DÉSIRÉ ANDRÉ

Mémoire sur les combinaisons régulières et leurs applications

Annales scientifiques de l'É.N.S. 2e série, tome 5 (1876), p. 155-198
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1876_2_5__155_0>

MÉMOIRE

SUR

LES COMBINAISONS RÉGULIÈRES

ET

LEURS APPLICATIONS,

PAR M. DÉSIRÉ ANDRÉ.

INTRODUCTION.

L'un des problèmes les plus généraux qu'on puisse se proposer sur les combinaisons nous paraît être celui-ci :

Étant données m lettres distinctes $a, b, c, \ldots$, combien peut-on, avec elles, former de groupes contenant chacun n lettres distinctes ou identiques, et satisfaisant à ces conditions que deux groupes quelconques diffèrent autrement que par l'ordre des lettres et que, dans un même groupe, la lettre a ne soit pas répétée plus de α fois, la lettre b plus de β fois, etc.

Ce problème est évidemment fort compliqué. Il se simplifie beaucoup dans le cas où $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ sont tous égaux à un même nombre p; mais alors nous avons, non plus les groupes précédents, que nous pourrions nommer les *combinaisons générales de m lettres n à n*, mais des groupes plus particuliers que nous appellerons les *combinaisons régulières d'ordre p de m lettres n à n*.

Les *combinaisons simples* et les *combinaisons complètes*, les seules qu'on ait étudiées jusqu'ici en détail, ne sont autre chose que les combinaisons régulières du premier et du $n^{\text{ième}}$ ordre.

Ce sont les combinaisons régulières qui forment l'objet de ce Mémoire. Des cinq Chapitres qui le composent, les trois premiers sont consacrés aux combinaisons régulières elles-mêmes; les deux autres à leurs applications.

Nous revenons d'abord (Chap. I) sur la définition fondamentale; nous montrons que la connaissance du nombre des combinaisons régulières fournit immédiatement la solution de certaines questions d'Algèbre, d'Analyse indéterminée et de Calcul des probabilités; nous faisons connaître les notations que nous avons choisies et les conventions que nous avons dû faire pour rendre les formules générales.

Nous passons ensuite (Chap. II) aux propriétés du nombre des combinaisons régulières. Ces propriétés sont nombreuses, remarquables, et, comme il devait arriver, toutes celles des combinaisons simples n'en sont que des cas particuliers. Elles se réduisent pour la plupart à des identités, et toutes ces identités sont établies, pour ainsi dire sans calcul, par des procédés purement combinatoires. On sait que ces procédés consistent à trouver deux expressions différentes du nombre des combinaisons qui satisfont à des conditions données et à les égaler. Une identité ainsi établie correspond, en général, à un certain mode de classification des combinaisons. En ces matières, la difficulté principale, pour ne pas dire la seule, est de faire des classifications bien nettes et des dénombrements bien complets.

Ces propriétés connues, nous en déduisons (Chap. III) des moyens divers de calculer le nombre des combinaisons régulières. Nous trouvons, toujours par les seuls procédés combinatoires, qu'on peut effectuer ce calcul de quatre façons différentes : 1° par voie récurrente; 2° par voie récurrente encore, mais symboliquement; 3° par une formule qui donne immédiatement l'inconnue à l'aide des nombres des combinaisons simples et des combinaisons complètes; 4° enfin, par un triangle dont celui de Pascal n'est que le premier cas particulier. De ces procédés, le dernier est de beaucoup le plus rapide. Au reste, chose remarquable, cette rapidité plus grande est un avantage qu'apportent avec eux tous les triangles, tableaux ou abaques employés jusqu'ici en Mathématiques, notamment ceux que M. Bourget a donnés dans son Mémoire *Sur les nombres de Cauchy* (¹) et dans sa *Théorie des permutations* (²).

(¹) *Journal de Liouville*, 2e série, t. VI, p. 61.
(²) *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 2e série, t. X, p. 254.

Il se trouve que les nombres des combinaisons régulières d'ordre p de m lettres ne sont autre chose que les coefficients du développement de

$$(1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^p)^m.$$

Ces coefficients ont été remarqués, pour la première fois, par Moivre (¹), à propos d'un problème sur les probabilités; et récemment, en 1863, M. J.-J.-A. Mathieu a appelé sur eux l'attention des géomètres (²). Les résultats obtenus par nous dans les trois Chapitres précédents nous permettent de donner une théorie assez complète des propriétés et du mode de calcul de ces coefficients. C'est là une généralisation très-large du binôme; elle forme l'objet du Chapitre IV, qui n'est ainsi qu'une application des combinaisons régulières. Évidemment on aurait pu tirer, par voie algébrique, du développement lui-même, tous les résultats que nous avons trouvés précédemment. C'est un travail que nous avons fait, à titre de vérification, mais que nous ne reproduisons pas ici, pour deux raisons : d'abord parce que ceci est une étude sur les combinaisons; ensuite parce que les démonstrations combinatoires nous semblent infiniment préférables aux démonstrations de calcul.

Le cinquième Chapitre est encore une application des combinaisons régulières : il est consacré aux combinaisons générales dont nous avons parlé en commençant. Nous y donnons les moyens d'en calculer le nombre; et nous montrons que ce calcul, en général fort long et fort compliqué, se simplifie et s'abrége dans tous les cas, un seul excepté, par la considération des combinaisons régulières.

Tels sont les objets respectifs des cinq Chapitres qui composent ce Mémoire. Avant de les aborder, nous pensons devoir avertir que la formule donnée par nous comme troisième procédé pour le calcul des combinaisons régulières a été trouvée par Moivre, d'une façon très-différente de la nôtre, et reproduite, d'après lui, dans la plupart des ouvrages sur le Calcul des probabilités.

(¹) *Miscellanea analytica*, p. 196.

(²) *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 2ᵉ série, t. II, p. 509.

CHAPITRE I.

PRÉLIMINAIRES.

§ I. — *Définition des combinaisons régulières.*

1. *Nous appelons combinaisons régulières n à n, d'ordre p, des m lettres distinctes $a, b, c, \ldots$ les groupes de n lettres distinctes ou identiques qui peuvent être formés avec les lettres données et qui satisfont à ces conditions que deux groupes quelconques diffèrent entre eux autrement que par l'ordre des lettres et que, dans un même groupe, l'une quelconque des lettres données ne soit jamais répétée plus de p fois.*

Exemple. — Les combinaisons régulières 3 à 3, d'ordre 2, des quatre lettres a, b, c, d sont au nombre de seize; les voici :

aab	*abc*	*add*	*bcd*
aac	*abd*	*bbc*	*bdd*
aad	*acc*	*bbd*	*ccd*
abb	*acd*	*bcc*	*cdd*

Exemple. — Les combinaisons régulières 4 à 4, d'ordre 2, des cinq lettres a, b, c, d, e sont au nombre de quarante-cinq. Ce sont les suivantes :

aabb	*aaee*	*abee*	*bbcd*	*bcee*
aabc	*abbc*	*accd*	*bbce*	*bdde*
aabd	*abbd*	*acce*	*bbdd*	*bdee*
aabe	*abbe*	*acdd*	*bbde*	*ccdd*
aacc	*abcc*	*acde*	*bbee*	*ccde*
aacd	*abcd*	*acee*	*bccd*	*ccee*
aace	*abce*	*adde*	*bcce*	*cdde*
aadd	*abdd*	*adee*	*bcdd*	*cdee*
aade	*abde*	*bbcc*	*bcde*	*ddee*

2. Il résulte immédiatement de cette définition :

Que les *combinaisons régulières du premier ordre ne sont autre chose que les combinaisons simples ou sans répétition;*

Que *celles dont l'ordre p est égal ou supérieur à n ne sont autre chose que ce qu'on appelle les combinaisons complètes de m lettres n à n*;

Que *le nombre des combinaisons régulières d'ordre p d'une seule lettre n à n est toujours égal à l'unité, quelle que soit la valeur, forcément égale ou inférieure à p, du nombre n*;

Que *le nombre des combinaisons régulières d'ordre p de m lettres mp à mp est toujours, lui aussi, égal à l'unité;*

Enfin, que *le nombre des combinaisons régulières d'ordre p de m lettres prises une à une est toujours égal à m.*

§ II. — *Importance des combinaisons régulières.*

3. Pour donner une idée de l'importance de cette étude des combinaisons régulières, considérons les problèmes suivants :

Étant donné le monôme

$$(a_1 a_2 a_3 \ldots a_m)^p,$$

combien admet-il de diviseurs du degré n?

Étant donné le produit de m facteurs

$$(1 + a_1 + a_1^2 + \ldots + a_1^p)(1 + a_2 + a_2^2 + \ldots + a_2^p)\ldots(1 + a_m + a_m^2 + \ldots + a_m^p),$$

combien son développement présente-t-il de termes du degré n?

Étant donné un polynôme X, *entier en x, de degré m et dont toutes les racines sont distinctes, combien l'expression*

$$X^p$$

admet-elle de diviseurs du degré n?

Étant donnée l'équation indéterminée

$$x_1 + x_2 + x_3 \ldots + x_m = n,$$

où n est entier et où chacune des inconnues peut prendre les valeurs 0, 1, 2, 3,..., *p, combien cette équation admet-elle de solutions?*

Ces quatre problèmes, qui ne diffèrent point au fond, admettent une solution identique, qui est le nombre des combinaisons régulières d'ordre *p*, de *m* lettres, *n* à *n*.

4. Considérons encore le problème suivant sur les probabilités :

De combien de manières peut-on obtenir le nombre n par le jet de m dés ayant chacun p faces marquées $1, 2, 3, \ldots, p$?

Si l'on y réfléchit un peu, on voit que le nombre cherché n'est autre que le nombre des combinaisons régulières d'ordre $p-1$, de m lettres, prises $n-m$ à $n-m$.

