

# ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

E. BOUTY

## Études sur le magnétisme (deuxième partie)

*Annales scientifiques de l'É.N.S. 2<sup>e</sup> série*, tome 5 (1876), p. 123-154

[http://www.numdam.org/item?id=ASENS\\_1876\\_2\\_5\\_\\_123\\_0](http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1876_2_5__123_0)

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1876, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (<http://www.elsevier.com/locate/ansens>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

# ÉTUDES SUR LE MAGNÉTISME

(DEUXIÈME PARTIE).

---

## ÉTUDE DE L'AIMANTATION DE L'ACIER PAR LES COURANTS,

PAR M. E. BOUTY,  
DOCTEUR ÈS SCIENCES.

---

### INTRODUCTION.

Un aimant peut être considéré comme la réunion d'un très-grand nombre d'aimants élémentaires, différant entre eux par la direction de leur axe et la grandeur de leur moment magnétique. La distribution effective de ces *éléments magnétiques*, dont nous devons la notion à l'expérience de l'aimant brisé, demeure inaccessible à l'expérience, tout au moins autant qu'on respecte l'intégrité de l'aimant étudié; mais, dans la plupart des cas, on impose d'avance au problème de l'étude des aimants des restrictions qui le simplifient beaucoup.

En premier lieu, on démontre que l'on peut substituer à l'aimantation vraie (1) une distribution superficielle fictive de magnétisme austral et boréal, qui la remplace au point de vue de toutes les actions exercées par l'aimant extérieurement à sa masse. C'est la distribution du magnétisme étudiée d'ordinaire depuis Coulomb, et sa connaissance suffit tant que l'aimant n'est point divisé.

En second lieu, si l'on considère le cas pratique d'un barreau aimanté régulièrement, agissant à grande distance, on remarque que la

---

(1) Voir dans le *Journal de Physique*, t. II, p. 297, mon article *Sur les distributions fictives d'électricité et de magnétisme*, etc.

distribution magnétique du barreau se réduit à deux plages de quantité égale et de signe contraire occupant les deux extrémités. On peut supposer chacune de ces masses condensée en son centre de gravité, et le barreau se trouve remplacé par deux pôles magnétiques de masses  $m$  et  $-m$ , distants l'un de l'autre d'une quantité  $\lambda$  (1).

Enfin, au point de vue des actions exercées à l'infini, un aimant ne diffère d'un autre que par un seul élément, que l'on désigne sous le nom de *moment magnétique*, et dont la mesure rationnelle, dans le cas d'un barreau régulier, est le produit  $m\lambda$  de la *quantité de magnétisme* de chaque pôle par leur distance. Tel est le terme de cette analyse.

Les méthodes auxquelles on a recours pour l'étude expérimentale des aimants sont de deux sortes : les unes, utilisant l'action au contact ou à très-petite distance, sont employées pour déterminer la distribution magnétique ; leur emploi est long et pénible et leur application sujette à des difficultés théoriques spéciales. Les autres, fondées sur l'action à très-grande distance, fournissent d'une manière aussi simple qu'exacte la mesure du moment magnétique.

Je me propose, dans ce travail, d'appliquer ces dernières méthodes à l'étude de la distribution. Biot a déjà donné l'exemple de ce genre de recherches, en reliant par une formule mathématique, rattachée plus tard par Green à la théorie de la force coercitive (2), les lois de la distribution dans une série de barreaux cylindriques saturés, aux moments magnétiques de ces barreaux. La partie de mon travail qui se rapporte aux barres grosses n'est qu'un développement plus large de la méthode de Biot. La partie relative aux aiguilles longues et minces est plus ori-

(1) Physiquement on peut, avec M. Jamin, considérer un barreau comme un faisceau d'aimants infiniment minces ayant leurs pôles à leurs extrémités. Ce faisceau, embrassé par la section moyenne du barreau comme par une bague, épanouit des deux côtés ses pôles de nom contraire, qui forment la distribution superficielle. Cette synthèse revient à remplacer la distribution inconnue des éléments magnétiques par la distribution solénoïdale équivalente (voir les Mémoires de Thomson), et est parfaitement légitime au point de vue mathématique ; elle a l'avantage de parler à l'imagination, et de donner un sens physique précis à toutes les quantités que l'on rencontre dans l'étude analytique des aimants. Ainsi, la puissance  $m$  du pôle d'un barreau mesure le nombre de files magnétiques qu'il comprend, et la distance  $\lambda$  est la longueur moyenne des files, comptée dans le sens de l'axe : on peut l'appeler *longueur réduite* ou *longueur magnétique* du barreau.

