohomologiefunktor. Hierbei ist $\mathscr{M}$ ein kohärenter $\mathcal{O}_S$-Modul mit $\mathscr{M}_s = \mathrm{M}$ (ein solcher existiert nach Verkleinerung von S).

(5.3). — *Ist* $s \in S$ *und* $p \in \mathbb{Z}$, *so sind äquivalent :*

(1) F_s^p *ist rechtsexakt;*

(2) $F_s^p(\mathcal{O}_{S,s}) \to F_s^p(k(s))$ *ist surjektiv;*

(3) $F_s^p(\mathcal{O}_{S,s}/\mathfrak{m}_s^{n+1}) \to F_s^p(k(s))$ *ist surjektiv für jedes* $n \in \mathbb{N}$.

Ferner ist die Menge C *aller Punkte* $s \in S$, *für die* F_s^p *nicht rechtsexakt ist, analytisch, und* $S \setminus C$ *ist die größte offene Teilmenge* V *von* S *derart, daß* F_V^p *rechtsexakt ist.*

(5.4) KOROLLAR. — *Ist* F^p *rechtsexakt, so auch* F_T^p *für jeden Basiswechsel* $T \to S$. *Überdies sind die Moduln* $\mathcal{N}$ *und* $\mathcal{Q}$ *aus* (5.1) *mit dem Basiswechsel verträglich, d.h.* $\mathcal{N}_T$ *repräsentiert* F_T^p *und* $\mathcal{Q}_T$ *repräsentiert* F_T^{p+1}.

Sei s ein Punkt aus S und $p \in \mathbb{Z}$. Der Modul $\mathcal{F}$ heißt *kohomologisch flach über* S (bzw. *kohomologisch flach in s*) *in der Dimension p*, wenn der Funktor F^p (bzw. F_s^p) exakt ist. Dies ist nach (5.1) und (5.3) gleichwertig damit, daß F^{p-1} und F^p (bzw. F_s^{p-1} und F_s^p) rechtsexakt sind, oder auch dazu, daß F^p und F^{p+1} (bzw. F_s^p und F_s^{p+1}) linksexakt sind.

Die Menge V der Punkte $s \in S$, in denen $\mathcal{F}$ kohomologisch flach in der Dimension p ist, ist Zariski-offen, und $\mathcal{F}_V$ ist kohomologisch flach über V in der Dimension p. Ist $\mathcal{F}$ kohomologisch flach über S in der Dimension p, so ist auch $\mathcal{F}_T$ kohomologisch flach über T in der Dimension p für jeden komplexen Raum T über S.

Ist F^{p-1} rechtsexakt, so ist $\mathcal{F}$ genau dann kohomologisch flach in der Dimension p, wenn der $\mathcal{O}_S$-Modul $\mathcal{Q}$ mit $F^p \cong \mathcal{H}\underline{om}_{\mathcal{O}_S}(\mathcal{Q}, \cdot)$ lokalfrei ist. Insbesondere gilt :

(5.5). — $\mathcal{F}$ *ist genau dann kohomologisch flach über* S *in der Dimension* 0, *wenn der* $\mathcal{O}_S$-*Modul* $\mathcal{Q}$ *mit* $F^0 \cong \mathcal{H}\underline{om}_{\mathcal{O}_S}(\mathcal{Q}, \cdot)$ *lokalfrei ist.*

Aus (5.3), angewandt auf $\mathcal{F} = \mathcal{O}_X$, folgt übrigens, daß $\mathcal{O}_X$ sicher dann kohomologisch flach in $s \in S$ in der Dimension 0 ist, wenn $\Gamma(X_s, \mathcal{O}_{X_s})$ reduziert ist, also insbesondere dann, wenn X_s reduziert ist.

6. Picardsche Modulräume

Sei $X \xrightarrow{f} S$ eine holomorphe Abbildung. Dann ist der *Picardsche Funktor* $P_{X/S} = \mathrm{Pic}_{X/S}$ von der Kategorie (An/S) der komplexen Räume über S in die Kategorie der Gruppen folgendermaßen definiert (vgl. [15]) : Ist T ein komplexer Raum über S, so ist

$$P_{X/S}(T) = \mathrm{Pic}_{X/S}(T) : = \Gamma(T, R^1 f_{T*}(\mathcal{O}_{X_T}^*)).$$

Hierbei haben wir $X_T := X \times_S T$ und $f_T := f \times_S T$ gesetzt. Ein Element aus $P_{X/S}(T)$ wird also gegeben durch eine offene Überdeckung T_i, $i \in I$, von T und invertierbare Moduln $\mathcal{L}_i$ auf X_{T_i} derart, daß für jedes Paar (i, j) die Moduln $\mathcal{L}_i | X_{T_{ij}}$ und $\mathcal{L}_j | X_{T_{ij}}$ lokal bezüglich T_{ij} isomorph sind, d.h. zu jedem Punkt $t \in T_{ij}$ existiert eine offene Umgebung T' von t in T_{ij}, so daß $\mathcal{L}_i | X_{T'}$ isomorph zu $\mathcal{L}_j | X_{T'}$ ist.

Für jeden Punkt $s \in S$ ist $P_{X/S}(s) = \mathrm{Pic}(X_s)$ die Picardsche Gruppe der Faser X_s. Die folgende Aussage ist leicht zu beweisen.

(6.1). — *Sei f flach und $f_*(\mathcal{O}_X)\otimes_{\mathcal{O}_S}\mathcal{O}_T \to f_{T*}(\mathcal{O}_{X_T})$ bijektiv für jeden Basiswechsel* $T\to S$. *Dann gilt :*

(1) *Ist* $T\to T'$ *eine infinitesimale Erweiterung und* $T\to T''$ *eine endliche Abbildung von komplexen Räumen über* S, *so ist der kanonische Homomorphismus*

$$P_{X/S}(T'\amalg_T T'')\to P_{X/S}(T')\times_{P_{X/S}(T)}P_{X/S}(T'')$$

bijektiv;

(2) *Ist* T *ein komplexer Raum über* S *und* $\mathcal{M}$ *ein kohärenter* $\mathcal{O}_T$-*Modul, so gilt*

$$(P_{X/S})_1(T[\mathcal{M}])=\Gamma(T, R^1 f_{T*}(\mathcal{O}_{X_T}\otimes_{\mathcal{O}_T}\mathcal{M}))$$

als $\Gamma(T,\mathcal{O}_T)$-*Moduln. Hierbei ist* $(P_{X/S})_1(T[\mathcal{M}])$ *der Kern des kanonischen Homomorphismus von* $P_{X/S}(T[\mathcal{M}])$ *in* $P_{X/S}(T)$.

Als erste Anwendung von (4.1) zeigen wir den folgenden Satz.