§ III. — *Notation.*

5. Il résulte de la définition que nous avons donnée au n° 1 que le nombre des combinaisons régulières d'ordre p, de m lettres, prises n à n, est, pour parler le langage de M. Méray [1], *une variante à trois indices*, savoir : 1° le nombre total m des lettres; 2° le nombre n de celles qui entrent dans chaque combinaison; enfin, 3° l'ordre p.

Nous représenterons cette variante par le symbole

$$(m, n)_p.$$

6. Cela posé, si nous désignons par C_m^n le nombre des combinaisons simples, et, comme nous l'avons fait déjà [2], par K_m^n le nombre des combinaisons complètes de m lettres n à n, les remarques que nous avons faites au n° 2 se traduiront immédiatement par les égalités suivantes :

$$\begin{aligned}
(m, n)_1 &= C_m^n,\\
(m, n)_{n+1} &= K_m^n,\\
(1, n)_p &= 1,\\
(m, mp)_p &= 1,\\
(m, 1)_p &= m.
\end{aligned}$$

Nous ferons un continuel usage de ces cinq relations.

§ IV. — *Conventions.*

7. Pour que les formules que nous établirons soient tout à fait générales, il est bon de donner au symbole

$$(m, n)_p,$$

---

(1) *Nouveau précis d'Analyse infinitésimale*, p. 1.

(2) *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 2e série, t. XII, p. 84.

dans les cas où il n'a plus de sens par lui-même, une valeur de convention.

Nous le regarderons :

Comme nul, toutes les fois que n sera soit négatif, soit supérieur à mp;

Comme nul aussi, toutes les fois que m sera nul, n et p étant différents de zéro;

Comme égal à l'unité, lorsque n sera nul, m et p étant différents de zéro;

Enfin comme égal encore à l'unité, lorsque, p n'étant pas égal à zéro, m et n seront nuls en même temps.

CHAPITRE II.

PROPRIÉTÉS DES COMBINAISONS RÉGULIÈRES.

§ I. — *Relations entre les combinaisons n à n et les combinaisons $mp - n$ à $mp - n$.*

8. Théorème. — *On a identiquement*

$$(m, n)_p = (m, mp - n)_p.$$

En effet, considérons l'ensemble de mp lettres formé des m lettres distinctes données répétées chacune p fois. Si nous en ôtons n lettres, il en reste $mp - n$. Les n qu'on enlève constituent une combinaison régulière d'ordre p de m lettres n à n; les $mp - n$ qui restent constituent une combinaison régulière d'ordre p de m lettres $mp - n$ à $mp - n$. Les combinaisons n à n et les combinaisons $mp - n$ à $mp - n$ se correspondent donc chacune à chacune : leur nombre est donc le même.

9. Corollaire. — *Dans la suite*

$$(m, 0)_p, \quad (m, 1)_p, \quad (m, 2)_p, \quad \ldots, \quad (m, mp)_p,$$

les termes équidistants des extrêmes sont égaux.

C'est une conséquence immédiate du théorème précédent.

10. *Remarque.* — Si, dans le théorème et le corollaire précédents, on fait p égal à l'unité, on retrouve l'une des propriétés les plus connues des combinaisons simples.

§ II. — *Relations entre les combinaisons de m lettres et les combinaisons de m — 1 lettres.*

11. Théorème. — *On a identiquement*

$$(m, n)_p = \sum_{k=0}^{k=p} (m-1, n-k)_p.$$

En effet, parmi les combinaisons régulières d'ordre p de m lettres n à n, celles qui ne contiennent pas une certaine lettre, a par exemple, sont en nombre

$$(m-1, n)_p;$$

celles qui la contiennent une fois, en nombre

$$(m-1, n-1)_p;$$

celles qui la contiennent deux fois, en nombre

$$(m-1, n-2)_p;$$

et ainsi de suite; celles qui la contiennent p fois, en nombre

$$(m-1, n-p)_p.$$

On a donc identiquement, comme il fallait le démontrer,

$$(m,n)_p = (m-1, n)_p + (m-1, n-1)_p + (m-1, n-2)_p + \ldots + (m-1, n-p)_p;$$

et, grâce aux conventions du n° 7, cette formule est générale.

12. *Remarque.* — Le théorème précédent peut évidemment s'énoncer ainsi :

Si l'on écrit l'une sous l'autre, comme ci-dessous, les deux suites

$$\begin{array}{lllll} (m-1, 0)_p, & (m-1, 1)_p, & (m-1, 2)_p, & (m-1, 3)_p, & \ldots, \\ (m, 0)_p, & (m, 1)_p, & (m, 2)_p, & (m, 3)_p, & \ldots, \end{array}$$

chaque terme de la suite inférieure est égal au terme supérieur correspondant, plus les p termes supérieurs placés à la gauche de celui-ci.

13. Corollaire. — *La suite*

$$(2,0)_p,\quad (2,1)_p,\quad (2,2)_p,\quad (2,3)_p,\quad \ldots,\quad (2,2p)_p$$

se compose des p nombres $1, 2, 3, \ldots, p$, suivis du nombre $p+1$, lequel est suivi lui-même des p nombres $p, p-1, p-2, \ldots, 1$.

Cela résulte immédiatement de la remarque précédente, si l'on se rappelle que, d'après la remarque du n° 6 et la convention du n° 7, les termes de la suite

$$(1,0)_p,\quad (1,1)_p,\quad (1,2)_p,\quad (1,3)_p,\quad \ldots,\quad (1,p)_p$$

sont tous égaux à l'unité.

§ III. — *Grandeurs relatives des nombres des combinaisons régulières d'ordre p de m lettres.*

14. Théorème. — *Dans la suite*

$$(m,0)_p,\quad (m,1)_p,\quad (m,2)_p,\quad (m,3)_p,\quad \ldots,\quad (m,mp)_p,$$

les termes croissent jusqu'au milieu et décroissent au delà.

Si l'on tient compte du corollaire du n° 9, il suffit de prouver la première partie du théorème.

Supposons, pour cela, le théorème vrai pour la suite

$$(m-1,0)_p,\quad (m-1,1)_p,\quad (m-1,2)_p,\quad (m-1,3)_p,\quad \ldots,\quad [m-1(m-1)p]_p.$$

Du théorème du n° 11 nous tirons

$$(m,n)_p = \sum_{k=0}^{k=p} (m-1, n-k)_p,$$

$$(m,n+1)_p = \sum_{k=0}^{k=p} (m-1, n+1-k)_p$$

et par suite

$$(1)\qquad (m,n+1)_p - (m,n)_p = (m-1,n+1)_p - (m-1,n-p)_p.$$

Cela étant, supposons que le terme

$$(m,n+1)_p$$

ne dépasse pas le milieu de la suite considérée, c'est-à-dire de la suite des nombres des combinaisons régulières d'ordre p de m lettres; nous avons alors

$$n+2 \leq \frac{mp+1}{2}.$$

Il s'ensuit :

1° Que le terme

$$(m-1, n-p)_p$$

précède le milieu de la suite des nombres des combinaisons régulières d'ordre p de $m-1$ lettres; car, s'il en était autrement, on aurait

$$n-p+1 \geq \frac{(m-1)p+1}{2},$$

d'où l'on tirerait

$$2n+1 \geq mp+p$$

et par suite

$$n+2 > \frac{mp+1}{2},$$

ce qui est contraire à l'hypothèse;

2° Que si le terme

$$(m-1, n+1)_p$$

dépasse le milieu de la suite des nombres des combinaisons régulières de $m-1$ lettres, il s'en écarte moins au delà que le terme

$$(m-1, n-p)_p$$

ne s'en écarte en deçà. En effet, de l'inégalité

$$n+2 \leq \frac{mp+1}{2},$$

on tire

$$2n+4 \leq mp+1,$$

ce qui donne

$$2n+3 < mp+1$$

et par suite

$$(n+2) - \frac{(m-1)p+1}{2} < \frac{(m-1)p+1}{2} - (n-p+1).$$

Si donc, comme on le suppose, le théorème est vrai pour la suite des nombres des combinaisons de $m-1$ lettres, le second membre de l'égalité (1) est positif; le premier l'est donc aussi, et le théorème est vrai pour la suite des nombres des combinaisons de m lettres. Or le théorème est vrai lorsque m est égal à 2, d'après le corollaire du n° **13**; donc il est général.

15. *Remarque.* — Pour avoir, parmi les combinaisons régulières d'ordre p de m lettres, celles dont le nombre est maximum, nous distinguerons deux cas :

Si $mp+1$ est impair, il faudra prendre les combinaisons $\frac{mp}{2}$ *à* $\frac{mp}{2}$;

Si $mp+1$ est pair, il faudra les prendre $\frac{mp-1}{2}$ *à* $\frac{mp-1}{2}$, *ou bien* $\frac{mp+1}{2}$ *à* $\frac{mp+1}{2}$.

§ IV. — *Relation entre les combinaisons de m lettres et celles de m — 1, m — 2,... lettres.*

16. Théorème. — *On a identiquement*

$$(m, n)_p = \sum_{k=1}^{k=p} \sum_{\alpha=0}^{\alpha=m-1} (\alpha, n-k)_p.$$

Pour le démontrer, revenons au théorème du n° **11**; nous en tirons

$$(m, n)_p = (m-1, n)_p + \sum_{k=1}^{k=p} (m-1, n-k)_p,$$

$$(m-1, n)_p = (m-2, n)_p + \sum_{k=1}^{k=p} (m-2, n-k)_p,$$

$$(m-2, n)_p = (m-3, n)_p + \sum_{k=1}^{k=p} (m-3, n-k)_p,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$(2, n)_p = (1, n)_p + \sum_{k=1}^{k=p} (1, n-k)_p,$$

$$(1, n)_p = \sum_{k=1}^{k=p} (0, n-k)_p;$$

d'où, en ajoutant membres à membres et supprimant les termes communs,

$$(m, n)_p = \sum_{k=1}^{k=p} [(m-1, n-k)_p + (m-2, n-k)_p + (m-3, n-k)_p + \ldots + (0, n-k)_p],$$

ce qui démontre le théorème.

