ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

E. CALABI

Métriques kählériennes et fibrés holomorphes

Annales scientifiques de l'É.N.S. 4e série, tome 12, nº 2 (1979), p. 269-294

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1979_4_12_2_269_0>

Ann. scient. Éc. Norm. Sup.,
4^e série, t. 12, 1979, p. 269 à 294.

MÉTRIQUES KÄHLÉRIENNES ET FIBRÉS HOLOMORPHES (*)

PAR E. CALABI (**)

1. Introduction

Nous rappelons le fait suivant, qui est bien connu. Lorsqu'on se donne un fibré différentiable quelconque, l'espace de base et la fibre étant munis de métriques riemanniennes et le groupe structural G opérant isométriquement sur les fibres, alors la donnée d'une connexion sur le fibré compatible avec l'action du groupe structural détermine dans l'espace total du fibré une métrique riemannienne, uniquement caractérisée par les propriétés suivantes :

1° la métrique induite sur la fibre au-dessus de n'importe quel point de la base équivaut à la métrique donnée dans la fibre abstraite par n'importe quel isomorphisme structural entre les deux;

2° en chaque point du fibré, tout vecteur tangent qui est horizontal par rapport à la connexion est orthogonal à la fibre passant par ce point;

3° la projection du fibré sur l'espace de base est une surjection (submersion) riemannienne, compatible partout avec la métrique donnée dans l'espace de base.

D'autre part, si la structure riemannienne de l'espace de base comme celle des fibres sont des structures kählériennes, la même construction de structure métrique sur l'espace total du fibré, n'amène qu'à une structure presque hermitienne, qui en général n'est pas intégrable à une structure complexe et, même si elle l'est, la métrique définie n'est kählérienne que dans des cas qui sont très rares; par l'exemple, dans le cas des fibrés vectoriels holomorphes, une structure hermitienne ainsi construite n'est kählérienne que si la courbure de la connexion est identiquement nulle.

(*) Exposé d'une conférence tenue à Palaiseau au Centre de Mathématiques de l'École Polytechnique, le 5 juin 1978.

(**) Research supported in part by the National Science Foundation, Contract GP 75-07917 and by the Institut des Hautes Études scientifiques, Bures-sur-Yvette.

Il est toutefois possible, au moins dans certains cas, d'introduire dans l'espace total d'un fibré holomorphe une forme kählérienne déterminée par des données correspondantes dans l'espace de base et dans la fibre, si on sacrifie en échange la troisième des propriétés énoncées ci-dessus, en la remplaçant par une condition plus faible, mais moins facile à énoncer hors de ce contexte. De telles métriques ont été introduites sans doute ailleurs, mais aucune étude systématique n'a été portée jusqu'ici à l'attention de l'auteur. Une conséquence d'une analyse de telles métriques kählériennes dans certains fibrés analytiques complexes nous permet de construire de nombreux exemples explicites de métriques kählériennes, parfois complètes, jouissant de certaines propriétés remarquables, parmi lesquelles nous allons trouver :

1° des métriques kählériennes (section 4) à courbure de Ricci constante (condition d'Einstein) et en particulier à courbure de Ricci nulle;

2° des métriques kählériennes (section 5) dont le groupe d'holonomie est le groupe compact $Sp(n)$ ($n=1, 2, \ldots$), où $2n$ est la dimension complexe de la variété fibrée; ce sont apparemment les premiers exemples connus de telles structures, qui ont été appelées « structures tangentielles quaternioniennes », mais pour lesquelles nous préférons l'appellation de « structures hyperkählériennes », pour des raisons que nous expliquerons au moment opportun.

2. Formes kählériennes dans les fibrés vectoriels

Soit M une variété complexe à n dimensions complexes, compacte ou non, munie d'une métrique kählérienne, que l'on peut représenter localement, soit par sa forme riemannienne définie positive

$$ds^2 = 2\, g_{\alpha\bar{\beta}}(z, \bar{z})\, dz^\alpha\, d\bar{z}^\beta, \tag{2.1}$$

soit par sa forme extérieure

$$F = -(2\pi i)^{-1}\, g_{\alpha\bar{\beta}}(z, \bar{z})\, dz^\alpha \wedge d\bar{z}^\beta.$$

La condition de Kähler s'exprime, d'une manière équivalente, soit par le fait que la forme F est fermée, soit par l'existence locale d'une fonction potentielle de Kähler Φ, unique à une fonction pluriharmonique près, telle que

$$g_{\alpha\bar{\beta}} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^\alpha . \partial \bar{z}^\beta} \quad \text{ou bien} \quad F = (2\pi i)^{-1}\, \bar{\partial}\partial\Phi. \tag{2.2}$$

D'une manière plus générale nous dirons qu'une forme extérieure ω dans une variété complexe quelconque est *de type kählérien* si c'est une forme de bidegré (1, 1), fermée et ne prenant que des valeurs réelles sur n'importe quelle paire de vecteurs tangents réels.

Soit $L \xrightarrow{\pi} M$ un fibré vectoriel holomorphe sur M de rang (dimension complexe de la fibre) m : si L est muni d'une structure hermitienne définie positive, cela signifie que le fibré L peut être considéré comme muni alternativement de deux groupes structuraux :

1° le groupe $GL(m, \mathbf{C})$, par rapport auquel on peut exprimer le fait que L est un fibré holomorphe;

2° le groupe $U(m) \subset GL(m, \mathbf{C})$, la réduction au groupe $U(m)$ étant définie par le choix de structure hermitienne.

Soit U un ouvert de M servant à la fois comme domaine d'un système de coordonnées holomorphes (z^α) $(1 \leqq \alpha \leqq n)$ de M et comme domaine d'existence d'un système de coordonnées holomorphes linéaires (ζ^λ) $(1 \leqq \lambda \leqq m)$ sur chaque fibre dans $\pi^{-1}(U)$, de façon que $(z^1, \ldots, z^n; \zeta^1, \ldots, \zeta^m)$ constitue un système de coordonnées holomorphes dans l'ouvert $\pi^{-1}(U) \subset L$. On peut représenter localement la structure hermitienne dans L par une matrice hermitienne $(a_{\lambda\bar{\mu}}(z, \bar{z}))$ de fonctions sur U telle que la forme hermitienne s'exprime par

$$t = a_{\lambda\bar{\mu}}(z, \bar{z})\, \zeta^\lambda \bar{\zeta}^\mu \tag{2.3}$$

dont la valeur t, positive sauf en la section nulle de L, est une fonction invariante, définie globalement dans L. Dans la suite on désignera par $\mathscr{K}$ et $\mathscr{A}$ respectivement une structure kählérienne sur M, comme dans (2.1) ou (2.2), et une structure hermitienne sur $L \xrightarrow{\pi} M$, comme dans (2.3).

Une structure hermitienne $\mathscr{A}$ sur L équivaut à une réduction du groupe structural de L de $GL(m, \mathbf{C})$ à $U(m)$, dans le sens qu'elle entraîne la formule de substitution remplaçant l'atlas des coordonnées *holomorphes* des fibres (ζ^λ) par des coordonnées correspondantes orthonormées, notées par $(w_1, \ldots, w_m)$ pour lesquelles la fonction norme t s'exprime par

$$t = \sum_{\lambda=1}^{m} |w_\lambda|^2.$$

Les transformations qui relient une carte de coordonnées orthonormées à une autre appartiennent donc au sous-groupe $U(m) \subset GL(m, \mathbf{C})$ pour la fibre $\pi^{-1}(x)$ au-dessus de n'importe quel point $x \in M$, mais la dépendance de la transformation par rapport au point x ne sera plus holomorphe comme elle l'est dans le cas des coordonnées (ζ^λ). C'est pour cette raison principalement que dans la suite nous allons préférer des coordonnées holomorphes.

On introduit la connexion de Cartan dans le fibré, déterminée canoniquement par $\mathscr{A}$ comme dans [7] et définie par les formes locales associées à chaque carte locale holomorphe $(z, \zeta) = (z^1, \ldots, z^n; \zeta^1, \ldots, \zeta^m)$:

$$\Theta^\lambda_\nu = L^\lambda{}_{\nu\alpha}\, dz^\alpha \qquad (1 \leqq \lambda, \nu \leqq m),$$

où

$$L^\lambda{}_{\nu\sigma} = a^{\lambda\bar{\mu}} \frac{\partial a_{\nu\bar{\mu}}}{\partial z^\alpha}, \qquad (a^{\lambda\bar{\mu}}) = {}^t(a_{\lambda\bar{\mu}})^{-1};$$

on en dérive la forme de courbure $\Omega^\lambda{}_\nu$, définie par les formules

$$\Omega^\lambda{}_\nu = S^\lambda{}_{\nu\alpha\bar{\beta}}\, dz^\alpha \wedge d\bar{z}^{\beta}, \qquad S^\lambda{}_{\nu\alpha\bar{\beta}} = \frac{\partial}{\partial \bar{z}^\beta} L^\lambda{}_{\nu\alpha}.$$

On dit que le fibré $L \xrightarrow{\pi} M$ muni de la structure hermitienne $\mathscr{A}$ est positif (respectivement non négatif, non positif ou négatif) si *la forme bihermitienne de courbure* $a_{\lambda\bar{\mu}} S^{\lambda}{}_{\nu\alpha\bar{\beta}} \zeta^{\nu} \bar{\zeta}^{\mu} dz^{\alpha} d\bar{z}^{\beta}$ vérifie, en chaque point du fibré L hors de la section nulle, l'inégalité

$$(2.4) \qquad a_{\lambda\bar{\mu}} S^{\lambda}{}_{\nu\alpha\bar{\beta}} \zeta^{\nu} \bar{\zeta}^{\mu} Z^{\alpha} \bar{Z}^{\beta} > 0 \qquad ((\zeta)\neq 0, (Z)\neq 0)$$

(respectivement $\geqq 0$, $\leqq 0$ ou <0).

Nous allons maintenant définir, en partant de M munie d'une structure kählérienne (2.1), (2.2), et d'un fibré vectoriel holomorphe $L \xrightarrow{\pi} M$ avec une structure hermitienne $\mathscr{A}$ donnée, une forme de type kählérien g_L sur le fibré tangent de l'espace total L. Cette forme est uniquement déterminée par les propriétés suivantes :

1° pour tout point $x \in M$ la restriction de la forme à la sous-variété $\pi^{-1} x$ coïncide avec la métrique hermitienne plate induite par le potentiel kählérien $t|_{\pi^{-1}x}$;

2° pour chaque point y du fibré L et pour tout vecteur tangent X à M au point πy, le relevé horizontal $\tilde{X}_y$ de X à y au sens défini par la connexion de Cartan de $\mathscr{A}$ est orthogonal à la fibre passant par y;

3° la restriction de g_L à l'espace tangent à la section nulle de L (identifiée canoniquement avec M) coïncide avec la métrique kählérienne donnée dans M.

Il n'est point difficile de vérifier que la seule forme de type kählérien dans L qui vérifie les axiomes ci-dessus est déterminée par le potentiel local

$$(2.5) \qquad \Psi = \Phi \circ \pi + t,$$

où Φ est une fonction locale de potentiel dans M pour la métrique kählérienne donnée et t est comme dans (2.3). On vérifie également le fait suivant : étant donnée la fibre $\pi^{-1}(x_0)$ au-dessus d'un point quelconque $x_0 \in M$, alors, pour tout chemin différentiable $x(s)$ dans M partant de x_0, la famille des relevés horizontaux de $x(s)$ dans L partant de n'importe quel point $\zeta_0 \in \pi^{-1}(x_0)$ définit pour chaque s une isométrie linéaire complexe de $\pi^{-1}(x_0)$ sur $\pi^{-1}(x(s))$. Ce fait entraîne que, E étant un ouvert connexe dans L où la forme $\partial\bar{\partial}\Psi$ de type kählérien est définie positive, pour tout $x \in \pi(E) \subset M$, l'intersection $\pi^{-1}(x) \cap E$ est totalement géodésique dans E.