(2) *Annales de l'École Normale supérieure*, 2<sup>e</sup> série, t. III, p. 34.

ginale : elle a pour but de déterminer, indépendamment de toute hypothèse, les deux facteurs  $m$  et  $\lambda$  du moment magnétique.

Admettons que l'on possède une série d'aiguilles aimantées, dans lesquelles la quantité de magnétisme  $m$  est la même, ainsi que la distance  $\frac{d}{2}$  d'un pôle à l'extrémité voisine. Ce cas se présentera, par exemple, pour les aiguilles extraites par voie de rupture du milieu d'une même aiguille fortement trempée (1), et nous verrons par la suite qu'il est assez général. Soit alors  $y$  le moment magnétique d'une aiguille de longueur  $x$ , on a

$$(1) \quad y = m(x - d),$$

et il suffit théoriquement de deux mesures, faites sur des aiguilles de longueur différente, pour déterminer les deux quantités  $m$  et  $d$ .

C'est, je crois, la première fois qu'on publie des déterminations relatives à la situation des pôles dans les aiguilles aimantées par les courants. Quant aux quantités de magnétisme, leur étude a fait l'objet des recherches d'un grand nombre de savants, et j'ai cité ailleurs (2) les principales et les plus récentes. Les méthodes employées sont d'une application très-délicate et supposent que l'on possède des masses homogènes considérables du métal magnétique étudié, condition bien difficile à réaliser. De plus, ces masses doivent recevoir la forme d'ellipsoïdes (3) ou de tores (4), pour que l'aimantation qu'elles reçoivent soit la même en tous leurs points; alors le quotient de leur moment magnétique par leur volume fournit la quantité de magnétisme  $\mu$  rapportée à l'unité de volume.

Je n'ai effectué que des mesures relatives de  $\mu$ ; mais les physiciens

(1) *Annales de l'École Normale supérieure*, 2<sup>e</sup> série, t. III, p. 36 et 43.

(2) *Ibid.*, p. 10.

(3) Poisson (*Mémoires de l'Académie des Sciences*, t. VII) démontre que, dans un ellipsoïde soumis à l'action d'une force magnétique constante, agissant dans le sens de son grand axe, l'aimantation est identique en tous les points de la masse, et égale à la valeur qu'elle possède au centre d'une aiguille cylindrique infiniment longue, soumise à la même force. De Quintus Icilius a employé des ellipsoïdes.

(4) Stolelow et Rowland ont employé des tores; l'aimantation est la même en tous les points par raison de symétrie; mais un solénoïde fermé étant sans action sur un point quelconque extérieur, ces savants ont dû avoir recours, pour effectuer leurs mesures, à la production de courants induits accompagnant l'aimantation ou la désaimantation de l'anneau métallique étudié.

qui ont étudié la question ont trouvé ses valeurs si variables d'un acier ou d'un fer doux à un autre, et pour un même échantillon, dans des circonstances physiques en apparence si voisines, qu'il y a peu d'intérêt à réaliser des mesures absolues, tant que les lois qui président à cette variabilité ne nous sont pas entièrement connues.

La plus grande partie de ces recherches a été effectuée au lycée de Reims. Elles ont été terminées au laboratoire de M. Jamin. Qu'il me soit permis d'adresser ici mes remerciements à ce savant maître pour la bienveillance avec laquelle il m'a accueilli et pour les conseils qu'il n'a cessé de me prodiguer.

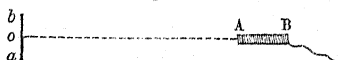
ARTICLE I. — *Aimantation permanente des aiguilles minces trempées dur.*

La quantité de magnétisme acquise d'une manière temporaire ou permanente par une aiguille d'acier soumise à l'action d'un courant, ainsi que la situation des pôles de l'aiguille, dépend de l'intensité de la *force magnétisante* employée. Il importe avant tout de définir celle-ci d'une manière précise.