(6.2) SATZ. — *Sei* $X\xrightarrow{f}S$ *eine eigentliche flache holomorphe Abbildung, die überdies kohomologisch flach in der Dimension 0 ist. Dann ist der relative Picardsche Funktor* $\mathrm{Pic}_{X/S}$ *durch einen (nicht notwendig separierten) komplexen Raum über* S *darstellbar.*

Beweis. — Es genügt zu zeigen, daβ $P=\mathrm{Pic}_{X/S}$ die Voraussetzungen von (4.1) erfüllt. Offenbar ist P von lokaler Natur. Somit gilt (4.1) (1). Daβ auch (4.1), (2) bzw. (3), erfüllt ist, ergibt sich aus (6.1) und dem anschlieβenden Lemma (6.3).

Wir zeigen nun, daβ (4.1) (4) gilt. Seien dazu Y ein komplexer Raum über S und a, b Elemente aus P(Y). Es ist nachzuweisen, daβ die Menge der Punkte $y\in Y$ mit $a(y)=b(y)$ lokal konstruierbar ist. Dazu dürfen wir offensichtlich annehmen, daβ $S=Y$ reduziert und endlichdimensional ist, daβ $b=1$ das neutrale Element von P(S) ist, und daβ a durch einen invertierbaren $\mathcal{O}_X$-Modul $\mathcal{L}$ induziert wird. Wir gehen durch Induktion nach der Dimension von S vor. Aus (5.5) folgt, daβ es eine nirgends dichte analytische Menge $S_1\subseteqq S$ gibt derart, daß $\mathcal{L}$ auf $S\setminus S_1$ kohomologisch flach in der Dimension 0 ist. Es sei $\mathcal{F}$ der Kokern des kanonischen Homomorphismus von $f^*(f_*(\mathcal{L}))$ in $\mathcal{L}$ und $T:=f(\mathrm{Supp}(\mathcal{F}))$. Ferner sei Z die Menge der Punkte aus S, in denen $f_*(\mathcal{L})$ nicht lokal frei vom Rang 1 über $f_*(\mathcal{O}_X)$ ist. Bezeichnet dann S′ die Menge der Punkte $s\in S$, für die $\mathcal{L}_s$ trivial ist, so gilt offenbar

$$S'\setminus S_1=(S\setminus(T\cup S_1))\cap(S\setminus(Z\cup S_1)).$$

Somit ist $S'\setminus S_1$ lokal konstruierbar in S. Aus der Induktionsvoraussetzung folgt, daβ $S'\cap S_1$ lokal konstruierbar in S_1 ist. Insgesamt ist also S′ lokal konstruierbar in S, wie gewünscht.

Um zu beweisen, daβ (4.1) (5) erfüllt ist, genügt es offensichtlich, folgendes zu zeigen : Ist S eine integre Kurve und $\mathcal{L}$ ein invertierbarer $\mathcal{O}_X$-Modul derart, daβ $\mathcal{L}_s$ trivial für jedes $s\in S$, so ist $\mathcal{L}$ lokal trivial bezüglich S. Sei $\mathcal{Q}$ bzw. $\mathcal{Q}_1$ der $\mathcal{O}_S$-Modul zu $\mathcal{O}_X$ bzw. $\mathcal{L}$ gemäβ (5.2). Es gibt eine nirgends dichte analytische Menge $S_1\subseteqq S$ derart, daβ $\mathcal{L}$ auf $S\setminus S_1$ kohomologisch flach in der Dimension 0 ist. Dann sind die $\mathcal{O}_S$-Moduln $\mathcal{Q}$ und $\mathcal{Q}_1$ auf

$S \setminus S_1$ lokal frei von demselben Rang. Weil $\mathscr{L}_s$ trivial ist für jeden Punkt $s \in S$, haben die $\mathbb{C}$-Vektorräume $\mathscr{Q}/\mathfrak{m}_s\mathscr{Q}$ und $\mathscr{Q}_1/\mathfrak{m}_s\mathscr{Q}_1$ in jedem Punkt $s \in S$ denselben Rang. Nun ist $\mathscr{Q}$ sogar auf ganz S lokal frei. Hieraus folgt, daß auch $\mathscr{Q}_1$ auf ganz S lokalfrei ist. Dies ergibt sofort die Behauptung.

Daβ schließlich auch (4.1) (6) erfüllt ist, ist ein Spezialfall der in [6] bewiesenen Tatsache, daβ die formale Versalität bei Deformationen von kohärenten Moduln eine offene Eigenschaft ist.

Die folgende Aussage haben wir noch nachzutragen :

(6.3) Lemma. — *Seien* $X \to S$ *eine eigentliche flache holomorphe Abbildung,* s *ein Punkt von* S *und* $A^{(i)}$, $i \in I$, *ein induktives System von analytischen* $\mathscr{O}_{S,s}$*-Algebren derart, daβ* $A := \varinjlim A^{(i)}$ *eine komplette analytische Algebra ist. Dann ist der kanonische Homomorphismus*

$$\varinjlim_{i \in I} \mathrm{Pic}_{X/S}(A^{(i)}) \to \varprojlim_{n \in \mathbb{N}} \mathrm{Pic}_{X/S}(A/\mathfrak{m}_A^{n+1})$$

bijektiv.

Beweis. — Für jedes $i \in I$ ist $X^{(i)} := (X_s, (\mathscr{O}_X \otimes A^{(i)}) \mid X_s)$ ein $\mathbb{C}$-geringter Raum über $A^{(i)}$. Setzen wir $\mathscr{X}_n := X \otimes_{\mathscr{O}_S} A/\mathfrak{m}_A^{n+1}$ für $n \in \mathbb{N}$, so ist $\mathscr{X} := \varinjlim \mathscr{X}_n$ ein formaler komplexer Raum, der eigentlich über dem durch A definierten einpunktigen formalen komplexen Raum liegt, vgl. hierzu [5]. Überdies haben wir kanonische Morphismen $\mathscr{X} \to X^{(i)}$, welche ein projektives System bilden. Weil die Exponentialsequenz $0 \to \mathbb{Z} \to \mathscr{O}_{\mathscr{X}} \to \mathscr{O}_{\mathscr{X}}^* \to 1$ exakt ist, erhalten wir die folgenden kommutativen Diagramme

$$\begin{array}{ccccccccc}
H^1(X^{(i)}, \mathbb{Z}) & \to & H^1(X^{(i)}, \mathscr{O}X^{(i)}) & \to & \mathrm{Pic}(X^{(i)}) & \to & H^2(X^{(i)}, \mathbb{Z}) & \to & H^2(X^{(i)}, \mathscr{O}X^{(i)}) \\
\wr\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \alpha^{(i)}} & & \downarrow{\scriptstyle \beta^{(i)}} & & \wr\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \gamma^{(i)}} \\
H^1(\mathscr{X}, \mathbb{Z}) & \longrightarrow & H^1(\mathscr{X}, \mathscr{O}_{\mathscr{X}}) & \longrightarrow & \mathrm{Pic}(\mathscr{X}) & \longrightarrow & H^2(\mathscr{X}, \mathbb{Z}) & \longrightarrow & H^2(\mathscr{X}, \mathscr{O}_{\mathscr{X}})
\end{array}$$