Pour calculer explicitement la forme $\partial\bar{\partial}\psi$ partant de (2.5), il est utile parfois de remplacer le repère complexe naturellement associé aux coordonnées holomorphes locales $(z^1, \ldots, z^n; \zeta^1, \ldots, \zeta^m)$ par le repère adapté à la connexion de L, consistant en les champs de vecteurs

$$\left(\nabla_{z^1}, \ldots, \nabla_{z^n}; \frac{\partial}{\partial\zeta^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial\zeta^m}\right),$$

où

$$\nabla_{z^\alpha} = \frac{\partial}{\partial z^\alpha} - L^{\lambda}{}_{\nu\alpha} \zeta^{\nu} \frac{\partial}{\partial\zeta^{\lambda}} \qquad (1 \leqq \alpha \leqq n)$$

et, pour exprimer les formes différentielles, d'employer le repère dual $(dz^1, \ldots, dz^n; \nabla\zeta^1, \ldots, \nabla\zeta^m)$, où

$$\nabla\zeta^\lambda = d\zeta^\lambda + L^\lambda{}_{\nu\alpha}\zeta^\nu\, dz^\alpha \qquad (1 \leqq \lambda \leqq m).$$

Ainsi on trouve, en partant de (2.4) :

$$\partial\Psi = \pi^*\,\partial\Phi + \frac{\partial a_{\lambda\bar{\mu}}}{\partial z^\alpha}\,\zeta^\lambda\zeta^{\bar{\mu}}\, dz^\alpha + a_{\lambda\bar{\mu}}\bar{\zeta}^\mu\, d\zeta^\lambda = \frac{\partial\Phi}{\partial z^\alpha}\, dz^\alpha + a_{\lambda\bar{\mu}}\bar{\zeta}^\mu\,\nabla\zeta^\lambda,$$

d'où on obtient, par une dérivation supplémentaire,

$$\partial\bar{\partial}\Psi = (g_{\alpha\bar{\beta}} + a_{\nu\bar{\mu}}S^\nu{}_{\lambda\alpha\bar{\beta}}\,\zeta^\lambda\bar{\zeta}^\mu)\, dz^\alpha\, dz^{\bar{\beta}} + a_{\lambda\bar{\mu}}\,\nabla\zeta^\lambda\,\nabla\zeta^{\bar{\mu}}. \tag{2.6}$$

Cette dernière formule montre que la forme déterminée dans L par les axiomes 1, 2, 3 dépend explicitement de la forme bihermitienne de courbure, telle qu'elle apparaît dans (2.4).

PROPOSITION 2.1. — *La forme* (2.6) *de type kählérien induite dans le fibré* L *par les données d'une métrique kählérienne dans* M *et d'une structure hermitienne* $\mathscr{A}$ *dans le fibré* $L \xrightarrow{\pi} M$ *est définie positive dans un voisinage de la section nulle de* L. *Elle est définie positive globalement dans* L, *si et seulement si la forme de courbure* (2.4) *de la connexion associée à* $\mathscr{A}$ *est partout non négative.*

Démonstration. — La première partie de l'énoncé est évidente d'après la formule (2.6). Si la forme de courbure est non négative au sens de (2.4), ceci entraîne immédiatement que la forme (2.6) est définie positive partout dans L. Réciproquement, si la forme (2.4) est négative à n'importe quel point $x \in M$ pour une valeur convenable de (ζ^λ) et (Z^α), alors on voit que, si on remplace le vecteur (ζ^λ) au besoin par un multiple scalaire à valeur absolue assez élevée, la forme (2.6) devient indéfinie au point ayant $(z^\alpha, \zeta^\lambda)$ pour coordonnées locales.

3. Fibrés holomorphes associés à des fibrés vectoriels

Nous allons maintenant généraliser la construction d'une forme de type kählérien à certains fibrés holomorphes sur une variété kählérienne donnée, où les fibres n'ont plus de structure d'espace vectoriel.

Nous n'allons considérer qu'une classe très restreinte de fibrés holomorphes, principalement parce qu'une construction aussi générale que possible entraînerait des complications que les applications envisagées ne justifient pas et deuxièmement parce que, d'après P. Blanchard [2], il y a des conditions qui sont nécessaires de toute façon pour l'existence d'une métrique kählérienne de quelque forme que ce soit dans tout fibré holomorphe. Les fibrés ne seront que des fibrés holomorphes associés à un fibré holomorphe vectoriel $L \xrightarrow{\pi} M$, considérant ce dernier de groupe structural $U(m)$ grâce à une structure hermitienne donnée $\mathscr{A}$. Les fibres seront des ouverts de la fibre abstraite $\mathbf{C}^m$, invariants par l'action du groupe $U(m)$, donc effectivement définis par des intervalles dans la demi-droite non négative $\mathbf{R}^+$, représentant des valeurs admissibles pour la fonction norme $t : \mathrm{L} \rightarrow \mathrm{M}$ définie par $\mathscr{A}$ (éventuellement la valeur $t=\infty$ aussi peut être admissible si l'on considère des fibrés d'espaces projectifs complexes). Si on garde sur de tels fibrés la connexion de Cartan induite par $\mathscr{A}$ sur L par restriction et si le fibré envisagé contient la section nulle de L, on n'a aucune difficulté à adapter les axiomes 1, 2, 3 à la situation actuelle, en remplaçant la métrique plane des fibres du premier axiome par une métrique quelconque, invariante par l'action du groupe structural $\mathrm{U}(m)$; une telle métrique admet pour potentiel de Kähler une fonction, invariante elle aussi par $\mathrm{U}(m)$, donc représentable par la composée $u \circ t$, où $u(x)$ est une fonction différentiable d'une variable réelle définie dans un intervalle de nombres non négatifs. La forme de type kählérien dans l'espace total E du fibré sera donc dérivée d'un potentiel, comme en (2.5) :

$$\Psi = \Phi \circ \pi + u \circ t, \tag{3.1}$$

où la fonction $u(x)$ d'une variable non négative doit satisfaire aux conditions qui entraînent que la forme hermitienne déduite de Ψ est définie positive dans E. La dérivation est analogue à celle qui donne la forme hermitienne (2.6) dans le cas des fibrés vectoriels

$$\partial\bar{\partial}\Psi = (g_{\alpha\bar{\beta}} + (u' \circ t)\, a_{\nu\bar{\mu}}\, S^{\nu}{}_{\lambda\alpha\bar{\beta}}\, \zeta^{\lambda}\bar{\zeta}^{\mu})\, dz^{\alpha}\, \overline{dz^{\beta}} + ((u' \circ t)\, a_{\lambda\bar{\mu}} + (u'' \circ t)\, a_{\lambda\bar{\nu}}\, a_{\varkappa\bar{\mu}}\, \zeta^{\varkappa}\bar{\zeta}^{\nu})\, \nabla\zeta^{\lambda}\, \overline{\nabla\zeta^{\mu}}. \tag{3.2}$$

Si l'intervalle des valeurs de t définissant le fibré $\mathrm{E} \rightarrow \mathrm{M}$ ne comprend pas la valeur $t=0$, on prendra (3.1) comme potentiel d'une structure de type kählérien par définition, bien qu'il ne soit pas aussi simple de justifier un tel choix par des axiomes le caractérisant uniquement.

Proposition 3.1. — *La forme* (3.2) *restreinte aux directions verticales, c'est-à-dire ne tenant compte que des termes en* $\nabla\zeta^{\lambda}$, *est définie positive si et seulement si, dans le cas général, pour toute valeur* $x \geqq 0$ *dans l'intervalle de définition de* $u(x)$, *cette fonction satisfait aux conditions*

$$u'(x) > 0, \qquad u'(x) + x u''(x) > 0. \tag{3.3}$$

On a une exception à l'énoncé dans le cas des fibrés dont la fibre a une dimension complexe, la condition $u'(x) > 0$ *cesse alors d'être nécessaire si la section nulle n'est pas comprise dans* E.

Démonstration. — On vérifie la nécessité de la seconde inégalité (3.3) immédiatement pour tout $m \geqq 1$ en remplaçant chaque $\nabla\zeta^{\lambda}$ par la valeur ζ^{λ} elle-même et en tenant compte de l'identité $t = a_{\lambda\bar{\mu}}\zeta^{\lambda}\bar{\zeta}^{\mu}$. La première inégalité (3.3) est nécessaire pour $m \geqq 2$, car on peut donner à $\nabla\zeta^{\lambda}$ une valeur telle que $a_{\lambda\bar{\mu}}\nabla\zeta^{\lambda}\bar{\zeta}^{\mu} = 0$. Pour $m=1$ la première inégalité est évidemment nécessaire partout sur la section nulle de L et, puisque $xu'(x)$ est une fonction strictement croissante en raison de la seconde inégalité (3.3) $u'(x)$ doit être positive partout. On rencontre donc la seule exception à la nécessité des deux inégalités dans le cas $m=1$. Supposons que l'intervalle des valeurs admises de t soit ouvert à sa borne inférieure, que nous noterons x_0 ($x_0 \geqq 0$), alors les conditions nécessaires qui remplacent (3.3) se réduisent à la seule deuxième inégalité. Nous laissons au lecteur la démonstration de la suffisance des inégalités, car elle est immédiate.

On va vérifier maintenant qu'en supposant l'existence d'une certaine borne inférieure uniforme pour la courbure de la connexion (condition vide, en particulier, si M est compacte), il existe des fonctions u telles que la forme (3.2) soit définie positive partout dans la variété L tout entière.

DÉFINITION. — On dit que la forme de courbure $\Omega^\lambda{}_\nu = S^\lambda{}_{\nu\alpha\bar\beta}\, dz^\alpha\, d\overline{z}^\beta$ de la connexion de Cartan d'un fibré holomorphe $L \xrightarrow{\pi} M$ muni d'une structure hermitienne a en un point donné $p_0 \in M$, admet un nombre réel c pour borne inférieure si, quelles que soient les $m+n$ variables complexes $Z^1, \ldots, Z^n, \zeta^1, \ldots, \zeta^m$, le tenseur de courbure $(S^\lambda{}_{\nu\alpha\bar\beta})$ satisfait à l'inégalité

$$a_{\lambda\bar\mu}\, S^\lambda{}_{\nu\alpha\bar\beta}\, \zeta^\nu \overline{\zeta}^\mu Z^\alpha \overline{Z}^\beta \geqq c\, a_{\lambda\bar\mu}\, \zeta^\lambda \overline{\zeta}^\mu g_{\alpha\bar\beta}\, Z^\alpha \overline{Z}^\beta,$$

où les $g_{\alpha\bar\beta}$ sont les composantes de la métrique kählérienne donnée au point p_0. On dit que c est une borne inférieure uniforme pour la courbure dans M, si quel que soit $p \in M$, la constante c est une borne inférieure pour la courbure à p.

Nous n'aurons pas l'occasion d'utiliser ici la notion analogue de borne supérieure.

THÉORÈME 3.2. — *Soit* $L \xrightarrow{\pi} M$ *un fibré vectoriel holomorphe sur* M *muni d'une structure hermitienne* $\mathscr{A}$ *et soit* M *munie d'une métrique kählérienne* $\mathscr{K}$. *Si la courbure de la connexion de Cartan de* $\mathscr{A}$ *a une borne inférieure uniforme quelconque, alors il existe une métrique kählérienne complète* $\mathscr{C}_y$ *dans la fibre* $\mathbf{C}^m$, *invariante par l'action de* U(m), *telle que la forme de type kählérien, déterminée sur* L *par la métrique kählérienne* $\mathscr{K}$ *de* M, *par la connexion de Cartan associée à* $\mathscr{A}$ *et par la métrique* $\mathscr{C}_y$ *est définie positive partout sur* L. *En plus, si la structure kählérienne* $\mathscr{K}$ *de* M *est complète, il en est de même pour la structure kählérienne ainsi définie dans* L.