Pour produire l'aimantation, on place l'aiguille dans l'axe d'une spirale très-longue par rapport à l'aiguille et suffisamment large. Dans ces conditions, l'action exercée par le courant est la même en tous les points de l'aiguille et proportionnelle à l'intensité du courant et à un coefficient qui dépend du nombre et de la largeur des spires ; mais, si l'on veut s'astreindre à employer toujours la même spirale et se borner à des mesures relatives, on peut prendre la mesure de l'intensité du courant pour celle de l'action exercée sur l'aiguille, c'est-à-dire de la force magnétisante.

La mesure relative de l'intensité des courants a été opérée à l'aide d'une sorte de boussole des tangentes d'une construction très-simple. Une petite spirale AB (*fig. 1*), animée par le courant, est disposée de

Fig. 1.



telle sorte que son axe, sensiblement perpendiculaire au méridien magnétique, passe par le milieu *o* d'une petite aiguille aimantée *ab*, mu-

nie d'un miroir et suspendue à un fil de cocon. La tangente de la déviation produite est proportionnelle à l'intensité du courant (1). Il faut avoir bien soin, pour éliminer toute action étrangère à la spirale, de replier les deux électrodes qui y portent le courant l'une sur l'autre et de très-près, de manière que leur action sur un point extérieur soit très-sensiblement nulle. Un commutateur permet de renverser le courant dans la spirale et d'éliminer ainsi, par une deuxième mesure de la déviation opérée en sens inverse, l'erreur résultant de l'imperfection de l'ajustement.

Quant aux mesures de moments magnétiques, elles étaient ordinairement effectuées par la méthode que j'ai décrite précédemment pour le cas de très-petites aiguilles aimantées (2).

J'ai étudié, en premier lieu, l'aimantation permanente d'aiguilles minces trempées très-dur. Ces aiguilles ont une longueur au moins égale et généralement supérieure à cinquante fois leur diamètre. On vérifie aisément que les moments  $\gamma$ , acquis d'une manière permanente par ces aiguilles soumises à la même force magnétisante, sont représentés par la formule

$$(1) \quad \gamma = m(x - d),$$

et, par suite, la méthode indiquée dans l'introduction est applicable à une telle série d'aiguilles (3). Il suffirait donc de mesurer les valeurs

(1) Supposons l'aiguille  $ab$  et la spirale  $AB$  infiniment petites par rapport à la distance  $Oo = r$ . On peut remplacer la spirale par un aimant dont le moment  $M$  est approximativement égal au produit  $Si$  de la somme  $S$  des surfaces embrassées par chaque spire isolément, par l'intensité du courant. Soit maintenant  $\alpha$  la déviation de l'aiguille  $ab$ ,  $\mu$  son moment magnétique, on a, d'après Gauss,

$$\text{tang} \alpha = \frac{2M\mu}{Tr^3} = \frac{2S\mu}{Tr^3} i.$$

Si les longueurs de  $ab$  et de  $AB$  ne sont plus négligeables par rapport à  $r$ , le coefficient de  $i$  est beaucoup plus compliqué, mais  $\text{tang} \alpha$  demeure proportionnel à  $i$ .

(2) Voir *Annales de l'École Normale*, 2<sup>e</sup> série, t. III, p. 12. Cette méthode, absolument irréprochable dans le cas de très-petites aiguilles, devient parfois un peu défectueuse, quand on veut mesurer le moment d'aiguilles très-longues, et très-faiblement aimantées. Cela tient à ce qu'il n'est plus permis dans ce cas de supposer nulle l'influence réciproque du barreau directeur et de l'aiguille; mais on est prévenu de cette cause d'erreur, quand elle se présente, par la non-concordance des mesures (1) et (3), et l'on rejette les déterminations correspondantes.

(3) L'équation (1) représente une droite à la condition d'y considérer  $x$  et  $\gamma$  comme des

correspondantes de  $x$  et de  $y$  pour un grand nombre d'aiguilles de même diamètre et de longueur différente, et de faire concourir toutes les observations à la détermination de  $m$  et de  $d$ .