17. *Remarque.* — Ce théorème souffre une exception : il n'est pas vrai lorsque le premier membre est égal à

$$(m, 0)_p.$$

L'origine de cette anomalie s'aperçoit facilement : dans les égalités que nous avons ajoutées membres à membres, la dernière n'est pas vraie lorsque n est égal à zéro. En n'employant pas cette dernière égalité, on trouverait l'identité

$$(m, n)_p = (1, n)_p + \sum_{k=1}^{k=p} \sum_{\alpha=1}^{\alpha=m-1} (\alpha, n-k)_p,$$

qui ne serait sujette à aucune exception.

§ V. — *Somme des nombres des combinaisons régulières de m lettres.*

18. Théorème. — *Si, dans la suite*

$$(m, 0)_p, \quad (m, 1)_p, \quad (m, 2)_p, \quad (m, 3)_p, \quad \ldots, \quad (m, mp)_p,$$

on prend tous les termes dont les seconds indices, divisés par $p+1$, donnent le même reste, ces termes ont une somme constante, quel que soit ce reste.

Soit, en effet, α ce reste, α étant forcément l'un des nombres $0, 1, 2, 3, \ldots, p$. On a, d'après le théorème du n° **11**,

$$(m, t(p+1)+\alpha)_p = \sum_{k=0}^{k=p} [m-1, t(p+1)+\alpha-k]_p.$$

Cela posé, soit λ la partie entière du quotient de $mp-\alpha$ par $p+1$;

nous déduisons de l'équation précédente

$$\sum_{t=0}^{t=\lambda}[m, t(p+1)+\alpha]_p = \sum_{t=0}^{t=\lambda}\sum_{k=0}^{k=p}[m-1, t(p+1)+\alpha-k]_p.$$

Or le second membre de cette dernière égalité est évidemment égal à

$$\sum_{k=0}^{k=(m-1)p}(m-1, k)_p;$$

il est, par suite, constant, quel que soit α, ce qui démontre le théorème.

19. *Remarque.* — Le théorème qui précède peut s'énoncer ainsi :

Les termes pris de $p+1$ en $p+1$ dans la suite

$$(m, 0)_p, \quad (m, 1)_p, \quad (m, 2)_p, \quad (m, 3)_p, \quad \ldots, \quad (m, mp)_p$$

ont une somme constante, quel que soit celui des $p+1$ premiers termes par lequel on commence, et égale à la somme de tous les termes de la suite

$$(m-1, 0)_p, \quad (m-1, 1)_p, \quad (m-1, 2)_p, \quad (m-1, 3)_p, \quad \ldots, \quad [m-1, (m-1)p]_p.$$

20. *Remarque.* — Ce même théorème du n° **18** pourrait se déduire de celui du n° **16**, dont on peut le considérer comme un simple corollaire. Nous laissons au lecteur le soin de faire lui-même cette facile déduction.

21. Théorème. — *La somme des termes de la suite*

$$(m, 0)_p, \quad (m, 1)_p, \quad (m, 2)_p, \quad (m, 3)_p, \quad \ldots, \quad (m, mp)_p$$

vaut $p+1$ fois la somme des termes de la suite

$$(m-1, 0)_p, \quad (m-1, 1)_p, \quad (m-1, 2)_p, \quad (m-1, 3)_p, \quad \ldots, \quad [m-1, (m-1)p]_p.$$

En effet, les termes dont les seconds indices, divisés par $p+1$, donnent un même reste α, ont une somme égale à la somme des termes de la seconde suite. Or la première suite se compose de $p+1$ groupes de cette espèce, puisque α peut prendre les $p+1$ valeurs $0, 1, 2, 3, \ldots, p$;

donc on a, identiquement

$$\sum_{k=0}^{k=mp} (m, k)_p = (p+1) \sum_{k=0}^{k=(m-1)p} (m-1, k)_p,$$

ce qui démontre le théorème.

22. Théorème. — *La somme des termes de la suite*

$$(m, 0)_p, \quad (m, 1)_p, \quad (m, 2)_p, \quad (m, 3)_p, \quad \ldots, \quad (m, mp)_p$$

est égale à

$$(p+1)^m.$$

En effet, on a identiquement

$$\sum_{k=0}^{k=p} (1, k)_p = p+1;$$

on a aussi, d'après le théorème du n° **21**,

$$\sum_{k=0}^{k=2p} (2, k)_p = (p+1) \sum_{k=0}^{k=p} (1, k)_p,$$

$$\sum_{k=0}^{k=3p} (3, k)_p = (p+1) \sum_{k=0}^{k=2p} (2, k)_p,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

$$\sum_{k=0}^{k=mp} (m, k)_p, = (p+1) \sum_{k=0}^{k=(m-1)p} (m-1, k)_p.$$

Multiplions ces égalités membres à membres et supprimons les facteurs communs; il vient

$$\sum_{k=0}^{k=mp} (m, k)_p = (p+1)^m,$$

ce qu'il fallait démontrer.

23. Corollaire. — *Le nombre de toutes les combinaisons régulières d'ordre p de m lettres est*

$$(p+1)^m - 1.$$

En effet, si de l'égalité

$$\sum_{k=0}^{k=mp}(m,k)_p=(p+1)^m$$

nous retranchons, membres à membres, l'égalité

$$(m,0)_p=1,$$

qui résulte de la convention du n° 7, nous trouvons

$$\sum_{k=1}^{k=mp}(m,k)_p=(p+1)^m-1.$$

24. *Remarque*. — Les termes de la suite

$$(m,0)_p,\quad (m,1)_p,\quad (m,2)_p,\quad (m,3)_p,\quad \ldots,\quad (m,mp)_p$$

peuvent se classer en $p+1$ groupes, comme on l'a vu au n° 18, d'après les restes que donnent les seconds indices divisés par $p+1$; chacun de ces groupes a donc une somme égale à

$$(p+1)^{m-1}.$$

Il en est de même pour les nombres des combinaisons régulières d'ordre p de m lettres, avec cette différence toutefois que le groupe où le second indice est multiple de $p+1$ a une somme moindre d'une unité, et par suite égale à

$$(p+1)^{m-1}-1,$$

puisque ce groupe contient le terme

$$(m,0)_p,$$

qui est égal à l'unité, d'après la convention du n° 7, et qui ne représente pas un nombre de combinaisons.

25. Théorème. — *Si l'on forme les combinaisons régulières d'ordre p de m lettres, en mettant dans chacune un nombre de lettres multiple de $p+1$, on obtient un nombre de combinaisons inférieur d'une unité au nombre de celles qu'on obtiendrait en mettant dans chaque combinaison un nombre de lettres égal à un multiple de $p+1$ plus un nombre quelconque, mais constant, différent de zéro et inférieur à $p+1$.*

Cela résulte immédiatement de la remarque précédente. C'est une généralisation curieuse et inattendue de ce théorème sur les combinaisons simples : que *le nombre des combinaisons simples de m lettres qui renferment un nombre pair de lettres est inférieur d'une unité au nombre de celles qui en renferment un nombre impair.*

§ VI. — *Nouvelle relation entre les combinaisons de m lettres et les combinaisons de m — 1 lettres.*

26. Théorème. — *On a identiquement*

$$\frac{n}{m}(m, n)_p = \sum_{k=1}^{k=p} k(m-1, n-k)_p.$$

En effet :

1° Chacune des combinaisons régulières d'ordre p de m lettres n à n contient n lettres; le nombre total des lettres contenues dans ces combinaisons est par suite

$$n(m, n)_p,$$

et, comme toutes s'y trouvent le même nombre de fois, chacune d'elles, a par exemple, y entre un nombre de fois donné par l'expression

$$\frac{n}{m}(m, n)_p.$$

2° Cette même lettre a est donnée

$$1(m-1, n-1)_p$$

fois par celles des combinaisons considérées qui la contiennent une fois chacune;

$$2(m-1, n-2)_p$$

fois par celles qui la contiennent deux fois, et ainsi de suite; enfin

$$p(m-1, n-p)_p$$

fois par celles qui la contiennent p fois. On a donc identiquement

$$\frac{n}{m}(m, n)_p = 1(m-1, n-1)_p + 2(m-1, n-2)_p + 3(m-1, n-3)_p + \ldots + p(m-1, n-p)_p,$$

ce qui démontre le théorème.

27. Corollaire. — *Si m et n sont premiers entre eux, le nombre*

$$(m, n)_p$$

est divisible par m.

En effet, dans l'égalité du n° 26, le second membre est entier; donc le premier l'est aussi, donc le produit

$$n(m, n)_p$$

est divisible par m; donc, si m est premier avec n, il divise

$$(m, n)_p.$$

§ VII. — *Relation entre les nombres des différentes combinaisons d'ordre p de m lettres.*

28. Théorème. — *On a identiquement*

$$n(m, n)_p = \sum_{k=0}^{k=p} (km + k - n)(m, n-k)_p.$$

En effet, le théorème du n° 11 nous donne

$$n(m+1, n)_p = n \sum_{k=0}^{k=p} (m, n-k)_p;$$

le théorème du n° 26 nous donne, d'autre part,

$$n(m+1, n)_p = (m+1) \sum_{k=0}^{k=p} k(m, n-k)_p.$$

Retranchons membres à membres, il vient

$$0 = \sum_{k=0}^{k=p} (mk + k - n)(m, n-k)_p,$$

d'où nous tirons

$$0 = -n(m, n)_p + \sum_{k=1}^{k=p} (mk + k - n)(m, n-k)_p,$$

ce qu'il fallait démontrer.