Démonstration. — Si la borne inférieure de la courbure est $\geqq 0$, alors la métrique du fibré linéaire, c'est-à-dire en prenant $u(x)=x$ est elle-même définie positive partout (prop. 2.1) dans L. Il n'y a aucune difficulté à vérifier que, la métrique donnée dans M étant complète, la métique (2.6) l'est aussi.

Supposons donc que la courbure ait comme borne inférieure uniforme une constante $-b$ strictement négative ($b>0$). On peut choisir une fonction $u(x)$ engendrant la forme (3.2) de façon que cette dernière soit partout définie positive et définisse sur L une structure métrique complète; par exemple on peut faire le choix suivant :

$$u(x)=\frac{2}{3b}\log(c+x)-\frac{1}{3}\log\log(c+x) \qquad \text{où} \quad c=e^b. \tag{3.4}$$

Pour montrer que la métrique définie par la forme hermitienne (3.2) avec $u(x)$ explicitée en (3.4) restreinte à chaque fibre est définie positive, il suffit d'après la proposition 3.1, de vérifier les inégalités (3.3). On a en effet, pour tout $x \geqq 0$,

$$u'(x)=\frac{1}{3(c+x)}\left(\frac{2}{b}-\frac{1}{\log(c+x)}\right) \geqq \frac{1}{3b(c+x)},$$

$$xu''(x)+u'(x)=\frac{1}{3}(c+x)^{-2}\left(\frac{2c}{b}-\frac{c}{\log(c+x)}+\frac{x}{(\log(c+x))^2}\right)$$

$$\geqq\frac{c}{3b(c+x)^2}+\frac{x}{3(c+x)^2(\log(c+x))^2}.$$

On voit ensuite que chaque fibre, munie de la métrique kählérienne $\partial\bar{\partial}(u\circ t)$, est complète, car l'intégrale $\int_0^\infty (xu''(x)+u'(x))^{1/2}\,dx$ est divergente.

Nous montrons maintenant que la forme hermitienne totale (3.2) est définie positive partout dans L en démontrant que sa partie « horizontale » majore partout la forme $(1/3)\,g_{\alpha\bar{\beta}}\,dz^\alpha\,d\bar{z}^\beta$. D'après la définition de la borne inférieure de la courbure, on voit en effet que

$$(g_{\alpha\bar{\beta}}+(u'\circ t)\,a_{\nu\bar{\mu}}\,S^{\nu}{}_{\lambda\alpha\bar{\beta}}\,\zeta^\lambda\,\bar{\zeta}^\mu)\,dz^\alpha\,d\bar{z}^\beta\geqq(1-bt\circ(u'\circ t))\,g_{\alpha\bar{\beta}}\,dz^\alpha\,d\bar{z}^\beta$$

et, d'après (3.4), pour tout $x\geqq 0$,

$$1-bxu'(x)=1-\frac{2x}{3(c+x)}+\frac{bx}{3(c+x)\log(c+x)}=\frac{1}{3}+\frac{1}{3(c+x)}\left(2c+\frac{bx}{\log(c+x)}\right)\geqq\frac{1}{3}.$$

Cette dernière inégalité démontre donc que la métrique kählérienne ainsi définie dans L majore la forme hermitienne suivante dans L, compatible avec la structure de fibré au sens réel, c'est-à-dire dans le sens qui a été précisé dans l'introduction,

$$\frac{1}{3}g_{\alpha\bar{\beta}}(z,\,\bar{z})\,dz^\alpha\,d\bar{z}^\beta+((u'\circ t)\,a_{\lambda\bar{\mu}}+(u''\circ t)\,a_{\lambda\bar{\nu}}\,a_{\varkappa\bar{\mu}}\,\zeta^\varkappa\,\bar{\zeta}^\nu)\,\nabla\zeta^\lambda\,\nabla\bar{\zeta}^\mu.$$

Il est évident que cette dernière structure hermitienne dans L est complète si et seulement si sa restriction à chaque fibre ainsi qu'à la section nulle sont complètes elle-mêmes; le théorème est donc démontré.

COROLLAIRE. — *Il existe une métrique kählérienne complète dans le complémentaire d'un seul point dans l'espace projectif complexe* $P^n(\mathbf{C})$.

Démonstration. — Le complément d'un point p_0 dans $P^n(\mathbf{C})$ est l'espace total d'un fibré linéaire holomorphe ayant $P^{n-1}(\mathbf{C})$ comme base. Le théorème que nous venons de démontrer assure l'existence d'une métrique kählérienne complète dans la variété $P^n(\mathbf{C})\setminus\{p_0\}$.

Ce dernier résultat nous mène à proposer la conjecture que toute variété complexe ouverte admettant une métrique kählérienne en admet une complète.

4. Variétés d'Einstein-Kähler

On va appliquer ici des idées que nous avons développées dans la section précédente : en partant d'une variété donnée et munie d'une métrique d'Einstein-Kähler, c'est-à-dire avec courbure de Ricci constante, nous allons en construire d'autres, qui seront des fibrés holomorphes associés à des fibrés en droites, de groupe structural U(1).

Soit M une variété complexe munie d'une métrique kählérienne, satisfaisant à l'équation d'Einstein :

$$R_{\alpha\bar{\beta}}=k_0\, g_{\alpha\bar{\beta}}, \qquad R_{\alpha\bar{\beta}}, \qquad R_{\alpha\bar{\beta}}=-\frac{\partial^2}{\partial z^\alpha\,\partial z^{\bar{\beta}}}\log\det(g_{\gamma\bar{\delta}}),$$

où k_0 est une constante quelconque. Cette équation est équivalente à la relation locale

$$\det(g_{\alpha\bar{\beta}})=|\mathrm{hol}|^2\, e^{-k_0\Phi}, \tag{4.1}$$

où Φ représente un potentiel de Kähler et $|\mathrm{hol}|^2$ la valeur absolue carrée d'une fonction holomorphe non spécifiée, mais qui peut se réduire à l'unité, soit (si $k_0\neq 0$) en modifiant le choix de potentiel Φ, soit (si $k_0=0$) par une restriction dans le choix de coordonnées holomorphes locales à celles pour lesquelles la densité de l'élément de volume $\det(g_{\alpha\bar{\beta}})$ devient identiquement égale à 1 (l'annulation du tenseur de Ricci est précisément la condition d'existence de tels systèmes de coordonnées).

On va construire des métriques d'Einstein-Kähler de courbure de Ricci égale à une constante k, *a priori* arbitraire, qui est compatible avec une structure de fibré vectoriel holomorphe $L \xrightarrow{\pi} M$, où M est une variété d'Einstein-Kähler à courbure de Ricci égale à k_0. Nous nous limiterons ici au cas de fibrés linéaires, c'est-à-dire avec fibre de dimension complexe égale à 1. Le cas des fibrés où la dimension des fibres est plus grande ne présente que des complications typographiques, qu'on laissera résoudre au lecteur. Pour fixer les idées, soit $\dim_{\mathbf{C}} L=n\,(n\geqq 2)$ et par conséquent $\dim_{\mathbf{C}} M=n-1$. Une restriction bien plus sérieuse vient de ce qu'on va supposer L muni d'une structure hermitienne $\mathscr{A}$ à courbure égale à une constante l. Pour préciser les notations, la forme hermitienne (2.3) se réduit à

$$t=a(z,\bar{z})\,\zeta\bar{\zeta}=a\,|\zeta|^2 \tag{4.2}$$

et la forme de courbure explicitée dans (2.4) devient

$$a.\,S_{\alpha\bar{\beta}}\,|\zeta|^2\, Z^\alpha\, \overline{Z}^\beta=t\, S_{\alpha\bar{\beta}}\, Z^\alpha\, \overline{Z}^\beta$$

avec

$$S_{\alpha\bar{\beta}}=\frac{\partial^2 \log(a(z,\bar{z}))}{\partial z^\alpha\,\partial \bar{z}^\beta}.$$

L'hypothèse de courbure constante et égale à l, $S_{\alpha\bar{\beta}}=l g_{\alpha\bar{\beta}}$, équivaut à la condition

$$a(z,\bar{z})=|\mathrm{hol}|^2\, e^{l\Phi},$$

Φ étant un potentiel local de la métrique kählérienne donnée dans M. Par des choix convenables de coordonnées holomorphes ζ dans la fibre on réduit la dernière condition à

$$a(z,\bar{z})=e^{l\Phi}.$$

L'existence de tels fibrés linéaires holomorphes est garantie par le théorème de Hodge-Kodaira, selon lequel une condition nécessaire et suffisante est que la classe de cohomologie de De Rham de la $(1, 1)$-forme $l\,F$ soit une classe entière, où $F=-(2\pi\sqrt{-1})^{-1}\, g_{\alpha\bar\beta}\, dz^\alpha \wedge d\bar z^\beta$. Or on sait déjà que $k_0 F$ est une classe entière, puisqu'elle représente la courbure du fibré linéaire canonique, la structure étant d'Einstein-Kähler; donc l'hypothèse de courbure constante de $\mathscr{A}$ entraîne qu'il faut que la métrique de M soit, à un facteur constant près, une métrique de Hodge (condition qui est satisfaite automatiquement si $k_0 \neq 0$); si la classe de De Rham de F n'est pas nulle, les valeurs admissibles de l seront limités aux éléments d'un sous-groupe discret de $\mathbf{R}$; si au contraire la classe de F est nulle (par exemple, si M est une variété de Stein) alors l peut prendre une valeur réelle arbitraire.

PROPOSITION 4.1. — *Soit* M *une variété complexe de dimension* $n-1$, *munie d'une métrique de Hodge avec courbure de Ricci constante et égale à* k_0. *On se donne un fibré linéaire holomorphe* $L \xrightarrow{\pi} M$ *avec une structure hermitienne* $\mathscr{A}$ *dont la courbure, en relation avec la métrique de* M, *a une valeur constante et égale à* l. *Pour toute constante* $x_0>0$ *soit* H_{x_0} *l'hypersurface réelle* $\{q \in L \mid t(q)=x_0\} \subset L$ *et considérons une fonction* $u(x)$ *définie dans un intervalle ouvert* I *autour de* x_0. *Alors la forme de type kählérien* $\partial\bar\partial\,\psi$ *déterminée par* $u(x)$ *d'après* (3.2) *dans le voisinage* $t^{-1}(I) \subset L$ *de* H_{x_0} *est définie positive, si et seulement si* $u(x)$ *satisfait aux conditions*

$$1+lxu'(x)>0, \qquad u'(x)+xu''(x)>0. \tag{4.3}$$

Si cette condition est satisfaite dans I *et si* $l\neq 0$, *alors la métrique kählérienne* $\partial\bar\partial\Psi$ *définie dans* $t^{-1}(I)$ *est à courbure de Ricci égale à une constante donnée* k, *si et seulement si* $u(x)$ *satisfait à l'équation différentielle*

$$(1+lxu'(x))^{n-1}(xu''(x)+u'(x))=cx^{l^{-1}(k_0-k-l)}e^{-ku(x)} \qquad (l\neq 0), \tag{4.4}$$

où c *est une constante positive quelconque; si* $l=0$, *on a forcément* $k=k_0$ *et* (4.4) *est remplacée par*

$$\left\{\begin{aligned} u(x)&=2k^{-1}\log(1+c_0^2 k x^c)+c_1\log x+c_2 \qquad (l=0,\ k_0=k\neq 0),\\ u(x)&=c_0^2 x^c+c_1\log x+c_2 \qquad (k=k_0=l=0),\end{aligned}\right. \tag{4.4'}$$

où c, c_0, c_1, c_2 *sont des constantes réelles arbitraires, et* $c_0\neq 0$.