mit exakten Zeilen. Es ist $\mathrm{Pic}(X^{(i)}) = \mathrm{Pic}_{X/S}(A^{(i)})$ und $\mathrm{Pic}(\mathscr{X}) = \varprojlim \mathrm{Pic}_{X/S}(A/\mathfrak{m}_A^{n+1})$, vgl. [5]. Daher genügt es zu zeigen, daβ $\varinjlim \beta^{(i)}$ bijektiv ist. Hierzu wiederum reicht es wegen des Fünferlemmas zu beweisen, daβ $\varinjlim \alpha^{(i)}$ und $\varinjlim \gamma^{(i)}$ bijektiv sind. Dies ist aber unmittelbar einsichtig, vgl. Beweis von (8.1).

(6.4) *Bemerkung.* — Ist in der Situation (6.2) die Abbildung $X \to S$ relativ algebraisch, und bezeichnet P den Picardschen Modulraum von X über S, so ist auch $P \to S$ relativ algebraisch. Man vgl. hierzu [4], (6.2).

7. Hilbertsche Modulräume

Seien $X \to S$ eine separierte holomorphe Abbildung und $\mathscr{F}$ ein kohärenter $\mathscr{O}_X$-Modul. Ist T ein komplexer Raum über S, so sei $Q(T) = Q_{\mathscr{F}/X/S}(T)$ die Menge der Isomorphieklassen von Quotienten von $\mathscr{F}_T = \mathscr{F} \otimes_{\mathscr{O}_S} \mathscr{O}_T$, die T-flach sind und deren Träger eigentlich über T liegt. Dann ist Q ein kontravarianter Funktor auf der Kategorie der komplexen Räume über S, der sogenannte *Grothendiecksche Funktor*. Speziell für $\mathscr{F}=\mathcal{O}_X$ erhält man den *Hilbertschen Funktor* $H=H_{X/S}$.

Douady hat in [7] mit der von ihm eingeführten Methode der banachanalytischen Räume gezeigt, daß Q darstellbar ist, vgl. auch Pourcin [23]. Mit den Ergebnissen von Kapitel I können wir nun einen einfachen neuen Beweis für diesen Satz geben, der ohne banachanalytische Methoden auskommt.

(7.1) SATZ. — *Seien* $X \to S$ *eine separierte holomorphe Abbildung und* $\mathscr{F}$ *ein kohärenter* $\mathcal{O}_X$*-Modul. Dann ist der Grothendiecksche Funktor* $Q_{\mathscr{F}/X/S}$ *durch einen über* S *separierten komplexen Raum darstellbar.*

Beweis. — Q ist von lokaler Natur. Ferner erfüllt Q offenbar die Bedingung (S1′). Ist T ein komplexer Raum über S, $\mathscr{M}$ ein kohärenter $\mathcal{O}_T$-Modul und $a \in Q(T)$, gegeben durch einen Quotienten $\mathscr{G}=\mathscr{F}_T/\mathscr{K}$, so hat man bekanntlich einen kanonischen funktoriellen $\Gamma(T, \mathcal{O}_T)$-Modulisomorphismus

$$D_a(\mathscr{M})=Q_a(T[\mathscr{M}]) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{X_T}}(\mathscr{K}, \mathscr{G} \otimes_{\mathcal{O}_T} \mathscr{M}).$$

Hieraus folgt mit [6], (6.1) und (6.4), sofort, daß Q die Bedingungen (S2) und (S3) erfüllt.

Seien nun Y ein komplexer Raum über S und a, a' Elemente aus Q(Y), gegeben durch Quotienten $\mathscr{G}=\mathscr{F}_Y/\mathscr{K}$ und $\mathscr{G}'=\mathscr{F}_Y/\mathscr{K}'$. Sei $\mathscr{E} := \mathscr{F}_Y/(\mathscr{K}+\mathscr{K}')$. Ist Z ein komplexer Raum über Y, so gilt $a_Z=a'_Z$ genau dann, wenn die Homomorphismen $\mathscr{G}_Z \to \mathscr{E}_Z$ und $\mathscr{G}'_Z \to \mathscr{E}_Z$ bijektiv sind. Aus der anschließenden Aussage (7.2) folgt daher, daß der durch die Bedingung $a=a'$ definierte Funktor durch einen abgeschlossenen Unterraum von Y dargestellt wird.

Wir wollen nun überdies annehmen, daß $\mathscr{F}$ flach über S ist. Seien $T \subsetneq T'$ eine infinitesimale Erweiterung von komplexen Räumen über S derart, daß der Kern $\mathscr{M}$ von $\mathcal{O}_{T'} \to \mathcal{O}_T$ ein Ideal vom Quadrat Null ist, und $a \in Q(T)$, gegeben durch einen Quotienten $\mathscr{G}=\mathscr{F}_T/\mathscr{K}$, sowie $e \in \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_{X_{T'}}}(\mathscr{F}_T, \mathscr{F}_T \otimes \mathscr{M})$ das durch die Erweiterung

$$0 \to \mathscr{F}_T \otimes \mathscr{M} \to \mathscr{F}_{T'} \to \mathscr{F}_T \to 0$$

definierte Element. Ferner sei $O_a(T') \in \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_{X_{T'}}}(\mathscr{K}, \mathscr{G} \otimes \mathscr{M})$ das Bild von e unter der Komposition

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_{X_{T'}}}(\mathscr{F}_T, \mathscr{F}_T \otimes \mathscr{M}) \to \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_{X_{T'}}}(\mathscr{F}_T, \mathscr{G} \otimes \mathscr{M}) \to \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_{X_{T'}}}(\mathscr{K}, \mathscr{G} \otimes \mathscr{M}).$$

Dann ist $O_a(T')=0$ genau dann, wenn $Q_a(T')$ nicht leer ist. Ferner prüft man sofort nach, daß $O_a(T')$ stets in dem Untermodul $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_{X_T}}(\mathscr{K}, \mathscr{G} \otimes \mathscr{M})$ der $\mathcal{O}_{X_T}$-Erweiterungen liegt. Setzen wir also für einen kohärenten $\mathcal{O}_T$-Modul $\mathscr{M}$

$$O_a(\mathscr{M})=\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_{X_T}}(\mathscr{K}, \mathscr{G} \otimes \mathscr{M}),$$

so ist O eine Obstruktionstheorie für den Funktor Q. Daβ diese die Bedingungen (01), (02) erfüllt, ergibt sich leicht aus [6], (6.1) und (6.4). Somit gilt für Q nach [6], (4.1) die Offenheit der formalen Versalität, falls $\mathcal{F}$ flach über S ist.