29. *Remarque.* — Cette formule nous présente cette particularité remarquable qu'un seul des indices, le second, n'y est point constant.

§ VIII. — *Relations non linéaires entre les nombres de combinaisons.*

30. Toutes les formules qui précèdent sont linéaires par rapport aux nombres de combinaisons. Celles que nous allons établir dans ce paragraphe et le suivant sont, au contraire, toutes du second degré par rapport à ces mêmes nombres.

31. Théorème. — *On a identiquement*

$$(m, n)_p = \sum_{k=0}^{k=m} (m, k)_1 (m-k, n-kp)_{p-1}.$$

Considérons, en effet, les combinaisons d'ordre p de m lettres n à n. Il en est qui ne contiennent aucune lettre p fois; leur nombre est

$$(m, n)_{p-1}$$

ou, ce qui est la même chose,

$$(m, 0)_1 (m, n)_{p-1}.$$

Celles qui ne contiennent qu'une seule lettre p fois sont en nombre égal à

$$(m, 1)_1 (m-1, n-p)_{p-1}.$$

Celles qui contiennent deux lettres p fois chacune sont en nombre égal à

$$(m, 2)_1 (m-2, n-2p)_{p-1},$$

et ainsi de suite. On a donc identiquement

$$\begin{aligned}(m, n)_p = (m, 0)_1 (m, n)_{p-1} &+ (m, 1)_1 (m-1, n-p)_{p-1} \\ &+ (m, 2)_1 (m-2, n-2p)_{p-1} + \ldots,\end{aligned}$$

ce qu'il fallait démontrer.

32. *Remarque.* — Bien que, dans l'identité précédente, nous ayons indiqué au Σ que k varie depuis zéro jusqu'à m, le second membre de cette identité n'a souvent qu'un nombre de termes inférieur à $m + 1$.

D'après les conventions du n° 7, en effet, il se peut, à cause du second facteur, que les termes du développement deviennent tous nuls à partir d'une valeur de k inférieure à m. L'identité n'en reste pas moins exacte.

La plupart de nos formules pourraient donner lieu à des remarques analogues.

33. Théorème. — *On a identiquement*

$$(m, n)_p = \sum_{k=1}^{k=m} (m, k)_1 (k, n-k)_{p-1}.$$

Considérons, en effet, les combinaisons d'ordre p de m lettres n à n. Il en est qui ne contiennent qu'une seule lettre : leur nombre est

$$(m, 1)_1 (1, n-1)_{p-1};$$

celles qui en contiennent deux sont en nombre égal à

$$(m, 2)_1 (2, n-2)_{p-1},$$

et ainsi de suite.

Donc on a

$$(m, n)_p = (m, 1)_1 (1, n-1)_{p-1} + (m, 2)_1 (2, n-2)_{p-1} + \ldots,$$

ce qui démontre le théorème.

34. *Remarque.* — Dans l'identité

$$(m, n)_p = \sum_{k=1}^{k=m} (m, k)_1 (k, n-k)_{p-1},$$

le premier terme différent de zéro n'est pas d'ordinaire

$$(m, 1)_1 (1, n-1)_{p-1}:$$

c'est le terme

$$(m, x)_1 (x, n-x)_{p-1},$$

x étant la partie entière du quotient de $n+p-1$ par p.

L'identité en question peut donc s'écrire

$$\begin{aligned}(m, n)_p = {} & (m, x)_1 (x, n-x)_{p-1} + (m, x+1)_1 (x+1, n-x-1)_{p-1} \\ & + (m, x+2)_1 (x+2, n-x-2)_{p-1} + \ldots,\end{aligned}$$

ou bien, ce qui revient au même,

$$(m, n)_p = (m, x)_1 \Big[(x, n-x)_{p-1} + \frac{m-x}{x+1}(x+1, n-x-1)_{p-1} + \frac{(m-x)(m-x-1)}{(x+1)(x+2)}(x+2, n-x-2)_{p-1} + \ldots \Big],$$

§ IX. — *Somme des carrés des nombres de combinaisons de m lettres.*

35. Théorème. — *On a identiquement*

$$(r+s, n)_p = \sum_{k=0}^{k=rp} (r, k)_p (s, n-k)_p.$$

En effet, partageons les $r+s$ lettres données, supposées forcément distinctes, en deux groupes dont l'un en contienne r et l'autre s.

Les combinaisons régulières d'ordre p, de $r+s$ lettres, n à n, qui ne renfermeront aucune lettre du premier groupe seront en nombre égal évidemment à

$$(r, 0)_p (s, n)_p.$$

Celles qui en renfermeront une du premier groupe seront en nombre

$$(r, 1)_p (s, n-1)_p.$$

Celles qui en renfermeront deux en nombre

$$(r, 2)_p (s, n-2)_p,$$

et ainsi de suite.

On a donc identiquement

$$(r+s, n)_p = (r, 0)_p (s, n)_p + (r, 1)_p (s, n-1)_p + (r, 2)_p (s, n-2)_p + \ldots,$$

ce qui démontre le théorème.

36. *Remarque.* — Si, dans cette dernière identité, on fait

$$r+s = m,$$
$$r = 1$$

et par suite

$$s = m-1,$$

on retrouve l'identité

$$(m, n)_p = \sum_{k=0}^{k=p} (m-1, n-k)_p,$$

établie directement au n° 11.

37. Corollaire. — *On a identiquement*

$$(2m, n)_p = \sum_{k=0}^{k=mp} (m, k)_p (m, n-k)_p.$$

Il suffit, pour obtenir cette formule, de remplacer par m, dans la formule du n° 35, chacune des lettres r et s.

38. Lemme. — *On a identiquement*

$$(r+s, sp)_p = \sum_{k=0}^{k=rp} (r, k)_p (s, k)_p.$$

Pour obtenir cette formule, il suffit de prendre encore celle du n° 35 et d'y remplacer n par sp, en remarquant que, dans ce cas,

$$(s, n-k)_p = (s, k)_p.$$

39. *Remarque.* — Cette dernière formule (n° 38), que nous venons de déduire de celle du n° 35, pourrait, sans difficulté, s'obtenir directement.

40. Théorème. — *La somme des carrés des termes de la suite*

$$(m, 0)_p, \quad (m, 1)_p, \quad (m, 2)_p, \quad (m, 3)_p, \quad \ldots, \quad (m, mp)_p$$

est égale à

$$(2m, mp)_p.$$

En effet, si, dans la formule du n° 38, nous faisons

$$r = s = m,$$

nous trouvons

$$(2m, mp)_p = \sum_{k=0}^{k=mp} (m, k)_p^2,$$

ce qui démontre le théorème.

41. *Remarque.* — On peut rapprocher ce dernier théorème et ceux qui le précèdent de la Note sur les combinaisons simples, que nous avons publiée, au mois de mai 1871, dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques* [1].

CHAPITRE III.

CALCUL DU NOMBRE DES COMBINAISONS RÉGULIÈRES.

§ I. — *Calcul par voie récurrente.*

42. Théorème. — *Dans la suite*

$$(m,0)_p, \quad (m,1)_p, \quad (m,2)_p, \quad (m,3)_p, \quad \ldots, \quad (m,mp)_p,$$

chaque terme est la somme des p précédents multipliés respectivement par des quantités connues.

Revenons, en effet, à l'identité

$$(m,n)_p = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{k=p}(km+k-n)(m,n-k)_p,$$

qui constitue le théorème du n° 28. Cette identité donne précisément le terme

$$(m,n)_p$$

sous la forme indiquée dans le théorème ci-dessus, et par suite démontre ce théorème.

43. *Remarque.* — On voit que cette même identité (n° 42) donne le moyen de calculer de proche en proche, par voie récurrente, tous les termes de la suite considérée, pourvu qu'on connaisse les premiers. Or on sait (n° 7) que tous les termes à gauche de

$$(m,0)_p$$

---

[1] 2e série, t. X, p. 221.

sont nuls; on sait, de plus, d'après la convention du n° 7, que

$$(m, 0)_p = 1;$$

et, d'après la remarque du n° 6, que

$$(m, 1)_p = m.$$

On peut donc facilement effectuer le calcul.

44. Théorème. — *Si l'on pose, pour abréger,*

$$(m, n-\alpha)_p = A_\alpha, \quad (n-\beta) - \gamma(m+1) = B_{\beta,\gamma},$$

on a, identiquement,

$$A_0 = (m, n)_p = \frac{(-1)^n}{n!}\begin{vmatrix} B_{0,1} & B_{0,2} & B_{0,3} & \ldots & B_{0,p} & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ B_{1,0} & B_{1,1} & B_{1,2} & \ldots & B_{1,p-1} & B_{1,p} & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & B_{2,0} & B_{2,1} & \ldots & B_{2,p-2} & B_{2,p-1} & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & B_{n-2,0} & B_{n-2,1} & B_{n-2,2} \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & B_{n-1,0} & B_{n-1,1} \end{vmatrix},$$

le déterminant ci-dessus ayant précisément n lignes.