Démonstration. — La forme de type kählérien dans le voisinage de l'hypersurface H_{x_0} est donnée par (3.2); avec les hypothèses présentes (fibre de dimension 1 et courbure du fibré linéaire de valeur égale à l) elle se réduit à

$$\partial\bar\partial\Psi=(1+lxu'(x))\,g_{\alpha\bar\beta}\,dz^\alpha d\bar z^\beta+c_0\,e^{l\Phi}(xu''(x)+u'(x))\,|\nabla\zeta|^2, \tag{4.5}$$

où x représente les valeurs près de x_0 de la forme hermitienne t dans le fibré L. La densité de l'élément de volume correspondant à cette forme par rapport aux coordonnées holomorphes $(z^1, \ldots, z^{n-1}; \zeta)$, tenant compte de la condition réduite d'Einstein dans M, devient donc

$$g_L=c_0(1+lxu'(x))^{n-1}\,e^{-k_0\Phi}\,e^{l\Phi}(xu''(x)+u'(x)).$$

Ceci permet de vérifier que les conditions (4.3) et $c_0>0$ sont nécessaires et suffisantes afin que la forme (4.5) soit définie positive. La condition (4.1), c'est-à-dire que la métrique qu'on vient d'introduire dans L ait courbure de Ricci constante et égale à une quantité k arbitrairement donnée devient donc

$$(4.6) \qquad (1+lxu'(x))^{n-1}(xu''(x)+u'(x)) = |\mathrm{hol}|^2 \exp\{(k_0-k-l)\Phi - ku(x)\}.$$

On doit maintenant distinguer le cas général du fibré L non trivial ($l \neq 0$) du cas spécial $l=0$ où le fibré est localement plat. Si $l \neq 0$ on peut faire disparaître le potentiel local Φ de la métrique de M^n, en utilisant l'identité suivante, valable partout dans L sauf sur la section nulle du fibré,

$$|\mathrm{hol}|^2 e^{\Phi} = |\mathrm{hol}|^2 t^{l^{-1}};$$

l'équation (4.6) se transforme donc de la manière suivante :

$$x^{-l^{-1}}(k_0-k-l)(1+lxu'(x))^{n-1}(xu''(x) \to u'(x))\, e^{ku(x)} = |\mathrm{hol}|^2.$$

Nous allons montrer que le membre de droite de cette dernière équation se réduit à une constante. En effet, supposons qu'il en était autrement et soit $\varphi = \varphi(z, \zeta)$ une fonction holomorphe locale, non nulle et non constante, dont la valeur absolue carrée représente le membre de droite; alors, à tout point où $d\varphi \neq 0$, $|\varphi|^2$ est constante sur chaque hypersurface réelle d'une famille régulière à un paramètre; l'invariant de E. Levi de chacune de ces hypersurfaces est représenté, à un facteur non nul près, par une restriction de la forme hermitienne $\partial\bar{\partial} \log |\varphi|^2$, qui est identiquement nulle. D'autre part, tenant compte du membre de gauche de l'équation, les mêmes hypersurfaces sont déterminées par l'équation $t = \mathrm{Cte}$ et leur invariant de Levi, calculé par la restriction de $\partial\bar{\partial} \log t$, à chaque point, au sous-espace vectoriel complexe maximal de l'espace tangent de H_t, se réduit, d'après (2.4) et (4.2), à la forme de courbure $S_{\alpha\bar{\beta}}\, dz^\alpha\, d\bar{z}^\beta = l g_{\alpha\bar{\beta}}\, dz^\alpha\, d\bar{z}^\beta \neq 0$. Cette contradiction entraîne que $\varphi(z, \zeta)$ est effectivement une constante, dont nous désignerons la valeur absolue carrée par c. On en déduit immédiatement que $u(x)$ doit satisfaire à l'équation différentielle (4.4). La constante c est nécessairement positive, à cause de (4.3).

Si d'autre part on a $l=0$, la forme (4.2) est localement réductible à la somme directe de la métrique d'Einstein-Kähler de M à courbure de Ricci k_0 avec une métrique kählérienne à symétrie circulaire dans la fibre. Cette somme directe n'aura une courbure de Ricci constante et égale à k que si $k = k_0$ et si la métrique dans la fibre de potentiel $u(x)$ a une courbure de Gauss constante et égale elle aussi à k_0. On peut vérifier facilement que les seules fonctions $u(x)$ qui engendrent une telle métrique dans une couronne circulaire sont données par (4.4'). Ceci complète la démonstration.

On va formuler maintenant les conditions supplémentaires auxquelles la fonction $u(t)$ doit satisfaire pour qu'une métrique d'Einstein-Kähler déterminée par une solution $u(x)$ de (4.4) ou (4.4') puisse se prolonger régulièrement sur la section nulle de $L \xrightarrow{\pi} M$.

PROPOSITION 4.2. — *On se donne un fibré linéaire holomorphe* $L \xrightarrow{\pi} M$ *avec les mêmes hypothèses que dans la proposition précédente. Une métrique d'Einstein-Kähler dans* L *du type* (4.5) *à courbure de Ricci égale à* k, *engendrée par une fonction* $u(x)$ $(0 \leq x < x_1)$ *se prolonge* *régulièrement sur la section nulle, si et seulement si* $k=k_0-l$ *et* $u'(0)>0$ *dans le cas général* ($l\neq 0$)*; dans le cas particulier* $l=0$ *la condition se traduit simplement par la restriction suivante sur les fonctions* $u(x)$ *données dans* (4.4') :

$$u(x)=2k^{-1}\log(1+c_0^2 kx)+c_2 \qquad (k=k_0\neq 0,\ c_0\neq 0,\ l=0)$$

ou

$$u(x)=c_0^2 x+c_2 \qquad (k=k_0=l=0,\ c_0\neq 0).$$

Démonstration. — Le cas particulier $l=0$ étant élémentaire, nous nous bornerons au cas général $l\neq 0$. L'équation différentielle (4.4) admet le facteur intégrant

$$l^{-1}(k_0-k)-kxu'(x).$$

En multipliant les deux membres de (4.4) par ce facteur et en intégrant on obtient l'équation du premier ordre

$$(4.7)\quad \frac{k_0}{nl^2}[(1+lxu'(x))^n-1]-\frac{k}{(n+1)l^2}[1+lxu'(x))^{n+1}-1]=cx^{l^{-1}(k_0-k)}e^{-ku(x)}+c_2.$$

Le membre de gauche est un polynôme $\mathrm{P}(xu'(x))$ en $xu'(x)$ à coefficients réels dépendant de k_0, k et l, sans terme constant; on a en effet

$$\mathrm{P}(w)=\frac{k_0}{nl^2}((1+lw)^n-1)-\frac{k}{(n+1)l^2}((1+lw)^{n+1}-1)$$
$$=\frac{k_0-k}{l}w+\sum_{j=2}^{n+1}\frac{n(k_0-k)-k_0(j-1)}{n(n+1)}\binom{n+1}{j}l^{j-2}w^j.$$

En comparant $\mathrm{P}(xu'(x))$ avec le membre de droite de (4.7) dans un voisinage de $x=0$ on voit *a priori* deux possibilités

$$(a)\qquad k_0=k \quad \text{et} \quad c_2=-ce^{-ku(0)}$$

ou bien

$$(b)\qquad k_0-k=l \quad \text{et} \quad c_2=0.$$

La première de ces possibilités mène à une contradiction, car en supposant qu'on a une solution $u(x)=u(0)+xu'(0)+\mathrm{O}(x^2)$, avec $u'(0)>0$, de l'équation (4.7), on trouve alors le membre de gauche égal à $\mathrm{O}(x^2)$, tandis que le membre de droite est égal à $-cku'(0)e^{-ku(0)}.x+\mathrm{O}(x^2)$, ceci n'étant possible que si $k=k_0=0$; mais alors, le membre de droite étant une constante, ceci entraîne $u'(x)=c/x$, qui n'a pas de solutions admissibles pour $x=0$.

Il ne nous reste donc que la possibilité (b); pour démontrer qu'il existe effectivement dans ce cas une solution $u(x)$ qui, pour $0\leqq x<x_1$, engendre une forme définie positive dans le

domaine correspondant de L, on transcrit l'équation (4.7) de la manière suivante :

$$P(xu'(x)) = cxe^{-ku(x)} \tag{4.8}$$

avec $k = k_0 - l$ et P désignant le polynôme

$$P(w) = \frac{k_0}{nl^2}[(1+lw)^n - 1] - \frac{k_0 - l}{(n+1)l^2}[(1+lw)^{n+1} - 1] = w + \sum_{j=2}^{n+2} \frac{nl - (j-1)k_0}{n(n+1)} \binom{n+1}{j} l^{j-2} w^j.$$

Par le théorème des fonctions implicites, il existe une fonction analytique réelle et une seule $F(v)$ dans un voisinage de $v = 0$ telle que $F(P(w)) = w$. En introduisant le paramètre auxiliaire

$$\xi = F(cxe^{-ku(x)})$$

dans un voisinage de $\xi = 0$, l'équation (4.8), vue comme $xu'(x) = \xi$, se transforme en l'équation suivante :

$$P'(\xi)\, d\xi = P(\xi)(1 - k\xi)\frac{dx}{x}$$

et, puisque $P'(w) = (1+lw)^{n-1}(1-kw)$, on résout l'équation (4.8) par les quadratures suivantes, en fonction du paramètre ξ,

$$x = x_0 \exp \int_{\xi_0}^{\xi} \frac{(1+lw)^{n-1}}{P(w)} dw, \qquad u(x) = u_0 + \int_{\xi_0}^{\xi} \frac{w(1+lw)^{n-1}}{P(w)} dw \tag{4.9}$$

qui donne la solution $u(x)$ de (4.8) telle que $u(x_0) = u_0$, pourvu que x_0 et u_0 soient des constantes réelles ($x_0 > 0$), telles que $cx_0\, e^{-ku_0}$ soit dans l'intervalle d'analycité de F et que l'on pose en plus

$$\xi_0 = F(cx_0\, e^{-ku_0}) \tag{4.9'}$$

Ceci complète la démonstration.

Il vaut la peine de remarquer que le paramètre ξ en fonction duquel on a exprimé les solutions (4.9) de l'équation différentielle (4.8) a une interprétation géométrique; en effet, si on considère la métrique d'Einstein-Kähler dans le domaine maximal $E \subset L$ où cette métrique est régulière, alors on peut associer à chaque point $(z, \zeta) \in E$ le disque dans la fibre $\pi^{-1}\pi(z, \zeta) \cap E$ défini par $D(z, \zeta) = \{(z, \zeta') \mid t(z, \zeta') \leqq t(z, \zeta)\}$; l'aire du disque $D(z, \zeta)$ *par* rapport à cette métrique est égale à $2\pi\,(t.u' \circ t)(z, \zeta) = 2\pi\xi(t(z, \zeta))$.