Die Behauptung (7.1) für den allgemeinen »relativen« Fall folgt auf rein formalem Wege aus der Behauptung für den »absoluten« Fall $S=\mathrm{Spec}(\mathbb{C})$ und (7.2), vgl. [23]. Sei daher ohne Einschränkung $S=\mathrm{Spec}(\mathbb{C})$. Dann ist $\mathcal{F}$ trivialerweise flach. Nach dem oben Bewiesenen erfüllt Q die Bedingungen (1), (2) und (4) von (3.1). Daβ auch (3.1) (3) gilt, hat Jobst in [17] mittels der Potenzreihenmethode bewiesen. (7.1) folgt nun aus (3.1).

Im Beweis von (7.1) wurde die folgende Aussage verwendet.

(7.2) Satz. — *Seien* $X \to S$ *eine separierte holomorphe Abbildung und* $\mathcal{F} \to \mathcal{G}$ *eine Surjektion von kohärenten* $\mathcal{O}_X$*-Moduln. Ist* $\mathcal{F}$ *flach über* S *und liegt der Träger von* $\mathcal{F}$ *eigentlich über* S, *so gibt es einen abgeschlossenen analytischen Unterraum* $S' \subseteqq S$ *mit folgenden Eigenschaften :*

(1) *Der Homomorphismus* $\mathcal{F}_{S'} \to \mathcal{G}_{S'}$ *ist bijektiv;*

(2) *Ist* T *ein komplexer Raum über* S *derart, daβ* $\mathcal{F}_T \to \mathcal{G}_T$ *bijektiv ist, so faktorisiert sich* $T \to S$ *(eindeutig) über* S'.

Dieses Resultat wurde zuerst von Pourcin in [23] mit den Methoden von Douady gezeigt. Inzwischen hat Kexel in [18] hierfür einen rein algebraischen Beweis gegeben.

Es soll nun noch gezeigt werden, daβ der globale Platifikationssatz von Frisch [13] eine direkte Folgerung aus (7.1) ist.

(7.3) Satz (Frisch). — *Seien* $X \xrightarrow{f} S$ *eine separierte holomorphe Abbildung und* $\mathcal{F}$ *ein kohärenter* $\mathcal{O}_X$*-Modul, dessen Träger eigentlich über* S *liegt. Dann gibt es einen komplexen Raum* S' *über* S *mit folgenden Eigenschaften :*

(1) *Der Modul* $\mathcal{F}_{S'}$ *ist* S'*-flach;*

(2) *Ist* T *ein komplexer Raum über* S *derart, daβ* $\mathcal{F}_T$ *flach über* T *ist, so faktorisiert sich* $T \to S$ *eindeutig über eine holomorphe Abbildung* $T \to S'$.

Überdies ist $S' \to S$ *eine bijektive lokale Immersion.*

Beweis. — Für einen komplexen Raum T über S sei $F(T)=\{\emptyset\}$, falls $\mathcal{F}_T$ flach über T ist, und $F(T)=\emptyset$ sonst. Unser Problem besteht gerade darin, den so definierten Funktor F darzustellen. Sei $Q=Q_{\mathcal{F}/X/S}$ der zu $f: X \to S$ und $\mathcal{F}$ gehörige Grothendiecksche Modulraum. Man hat einen kanonischen Funktormorphismus $F \to Q$. Sei

$$\mathcal{F}_Q \to \mathcal{G}$$

der universelle Quotient von $\mathcal{F}_Q$ und $\mathcal{K}$ der Kern von $\mathcal{F}_Q \to \mathcal{G}$. Dann ist $S' := Q \setminus f_Q(\mathrm{Supp}(\mathcal{K}))$ ein offener Unterraum von Q. Offenbar wird F durch S' dargestellt ! Ferner ist $S' \to S$ ein bijektiver Monomorphismus, also eine bijektive lokale Immersion.

8. Deformationen von Kohomologieklassen

Seien $X \xrightarrow{f} S$ eine separierte holomorphe Abbildung und $\mathscr{F}$ ein S-flacher kohärenter $\mathcal{O}_X$-Modul, dessen Träger eigentlich über S liegt, und $p \in \mathbb{N}$. Für einen komplexen Raum T über S sei

$$F(T) := \Gamma(T, R^p f_{T*}(\mathscr{F}_T)).$$

Hierbei haben wir wie üblich $X_T = X \times_S T$ und $f_T = f \times_S T$ gesetzt und das Urbild von $\mathscr{F}$ unter der Projektion $X_T \to X$ mit $\mathscr{F}_T$ bezeichnet. Dann ist F ein kontravarianter Funktor auf der Kategorie der komplexen Räume über S mit Werten in der Kategorie der $\mathbb{C}$-Vektorräume. Die folgende Aussage beantwortet eine Frage aus [27].

(8.1) Satz. — *Mit den obigen Bezeichnungen und Voraussetzungen gilt :*

(1) *Ist* $s \in S$, *so besitzt jedes Element* $a_0 \in F(k(s)) = H^p(X_s, \mathscr{F}_s)$ *eine konvergente semiuniverselle Deformation;*

(2) *Sei* $T \to S$ *ein komplexer Raum über* S *und* $a \in F(T)$. *Dann ist die Menge der Punkte* $t \in T$, *in denen a versell ist, Zariski-offen in* T;

(3) *Ist* $R^{p-1} f_* (\mathscr{F})_s \to H^{p-1}(X_s, \mathscr{F}_s)$ *surjektiv für jeden Punkt* $s \in S$, *so wird* F *durch einen linearen Faserraum über* S *dargestellt.*

Beweis. — Weil die Behauptungen lokal bezüglich S sind, dürfen wir annehmen, daß es einen Komplex $\mathscr{L}^\bullet$ aus endlichen freien $\mathcal{O}_S$-Moduln gibt, so daß

$$R^i f_{T*}(\mathscr{F}_T \otimes_{\mathcal{O}_T} \mathscr{M}) = H^i(\mathscr{L}^\bullet_T \otimes_{\mathcal{O}_T} \mathscr{M}), \qquad i \in \mathbb{N},$$

gilt für jeden komplexen Raum T über S und jeden kohärenten Modul $\mathscr{M}$ auf T, vgl. hierzu [11], [20]. Man sieht leicht, daß F die Bedingung (S1) (*a*) erfüllt. Es sei nun $T \subsetneq T'$ eine infinitesimale Erweiterung von Steinschen Räumen über S durch einen kohärenten $\mathcal{O}_T$-Modul $\mathscr{M}$. Aus der exakten Garbensequenz

$$0 \to \mathscr{F}_T \otimes_{\mathcal{O}_T} \mathscr{M} \to \mathscr{F}_{T'} \to \mathscr{F}_T \to 0$$

erhalten wir die exakte Kohomologiesequenz

$$H^p(X_T, \mathscr{F} \otimes \mathscr{M}) \to F(T') \to F(T) \xrightarrow{\partial} H^{p+1}(X_T, \mathscr{F} \otimes \mathscr{M}).$$