Pour le démontrer, revenons encore à la formule du n° 28, que nous avons rappelée au n° 42. Si nous faisons usage des abréviations indiquées dans l'énoncé, elle nous donne les identités suivantes :

$$\begin{aligned} B_{0,0}A_0 + B_{0,1}A_1 + B_{0,2}A_2 + \ldots + B_{0,p}A_p &= 0, \\ B_{1,0}A_1 + B_{1,1}A_2 + B_{1,2}A_3 + \ldots + B_{1,p}A_{p+1} &= 0, \\ B_{2,0}A_2 + B_{2,1}A_3 + B_{2,2}A_4 + \ldots + B_{2,p}A_{p+2} &= 0, \end{aligned}$$

et ainsi de suite, jusqu'aux deux identités

$$\begin{aligned} B_{n-2,0}A_{n-2} + B_{n-2,1}A_{n-1} + B_{n-2,2}A_n &= 0, \\ B_{n-1,0}A_{n-1} + B_{n-1,1}A_n &= 0. \end{aligned}$$

Ajoutons encore l'identité

$$A_n = 1.$$

Nous obtenons $n+1$ équations du premier degré entre $n+1$ inconnues, qui sont

$$A_0, \quad A_1, \quad A_2, \quad A_3, \quad \ldots, \quad A_n,$$

c'est-à-dire

$$(m, n)_p, \quad (m, n-1)_p, \quad (m, n-2)_p, \quad (m, n-3)_p, \quad \ldots, \quad (m, 0)_p.$$

Si nous résolvons ce système à l'aide des déterminants, de manière à obtenir l'expression de

$$(m, n)_p,$$

nous arrivons à la formule qui fait l'objet de ce théorème.

45. *Remarque*. — La formule du théorème précédent (n° 44) n'est qu'une conséquence de ce qui précède; car il est bien évident que le terme général d'une série, soit récurrente, soit analogue aux séries récurrentes, se peut toujours mettre sous la forme d'un déterminant. Elle exprime le nombre

$$(m, n)_p,$$

directement en fonction des quantités

$$B_{\beta, \gamma},$$

c'est-à-dire en fonction des quantités données. En théorie, elle présente donc un très-grand avantage sur la méthode du n° 43; mais, dans la pratique, cet avantage disparaît, pour ainsi dire, dès que n est un peu grand, tant le déterminant que renferme la formule devient alors long à calculer.

46. *Applications*. — Quoi qu'il en soit, si nous appliquons au cas, par exemple, où p égale 2, soit la méthode du n° 43, soit celle du n° 45, nous trouvons

$$(m, 0)_2 = 1,$$

$$(m, 1)_2 = \frac{m}{1},$$

$$(m, 2)_2 = \frac{m}{1} \frac{m+1}{2},$$

$$(m, 3)_2 = \frac{m(m-1)}{1.2} \frac{m+4}{3},$$

$$(m, 4)_2 = \frac{m(m-1)}{1.2} \frac{m^2+7m-6}{3.4},$$

$$(m, 5)_2 = \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3} \frac{m^2+13m+12}{4.5},$$

47. *Remarque.* — On voit bien, sur les exemples qui précèdent, que le nombre

$$(m, x)_1,$$

x étant la partie entière du quotient de $n+p-1$ par p, est facteur de l'expression

$$(m, n)_p.$$

Il en devait être ainsi d'après la remarque du n° 34.

§ II. — *Calcul symbolique.*

48. Lemme. — *Le nombre*

$$(m, n)_p$$

est une fonction linéaire des nombres de combinaisons simples de m lettres.

Supposons que ce soit vrai pour le nombre

$$(\alpha, n)_p,$$

tant que α ne dépasse pas $m-1$. Alors le nombre

$$(\alpha, n-k)_p$$

sera une fonction linéaire des expressions

$$C_\alpha^0, \quad C_\alpha^1, \quad C_\alpha^2, \quad C_\alpha^3, \quad \ldots,$$

et, par suite, l'expression

$$\sum_{\alpha=0}^{\alpha=m-1} (\alpha, n-k)_p$$

sera la même fonction linéaire des expressions

$$\sum_{\alpha=0}^{\alpha=m-1} C_\alpha^0, \quad \sum_{\alpha=0}^{\alpha=m-1} C_\alpha^1, \quad \sum_{\alpha=0}^{\alpha=m-1} C_\alpha^2, \quad \sum_{\alpha=0}^{\alpha=m-1} C_\alpha^3 \ldots .$$

Or on sait que

$$\sum_{\alpha=0}^{\alpha=m-1} C_\alpha^l = C_m^{l+1};$$

donc

$$\sum_{\alpha=0}^{\alpha=m-1} (\alpha, n-k)_p$$

est toujours la même fonction linéaire des quantités

$$C_m^1, \quad C_m^2, \quad C_m^3, \quad C_m^4, \quad \ldots.$$

Cela posé, l'identité qui constitue le théorème du n° **16** peut s'écrire ainsi :

$$(m, n)_p = \sum_{\alpha=0}^{\alpha=m-1} (\alpha, n-1)_p + \sum_{\alpha=0}^{\alpha=m-1} (\alpha, n-2)_p + \ldots + \sum_{\alpha=0}^{\alpha=m-1} (\alpha, n-p)_p;$$

donc le nombre

$$(m, n)_p$$

est aussi une fonction linéaire des quantités

$$C_m^0, \quad C_m^1, \quad C_m^2, \quad C_m^3, \quad \ldots.$$

Or le théorème est vrai pour l'expression

$$(0, n)_p,$$

car on a, d'après la convention du n° **7**,

$$(0, n)_p = (0, n)_1 = C_0^n.$$

Il est vrai aussi pour l'expression

$$(1, n)_p;$$

car on a, d'après la remarque du n° **6**,

$$(1, n)_p = (1, n)_1 = C_1^n.$$

Donc le théorème est général.

49. Lemme. — *Si, dans les expressions*

$$C_m^0, \quad C_m^1, \quad C_m^2, \quad C_m^3, \quad \ldots,$$

on assimile les indices supérieurs à des exposants, les inférieurs continuant à être regardés comme des indices, on a, symboliquement,

$$\sum_{\alpha=0}^{\alpha=m-1} (\alpha, n-k)_p = C_m (m, n-k)_p.$$

En effet, d'après le théorème précédent, le nombre

$$(m, n-k)_p$$

est une fonction linéaire des quantités

$$C_m^0, \quad C_m^1, \quad C_m^2, \quad C_m^3, \quad \ldots$$

Donc le nombre

$$(\alpha, n-k)_p$$

est la même fonction linéaire des quantités

$$C_\alpha^0, \quad C_\alpha^1, \quad C_\alpha^2, \quad C_\alpha^3, \quad \ldots;$$

et, par suite,

$$\sum_{\alpha=0}^{\alpha=m-1} (\alpha, n-k)_p$$

est encore la même fonction linéaire des expressions

$$\sum_{\alpha=0}^{\alpha=m-1} C_\alpha^0, \sum_{\alpha=0}^{\alpha=m-1} C_\alpha^1, \sum_{\alpha=0}^{\alpha=m-1} C_\alpha^2, \sum_{\alpha=0}^{\alpha=m-1} C_\alpha^3, \quad \ldots,$$

c'est-à-dire, comme nous l'avons remarqué déjà dans le numéro précédent, des quantités

$$C_m^1, \quad C_m^2, \quad C_m^3, \quad C_m^4, \quad \ldots.$$

Or ces quantités ne sont autre chose que les termes de la suite

$$C_m^0, \quad C_m^1, \quad C_m^2, \quad C_m^3, \quad \ldots,$$

dont tous les indices supérieurs sont augmentés d'une unité. Donc le théorème est démontré.

50. Théorème. — *Dans la suite*

$$(m, 0)_p, \quad (m, 1)_p, \quad (m, 2)_p, \quad (m, 3)_p, \quad \ldots,$$

chaque terme est égal à la somme des p précédents multipliés symboliquement chacun par le facteur

$$C_m.$$

Pour le démontrer, revenons à l'identité du n° 16, que nous écrirons comme nous l'avons fait au n° 46 :

$$(m, n)_p = \sum_{\alpha=0}^{\alpha=m-1} (\alpha, n-1)_p + \sum_{\alpha=0}^{\alpha=m-1} (\alpha, n-2)_p + \ldots + \sum_{\alpha=0}^{\alpha=m-1} (\alpha, n-p)_p;$$

puis remplaçons chacun des termes de son second membre par sa valeur tirée du théorème précédent (n° 47). Nous trouvons

$$(m, n)_p = C_m (m, n-1)_p + C_m (m, n-2)_p + \ldots + C_m (m, n-p)_p;$$

ce qui démontre le théorème.

51. *Remarque.* — Le théorème que nous venons d'établir nous donne le moyen de calculer de proche en proche, par voie récurrente, l'expression de

$$(m, n)_p$$

en fonction des nombres de combinaisons simples. Il suffit pour cela d'appliquer le théorème précédent, en nous rappelant :

D'abord que tous les termes de la suite qui précéderaient

$$(m, 0)_p$$

sont identiquement nuls, d'après la convention du n° 7;

Ensuite que l'on a, d'après les n^{os} 7 et 6,

$$(m, 0)_p = C_m^0,$$
$$(m, 1)_p = C_m^1.$$

52. *Remarque.* — Pour simplifier l'écriture, nous pouvons, dans les calculs relatifs à

$$(m, n)_p,$$

supprimer à la lettre C son indice inférieur m, sauf à le rétablir dans les résultats. Cette suppression ne créera aucune ambiguïté, puisque la lettre m est la seule qui, dans ces calculs, serve d'indice inférieur à la lettre C.

53. Théorème. — *On a symboliquement*

$$(m, n)_p = \begin{vmatrix} C & C & C & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & C & C & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & C & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ . & . & . & \ldots & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & -1 & C & C \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & -1 & C \end{vmatrix},$$

ce déterminant présentant n lignes dont les premières contiennent, p fois chacune, la lettre C.