On va signaler maintenant trois cas particuliers de l'équation différentielle (4.8), dans lesquels les solutions locales dans un voisinage de $x = 0$ ont une forme particulièrement élémentaire en dehors du cas $l = 0$, où le fibré est localement plat, qui n'est pas intéressant :

1° si $k_0 = 0$, c'est-à-dire si M est à courbure de Ricci nulle, et $k = -l$, alors

$P(w)=(n+1)^{-1}l^{-1}[(1+lw)^{n+1}-1]$ et on a

$$(4.10)\quad x=x_0 \exp \int_{\xi_0}^{\zeta} \frac{(n+1)l(1+lw)^{n-1}}{(1+lw)^{n+1}-1}dw$$

$$=x_0 \exp \sum_{j=0}^{n}\left(\omega^{-j}\log\frac{1-\omega^j+l\xi}{1-\omega^j+l\xi_0}\right)\qquad (\omega=e^{2\pi i/(n+1)})$$

et

$$(4.10')\quad u(x)=u_0+\int_{\xi_0}^{\xi}\frac{(n+1)lw(1+lw)^{n-1}}{(1+lw)^{n+1}-1}dw=u_0-\frac{1}{l}\log\frac{x\,P(\xi_0)}{x_0\,P(\xi)}=\frac{1}{l}\log\frac{P(\xi)}{cx};$$

2° si $l\neq 0$, $k_0=-nl$ et $k=-(n+1)l$, alors $P(w)=w(1+lw)^n$; alors les intégrales (4.9) s'expriment sous forme élémentaire, d'où on déduit

$$(4.11)\qquad x=x_0\frac{\xi(1+l\xi_0)}{\xi_0(1+l\xi)},\qquad u(x)=u_0+l^{-1}\log\left(\frac{1+l\xi}{1+l\xi_0}\right),$$

la métrique induite sur chaque fibre $\pi^{-1}(z)\cap E$ est une métrique à courbure constante et égale à $-2l$;

3° si $l=k_0$ et $k=0$, c'est le cas le plus intéressant, donnant lieu à une métrique à courbure de Ricci nulle dans un sous-domaine maximal de régularité $E\subset L$. Dans ce cas $P(w)=(nl)^{-1}[(1+lw)^n-1]$; en substituant ce polynôme dans les intégrales (4.9) on obtient :

$$(4.12)\quad \begin{cases} x=x_0\dfrac{P(\xi)}{P(\xi_0)}; \\ u(x)=u_0+n(\xi-\xi_0)-\dfrac{1}{l}\displaystyle\sum_{j=1}^{n-1}(1-\omega^j)\log\left(\frac{1-\omega^j+l\xi}{1-\omega^j+l\xi_0}\right)\qquad (\omega=e^{2\pi i/n}). \end{cases}$$

On va considérer maintenant la question globale de savoir si le domaine maximal $E\subset L$, où la forme $\partial\bar\partial(\Phi+u\circ t)$ est définie positive et y définit une métrique d'Einstein-Kähler, est complet par rapport à cette métrique.

THÉORÈME 4.3. — *Soit* M *une variété kählérienne à* $n-1$ *dimensions, à courbure de Ricci constante et égale à* k_0 *et soit* $L\to M$ *un fibré linéaire holomorphe muni d'une structure hermitienne* $\mathscr{A}$ *à courbure de valeur constante* l. *Alors la métrique d'Einstein-Kähler, adaptée à ces données dans* L, *dans un voisinage de la section nulle et définie positive dans un domaine maximal* $E\subset L$, *définit une structure d'Einstein-Kähler complète dans* E *si et seulement si :* 1° M *est complète par rapport à la métrique donnée;* 2° *la constante* k *de* L *est égale à* k_0-l *et* 3° $l\geqq 0$ *et* $k\leqq 0$.

Démonstration. — Nous démontrerons d'abord la nécessité des trois conditions énoncées ci-dessus. La nécessité que M soit complète par rapport à la métrique kählérienne donnée est évidente, puisque la section nulle de L est un ensemble fermé dans L isométrique à M. La valeur k de la courbure de Ricci constante dans L est forcément égale à k_0-l d'après la proposition 4.2. La courbure de Ricci k dans L ne peut pas être positive car toute variété complète à courbure de Ricci uniformément strictement positive est compacte (th. de Myers [9]).

Il nous reste encore à démontrer la nécessité de la condition $l \geqq 0$. En raisonnant par l'absurde, supposons $l<0$ et reportons-nous à la solution paramétrique (4.9) de l'équation différentielle (4.8). La solution $u(x)$ qui en résulte satisfait à la relation $xu'(x)=\xi$ avec le paramètre ξ et reste valable pour $0<\xi<\alpha_1$, où α_1 représente la racine positive la plus petite du polynôme $P(w)$ s'il y en a une, ou pour $0<\xi<\infty$ si $P(w)$ n'a pas de racines positives. D'autre part, en regardant l'expression (4.5) de la forme de type kählérien qui en résulte, on voit qu'elle n'est définie positive que lorsque ξ est dans l'intervalle $]0, \min\{-l^{-1}, \alpha_1\}[$ correspondant à la condition $1+lxu'(x)>0$; la condition supplémentaire $xu''(x)+u'(x)>0$ est satisfaite automatiquement, puisque

$$xu''(x)+u'(x)=\frac{d}{dx}(xu'(x))=\left(\frac{dx}{d\xi}\right)^{-1}=x^{-1}\,P(\xi)(1+l\xi)^{-n+1}.$$

Pour étudier le comportement asymptotique de la métrique lorsque $\xi \to \min\{-l^{-1}, \alpha_1\}$, on doit distinguer deux cas selon que $\alpha_1<-l^{-1}$ ou $\alpha_1 \geqq l^{-1}$; on observe que le polynôme $P(w)$ vérifie l'identité algébrique

$$P(w)=\frac{k_0}{nl^2}[(1+lw)^n-1]-\frac{(k_0-l)}{(n+1)\,l^2}[1+lw)^{n+1}-1]=w(1+lw)^n-\frac{k_0+nl}{n(n+1)}w^2\sum_{j=1}^{n} j(1+lw)^{j-1};$$

donc $P(w)$ a une racine dans l'intervalle $]0, -l^{-1}[$ pour $l<0$ si et seulement si $k_0>-nl$. Considérons maintenant le chemin défini dans une fibre quelconque par $z=\text{Cte}$; $\zeta=\tau\,(\tau>0)$. On donne ci-dessous l'expression de l'élément différentiel de sa longueur

$$\left(\frac{ds}{d\tau}\right)^2=2(xu''(x)+u'(x)).\,a(z,\bar{z})=2\,a(z,\bar{z})\frac{d\xi}{dx},$$

où $x=t=a(z,\bar{z})\tau^2$, donc

$$\frac{d\tau}{d\xi}=\frac{1}{2\sqrt{a(z,\bar{z})x}}\,\frac{dx}{d\xi}.$$

Par conséquent

$$\left(\frac{ds}{d\xi}\right)^2=2\,a(z,\bar{z})\frac{d\xi}{dx}\,\frac{1}{4\,a(z,\bar{z})\,x}\left(\frac{dx}{d\xi}\right)^2=\frac{1}{2x}\,\frac{dx}{d\xi}=\frac{(1+l\xi)^{n-1}}{2\,P(\xi)};$$

la longueur de l'arc donc est donnée par l'intégrale définie

$$s=\int_0^{\xi}\left(\frac{(1+lw)^{n-1}}{2\,P(w)}\right)^{1/2}dw. \tag{4.14}$$

Cette dernière expression montre le résultat désiré par les raisonnements suivants : 1° si $k_0>-nl$, alors il y a une racine α_1 de $P(w)$ et une seule dans l'intervalle $]0, -l^{-1}[$ et, comme cette racine est simple, l'intégrale converge si $\xi \to \alpha_1$; 2° si $k_0=-nl$, alors $P(w)=w(1+lw)^n$ et l'intégrale (4.13) converge vers $\pi/\sqrt{-2l}$ lorsque $\xi \to -l^{-1}$; 3° si $k_0<nl$, alors l'intégrale

(4.13) converge trivialement pour $\xi \to -l^{-1}$. On a donc démontré que les conditions énoncées sont nécessaires pour qu'il résulte de la construction une métrique d'Einstein-Kähler complète.

Pour montrer la suffisance, supposons que M est complète par rapport à la métrique donnée, que $l \geqq 0$ et que $k = k_0 - l \leqq 0$. Alors le polynôme $P(\xi) = \int_0^\xi (1-kw)(1+lw)^{n-1}\,dw$ est strictement positif pour tout $\xi > 0$. La solution (4.9) de l'équation différentielle (4.8) est donc valable pour tout $\xi \geqq 0$; la variable x en fonction de ξ est bornée ou non selon que $k<0$ ou $k=0$, de telle sorte que pour $k<0$ la métrique d'Einstein-Kähler est définie dans une partie de L où la norme hermitienne t de L est bornée par une constante $\beta\,(0<\beta<\infty)$ dépendant de k_0 et l, telle que $\beta \to \infty$ lorsque $k \to 0^-$; si $k^0 = l \geqq 0$ et par conséquent $k=0$, alors la métrique est définie dans la variété L tout entière. Dans chacun de ces cas l'intégrale (4.13) diverge si $\xi \to \beta$. Par un raisonnement analogue à celui de la démonstration de la proposition 3.2, on montre que le domaine d'existence de la métrique d'Einstein-Kähler à courbure de Ricci égale à k dans le domaine $E = \{(z, \zeta) \in L \mid t(z, \zeta) < \beta\}$ est complet par rapport à cette métrique. Le théorème 4.3 est donc démontré.

Il vaut la peine de signaler deux cas particuliers, où les métriques d'Einstein-Kähler complètes prévues par le théorème 4.3 ont une forme particulièrement élémentaire. Ils correspondent aux exemples 2° et 3° qu'on a décrits après la proposition 4.2 :

1° si la variété à $n-1$ dimensions complexes M est munie d'une métrique d'Einstein-Kähler complète à courbure de Ricci $k_0 \neq 0$ et si L est le fibré linéaire sur M admettant une structure hermitienne à courbure de valeur constante égale à $l = -k_0/n$, alors l'espace total du fibré associé à L où la fibre est une surface simplement connexe et complète à courbure constante égale à $-l$ prend de ces données une métrique d'Einstein-Kähler à courbure de Ricci égale à $k = ((n+1)/n)\,k_0$; si $k_0 < 0$ ce fibré est complet, tandis que si $k_0 > 0$, la fibre est la droite projective $P_1(\mathbf{C})$; dans ce cas la métrique est dégénérée à la section infinie, mais en considérant cette dernière comme un seul point, on obtient un espace complexe avec un point singulier isolé, muni d'une structure métrique complète et d'Einstein-Kähler en dehors de la singularité. La singularité elle-même disparaît dans le seul cas où $M = P_{n-1}(\mathbf{C})$ muni d'une métrique de Fubini et l'espace fibré singulier qu'on obtient n'est autre que l'espace $P_n(\mathbf{C})$ avec la métrique de Fubini ayant la même courbure sectionnelle holomorphe constante k_0/n que M;

2° si M est une variété complexe compacte à n-1 dimensions, munie d'une métrique d'Einstein-Kähler à courbure de Ricci $k_0 > 0$ et si $L \xrightarrow{\pi} M$ est le fibré linéaire *canonique*, muni de la norme hermitienne canoniquement associé à l'élément de volume de M, à courbure de valeur constante k_0, alors la construction de la métrique d'Einstein-Kähler décrite dans la démonstration du théorème 4.3 introduit sur l'espace L tout entier une métrique kählérienne complète et à courbure de Ricci nulle. En général une telle métrique est caractérisée par la propriété que son groupe d'holonomie local est contenu dans le groupe $SU(n)\,(n = \dim_{\mathbf{C}} L)$; dans le cas des métriques construites par notre méthode on peut même montrer très simplement que le groupe d'holonomie global est contenu dans $SU(n)$ (l'égalité ayant lieu dans presque tous les cas) par le raisonnement suivant. Puisque L est le fibré canonique sur M, c'est-à-dire le fibré linéaire holomorphe des $(n-1)$-formes holomorphes dans M. Soit $(z^1, \ldots, z^{n-1})$ un système de coordonnées holomorphes locales dans M : on associe à ce système la coordonnée locale holomorphe et linéaire sur les fibres ζ (c'est-à-dire la section holomorphe locale dans le fibré dual) prenant la valeur 1 sur la $(n-1)$-forme $dz^1 \wedge \ldots \wedge dz^{n-1}$. Alors la n-forme $\theta = dz^1 \wedge \ldots \wedge dz^{n-1} \wedge d\zeta$ dans L est indépendante du choix de coordonnées locales $(z^1, \ldots, z^{n-1})$; il est encore facile de vérifier que l'élément de volume de la métrique à courbe de Ricci nulle est égal, à un facteur constant près, à $\theta \wedge \overline{\theta}$, de sorte que la forme θ est de dérivée covariante nulle; le transport parallèle dans L du co-repère $(dz^1, \ldots, dz^{n-1}, d\zeta)$ évalué en n'importe quel point de départ amène à un co-repère dont le produit extérieur coïncide avec θ; ceci montre que le groupe d'holonomie est effectivement contenu dans le groupe SU(n). La formule (4.9) qui détermine la fonction u qui engendre la métrique selon (3.1) et (3.2), dans le cas $k_0 = l > 0$, se prête à une simplification. Le polynôme $P(w)$ est égal à $1/nl\,[(1+lw)^n - 1]$, de sorte que, suivant (4.9), on a

$$x = x_0 \frac{(1+l\xi)^n - 1}{(1+l\xi_0)^n - 1},$$

$$u(x) = u_0 + \int_{\xi}^{\xi} \frac{nlw(1+lw)^{n-1}\,dw}{(1+lw)^n - 1} = u_0 + \frac{1}{l}\int_{1+l\xi_0}^{1+l\xi} \left(n - \frac{n(\eta^{n-1}-1)}{\eta^n - 1}\right) d\eta.$$