Setzen wir für $a \in F(T)$:

$$O_a(\mathscr{M}) := H^{p+1}(X_T, \mathscr{F}_T \otimes \mathscr{M}),$$
$$O_a(T') := \partial(a) \in O_a(\mathscr{M}),$$

so ist O offenbar eine Obstruktionstheorie für F. Wenden wir die obige Sequenz speziell auf den Fall an, daß $T' = T[\mathscr{M}]$ die triviale Erweiterung durch $\mathscr{M}$ ist, so erhalten wir, daß

$$D_a(\mathscr{M}) = F_a(T[\mathscr{M}]) = H^p(X_T, \mathscr{F}_T \otimes \mathscr{M})$$

als Moduln über $\Gamma(T, \mathcal{O}_T)$ gilt. Dies zeigt, daß (S1), (S2), (S3) für F gilt, und daß O die Bedingungen (O1) und (O2) aus [6] erfüllt.

Seien nun s ein Punkt aus S und $A^{(i)}$, $i \in I$, ein induktives System von konvergenten analytischen $\mathcal{O}_{S,s}$-Algebren derart, daβ $A = \varinjlim A^{(i)}$ eine komplette analytische Algebra ist. Wegen

$$\hat{F}(A) = \varprojlim_n H^p(\mathcal{L}_s^{\bullet} \otimes_{\mathcal{O}_{S,s}} A/\mathfrak{m}_A^{n+1}) = H^p(\mathcal{L}_s^{\bullet} \otimes_{\mathcal{O}_{S,s}} A)$$

und

$$F(A^{(i)}) = H^p(\mathcal{L}_s^{\bullet} \otimes_{\mathcal{O}_{S,s}} A^{(i)})$$

ist dann der kanonische Homomorphismus

$$\varinjlim_{i \in I} F(A^{(i)}) \to \hat{F}(A)$$

bijektiv. Nach (2.4) besitzt jedes Element $a_0 \in F(k(s))$ eine konvergente formal semiuniverselle Deformation. Aus [6], (3.5), folgt ferner, daβ jede konvergente formal verselle Deformation bereits versell ist. Dies beweist (1). Die Behauptung (2) ergibt sich aus [6], (4.1).

Unter der Voraussetzung von (3) gibt es nach (5.1), (5.3) und (5.4) einen kohärenten $\mathcal{O}_S$-Modul $\mathcal{Q}$ derart, daβ $R^p f_{T*}(\mathcal{F}_T \otimes \mathcal{M}) = \mathcal{H}\underline{om}_{\mathcal{O}_T}(\mathcal{Q}_T, \mathcal{M})$ gilt für jeden Basiswechsel $T \to S$ und jeden kohärenten $\mathcal{O}_T$-Modul $\mathcal{M}$. Dann wird F offenbar durch den linearen Faserraum $\mathbb{V}(\mathcal{Q}) \to S$ repräsentiert.

9. Deformationen kohärenter Moduln

Wir wollen uns hier zunächst überlegen, daβ der Satz von Siu-Trautmann über Deformationen von Moduln mit kompakten Träger ([26], Theorem 1) auch im relativen Fall richtig bleibt.

Sei $X \xrightarrow{f} S$ eine separierte holomorphe Abbildung. Wir definieren wie folgt ein Gruppoid F_f über (An/S). Die Objekte von $F_f(T)$ sind T-flache kohärente Moduln auf $X_T = X \times_S T$, deren Träger eigentlich über T liegt. Ist $\mathcal{F}$ bzw. $\mathcal{F}'$ ein Objekt aus $F_f(T)$ bzw. $F_f(T')$, so ist ein Morphismus $\mathcal{F}' \to \mathcal{F}$ eine holomorphe S-Abbildung $T' \to T$ zusammen mit einem $\mathcal{O}_{X_{T'}}$-Isomorphismus von $\mathcal{F}'$ auf $\mathcal{F}_{T'}$.

(9.1) Satz. — *Ist $s \in S$, so besitzt jedes Element $\mathcal{F}_0$ aus $F_f(k(s))$ eine konvergente semiuniverselle Deformation.*

Beweis. — Es sei f' die Komposition von f mit dem Strukturmorphismus $S \to \operatorname{Spec}(\mathbb{C})$. Nach [26], Theorem 1, besitzt $\mathcal{F}_0$ aufgefaβt als Element von $F_{f'}(\mathbb{C})$, eine konvergente formal semiuniverselle Deformation. Diese werde gegeben durch einen Raum T', einen T'-flachen kohärenten Modul $\mathcal{F}'$ auf $X \times T'$, dessen Träger eigentlich über T' liegt, einen Punkt $t' \in T'$ und einen Isomorphismus $\mathcal{F}'/\mathfrak{m}_{t'}\mathcal{F}' \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}_0$.

Seien $T := T' \times S$ und $\mathcal{F}$ das Urbild von $\mathcal{F}'$ unter der Projektion von $X \times T$ auf $X \times T'$ sowie $\mathcal{J}$ die zu der kanonischen Einbettung $X \times_S T \to X \times T$ gehörige Idealgarbe von

$\mathcal{O}_{X \times T}$. Wenden wir (7.2) auf die Surjektion $\mathcal{F} \to \mathcal{F} / \mathcal{I} \mathcal{F}$ an, so erhalten wir einen abgeschlossenen analytischen Unterraum Z von T derart, daß $\mathcal{F}_Z \to \mathcal{F}_Z / \mathcal{I} \mathcal{F}_Z$ bijektiv ist. Dann ist $\mathcal{F}_Z$ sogar ein Modul auf $X \times_S Z$. Offenbar ist $\mathcal{F}_Z$ eine formal semiuniverselle Deformation von $\mathcal{F}_0 \in F_f(k(s))$. Daß diese Deformation semiuniversell ist, folgt aus [6], (3.2) (2), und der anschließenden Aussage (9.2).