En effet, le théorème du n° 51 nous donne les identités symboliques suivantes :

$$\begin{aligned} -(m, n)_p \quad + C(m, n-1)_p + C(m, n-2)_p + \ldots + C(m, n-p)_p &= 0, \\ -(m, n-1)_p + C(m, n-2)_p + C(m, n-3)_p + \ldots + C(m, n-p-1)_p &= 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots &, \\ -(m, 2)_p + C(m, 1)_p + C(m, 0)_p &= 0, \\ -\quad (m, 1)_p + C(m, 0)_p &= 0. \end{aligned}$$

Joignons-y l'identité

$$-(m, 0)_p = -1;$$

nous obtenons $n+1$ équations du premier degré à $n+1$ inconnues qui sont

$$(m, n)_p, \quad (m, n-1)_p, \quad (m, n-2)_p, \quad (m, n-3)_p, \quad \ldots, \quad (m, 0)_p.$$

En résolvant ce système à l'aide des déterminants, nous en tirons, pour

$$(m, n)_p,$$

la formule qui fait l'objet du théorème actuel.

54. *Remarque.* — En développant le déterminant qui précède, on obtient une formule qui n'est plus symbolique et qui donne le nombre des combinaisons régulières d'ordre p, de m lettres, n à n, en fonction des nombres des combinaisons simples de m lettres.

55. *Applications.* — Si nous appliquons les deux procédés donnés aux nos 51 et 54 au cas où p égale 2, nous trouvons

$$\begin{aligned}
(m, 0)_2 &= C_m^0,\\
(m, 1)_2 &= C_m^1,\\
(m, 2)_2 &= C_m^2 + C_m^1,\\
(m, 3)_2 &= C_m^3 + 2C_m^2,\\
(m, 4)_2 &= C_m^4 + 3C_m^3 + C_m^2,\\
(m, 5)_2 &= C_m^5 + 4C_m^4 + 3C_m^3,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

En faisant la même application au cas où p égale 3, nous trouvons

$$\begin{aligned}
(m, 0)_3 &= C^m,\\
(m, 1)_3 &= C_m^1,\\
(m, 2)_3 &= C_m^2 + C_m^1,\\
(m, 3)_3 &= C_m^3 + 2C_m^2 + C_m^1,\\
(m, 4)_3 &= C_m^4 + 3C_m^3 + 3C_m^2,\\
(m, 5)_3 &= C_m^5 + 4C_m^4 + 6C_m^3 + C_m;\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

56. *Remarque.* — Il résulte évidemment des calculs du n° 55 que les procédés de ce paragraphe sont beaucoup plus rapides que ceux du paragraphe précédent.

§ III. — *Nouvelle expression du nombre des combinaisons régulières.*

57. Lemme. — *Si l'on désigne par* C_m^n *le nombre des combinaisons simples de m lettres n à n; par* K_m^n *le nombre des combinaisons complètes de m lettres n à n; et par* U_α *le nombre de celles-ci où* α *lettres et* α *seulement entrent plus de p fois chacune, on a identiquement*

$$C_m^\lambda K_m^{n-\lambda(p+1)} = \sum_{\alpha=0}^{\alpha=n} C_\alpha^\lambda U_\alpha.$$

Considérons, en effet, parmi les combinaisons complètes de m objets n à n, l'une de celles où λ lettres, au moins, entrent chacune plus de p fois. Celle-là se compose évidemment d'une combinaison complète de m lettres, $n-\lambda(p+1)$ à $n-\lambda(p+1)$, unie à une combinaison simple de m lettres, λ à λ, dont chaque lettre est répétée $p+1$ fois. Associons, de toutes les manières possibles, une combinaison complète de m lettres, $n-\lambda(p+1)$ à $n-\lambda(p+1)$, avec une combinaison simple de m lettres, λ à λ, dont chaque lettre sera répétée $p+1$ fois; nous obtiendrons des combinaisons complètes de m objets, n à n, dans l'une quelconque desquelles λ lettres, au moins, entreront plus de p fois chacune, et le nombre de ces résultats sera

$$C_m^\lambda K_m^{n-\lambda(p+1)}.$$

Mais tous ces résultats ne seront pas des combinaisons complètes distinctes de m lettres, n à n. En général, celles de ces combinaisons, en nombre U_α, dans lesquelles α lettres et α seulement entrent plus de p fois chacune, sont évidemment répétées un nombre de fois égal à C_α^λ. Il en résulte qu'on a identiquement

$$C_m^\lambda K_m^{n-\lambda(p+1)} = \sum_{\alpha=0}^{\alpha=n} C_\alpha^\lambda U_\alpha;$$

ce qu'il fallait démontrer.

58. *Remarque.* — Nous avons, dans le Σ du numéro précédent, pris n pour limite supérieure de α. Il est évident que cette limite est trop grande; mais cela n'a point d'inconvénient, puisque les termes qu'on obtiendrait en trop, en appliquant la formule telle quelle, seraient tous identiquement nuls.

59. Théorème. — *On a identiquement*

$$(m, n)_p = \sum_{\lambda=0}^{\lambda=n} (-1)^\lambda C_m^\lambda K_m^{n-\lambda(p+1)}.$$

En effet, d'après le lemme du n° 57, nous avons

$$C_m^0 K_m^n = \sum_{k=0}^{k=n} C_k^0 U_k,$$

$$C_m^1 K_m^{n-(p+1)} = \sum_{k=0}^{k=n} C_k^1 U_k,$$

$$C_m^2 K_m^{n-2(p+1)} = \sum_{k=0}^{k=n} C_k^2 U_k,$$

et ainsi de suite.

Multiplions par -1 les deux membres de toutes les égalités de rang pair, puis ajoutons membre à membre. Au premier membre de l'équation résultante, nous trouvons

$$\sum_{\lambda=0}^{\lambda=n}(-1)^{\lambda}C_m^{\lambda}K_m^{n-\lambda(p+1)};$$

au second membre, la lettre U_k se présente avec le coefficient

$$C_k^0 - C_k^1 + C_k^2 - C_k^3 + \ldots,$$

qui est, comme on sait, identiquement nul. Il en est ainsi pour toutes les valeurs de k supérieures à zéro; donc le second membre se réduit à U_0, c'est-à-dire à

$$(m, n)_p,$$

ce qui démontre le théorème.

60. *Remarque.* — L'identité qu'on vient d'établir peut se transformer de plusieurs manières. Si nous remarquons, par exemple, qu'on a identiquement

$$K_m^{n-\lambda(p+1)} = C_{m+n-\lambda(p+1)-1}^{n-\lambda(p+1)} = C_{m+n-\lambda(p+1)-1}^{m-1},$$

nous pouvons l'écrire

$$(m, n)_p = \sum_{\lambda=0}^{\lambda=n}(-1)^{\lambda}C_m^{\lambda}C_{m+n-\lambda(p+1)-1}^{m-1}.$$

Cela peut encore s'écrire, en n'employant que les factorielles,

$$(m, n)_p = m\sum_{\lambda=0}^{\lambda=n}(-1)^{\lambda}\frac{[m+n-\lambda(p+1)-1]!}{\lambda!\,(m-\lambda)!\,[n-\lambda(p+1)]!}.$$

61. *Remarque.* — Dans les identités des nos 59 et 60, la limite supérieure n attribuée à λ est généralement trop élevée; mais, par la raison que nous avons donnée dans la remarque du no 58, il n'en résulte aucun inconvénient.

Nous pouvons toutefois donner la vraie limite : c'est la partie entière du quotient de n par $p+1$.

Le nombre des termes formant le second membre de l'identité du théorème précédent (n° 59) est donc égal à cette partie entière, augmentée d'une unité.

62. *Remarque.* — La formule du n° 59 permet d'écrire immédiatement l'expression du nombre

$$(m, n)_p$$

en fonction des nombres des combinaisons simples et des combinaisons complètes de m lettres. N'exigeant aucun calcul préalable, elle nous semble préférable aux méthodes données précédemment.

63. *Applications.* — Calculons les valeurs successives de

$$(m, n)_p,$$

dans le cas où p égale 2. Nous trouvons

$$\begin{aligned}
(m, 0)_2 &= C_m^0 K_m^0,\\
(m, 1)_2 &= C_m^0 K_m^1,\\
(m, 2)_2 &= C_m^0 K_m^2,\\
(m, 3)_2 &= C_m^0 K_m^3 - C_m^1 K_m^0,\\
(m, 4)_2 &= C_m^0 K_m^4 - C_m^1 K_m^1,\\
(m, 5)_2 &= C_m^0 K_m^5 - C_m^1 K_m^2,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Pour le cas où p égale 3, nous avons

$$\begin{aligned}
(m, 0)_3 &= C_m^0 K_m^0,\\
(m, 1)_3 &= C_m^0 K_m^1,\\
(m, 2)_3 &= C_m^0 K_m^2,\\
(m, 3)_3 &= C_m^0 K_m^3,\\
(m, 4)_3 &= C_m^0 K_m^4 - C_m^1 K_m^0,\\
(m, 5)_3 &= C_m^0 K_m^5 - C_m^1 K_m^1,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

§ IV. — *Généralisation du triangle de Pascal.*

64. Théorème. — *Pour construire un triangle donnant les valeurs de*

$$(m, n)_p,$$

correspondant à une valeur déterminée de p, il suffit d'écrire sur une pre-

mière ligne horizontale $p+1$ fois l'unité, et de calculer les termes des autres lignes par cette règle qu'un terme quelconque est égal au terme placé au-dessus de lui augmenté des p termes qui précèdent celui-ci dans sa ligne horizontale.

Ce théorème résulte immédiatement de la remarque faite au n° **12**, sur l'identité

$$(m, n)_p = \sum_{k=0}^{k=p} (m-1, n-k)_p,$$

laquelle forme l'objet du théorème n° **11**.

65. *Remarque.* — Le triangle étant construit conformément à la règle qui précède, le nombre

$$(m, n)_p$$

n'est autre chose que le $(n+1)^{ième}$ terme de sa $m^{ième}$ ligne horizontale.

66. *Remarque.* — Il résulte évidemment de la règle que, pour le cas où p est égal à l'unité, on retrouve le triangle de Pascal. Il en devait forcément être ainsi, puisque

$$(m, n)_1$$

n'est autre chose que le nombre des combinaisons simples de m lettres, n à n.