Par un passage à la limite, on peut poser $x_0 = 0$, $u_0 = u(0)$, d'où on tire la formule suivante pour la fonction $u(x)$:

$$u(x) = u_0 + \frac{n}{l}(\sqrt[n]{1+cx} - 1) - \sum_{j=1}^{n-1} \left(\frac{1-\omega^j}{l}\right) \log\left(\frac{\sqrt[n]{1+cx} - \omega^j}{1-\omega^j}\right) \qquad (\omega = e^{2\pi i/n}). \tag{4.14}$$

Pour des valeurs de n petites on peut réduire cette formule encore à des expressions élémentaires. En particulier, pour $n = 2$ on part de l'espace de base $M = P_1(\mathbf{C})$ muni d'une métrique à courbure constante; le fibré canonique sur $P_1(\mathbf{C})$ est biholomorphiquement équivalent au cône quadratique complexe $\{(x, y, z) \in \mathbf{C}^3 \mid z^2 = xy\}$ avec la singularité de l'origine résolue par un éclatement; dans ce cas la fonction $u(x)$ se réduit à

$$u(x) = u_0 + \frac{2}{l}(\sqrt{1+cx} - 1) - \frac{2}{l} \log \frac{\sqrt{1+cx} + 1}{2}.$$

La même métrique, exprimée par d'autres cartes locales, a été trouvée récemment par plusieurs autres auteurs [1], [4], [6] et [17] qui y voient une réalisation de modèles d'instantons. D'un point de vue plus général, S. T. Yau vient d'annoncer des résultats analogues sous la forme de théorèmes d'existence de métriques kählériennes complètes à courbure de Ricci nulle dans des variétés kählériennes compactes [13] à première classe de Chern réelle nulle, ainsi que dans certaines variétés algébriques ouvertes (résultat à paraître).

5. Variétés hyperkählériennes

Nous donnons d'abord quelques définitions afin de fixer la terminologie dans un sujet où souvent elle n'est ni sémantiquement justifiable ni consistante.

DÉFINITION 5.1 : On dit qu'une variété différentiable V à m dimensions réelles est munie d'une structure *presque quaternionnienne* par la donnée de deux champs continus d'automorphismes linéaires I et J du fibré tangent T(V) sur lui-même (notés comme agissant à droite) et vérifiant : les relations $I^2 = J^2 = -\mathrm{id}$, $I \circ J + J \circ I = 0$.

Si $\{V;\ I,\ J\}$ est une variété presque quaternionnienne, notons par K le champ d'automorphismes défini par $K = I \circ J = -J \circ I$; pour tout quaternion $q = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k \in \mathbf{H}$ on définit l'action de q (à droite) sur tout vecteur tangent X par

$$(5.1) \qquad Xq = q_0 X + q_1 XI + q_2 XJ + q_3 XK,$$

les relations algébriques entre les opérateurs de structure I, J, K impliquent que l'action de $\mathbf{H}$ sur T(V) définie par (5.1) détermine sur T(V) une structure de fibré en $\mathbf{H}$-modules à droite; en particulier la dimension réelle m de V est divisible par 4. Notons $\mathscr{J}$ l'ensemble de tous les quaternions q satisfaisant à l'équation $q^2 = -1$, c'est-à-dire $q \in \mathscr{J}$ si $q = q_1 i + q_2 j + q_3 k$ avec $q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 = 1$. Pour tout $q \in \mathscr{J}$ l'action de q sur T(V) correspond donc à une structure presque complexe; par conséquent toute variété presque quaternionnienne V contient dans sa structure une famille de structures presque complexes, paramétrée par la 2-sphère $\mathscr{J} \subset \mathbf{H}$.

On peut introduire, grâce à une partition de l'unité, dans toute variété presque quaternionnienne $\{V;\ I,\ J\}$, une métrique hermitienne, c'est-à-dire une structure riemannienne que I et J conservent; ceci équivaut à une réduction du groupe structural de T(V) au groupe $\mathrm{Sp}(n) = \mathrm{O}(4n) \cap \mathrm{GL}(n;\ \mathbf{H})$ $(m = 4n)$. L'existence d'une telle réduction dans une variété V quelconque est équivalente à l'existence d'une structure presque quaternionnienne.

On dit qu'une structure presque quaternionnienne différentiable dans une variété V est *intégrable*, si quel que soit $q \in \mathscr{J}$, la structure presque complexe définie par q est intégrable au sens de Eckmann-Frölicher [3]; en utilisant le formalisme de Frölicher-Nijenhuis [5], [11], ceci équivaut à la condition que les tenseurs structurels I et J, considérés comme 1-formes à valeurs dans T(V) satisfont aux relations

$$[I,\ I] = [I,\ J] = [J,\ J] = 0.$$

On en déduit du théorème de Newlander-Nirenberg [10] que toute variété V ayant une structure presque quaternionnienne intégrable admet par conséquent une famille de structures complexes naturellement paramétrées par $\mathscr{J}$; pour cette raison on propose ici de désigner toute structure presque quaternionnienne intégrable comme structure *hypercomplexe* (l'usage antérieur de l'adjectif pour décrire les algèbres sur un corps étant tombé en désuétude); il faut remarquer qu'une telle structure n'a aucune relation apparente avec une structure locale définie par des cartes locales à valeurs dans $\mathbf{H}^n$.

Supposons maintenant qu'une variété presque quaternionnienne différentiable à $4n$ dimensions $\{V;\ I,\ J\}$ puisse être munie aussi d'une structure hermitienne telle que, en considérant la connexion de Christoffel de V par rapport à la structure riemannienne sous-jacente, les dérivées covariantes des tenseurs représentant I et J [et par conséquent l'action à droite de tout quaternion q sur T (V)] s'annulent identiquement. Alors la structure presque quaternionnienne est automatiquement intégrable et, pour n'importe quel point $q \in \mathscr{J}$, la métrique donnée est kählérienne par rapport à la structure complexe correspondant à la structure complexe résultant de l'intégrabilité de q; pour cette raison on propose de désigner la structure définie par I, J et la métrique comme une *structure hyperkählérienne*. Une autre caractérisation d'une telle structure parmi les structures riemanniennes est que le groupe d'holonomie locale définie par le transport de Levi-Civita soit contenu dans le groupe $\mathrm{Sp}(n) \subset \mathrm{O}(4n)$.

Les seuls exemples connus jusqu'à maintenant de structures hyperkählériennes localement irréductibles et non symétriques étaient les variétés kählériennes à deux dimensions complexes à courbure de Ricci nulle décrites à la fin de la section 4. Que ces exemples aient des structures hyperkählériennes (c'est-à-dire de structures riemanniennes avec groupe d'holonomie $\mathrm{Sp}(n) \subset \mathrm{O}(4n)$) vient du fait que pour $n=1$, $\mathrm{Sp}(1)=\mathrm{SU}(2)$, tandis que, pour $n \geqq 2$, $\mathrm{Sp}(n)$ est strictement plus petit que $\mathrm{SU}(2n) \subset \mathrm{O}(4n)$. La construction donnée ici à la fin du chapitre 4, d'une struxture kählérienne complète à courbure de Ricci nulle dans le fibré linéaire canonique (fibré cotangent holomorphe) sur la droite projective en est un autre exemple élémentaire non compact. Ce sont justement ces exemples, généralisés aux dimensions supérieures d'une manière différente de celle du chapitre 4, qui inspirent la construction de structures hyperkählériennes que nous allons effectuer.

Soit V une variété hyperkählérienne à $4n$ dimensions réelles et, pour commencer, fixons notre attention sur une des structures kählériennes qui lui sont propres, par exemple celle définie par la métrique avec l'opérateur I. On considère en chaque point $x \in \mathrm{V}$ la décomposition de l'espace tangent de V en x complexifié $\mathrm{T_V}(x) \otimes \mathbf{C} = \mathrm{T}'(x) \oplus \mathrm{T}''(x)$, où $\mathrm{T}'(x)$ est engendré par les opérateurs $(\partial/\partial z^j)(x)\,(1 \leqq j \leqq 2n)$ pour un système quelconque de coordonnées autour de x qui sont holomorphes par rapport à la structure I et $\mathrm{T}''(x)$ est le sous-espace complémentaire conjugué de $\mathrm{T}'(x)$ [rappelons que ceci veut dire

$$\frac{\partial}{\partial z^j}(x)\,\mathrm{I} = \sqrt{-1}\,\frac{\partial}{\partial z^j}(x) \quad \text{et} \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}^j}(x)\,\mathrm{I} = -\sqrt{-1}\,\frac{\partial}{\partial \bar{z}^j}(x)\Bigg] \quad ([8], [12]).$$

Alors tout opérateur linéaire réel, tel que J, sur l'espace $\mathrm{T_V}(x)$ qui anticommute à I, rapporté à la base complexe $(\partial/\partial z^j, \partial/\partial \bar{z}^j)$ se décompose en deux opérateurs, notés par J′ et J″, conjugués entre eux, tels que $\mathrm{J}' : \mathrm{T}'(x) \to \mathrm{T}''(x)$ et $\mathrm{J}'' : \mathrm{T}''(x) \to \mathrm{T}'(x)$; on a naturellement $\mathrm{J}'' \circ \mathrm{J}' = -\mathrm{id}\,|_{\mathrm{T}'(x)}$ et $\mathrm{J}' \circ \mathrm{J}'' = -\mathrm{id}\,|_{\mathrm{T}''(x)}$; on peut donc écrire :

$$\frac{\partial}{\partial z^j}\mathrm{J}' = \mathrm{H}_j^{\bar{k}}(z, \bar{z})\frac{\partial}{\partial \bar{z}^k} \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial}{\partial \bar{z}^j}\mathrm{J}'' = \mathrm{H}_{\bar{j}}^{\ k}(z, \bar{z})\frac{\partial}{\partial z^k},$$

où $\overline{\mathrm{H}_j^{\bar{k}}} = \mathrm{H}_{\bar{j}}^{k}$ et $\mathrm{H}_j^{\bar{k}}\,\mathrm{H}_{\bar{k}}^{l} = -\delta_j^{\ l}$ et les dérivées covariantes de $(\mathrm{H}_j^{\bar{k}})$ et $(\mathrm{H}_{\bar{j}}^{k})$ par rapport à la métrique kählérienne s'annulent identiquement. Si on exprime la métrique kählérienne par

$$ds^2 = g_{j\bar{k}}(z, \bar{z})\, dz^j\, d\bar{z}^k + g_{\bar{j}k}(z, \bar{z})\, d\bar{z}^j dz^k$$

avec

$$g_{\bar{j}k} = g_{k\bar{j}} = \overline{g_{j\bar{k}}},$$

et si on introduit le champ contravariant hermitien :

$$g^{\bar{j}k} \frac{\partial}{\partial z^j} \otimes \frac{\partial}{\partial \bar{z}^k} \text{ adjoint de } ds^2\,(g^{\bar{j}k} g_{\bar{l}k} = \delta^j_l),$$

on obtient les tenseurs antisymétriques à dérivée covariante nulle

$$(H_{jk}(z, \bar{z})) \qquad \text{et} \qquad (H^{jk}(z, \bar{z})),$$

où

$$H_{jk}(z, \bar{z}) = g_{k\bar{l}}\, H_j^{\bar{l}} \qquad \text{et} \qquad H^{jk}(z, \bar{z}) = g^{j\bar{l}}\, H_{\bar{l}}^{\;k}\,; \tag{5.1}$$

en particulier la (2,0)-forme différentielle

$$F_J = \frac{1}{2} H_{jk}\, dz^j \wedge dz^k \tag{5.2}$$

et le champ de 2-vecteurs adjoint

$$F_J^* = \frac{1}{2} H^{jk} \frac{\partial}{\partial z^j} \wedge \frac{\partial}{\partial z^k}, \qquad H^{jk} = g^{j\bar{i}} g^{k\bar{l}}\, \overline{H_{il}} \tag{5.3}$$

sont tous les deux holomorphes; en particulier toute variété hyperkählérienne est automatiquement une variété kählérienne par rapport à I et symplectique complexe par rapport à la forme F_J. Une caractérisation réciproque d'une structure hyperkählérienne est donnée par la proposition suivante :