(9.2) AUSSAGE. — *Seien* $X \to S$ *eine separierte holomorphe Abbildung und* $\mathcal{F}$, $\mathcal{F}'$ *zwei* S-*flache kohärente* $\mathcal{O}_X$-*Moduln, deren Träger eigentlich über* S *liegt. Für einen komplexen Raum* T *über* S *sei*

$$\operatorname{Hom}(\mathcal{F}, \mathcal{F}')(T) := \operatorname{Hom}_{\mathcal{O}_{X_T}}(\mathcal{F}_T, \mathcal{F}'_T).$$

Dann wird der so definierte Funktor $\underline{\operatorname{Hom}}(\mathcal{F}, \mathcal{F}')$ *durch einen linearen Faserraum* Z *über* S *repräsentiert.*

Beweis. — Sei Q der komplexe Raum über S, der den Grothendieckschen Funktor $Q_{\mathcal{F} \perp\!\!\perp \mathcal{F}'/X/S}$ darstellt, und $\mathcal{G} = (\mathcal{F} \perp\!\!\perp \mathcal{F}')_Q / \mathcal{K}$ der universelle Quotient. Dann liegt $\mathcal{K}$ flach und eigentlich über Q. Sei $Z \subseteqq Q$ der größte analytische Unterraum, für den der Homomorphismus $\mathcal{K}_Z \to \mathcal{F}_Z$ bijektiv ist, vgl. (7.2). $\mathcal{K}_Z$ ist Graph eines Homomorphismus u von $\mathcal{F}_Z$ in $\mathcal{F}'_Z$.

Wir behaupten, daß das Paar (u, Z) den Funktor Hom $(\mathcal{F}, \mathcal{F}')$ repräsentiert. Sei dazu T ein komplexer Raum über S und v ein Homomorphismus von $\mathcal{F}_T$ in $\mathcal{F}'_T$ mit Graph Γ_v sowie $\overline{\mathcal{G}} := (\mathcal{F} \perp\!\!\perp \mathcal{F}')_T / \Gamma_v$. Weil $\Gamma_v \to \mathcal{F}_T$ ein Isomorphismus ist, folgt, daß $\overline{\mathcal{G}}$ flach über T ist. Somit gibt es genau einen S-Morphismus $\varphi : T \to Q$ mit $\mathcal{K}_T = \Gamma_v$. Dieser faktorisiert sich offensichtlich über Z. Daß Z ein linearer Faserraum ist, folgt daraus, daß Hom $(\mathcal{F}, \mathcal{F}')$ ein modulwertiger Funktor ist.

(9.3) KOROLLAR. — *Die Voraussetzungen und Bezeichnungen seien wie in* (9.2). *Dann ist der Funktor* $\mathcal{M} \mapsto \operatorname{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{F}' \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{M})$ *auf der Kategorie der kohärenten Moduln auf* S *darstellbar, d.h. es existiert ein kohärenter* $\mathcal{O}_S$-*Modul* $\mathcal{Q}$ *und ein in* $\mathcal{M}$ *funktorieller Isomorphismus*

$$\operatorname{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{F}' \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{M}) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Hom}_{\mathcal{O}_S}(\mathcal{Q}, \mathcal{M}).$$

Fermer ist der Modul $\mathcal{Q}$ *mit beliebigem Basiswechsel verträglich.*

Beweis. — Es gibt einen eindeutig bestimmten kohärenten $\mathcal{O}_S$-Modul $\mathcal{Q}$ mit $\mathbb{V}(\mathcal{Q}) = Z$, vgl. [9], p. 51. Für jeden komplexen Raum T über S ist dann

$$\operatorname{Hom}_S(T, Z) = \operatorname{Hom}_{\mathcal{O}_T}(\mathcal{Q}_T, \mathcal{O}_T).$$

Speziell für $T = S[\mathcal{M}]$ folgt $\operatorname{Hom}_S(T, Z) = \operatorname{Hom}_{\mathcal{O}_S}(\mathcal{Q}, \mathcal{O}_S) \perp\!\!\perp \operatorname{Hom}_{\mathcal{O}_S}(\mathcal{Q}, \mathcal{M})$. Weil Z den Funktor Hom $(\mathcal{F}, \mathcal{F}')$ darstellt, ist andererseits

$$\begin{aligned} \operatorname{Hom}_S(S[\mathcal{M}], Z) &= \operatorname{Hom}_{\mathcal{O}_{X_{S[\mathcal{M}]}}}(\mathcal{F}_{S[\mathcal{M}]}, \mathcal{F}'_{S[\mathcal{M}]}) \\ &= \operatorname{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{F}') \perp\!\!\perp \operatorname{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{F}' \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{M}). \end{aligned}$$

Hieraus folgt die Behauptung.

10. Gekoppelte Deformationen

(10.1) Wir beginnen mit einer Vorüberlegung allgemeiner Art. Seien S ein komplexer Raum und $u : F \to G$ ein Funktor von Gruppoiden über (An/S). Ist T ein komplexer Raum über S und $b \in G(T)$, so ist die *Faser* F_b von u in b das in folgender Weise definierte Gruppoid über (An/T). Die Objekte dieses Gruppoids über einem komplexen Raum Z über T sind Paare (a, φ) bestehend aus einem Element $a \in F(Z)$ und einem Isomorphismus $\varphi : b_Z \xrightarrow{\sim} u(a)$ in $G(Z)$. Ist (a', φ') ein weiteres Objekt von F_b über Z', so ist ein Morphismus von (a', φ') in (a, φ) ein Pfeil $\alpha : a' \to a$ in F, dessen zugrunde liegende holomorphe Abbildung $Z' \to Z$ ein T-Morphismus ist, und für den das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} b_{Z'} & \xrightarrow{\varphi'} & u(a') \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle u(\alpha)} \\ b_Z & \xrightarrow[\varphi]{} & u(a) \end{array}$$

kommutiert. Die folgende Aussage ist leicht zu verifizieren.

(10.2) *Sei* $b \in G(T)$ *und* $(a, \varphi) \in F_b(Z)$. *Es sei* $z \in Z$ *ein Punkt mit Bild* $t \in T$. *Ist dann* b *versell in* t *und* (a, φ) *versell in* z, *so ist auch* a *versell in* z.

(10.3) KOROLLAR. — *Folgende Bedingungen seien erfüllt :*

(1) *In* G *und allen Fasern* F_b, $b \in G(T)$, *existieren stets verselle Deformationen, und die Versalität ist in* G *und* F_b *eine offene Eigenschaft;*

(2) F *erfüllt die Schlessinger-Bedingung* (S1) *für einpunktige Räume.*

Dann existieren in F *stets semiuniverselle Deformationen, und die Versalität ist eine offene Eigenschaft in* F.

Beweis. — Aus (10.2) folgt, daβ es zu jedem Element $a_0 \in F(k(s))$, $s \in S$, ein $a \in F(Z)$ und einen Punkt $z \in Z$ mit $a(z) = a_0$ gibt derart, daβ a in jedem Punkt von Z versell ist. Die erste Behauptung folgt nun aus [10], (8.1), während die zweite aus [6], (4.3) (4), resultiert.