67. *Applications.* — Formons le triangle dans le cas où p égale 2, nous trouvons

1	1	1								
1	2	3	2	1						
1	3	6	7	6	3	1				
1	4	10	16	19	16	10	4	1		
1	5	15	30	45	51	45	30	15	5	1
.....										

Pour le cas où p égale 3, le triangle est celui-ci :

1	1	1	1												
1	2	3	4	3	2	1									
1	3	6	10	12	12	10	6	3	1						
1	4	10	20	31	40	44	40	31	20	10	4	1			
1	5	15	35	65	101	135	155	155	135	101	65	35	15	5	1

68. *Remarque.* — Quand il s'agit d'arriver, non plus aux expressions générales, mais aux valeurs numériques des combinaisons régulières, ce procédé est de beaucoup le plus rapide, comme nous l'avons d'ailleurs fait remarquer dans l'Introduction.

CHAPITRE IV.

DÉVELOPPEMENT DE $(1+x+x^2+x^3+\ldots+x^p)^m$.

§ I. — *Nature des coefficients.*

69. Théorème. — *Le coefficient de x^n dans le développement de*

$$(1+x+x^2+x^3+\ldots+x^p)^m$$

n'est autre chose que le nombre

$$(m, n)_p.$$

En effet, considérons le produit

$$(1+a_1+a_1^2+\ldots+a_1^p),\ (1+a_2+a_2^2+\ldots+a_2^p)\ (1+a_m+a_m^2+\ldots+a_m^p).$$

Ceux de ses termes qui sont du degré n s'obtiennent en prenant, de toutes les façons possibles, un terme dans chaque facteur, de telle sorte que la somme des exposants de tous les termes qu'on prend soit égale à n. Il en résulte évidemment que le nombre de ces termes n'est autre chose que celui des combinaisons régulières d'ordre p, de m lettres, n à n, c'est-à-dire n'est autre chose que le nombre

$$(m, n)_p.$$

Supposons maintenant que les m lettres $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_m$ deviennent toutes égales à x, le produit considéré se réduit à

$$(1+x+x^2+\ldots+x^p)^m;$$

tous les termes de degré n du produit considéré deviennent égaux chacun à x^n, et, comme leur nombre est

$$(m, n)_p,$$

x^n, dans le nouveau produit, admet ce même nombre pour coefficient, ce qu'il fallait démontrer.

70. Corollaire. — *On a identiquement*

$$(m, n)_p = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1}{e^{nix}}\left[\frac{e^{(p+1)ix} - 1}{e^{ix} - 1}\right]^m dx.$$

En effet, il suffit de regarder le second membre de cette égalité pour apercevoir qu'il représente simplement le coefficient de x^n dans le développement qui nous occupe.

71. *Remarque.* — Nous avons fait remarquer, dans l'Introduction, que ce développement s'était présenté à Moivre à propos d'un problème sur le Calcul des probabilités. Ce problème est précisément celui dont nous avons donné l'énoncé au n° 4.

72. *Remarque.* — Les coefficients du développement considéré n'étant autres que les nombres des combinaisons régulières, ce qui précède en constitue une étude complète. Nous n'avons donc, pour faire connaître les propriétés et le mode de calcul de ces coefficients, qu'à reproduire les résultats déjà obtenus.

D'ailleurs nous avons dit, dans l'Introduction, que ces résultats se pouvaient déduire du développement lui-même.

§ II. — *Propriétés des coefficients.*

73. Théorème. — *Dans le développement considéré, les termes équidistants des extrêmes ont des coefficients égaux.*

C'est le corollaire du n° 9.

74. Théorème. — *Un coefficient quelconque du développement de la puissance $m^{\text{ième}}$ du polynôme*

$$1 + x + x^2 + \ldots + x^p$$

est égal au coefficient de même rang dans le développement de la puis-

sance $(m-1)^{ième}$ *du même polynôme plus les* p *coefficients placés à la gauche de celui-ci.*

C'est la remarque du n° 80.

75. Théorème. — *Les coefficients du carré du polynôme*

$$1 + x + x^2 + \ldots + x^p$$

ne sont autre chose que les nombres $1, 2, 3, \ldots, p$, *suivis du nombre* $p+1$, *lequel est suivi à son tour des* p *nombres* $p, p-1, p-2, \ldots, 3, 2, 1$.

C'est le corollaire du n° 13.

76. Théorème. — *Les coefficients du développement considéré*

$$(1 + x + x^2 + \ldots + x^p)^m$$

croissent jusqu'au milieu et décroissent au delà.

C'est le théorème du n° 14.

77. Théorème. — *Si, dans le développement considéré, on prend les coefficients de* $p+1$ *en* $p+1$, *on obtient une somme constante, quel que soit celui des* $p+1$ *premiers coefficients par lequel on commence.*

C'est la remarque n° 19.

78. Théorème. — *La somme de tous les coefficients du développement est égale à*

$$(p+1)^m.$$

C'est le théorème n° 22.

79. Théorème. — *Si* m *et* n *sont premiers entre eux, le coefficient de* x^n *dans le développement considéré est divisible par* m.

C'est le corollaire n° 27.

80. Théorème. — *La somme des carrés de tous les coefficients du développement considéré est égale au coefficient de* x^{mp} *dans le développement de*

$$(1 + x + x^2 + \ldots + x^p)^{2m}.$$

C'est le théorème du n° 40.

§ III. — *Calcul des coefficients.*

81. Ce calcul n'étant autre chose que celui du nombre

$$(m, n)_p,$$

nous pouvons l'effectuer de quatre manières différentes :

1° Par voie récurrente, comme nous l'avons indiqué au n° 43, ou bien à l'aide du déterminant du n° 44;

2° Par voie récurrente encore, mais symboliquement, comme on l'a dit au n° 51, ou bien à l'aide du déterminant du n° 53;

3° A l'aide de la formule qui constitue le théorème du n° 59 ou des formules qu'on en a déduites au n° 60. La formule du n° 59 a été, comme nous l'avons dit dans l'Introduction, trouvée par Moivre [1], qui l'a tirée algébriquement de la considération même du développement;

4° Enfin, à l'aide des triangles du n° 64. Ce dernier procédé, nous le répétons, est de beaucoup le meilleur : il fournit, par un seul calcul, les valeurs numériques de tous les coefficients de la puissance considérée et de tous ceux des puissances inférieures.

CHAPITRE V.

DU NOMBRE DES COMBINAISONS GÉNÉRALES.

§ I. — *Nature et importance du problème.*

82. Nous avons donné déjà, dans notre Introduction, la définition des combinaisons générales. En commençant ce Chapitre, nous la reproduisons, en modifiant toutefois, afin de faciliter les raisonnements, les notations déjà employées.

---

[1] *Miscellanea analytica*, p. 196.

Les combinaisons générales, n à n, des m lettres distinctes

$$A_1,\ A_2,\ A_3,\dots,\ A_\alpha;\quad B_1,\ B_2,\ B_3,\dots,\ B_\beta;\quad C_1,\ C_2,\ C_3,\dots,C_\gamma;\ \dots$$

sont les groupes qu'on peut former en prenant n de ces lettres de toutes les manières possibles, avec ces conventions : que a, b, c,..., désignant des nombres distincts, les lettres A *puissent entrer dans un même groupe chacune jusqu'à a fois, les lettres* B *chacune jusqu'à b fois, les lettres* C *chacune jusqu'à c fois,..., et que deux groupes, qui ne différeraient que par l'ordre des lettres, soient regardés comme identiques.*

83. Quel est le nombre de ces combinaisons? C'est le problème qu'il faudrait savoir résoudre pour répondre aux questions suivantes :

Si l'on regarde comme du premier degré chaque facteur premier supérieur à l'unité, combien un nombre quelconque admet-il de diviseurs du degré n?

Combien un polynôme quelconque, entier en x et de degré m, admet-il de diviseurs du degré n?

De combien de manières peut-on obtenir la somme $n+m$ par le jet des m dés

$$A_1,\ A_2,\ A_3,\dots,\ A_\alpha;\quad B_1,\ B_2,\ B_3,\dots,\ B_\beta;\quad C_1,\ C_2,\ C_3,\dots,\ C_\gamma;\ \dots,$$

sachant que les dés A *ont chacun $a+1$ faces marquées* 1, 2, 3,..., $a+1$; *les dés* B, *chacun $b+1$ faces marquées* 1, 2, 3,..., $b+1$; *les dés* C, *chacun $c+1$ faces marquées* 1, 2, 3,..., $c+1$; *et que les nombres a, b, c,... sont tous différents?*

Pour peu qu'on y réfléchisse, on voit que c'est le nombre des combinaisons générales qui répond à chacune de ces questions.

§ II. — *Calcul du nombre des combinaisons générales.*

84. Il est évident que le nombre cherché n'est autre chose que le nombre des solutions de l'équation indéterminée à m inconnues

$$A_1+A_2+\dots+A_\alpha+B_1+B_2+\dots+B_\beta+C_1+C_2+\dots+C_\gamma+\dots=n,$$

dans laquelle les lettres A peuvent prendre les valeurs 0, 1, 2,..., a; les lettres B, les valeurs 0, 1, 2,..., b; les lettres C, les valeurs 0, 1, 2,..., c; ...; les nombres a, b, c,... étant tous différents.

85. Il est un cas où le nombre des solutions de cette équation s'obtient immédiatement, c'est lorsqu'il n'y entre que des inconnues d'une seule espèce, que des lettres A par exemple. Dans ce cas, en effet, l'équation considérée se réduit à l'équation indéterminée donnée par nous au n° 3, et dont le nombre des solutions est égal au nombre des combinaisons régulières. Ce cas ne doit pas nous arrêter : c'est dans toute sa généralité que nous devons nous proposer de résoudre l'équation indéterminée du n° 84.