PROPOSITION 5.1. — *Une variété symplectique complexe et kählérienne* $\{V;\, F,\, ds^2\}$ *à* $2n$ *dimensions complexes est hyperkählérienne par rapport à la métrique donnée et aux opérateurs* I *de la structure complexe et* J *relié à* F *et* ds^2 *par les relations* (5.1) *et* (5.2) *si et seulement si le champ de 2-vecteurs*

$$F^* = \frac{1}{2} H^{jk} \frac{\partial}{\partial z^j} \wedge \frac{\partial}{\partial z^k}$$

associé à F *et à* ds^2 *par* (5.3) *est, premièrement, holomorphe et, deuxièmement, coïncide avec la forme adjointe de* F*; en d'autres termes le tenseur* (H^{jk}) *vérifie la relation*

$$H_{jk}\, H^{jl} = \delta^l_k. \tag{5.4}$$

La démonstration de cette proposition est immédiate.

On va utiliser la proposition ci-dessus pour construire des structures hyperkählériennes, d'abord localement et ensuite globalement, compatibles avec une structure de fibré vectoriel holomorphe sur une variété kählérienne convenable M à n dimensions complexes. Parmi les fibrés vectoriels holomorphes sur M le choix le plus naturel d'un fibré admettant une structure symplectique holomorphe est évidemment celui du fibré cotangent holomorphe $T^{*\prime}(M)$. A chaque système de coordonnées locales holomorphes $(z^1, \ldots, z^n)$ dans un domaine $U \subset M$ on va associer le système de coordonnées holomorphes $(z^1, \ldots, z^n; \zeta_1, \ldots, \zeta_n)$ dans $\pi^{-1}(U)$, où pour chaque point $f_x \in \pi^{-1}(x)$ $(x \in U)$:

$$z^\alpha(f_x) = z^\alpha(x), \qquad \zeta_\lambda(f_x) = \left\langle f_x, \frac{\partial}{\partial z^\lambda}(x) \right\rangle \qquad (\alpha, \lambda = 1, 2, \ldots, n).$$

A toute métrique kählérienne dans M avec potentiel local de Kähler égal à $\Phi(z, \bar{z})$ dans U on associe la forme hermitienne dans les fibres de $\pi^{-1}(U)$ définie par la métrique même; ceci s'exprime en fonction des coordonnées locales de $\pi^{-1}(U)$ par

$$t = g^{\lambda\bar{\mu}} \zeta_\lambda \bar{\zeta}_\mu \qquad \text{où} \quad g_{\mu\bar{\lambda}} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^\mu \partial \bar{z}^\lambda} \quad \text{et} \quad g^{\lambda\bar{\mu}} g_{\nu\bar{\mu}} = \delta^\lambda_\nu.$$

Suivant la méthode du chapitre 3, soit $u(x)$ une fonction différentiable d'une variable réelle x dans un intervalle positif relativement ouvert dans la demi-droite non négative $I =]a, b[\cap [0, \infty[$ et soit W_I la partie ouverte de $T^*(M)$ où la fonction t prend ses valeurs dans I; d'après (3.2) on considère dans W_I la forme de type kählérien dans W_I d'après (3.2) :

$$(5.5) \quad \partial\bar{\partial}\psi = \partial\bar{\partial}(\Phi \circ \pi + u \circ t) = (g_{\alpha\bar{\beta}} + (u' \circ t)\, R^{\lambda\bar{\mu}}{}_{\alpha\bar{\beta}}\, \zeta_\lambda \bar{\zeta}_\mu)\, dz^\alpha\, d\bar{z}^\beta + ((u' \circ t)\, g^{\lambda\bar{\mu}} + (u'' \circ t)\, g^{\varkappa\bar{\mu}} g^{\lambda\bar{\nu}} \zeta_\varkappa \bar{\zeta}_\nu)\, \nabla\zeta_\lambda\, \nabla\bar{\zeta}_\mu$$

où

$$\nabla\zeta_\lambda = d\zeta_\lambda - \Gamma^\nu_{\lambda\alpha} \zeta_\nu\, dz^\alpha, \qquad \nabla\bar{\zeta}_\mu = d\bar{\zeta}_\mu - \overline{\Gamma^\nu_{\mu\beta} \zeta_\nu\, dz^\beta}$$

et $\Gamma^\nu_{\lambda\alpha}$ sont les symboles de Christoffel de la métrique kählérienne de M :

$$\Gamma^\nu_{\lambda\alpha}(z, \bar{z}) = g^{\nu\bar{\mu}} \frac{\partial g_{\lambda\bar{\mu}}(z, \bar{z})}{\partial z^\alpha}$$

et $R^{\lambda\bar{\mu}}{}_{\alpha\bar{\beta}}$ désigne les composantes correspondantes de la courbure de Riemann :

$$R^{\lambda\bar{\mu}}{}_{\alpha\bar{\beta}} = -g^{\nu\bar{\mu}} \frac{\partial}{\partial \bar{z}^\beta} \Gamma^\lambda_{\nu\alpha}.$$

La variété complexe $T^*(M)$ admet la structure symplectique holomorphe canoniquement définie par la 2-forme holomorphe

$$(5.6) \qquad F = \sum_{\alpha=1}^{n} dz^\alpha \wedge d\zeta_\alpha = \sum_{\alpha=1}^{n} dz^\alpha \wedge \nabla\zeta_\alpha;$$

la structure symplectique réelle correspondant à la structure différentiable réelle sous-jacente, si on identifie canoniquement le fibré $T^*(M)$ avec $T^{*\prime}(M)$, est celle qui est définie par la forme $F + \bar{F}$.

Nous allons appliquer maintenant la proposition 5.1 pour trouver des conditions sous lesquelles la forme de type kählérien (5.5), supposée définie positive, et la structure symplectique que nous venons de décrire peuvent déterminer une structure hyperkählérienne. Dans ce but nous allons abréger la formule (5.5) en écrivant :

$$(5.7) \qquad \partial\bar{\partial}\Psi = G_{\alpha\bar{\beta}}(z, \zeta; \bar{z}, \bar{\zeta})\, dz^\alpha\, d\bar{z}^\beta + P^{\lambda\bar{\mu}}(z, \zeta, \bar{z}, \bar{\zeta})\, \nabla\zeta_\lambda\, \nabla\bar{\zeta}_\mu,$$

où

$$(5.7') \qquad G_{\alpha\bar{\beta}} = g_{\alpha\bar{\beta}}(z, \bar{z}) + (u' \circ t)\, R^{\lambda\bar{\mu}}{}_{\alpha\bar{\beta}}\, \zeta_\lambda\, \bar{\zeta}_\mu$$

et

$$(5.7'') \qquad P^{\lambda\bar{\mu}} = (u' \circ t)\, g^{\lambda\bar{\mu}} + (u'' \circ t)\, g^{\kappa\bar{\mu}}\, g^{\lambda\bar{\nu}}\, \zeta_\kappa\, \bar{\zeta}_\nu.$$

PROPOSITION 5.2. — *Si la forme* (5.7) *de type kählérien est définie positive dans un ouvert quelconque* $U \subset T^{*\prime}(M)$, *alors la structure kählérienne qui en résulte dans* U *et la structure symplectique holomorphe* (5.6) *déterminent par la proposition* 5.1 *une structure hyperkählérienne si et seulement si la forme* (5.7) *vérifie l'équation*

$$(5.8) \qquad G_{\alpha\bar{\beta}}\, P^{\lambda\bar{\beta}} = \delta^\lambda_\alpha$$

identiquement dans U.

Démonstration. — Ayant défini la forme F par (5.6), le champ de 2-vecteurs F^* associée à F par (5.3) est donnée par

$$F^* = G^{\alpha\bar{\beta}}\, P_{\lambda\bar{\beta}}\, \nabla_{z^\alpha} \wedge \frac{\partial}{\partial\zeta^\lambda} \qquad ((G^{\alpha\bar{\beta}}) = {}^t(G_{\alpha\bar{\beta}})^{-1},\ (P_{\lambda\bar{\mu}}) = {}^t(P^{\lambda\bar{\mu}})^{-1})$$

où

$$\nabla_{z^\alpha} = \frac{\partial}{\partial z^\alpha} + \Gamma^\lambda_{\mu\alpha}\, \zeta_\lambda\, \frac{\partial}{\partial\zeta_\mu} \qquad (1 \leqq \alpha \leqq n) \quad \text{et} \quad \left(\nabla_{z^1}, \ldots, \nabla_{z^n}; \frac{\partial}{\partial\zeta_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial\zeta_n}\right)$$

forment la base de $T'(T^{*\prime}(M))$ duale de la base $(dz^1, \ldots, dz^n;\ \nabla\zeta_1, \ldots, \nabla\zeta_n)$ de l'espace $T'^*(T^{*\prime}(M))$. On se rapporte maintenant à la seule condition (5.4) de la proposition 5.1 pour vérifier que, pour que la structure en question soit hyperkählérienne, il est au moins nécessaire que

$$G^{\alpha\bar{\beta}}\, P_{\lambda\bar{\beta}} = \delta^\alpha_\lambda,$$

cette condition est équivalente à l'équation $G^{\alpha\bar{\beta}} = P^{\alpha\bar{\beta}}$, ou bien à $P_{\lambda\bar{\mu}} = G_{\lambda\bar{\mu}}$, donc à (5.8).

Réciproquement, si (5.8) est satisfaite, ceci implique que

$$F^* = \sum_{\alpha=1}^{n} \nabla_{z^\alpha} \wedge \frac{\partial}{\partial\zeta^\alpha} = \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\partial}{\partial z^\alpha} \wedge \frac{\partial}{\partial\zeta_\alpha}.$$

la dernière expresssion indiquant immédiatement que F^* est holomorphe. Ayant démontré que l'équation (5.8) entraîne que F^* est holomorphe et satisfait à (5.4) avec F, ceci montre la suffisance de (5.8) pour que la structure soit hyperkählérienne.