Wir bemerken noch :

(10.4) *Erfüllt* G *die Bedingung* (S1′) *und erfüllen die Fasern* F_b, $b \in G(T)$, *die Bedingung* (S1), *so gilt auch* (S1) *für* F.

(10.5) Sei $p \in \mathbb{N}$. Mit F wollen wir nun das Gruppoid über (An) bezeichnen, dessen Objekte über einem komplexen Raum S gerade die Tripel $(X, \mathscr{F}, a)$ bestehend aus einer eigentlichen flachen holomorphen Abbildung $f : X \to S$, einem S-flachen kohärenten Modul $\mathscr{F}$ auf X und einer Kohomologieklasse a aus $\Gamma(S, R^p f_*(\mathscr{F}))$ sind. Die Morphismen in F sind dabei in naheliegender Weise erklärt.

(10.6) SATZ. — *Mit den Voraussetzungen und Bezeichnungen von* (10.5) *gilt :*

(1) *Jedes Tripel* $(X_0, \mathscr{F}_0, a_0)$ *aus* $F(\mathbb{C})$ *besitzt eine konvergente semiuniverselle Deformation;*

(2) *In* F *ist die Versalität eine offene Eigenschaft.*

Beweis. — Es sei G das Gruppoid der eigentlichen flachen holomorphen Abbildungen. Man hat einen kanonischen Funktor $F \to G$. In G existieren stets semiuniverselle Deformationen ([8], [12], [14], [22]), und die Versalität ist in G eine (Zariski-) offene Eigenschaft, vgl. [6], (7.1). Wegen (10.2), (10.3) und (10.4) genügt es zu zeigen, daß das Entsprechende auch für die Fasern F_b, $b \in G(S)$, gilt. Hierbei sei b gegeben durch eine eigentliche flache holomorphe Abbildung $f: Y \to S$. Die Faser F_b identifiziert sich offenbar mit dem Gruppoid H über (An/S), dessen Objekte über T gerade die Paare $(\mathscr{F}, a)$ bestehend aus einem T-flachen kohärenten Modul $\mathscr{F}$ auf $Y_T = Y \times_S T$ und einer Klasse a aus $\Gamma(T, R^p f_{T*}(\mathscr{F}))$ sind.

Für einen Raum T über S sei I(T) das Gruppoid der T-flachen kohärenten Moduln auf Y_T. Man hat einen kanonischen Morphismus $H \to I$ von Gruppoiden über (An/S). In I existieren stets semiuniverselle konvergente Deformation, und die Versalität ist eine (Zariski-) offene Eigenschaft, vgl. (9.1) und [6], (8.1). Wieder genügt es wegen (10.2), (10.3) und (10.4) zu zeigen, daß in den Fasern H_b, $b \in I(T)$, analoges gilt. Das ist aber gerade der Inhalt von (8.1), (1) und (2).

11. Der Grothendiecksche Existenzsatz

Sei $X \to S$ eine holomorphe Abbildung separierter komplexer Räume. Für einen komplexen Raumkeim T über S setzen wir $X_T := X \times_S T$ und bezeichnen die Kategorie der Keime von kohärenten Moduln auf X_T, deren Träger eigentlich über T liegt, mit $\mathrm{Coh}_e(X_T)$. Es sei $\mathrm{Coh}_{p,e}(X_T)$ die volle Unterkategorie, die aus allen T-flachen Moduln besteht. Ist R die zu T gehörige analytische Algebra, so schreiben wir auch $\mathrm{Coh}_e(X_R)$ bzw. $\mathrm{Coh}_{p,e}(X_R)$ anstelle von $\mathrm{Coh}_e(X_T)$ bzw. $\mathrm{Coh}_{p,e}(X_T)$. Ist $T' \to T$ ein Morphismus von Raumkeimen, so hat man einen kanonischen Funktor von $\mathrm{Coh}_e(X_T)$ in $\mathrm{Coh}_e(X_{T'})$, welcher $\mathrm{Coh}_{p,e}(X_T)$ in $\mathrm{Coh}_{p,e}(X_{T'})$ überführt.

Sei nun $s \in S$ ein Punkt, A eine *komplette* analytische $\mathscr{O}_{S,s}$-Algebra und $A = \varinjlim A^{(i)}$ eine Darstellung von A als induktiver Limes eines Systems $A^{(i)}$, $i \in I$, *konvergenter* analytischer $\mathscr{O}_{S,s}$-Algebren. Wir haben dann kanonische Funktoren

(11.1) $$\varinjlim_{i \in I} \mathrm{Coh}_e(X_{A^{(i)}}) \to \varprojlim_{n \in \mathbb{N}} \mathrm{Coh}_e(X_{A/\mathfrak{m}_A^{n+1}})$$

und

(11.2) $$\varinjlim_{i \in I} \mathrm{Coh}_{p,e}(X_{A^{(i)}}) \to \varprojlim_{n \in \mathbb{N}} \mathrm{Coh}_{p,e}(X_{A/\mathfrak{m}_A^{n+1}}).$$

Es gilt :

(11.3) SATZ. — *Der Funktor* (11.2) *ist eine Äquivalenz von Kategorien.*

Beweis. — Wir zeigen zunächst, daß der betrachtete Funktor *volltreu* ist. Dazu haben wir nachzuweisen, daß für $i_0 \in I$ und für je zwei Moduln $\mathscr{F}$, $\mathscr{G}$ aus $\mathrm{Coh}_{p,e}(X_{A^{(i_0)}})$ der kanonische Homomorphismus

$$\varinjlim_{i \geqq i_0} \mathrm{Hom}(\mathscr{F} \otimes A^{(i)}, \mathscr{G} \otimes A^{(i)}) \to \varprojlim_{n \in \mathbb{N}} \mathrm{Hom}(\mathscr{F} \otimes A/\mathfrak{m}_A^{n+1}, \mathscr{G} \otimes A/\mathfrak{m}_A^{n+1})$$

bijektiv ist. Indem wir (S, s) durch den zu $A^{(i_0)}$ gehörigen Raumkeim ersetzen, können wir annehmen, daß $\mathscr{F}$ und $\mathscr{G}$ Moduln aus $\mathrm{Coh}_{p,e}(X)$ sind. Nach (9.2) ist der Funktor

$$T \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_{X_T}}(\mathscr{F} \otimes_{\mathscr{O}_S} \mathscr{O}_T, \mathscr{G} \otimes_{\mathscr{O}_S} \mathscr{O}_T)$$

durch einen komplexen Raum über S darstellbar. Hieraus ergibt sich aber unmittelbar, daß obige Abbildung bijektiv ist.