86. Le moyen le plus simple consiste à la ramener à d'autres, présentant un nombre moindre d'inconnues : c'est ce qu'on peut faire à l'aide du théorème que voici :

87. Théorème. — *Le nombre des solutions de l'équation indéterminée*

$$x+y+z+\ldots=n,$$

où x peut prendre les valeurs $0, 1, 2, \ldots, a$, *est la somme des nombres de solutions des $a+1$ équations indéterminées*

$$\begin{aligned} y+z+\ldots&=n, \\ y+z+\ldots&=n-1, \\ y+z+\ldots&=n-2, \\ \ldots\ldots&\ldots\ldots, \\ y+z+\ldots&=n-a, \end{aligned}$$

dans lesquelles $y, z, \ldots$ peuvent prendre les mêmes valeurs que dans la proposée.

Ce théorème, qui est fondamental, nous semble n'avoir pas besoin de démonstration.

88. *Remarque.* — A l'aide de ce théorème, on ramènera notre équation indéterminée du n° 84, laquelle présente m inconnues, à d'autres n'en ayant plus chacune que $m-1$; celles-ci à de nouvelles, n'en ayant plus que $m-2$, et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'on arrive à des équations à une inconnue admettant chacune une ou zéro solution.

89. *Remarque.* — Le procédé qui précède est simple, en théorie; mais, dans la pratique, lorsque le nombre des inconnues n'est pas très-

petit, il devient extrêmement long, et presque illusoire. Il est un cas, unique heureusement, où nous ne voyons nul moyen de le simplifier : c'est celui où il n'y a qu'une seule lettre A, qu'une seule lettre B, qu'une seule lettre C, en un mot qu'une seule lettre de chaque espèce. Mais, dans tous les autres cas, on peut, par la considération des combinaisons régulières, obtenir un mode de calcul notablement moins long.

§ III. — *Simplification du calcul.*

90. Théorème. — *Si l'on donne aux lettres $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, a, b, c, \ldots$ leurs significations du n° 82, et que l'on désigne par n_α, n_β, $n_\gamma, \ldots$ des indéterminées, pouvant prendre : n_α l'une quelconque des valeurs $0, 1, 2, \ldots, \alpha a$; n_β l'une quelconque* des valeurs $0, 1, 2, \ldots, \beta b$; *n_γ l'une quelconque des valeurs $0, 1, 2, \ldots, \gamma c, \ldots$; le nombre des combinaisons générales de m lettres, n à n, est donné par l'expression*

$$\sum (\alpha, n_\alpha)_a (\beta, n_\beta)_b (\gamma, n_\gamma)_c \ldots,$$

le signe $\sum$ s'étendant à tous les termes qu'on obtient en remplaçant les indices n_α, n_β, $n_\gamma, \ldots$ par les solutions de l'équation indéterminée

$$n_\alpha + n_\beta + n_\gamma + \ldots = n.$$

En effet, considérons l'une quelconque des combinaisons générales; soient n_α le nombre des lettres A, n_β le nombre des lettres B, n_γ le nombre des lettre C, ... qu'elle renferme : on a évidemment

$$n_\alpha + n_\beta + n_\gamma + \ldots = n,$$

et il est clair que n_α est l'un des nombres $0, 1, 2, \ldots, \alpha a$; n_β l'un des nombres $0, 1, 2, \ldots \beta b$; n_γ l'un des nombres $0, 1, 2, \ldots, \gamma c$; ....

Cela posé, les lettres A forment une combinaison régulière d'ordre a, de α lettres, n_α à n_α; les lettres B, une combinaison régulière d'ordre b, de β lettres, n_β à n_β; de même pour les lettres C, et ainsi de suite. Si donc on prend toutes les combinaisons générales contenant n_α lettres A, n_β lettres B, n_γ lettres C, ..., c'est-à-dire toutes les combinaisons générales qui correspondent à une certaine solution de l'équation indéterminée de l'énoncé actuel, le nombre de ces combinaisons est égal au produit

$$(\alpha, n_\alpha)_a (\beta, n_\beta)_b (\gamma, n_\gamma)_c \ldots.$$

Le nombre total des combinaisons générales est donc la somme de tous les produits analogues, ce qui démontre le théorème.

91. *Règle.* — Ainsi, pour obtenir le nombre des combinaisons générales, il faut d'abord chercher les solutions de l'équation

$$n_\alpha + n_\beta + n_\gamma + \ldots = n;$$

ensuite calculer le produit correspondant à chacune d'elles, ce qui est facile d'après ce qui précède; enfin faire la somme de tous ces produits.

92. *Remarque.* — Le problème que nous étudions nous conduisait d'abord (n° 84) à résoudre l'équation indéterminée

$$A_1 + A_2 + \ldots + A_\alpha + B_1 + B_2 + \ldots + B_\beta + C_1 + C_2 + \ldots + C_\gamma + \ldots = n.$$

Par la considération des combinaisons régulières, le théorème du n° 90 le réduit à la résolution de l'équation indéterminée

$$n_\alpha + n_\beta + n_\gamma + \ldots = n.$$

C'est, sauf dans le cas exceptionnel signalé plus haut (n° 89), une grande simplification, car la première de ces deux équations indéterminées renferme beaucoup plus d'inconnues que la seconde : dans celle-ci, en effet, ce nombre est égal à celui des espèces A, B, C, ... de lettres, et, dans celle-là, il est égal à celui des lettres elles-mêmes.

Supposons, par exemple, qu'on ait vingt-deux lettres distinctes, savoir: quatre lettres A, cinq lettres B, six lettres C, sept lettres D. La première méthode conduit à une équation indéterminée à vingt-deux inconnues; la méthode actuelle, à une équation indéterminée dont le nombre des inconnues est de quatre seulement.

93. *Remarque.* — Le théorème précédent (n° 90) est tout à fait général. Il s'applique parfaitement au cas où il n'y a qu'une lettre A, qu'une lettre B, qu'une lettre C, ..., c'est-à-dire au cas exceptionnel signalé plusieurs fois déjà; seulement, comme on l'a dit, il n'apporte alors aucune simplification à la première méthode, ce qui est évident, puisque, dans ce cas, les deux équations indéterminées deviennent identiques.

94. *Remarque.* — Si l'un des nombres a, b, c, ... devient égal à l'unité ou à n, le nombre des combinaisons régulières correspondant devient un nombre de combinaisons simples ou de combinaisons complètes. C'est, pour ce cas particulier, une nouvelle simplification.

95. *Remarque.* — Il est un cas remarquable où le Σ du théorème du n° 90 se peut immédiatement développer : c'est celui où il n'y a que deux sortes de lettres, des lettres A, des lettres B. Si, dans ce cas, nous donnons aux lettres m, n, α, β, a et b les mêmes significations que dans la définition du n° 82, le nombre des combinaisons générales de ces m lettres, n à n, est égal à l'expression

$$(\alpha, n)_a + (\alpha, n-1)_a(\beta, 1)_b + (\alpha, n-2)_a(\beta, 2)_b + \ldots + (\alpha, 1)_a(\beta, n-1)_b + (\beta, n)_b.$$

Cette formule, que nous tirons du théorème général du n° 90, pourrait d'ailleurs se démontrer directement.

96. *Remarque.* — Il se présente un cas tout à fait analogue dans le calcul des combinaisons générales de trois espèces de lettres : c'est lorsque, dans l'une de ces trois espèces, il n'existe qu'une lettre unique.

Supposons, en effet, qu'on nous donne une lettre unique A en même temps que β lettres B et γ lettres C; que la lettre A puisse être répétée jusqu'à a fois, chaque lettre B jusqu'à b fois, chaque lettre C jusqu'à c fois, et qu'on nous demande le nombre des combinaisons générales ainsi déterminées de toutes ces lettres n à n.

Pour obtenir ce nombre, la première chose à faire, d'après la règle précédente (91), sera de former toutes les solutions possibles de l'équation indéterminée

$$n_1 + n_\beta + n_\gamma = n,$$

dans laquelle n_1 peut prendre l'une quelconque des valeurs $0, 1, 2, 3, \ldots, a$; n_β l'une quelconque des valeurs $0, 1, 2, 3, \ldots, \beta b$; n_γ l'une quelconque des valeurs $0, 1, 2, 3, \ldots, \gamma c$.

A chacune des solutions obtenues correspond un produit de trois nombres de combinaisons régulières. La somme de tous ces produits donne, comme on l'a vu, le nombre des combinaisons générales cherché.

Mais, dans l'un quelconque de ces produits, le nombre de combinaisons régulières constituant le premier facteur est toujours égal à l'unité, car il est le nombre des combinaisons régulières d'une seule lettre. Il en résulte immédiatement que le produit considéré n'a plus, à proprement parler, pour facteurs que les deux derniers nombres de combinaisons régulières et qu'on est ramené aux combinaisons générales de deux espèces de lettres.

On pouvait, *a priori*, apercevoir cette simplification. Imaginons, en effet, qu'on ait formé toutes les combinaisons générales dont nous cherchons présentement le nombre. Celles qui ne contiennent pas A sont les combinaisons générales n à n des lettres B et des lettres C; celles qui contiennent une fois A deviennent, par la suppression de cette lettre, les combinaisons générales $n-1$ à $n-1$ des lettres B et des lettres C; celles qui contiennent deux fois A deviennent, par la suppression de ces deux A, les combinaisons générales $n-2$ à $n-2$ des lettres B et des lettres C, et ainsi de suite. En définitive, pour obtenir le nombre cherché, il suffit de considérer les lettres B et les lettres C; de calculer le nombre de leurs combinaisons générales n à n, le nombre de leurs combinaisons générales $n-1$ à $n-1$, le nombre de leurs combinaisons générales $n-2$ à $n-2$,... et de faire la somme de tous ces nombres.