Mais cette méthode présente ici un inconvénient : il est, en effet, très-difficile de communiquer à un grand nombre d'aiguilles une trempe dure véritablement identique, et, si cette condition n'est pas réalisée, l'une des deux déterminations, celle de  $d$ , devient à peu près illusoire; mais on peut déterminer  $m$  et  $d$  au moyen d'une seule aiguille, en se fondant sur un résultat d'expérience que j'ai déjà indiqué ailleurs (1). Quand on brise une aiguille aimantée régulière, trempée dur, les divers fragments retirés de sa partie moyenne, et de longueur suffisante, ont des moments magnétiques représentés par

$$(2) \quad y' = m(x' - \delta).$$

La quantité  $\delta$  de cette dernière équation est indépendante de l'intensité de l'aimantation, et, quant à la quantité  $m$ , il est presque évident, *a priori*, qu'elle est la même que dans l'aiguille mère. On le démontre d'ailleurs expérimentalement en remarquant que les équations (1) et (2), où l'on considère  $y$  et  $x$  comme des coordonnées courantes, représentent deux droites. Il suffit de tracer celles-ci par un nombre suffisant d'observations, et l'on vérifie qu'elles sont parallèles, c'est-à-dire que les deux quantités  $m$  sont égales.

Cela posé, déterminons la longueur et le moment magnétique  $x$  et  $y$  d'une aiguille, puis réduisons-la par l'ablation des deux bouts sur une longueur convenable, et déterminons de nouveau le moment magnétique  $y'$  et la longueur  $x'$  correspondante. La distance  $\frac{\delta}{2}$  du pôle d'une aiguille de rupture à son extrémité est connue d'avance, et égale, par exemple, à 2<sup>m</sup>,75 pour une aiguille de 0<sup>mm</sup>,55 de diamètre. Les équations (1) et (2) déterminent donc complètement  $m$  et  $d$ , au moyen d'une seule aiguille. Ajoutons qu'on peut, par des ruptures successives, raccourcir encore le fragment primitif, et obtenir autant de points que l'on voudra pour mieux déterminer la droite (2), c'est-à-dire la valeur

---

coordonnées courantes. La manière la plus simple de vérifier que cette formule est applicable consiste à vérifier que les points figuratifs des diverses aiguilles tombent effectivement en ligne droite.

(1) Voir *Annales de l'École Normale*, 2<sup>e</sup> série, t. III, p. 43.

de  $m$ . La quantité de magnétisme se trouvera connue ainsi avec une très-grande exactitude (<sup>1</sup>).

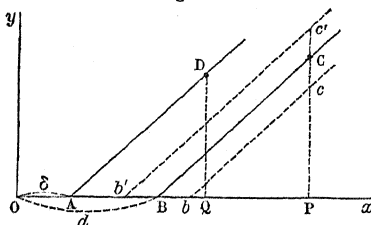
La détermination de  $d$  est à coup sûr moins précise, puisqu'elle repose sur une seule observation, celle qui se rapporte à l'aiguille-mère, et que, d'ailleurs,  $d$  est toujours une quantité assez petite. Cependant, en multipliant les observations et prenant des moyennes, on arrive à des résultats satisfaisants.

*Quantités de magnétisme.* — Les résultats suivants se rapportent à des aiguilles de 0<sup>mm</sup>,553 de diamètre; les nombres des deux colonnes sont exprimés en unités arbitraires :

Intensité du courant.	Quantité de magnétisme.
3. ....	à peine sensible.
5. ....	0,12
7. ....	0,51
9. ....	1,09
12. ....	2,11
13,8. ....	2,89
15. ....	3,35
18. ....	5,65
23. ....	11,96
28. ....	17,90
36. ....	23,00
40. ....	24,00
50. ....	25,90
∞. ....	28,90

(<sup>1</sup>) Soient BC et AD les droites représentées par les équations (1) et (2). Le problème de la détermination de  $d$  revient géométriquement au suivant : par un point C donné, mener

Fig. 2.



une parallèle CB à une droite AB donnée. La droite AD est parfaitement connue; quant au point C, sa position sur l'ordonnée CP comporte en plus ou en moins une erreur  $Cc$ , d'où résulte pour D une erreur négative ou positive égale à  $Bb$ .



Pour mieux représenter la marche de la fonction  $m$ , on peut construire une courbe en prenant pour abscisses les intensités et pour ordonnées les valeurs correspondantes de  $m$ . D'abord concave vers les ordonnées positives, la courbe présente ensuite un point d'inflexion correspondant à l'abscisse 22 à peu près et s'approche asymptotiquement d'une parallèle à l'axe des abscisses.