Il est évident que l'équation (5.8) entraîne une restriction considérable non seulement sur le choix de la fonction u déterminant la structure kählérienne dans $T^{*\prime}(M)$ mais aussi sur celui de la structure kählérienne de M même. Par exemple, on note que d'après (5.7″) la matrice $(P^{\lambda\bar{\mu}})$ est égale à un multiple scalaire de $(g^{\lambda\bar{\mu}})$ plus une matrice de rang au plus égal à 1; donc, si (5.8) est satisfaite, ceci entraîne que $(G_{\alpha\bar{\beta}})$ aussi est un multiple scalaire de $(g_{\alpha\bar{\beta}})$ plus une matrice de rang au plus égal à 1, ce qui implique une forte restriction sur le tenseur de courbure de M tel qu'il intervient dans (5.7′). Nous proposons à ce propos la conjecture que, pour $n \geqq 3$, si une métrique kählérienne localement irréductible dans M satisfait à la condition que, pour tout (ζ_λ), $(R^{\lambda\bar{\mu}}{}_{\alpha\bar{\beta}}\,\zeta_\lambda\,\bar{\zeta}_\mu)$ est égal à un multiple scalaire de $(g_{\alpha\bar{\beta}})$ plus une matrice hermitienne de rang $\leqq 1$, alors la métrique est à courbure sectionnelle holomorphe constante. On est donc amené à limiter notre construction de structures hyperkählériennes au cas où la variété de base M est un espace de Fubini-Study; naturellement on peut éliminer *a priori* le cas trivial de courbure nulle. On est donc dans la situation où le potentiel local de Kähler Φ dans M est donné, pour des coordonnées (z^α) convenables, par

$$\Phi = K^{-1} \log\left(1 + K \sum_{\alpha=1}^{n} |z^\alpha|^2\right),$$

où K est une constante $\neq 0$ et; si $K<0$, z est limité à la boule $\left\{ z \,\middle|\, \sum_{\alpha=1}^{n} |z^\alpha|^2 < -K^{-1} \right\} \subset \mathbf{C}^n$.

Dans ce cas le tenseur de courbure $R^{\lambda\bar{\mu}}{}_{\alpha\bar{\beta}}$ prend la forme

$$\dot{R}^{\lambda\bar{\mu}}{}_{\alpha\bar{\beta}} = K\,(\delta^\lambda_\alpha\,\delta^\mu_\beta + g^{\lambda\bar{\mu}}\,g_{\alpha\bar{\beta}})$$

et par conséquent

$$G_{\alpha\bar{\beta}} = (1 + K\,t\,(u' \circ t))\; g_{\alpha\bar{\beta}} + K\,(u' \circ t)\;\zeta_\alpha\,\bar{\zeta}_\beta.$$

L'équation (5.8) est encore apparemment surdéterminée, car elle équivaut à

$$\begin{aligned}\delta^\lambda_\alpha = G_{\alpha\bar{\beta}}\,P^{\lambda\bar{\beta}} &= [(1 + K\,t\,(u' \circ t))\,g_{\alpha\bar{\beta}} + K\,(u' \circ t)\,\zeta_\alpha\bar{\zeta}_\beta]\;[(u' \circ t)\,g^{\lambda\bar{\beta}} + (u'' \circ t)\,g^{\bar{\varkappa}\beta}\,g^{\lambda\bar{\nu}}\,\zeta_\varkappa\,\bar{\zeta}_\nu\,]\\ &= [(u' \circ t) + K\,t\,(u' \circ t)^2]\,\delta^\lambda_\alpha + (g^{\lambda\bar{\nu}}\,\zeta_\alpha\,\bar{\zeta}_\nu)\;[(u'' \circ t)\,(1 + K\,t\,(u' \circ t)) + K\,(u' \circ t)^2 + K\,t\,(u' \circ t)\,(u'' \circ t)];\end{aligned}$$

elle se réduit donc aux deux équations différentielles que la fonction $u(x)$ doit vérifier simultanément

$$(5.9)\qquad \begin{gathered} u'(x) + K\,x\,(u'(x))^2 = 1,\\ u''(x) + (1 + K\,x u'(x)) + K\,u'(x)\;(u'(x) + K\,x u''(x)) = 0.\end{gathered}$$

Par une heureuse coïncidence, la deuxième équation est la dérivée de la première; on obtient alors les deux solutions de (5.9) pour $u'(x)$,

$$u'(x)=\frac{-1\pm\sqrt{1+4\mathrm{K}x}}{2\mathrm{K}x}=\frac{2}{1\pm\sqrt{1+4\mathrm{K}x}},$$

la seule solution qui nous intéresse doit satisfaire à $u'(x)>0$ pour $x>0$; on calcule donc la fonction $u(x)$ par une quadrature élémentaire.

$$u(x)=\mathrm{Cte}+\mathrm{K}^{-1}[\sqrt{1+4\mathrm{K}x}-\log(1+\sqrt{1+4\mathrm{K}x})].$$

Il nous reste encore à vérifier si la forme de type kählérien définie dans le fibré cotangent holomorphe d'un espace de Fubini par la fonction $u(x)$ ci-dessus est définie positive dans un domaine à déterminer et, si oui, si la structure métrique qu'elle y détermine est complète, mais ceci est un calcul bien élémentaire, dont nous ne donnerons que le résultat.

THÉORÈME 5.3. — *Soit* M^n *l'espace de Fubini à n dimensions complexe à courbure sectionnelle holomorphe égale à une constante* $2\mathrm{K}\neq 0$. *On considère la forme de type kählérien dans le fibré vectoriel cotangent holomorphe* $\mathrm{T}^*(\mathrm{M})\xrightarrow{\pi}\mathrm{M}$, *définie par*

$$\partial\bar{\partial}(\Phi\circ\pi+u\circ t),$$

où Φ *est un potentiel local de la métrique kählérienne de* M, t *est la fonction norme* (*carré de la longueur*) *dans* $\mathrm{T}^{*\prime}(\mathrm{M})$ *définie par la métrique et*

$$u(t)=\mathrm{K}^{-1}(\sqrt{1+4\mathrm{K}t}-\log(1+\sqrt{1+4\mathrm{K}t})).$$

Alors, si $\mathrm{K}>0$, *la forme est définie positive partout sur* $\mathrm{T}^{*\prime}(\mathrm{M})$ *et la structure métrique qui en résulte est complète; si* $\mathrm{K}<0$, *la forme n'est définie positive que dans le domaine où* $t<-(4\mathrm{K})^{-1}$ *et la métrique n'est pas complète dans ce domaine. Dans les deux cas la structure associée à la structure kählérienne et à la 2-forme holomorphe canonique* (*de Hamilton*) *est une structure hyperkählérienne.*

On va conclure par quelques remarques supplémentaires. On vérifie facilement que le groupe d'holonomie des variétés décrites dans le théorème ci-dessus est effectivement égal au groupe $\mathrm{Sp}(n)$ tout entier. Il est bien possible qu'il en existe d'autres exemples, mais il semble très difficile d'en trouver parmi des variétés compactes.

Une autre question curieuse qui se pose consiste à trouver une description aussi explicite que possible de la famille de structures complexes paramétrée par la 2-sphère $\mathscr{J}$ qu'entraîne la structure hyperkählérienne qu'on vient de construire, par exemple dans $\mathrm{T}^{*\prime}(\mathrm{P}^n_{\mathbf{C}})$. En désignant la structure complexe originelle par I, le point $-\mathrm{I}\in\mathscr{J}$ représente la structure conjuguée (qui est isomorphe à la structure I par une involution antiholomorphe). Pour ces deux structures complexes (de fibré vectoriel holomorphe) la section nulle est une sous-variété compacte maximale qui, du point de vue de la géométrie riemannienne, est une sous-variété compacte, orientée, totalement géodésique et d'aire minimale dans sa classe d'homologie.

Comme cette sous-variété ne peut rester holomorphe pour aucune structure complexe de $\mathcal{J}$ hors de I et $-$I, les autres structures complexes n'admettent aucune sous-variété holomorphe compacte à n-dimensions. D'autre part en calculant la déformation des structures complexes du point de vue local on peut conclure qu'elles sont toutes équivalentes au produit $P^n_{\mathbb{C}} \times P^n_{\mathbb{C}}$ avec l'excision de l'hypersurface constituée des paires de points de $P^n_{\mathbb{C}}$ qui sont polaires l'un à l'autre par rapport à une quadrique non singulière.

Pour terminer, nous signalons que les exemples de variétés hyperkählériennes que nous venons de décrire, fournissent la première démonstration d'existence de structures riemanniennes dont le groupe d'holonomie (homogène) est égal à Sp (n). En tenant compte de la liste des groupes d'holonomie possibles [14] on vérifie que, avec les théorèmes d'existence de Yau [13], les résultats d'Alekseevskiĭ [15] et ceux de Brown-Gray [16], les seuls groupes d'holonomie pour lesquels le problème de l'existence non triviale est encore ouvert sont G_2 et Spin (7).

BIBLIOGRAPHIE

[1] V. A. Belinskiĭ, G. W. Gibbons, D. N. Page et C. N. Pope, *Asymptotically Euclidean Bianchi IX Metrics in Quantum Gravity* (*Phys. Lett.*, vol. 76 B, 1978, p. 433-435).

[2] A. Blanchard, *Sur les variétés analytiques complexes* (*Ann. scient. Éc. Norm. Sup.*, Paris, vol. 73, 1956, p. 157-202).

[3] B. Eckmann et A. Frölicher, *Sur l'intégrabilité des structures presque complexes* (*C.R. Acad. Sc.*, Paris, t. 237, 1951, p. 2284-2286).

[4] T. Eguchi et A. J. Hanson, *Asymptotically Flat Self-dual Solutions to Euclidean Gravity* (*Phys. Lett.*, vol. 74 B, 1978, p. 249-251).

[5] A. Frölicher et A. Nijenhuis, *Theory of Vector-Valued Differential Forms Part I* (*Proc. Kon. Nad. Akad. v. Wet.*, vol. 59 A, 1956, p. 338-359).

[6] G. W. Gibbons et C. N. Pope, CP^2 *as a Gravitational Instanton* (*Comm. Math. Phys*, vol. 61, 1978, p. 239-248).

[7] S. Kobayashi et K. Nomizu, *Foundations of Differential Geometry*, New York, John Wiley-Interscience, vol. II, 1969, p. 178-185.

[8] A. Lichnerowicz, *Théorie globale des connexions et des groupes d'holonomie*, Roma, Cremonese, 1955, p. 218-232 et p. 258-261.

[9] S. B. Myers, *Riemannian Manifolds with Positive Mean Curvature* (*Duke Math. J.*, vol. 8, 1941, p. 401-404).

[10] A. Newlander et L. Nirenberg, *Complex Analytic Coordinates in Almost Complex Manifolds* (*Ann. Math.*, vol. 65, 1957, p. 391-404).

[11] A. Nijenhuis, *Jacobi-type Identities for Bilinear Differential Concomitants of Certain Tensor Fields* (*Proc. Kon. Nad. Akad. v. Wet.*, vol. 58 A, 1955, p. 390-403).

[12] A. Weil, *Introduction à l'étude des variétés kählériennes*, Paris, Hermann, *Act. Sc. Ind.*, vol. 1267, 1958, p. 30-43 et p. 83-102).

[13] S. T. Yau, *On the Ricci Curvature of a Compact Kähler Manifold and the Complex Monge-Ampère Equation* (*Comm. Pure Appl. Math.*, vol. 31, 1978, p. 339-411).

[14] M. Berger, *Remarques sur les groupes d'holonomie des variétés riemanniennes*, (*C.R. Acad. Sc.*, Paris, t. 262, série A, 1966, p. 1316-1318).

[15] D. V. Alekseevskiĭ, *Classification of Quaternionic Spaces with Transitive Solvable Groups of Motions* (*Math. Izv. U.S.S.R.*, vol. 9, n° 2, 1975, p. 297-339).

[16] R. B. BROWN et A. GRAY, *Riemannian Manifolds with Holonomy Group Spin* (9), *Differential Geometry* (in honor of Kentaro Yano), Tokyo, Kinokuniya, 1972, p. 41-59.
[17] N. HITCHIN, *Polygons and Gravitons* [*Proc. Cambr. Phil. Soc.* (à paraître), 1979].

(Manuscrit reçu le 15 décembre 1978,
révisé le 29 janvier 1979).

E. CALABI
Institut des Hautes Études scientifiques,
35, route de Chartres,
91440 Bures-sur-Yvette
et
University of Pennsylvania,
Department of Mathematics,
Philadelphia 19104, U.S.A.