Der Funktor (11.2) ist auch *im wesentlichen surjektiv*. Sei dazu $(\mathscr{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ein Objekt aus $\varprojlim \mathrm{Coh}_{p,e}(X_{A/\mathfrak{m}_A^{n+1}})$. Dann ist $(\mathscr{F}_n)$ eine *formale* Deformation des kohärenten Moduls $\mathscr{F}_0$ auf $X_{k_A} = X_s$. Nach (9.1) gibt es eine konvergente analytische $\mathscr{O}_{S,s}$-Algebra R und einen Modul $\mathscr{G}$ aus $\mathrm{Coh}_{p,e}(X_R)$ mit $\mathscr{G}/\mathfrak{m}_R\,\mathscr{G} = \mathscr{F}_0$, welcher eine verselle Deformation von $\mathscr{F}_0$ ist. Somit findet man einen $\mathscr{O}_{S,s}$-Homomorphismus $\varphi : R \to A$ derart, daß $(\mathscr{G} \otimes_R A/\mathfrak{m}_A^{n+1})$ zu $(\mathscr{F}_n)$ isomorph ist. Offenbar gibt es ein i und einen Homomorphismus $\varphi_i : R \to A^{(i)}$, welcher φ liftet. Dann ist $\mathscr{G} \otimes A^{(i)}$ ein Modul aus $\mathrm{Coh}_{p,e}(X_{A^{(i)}})$, der $(\mathscr{F}_n)$ induziert.

Ist die Abbildung $X \to S$ relativ algebraisch, so ist sogar (11.1) eine Äquivalenz von Kategorien, vgl. [16], (III 5.1.4), und [5], (4.5). Ob dies ganz allgemein der Fall ist, ist dem Verfasser nicht bekannt.

LITERATUR

[1] M. ARTIN, *On the Solutions of Analytic Equations* (*Invent. math.*, Bd. 5, 1968, S. 277-291).

[2] M. ARTIN, *Algebraization of Formal Moduli:* I, in *Global Analysis*, University of Tokyo Press, 1969, S. 21-71.

[3] M. ARTIN, *Versal Deformations and Algebraic Stacks* (*Invent. math.*, Bd. 27, 1974, S. 165-189).

[4] J. BINGENER, *Schemata über Steinschen Algebren* (*Schriftenreihe des Mathematischen Instituts der Universität Münster*, 2. Serie, Heft 10, 1976, S. 1-52).

[5] J. BINGENER, *Über formale komplexe Räume* (*Manuscripta math.*, Bd. 24, 1978, S. 253-293).

[6] J. BINGENER, *Offenheit der Versalität in der analytischen Geometrie* (Erscheint demnächst in der *Math. Z.*).

[7] A. DOUADY, *Le problème des modules pour les sous-espaces analytiques compacts d'un espace analytique donné* (*Ann. Inst. Fourier*, Bd. 16, 1966, S. 1-95).

[8] A. DOUADY, *Le problème des modules locaux pour les espaces ℂ-analytiques compactes* (*Ann. scient. Ec. Norm. Sup.*, Bd. 7, 1974, S. 569-602).

[9] G. FISCHER, *Complex Analytic Geometry* (*Lec. Notes in Math.*, Nr. 538, Berlin-Heidelberg-New York : Springer, 1976).

[10] H. FLENNER, *Über Deformationen holomorpher Abbildungen. Habilitationsschrift*, Osnabrück, 1978.

[11] O. FORSTER und K. KNORR, *Ein Beweis des Grauertschen Bildgarbensatzes nach Ideen von B. Malgrange* (*Manuscripta math.*, Bd. 5, 1971, S. 19-44).

[12] O. FORSTER und K. KNORR, *Konstruktion verseller Deformationen kompakter komplexer Räume* (*Lec. Notes in Math.*, Nr. 705, Berlin-Heidelberg-New York : Springer, 1979).

[13] J. FRISCH, *Aplatissement en géométrie analytique* (*Ann. scient. Ec. Norm. Sup.*, Bd. 1, 1968, S. 305-312).

[14] H. GRAUERT, *Der Satz von Kuranishi für kompakte komplexe Räume* (*Invent. math.*, Bd. 25, 1974, S. 107-142).

[15] A. GROTHENDIECK, *Quelques problèmes de modules*, in : *Seminaire H. Cartan*, 1960/1961, 2e édition, corrigée (hektographiert).

[16] A. GROTHENDIECK und J. DIEUDONNÉ, *Éléments de géométrie algébrique* (*Pub. Math. I.H.E.S.*, Bd. 4, 8, 11, 17, 20, 24, 28, 32, 1960-1967).

[17] F. JOBST, *Dissertation*, Regensburg, 1976.

[18] W. KEXEL, *Zariski-Offenheit von eigentlichen, flachen holomorphen Abbildungen* (*Dissertation*, Bayreuth, 1977).

[19] R. KIEHL, *Äquivalenzrelationen in analytischen Räumen* (*Math. Z.*, Bd. 105, 1968, S. 1-20).
[20] R. KIEHL und J. L. VERDIER, *Ein einfacher Beweis des Kohärenzsatzes von Grauert* (*Math. Ann.*, Bd. 195, 1971, S. 24-50).
[21] D. MUMFORD, *Lectures on Curves on an Algebraic Surface* (*Annals of Mathematics Studies*, Bd. 59, 1966).
[22] V. P. PALAMODOV, *Deformations of Complex Spaces* (*Russian Math. Surveys*, Bd. 31, 1976, S. 129-197).
[23] G. POURCIN, *Théorème de Douady au-dessus de S* (*Annali della Scuola Normale Superiore de Pisa*, Bd. 23, 1969, S. 451-459).
[24] D. S. RIM, *Formal Deformation Theory. Exp. VI in Groupes de Monodromie en Géométrie algébrique* (*SGA* 71) (*Lec. Notes in Math.*, Nr. 288, Berlin-Heidelberg-New York, Springer, 1972).
[25] H. W. SCHUSTER, *Formale Deformationstheorien. Habilitationsschrift*, München, 1971.
[26] Y.-T. SIU und G. TRAUTMANN, *Deformations of Coherent Analytic Sheaves with Compact Supports. Erscheint demnächst*.
[27] J. J. WAVRIK, *Deforming Cohomology Classes* (*Transactions A.M.S.*, Bd. 181, 1973, S. 341-351).
[28] J. J. WAVRIK, *A Theorem on Solutions of Analytic Equations with Applications to Deformations of Complex Structures* (*Math. Ann.*, Bd. 216, 1975, S. 127-142).

(Manuscrit reçu le 8 octobre 1979.)

J. BINGENER
Fachbereich Mathematik der Universität,
Universitätstraße 31,
D-8400 Regensburg,
R.F.A;

I.H.E.S.
35, route de Chartres,
91440 Bures-sur-Yvette,
Frankreich.