Ces caractères sont les mêmes que ceux des courbes, qui représentent, d'après Rowland et Stoletow, la fonction magnétisante du fer ou de l'acier <sup>(1)</sup>. Ce sont partout les mêmes traits généraux, et l'analogie est surtout frappante si l'on dessine, en regard de la courbe précédente, celle que Rowland a trouvée pour l'acier de Bessemer <sup>(2)</sup>.

Il convient cependant d'examiner s'il y a, pour l'acier trempé, une véritable fonction magnétisante, c'est-à-dire si le quotient de la quantité  $m$  par le carré du diamètre conserve, pour une même valeur de l'intensité du courant, une valeur constante. La difficulté de cette constatation réside dans l'inégalité de la trempe que l'on communique à des aiguilles de différent diamètre, que l'on place dans les mêmes conditions extérieures, par exemple en les immergeant dans l'eau quand elles présentent le même rouge vif <sup>(3)</sup>.

<sup>(1)</sup> C'est la quantité de magnétisme  $\mu$  rapportée à l'unité de volume, et considérée comme fonction de l'intensité de la force magnétisante.

<sup>(2)</sup> Voici le tableau qui a servi à tracer cette courbe. Il est tiré du Mémoire original publié, en août 1873, dans le *Philosophical Magazine*; les nombres des deux colonnes sont exprimés en unités absolues :

Intensités.	Quantités.	Intensités.	Quantités.
0,1356.....	18	2,756.....	26880
0,2793.....	80	3,219.....	34200
0,5287.....	255	3,551.....	40320
0,9398.....	727	4,469.....	52940
1,421.....	2526	5,698.....	61920
1,880.....	5108	11,44.....	91530
1,947.....	6482	20,69.....	96940
2,300.....	13510	38,99.....	100770

<sup>(3)</sup> Dans ce cas, ce sont les aiguilles les plus grosses qui sont le plus fortement trempées; elles se rapprochent, plus lentement que les aiguilles minces, du maximum de magnétisme dont elles sont susceptibles. Cependant ce maximum vérifie la loi des diamètres, ainsi que je l'ai démontré (voir *Annales de l'École Normale*, 2<sup>e</sup> série, t. III, p. 40).

D'un autre côté, si l'on rapproche les phénomènes de la trempe de l'acier de ceux de la trempe du verre, on est porté à attribuer à l'acier trempé un certain degré d'hétérogénéité de la surface au centre, et, si elle existait réellement, il n'y aurait plus lieu de parler de fonction magnétisante de l'acier trempé. J'essayai donc, sur l'avis de M. Jamin, de dissoudre dans un acide (1) la couche superficielle d'aiguilles trempées, de manière à les ramener à de moindres diamètres, et d'aimanter ensuite les aiguilles ainsi obtenues. Je constatai ainsi, non sans quelque surprise, l'existence d'une fonction magnétisante parfaitement déterminée; l'acier trempé de mes aiguilles minces est donc très-sensiblement homogène (2), et l'expérience en question permet de préciser ce qu'il convient d'entendre par l'expression un peu vague de *trempe identique*, quand on l'applique à des aiguilles de diamètre différent.

Le tableau suivant est destiné à établir, dans le cas actuel, l'existence d'une fonction magnétisante; il se rapporte au magnétisme acquis d'une manière permanente par des aiguilles amincies à l'acide et de diamètre primitif égal à 1<sup>mm</sup>,178 :

Diamètre primitif : 1 <sup>mm</sup> ,178.					
COURANT.	DIAMÈTRE.				MOYENNE.
	1 <sup>mm</sup> ,088	0 <sup>mm</sup> ,948	0 <sup>mm</sup> ,854	0 <sup>mm</sup> ,762	
19,55	0,1800	0,1722	0,1202	.....	0,1631
27,91	0,3709	0,3764	0,3350	0,3783	0,3663
36,25	0,6298	0,6424	0,6078	0,6821	0,6424
45,50	0,8697	0,8863	0,9078	0,8712	0,8881

Pour éviter les erreurs qui peuvent résulter d'une évaluation inexacte du diamètre (3), on a inscrit dans ce tableau, en regard de chaque va-

(1) L'acide chlorhydrique bouillant ou l'eau régale.

(2) La couche la plus extérieure, sur une épaisseur de 0<sup>mm</sup>,05 au plus, jouit peut-être de propriétés différentes; mais cette question exige de nouvelles expériences.

(3) Les aiguilles rongées présentent des trous microscopiques, de petites solutions de continuité; leur diamètre évalué au sphéromètre se trouve donc un peu trop fort.

leur de l'intensité du courant, la fraction de la quantité de magnétisme limite atteinte par chaque groupe d'aiguilles. Ces nombres doivent être égaux dans une même ligne horizontale, s'il existe réellement une fonction magnétisante.

Voici d'ailleurs les valeurs des quotients  $\mu = \frac{M}{D^2}$  :

D	$\frac{M}{D^2}$
<sup>mm</sup> 1,088	<sup>mm</sup> 0,1346
0,948	0,1291
0,854	0,1095
0,762	0,1125
Moyenne.....	0,1214

Le léger décroissement de  $\mu$  doit être attribué à une évaluation un peu trop forte des deux derniers diamètres, ainsi que cela a été expliqué en note.

Les résultats relatifs à la fonction magnétisante de l'acier trempé ont été confirmés par l'étude de barres de 7 à 10 millimètres de diamètre primitif.

*Distance des pôles aux extrémités.* — Le tableau suivant fournit la double distance d'un pôle à l'extrémité la plus voisine, pour des aiguilles de 0<sup>mm</sup>,553 de diamètre :

COURANT.	d		DIFFÉRENCE.
	observé.	calculé.	
18,09	<sup>mm</sup> 12,37	<sup>mm</sup> 12,37	0,00
24,99	11,86	11,32	+ 0,54
30,31	10,12	10,52	- 0,40
39,32	8,86	9,16	- 0,30
47,04	7,32	7,99	- 0,67
55,07	7,19	6,78	+ 0,59
∞	5,50	.....	.....
		Moyenne.....	- 0,73

On voit que les pôles se rapprochent des extrémités à mesure que l'in-

tensité du courant qui produit l'aimantation augmente. Les nombres de la troisième colonne ont été calculés par la formule

$$d = 15,1 \left( 1 - \frac{x}{100} \right),$$

et l'on voit qu'ils représentent très-bien l'expérience, eu égard aux erreurs dont la mesure de  $d$  est susceptible. Cependant, au voisinage de la saturation, le décroissement de  $d$  est plus lent que ne l'indiquerait la formule, et les valeurs de  $d$  s'approchent asymptotiquement de  $5^{\text{mm}},5$ , qui est caractéristique pour les aiguilles saturées de ce diamètre.

Quand le diamètre des aiguilles change, on sait que la limite de  $d$  est proportionnelle au diamètre (<sup>1</sup>); la formule générale relative à la distance des pôles est donc

$$(3) \quad d = 2\alpha D(1 - px),$$

où  $\alpha$  et  $p$  sont deux constantes. La constante  $\alpha$  dépend du degré de trempe, ainsi qu'on le verra par la suite. Ici cette valeur est  $\alpha = 13,65$ ; elle représente en millimètres la limite vers laquelle tend la distance  $\frac{d}{2}$  pour une aiguille de 1 millimètre de diamètre, quand la force qui produit l'aimantation tend vers zéro. La valeur du coefficient  $p$  dépend de l'unité au moyen de laquelle on exprime la force magnétisante.

La limite de  $d$ , pour  $x = \infty$ , est

$$(4) \quad \delta = 2\alpha D,$$

et la valeur absolue de  $\alpha$  est  $4^{\text{mm}},973$  (<sup>2</sup>).

En résumé, et sous la restriction que toutes les aiguilles employées sont issues, par voie d'érosion, des mêmes aiguilles mères, il y a une

(<sup>1</sup>) Voir *Annales de l'École Normale*, 2<sup>e</sup> série, t. III, p. 40.

(<sup>2</sup>) Les expériences faites sur de grosses barres par les méthodes qui seront indiquées plus loin ont fourni des résultats concordant avec ceux-ci. Ainsi des barreaux de 10 millimètres de diamètre trempés au rouge ont donné, pour  $\alpha$ , la valeur  $13^{\text{mm}},75$ , presque identique avec la précédente. Toutefois la valeur de  $\alpha$  est demeurée égale à 8, sans doute parce qu'on n'a pu atteindre la saturation, malgré l'emploi du courant de 25 bons éléments Bunsen.

fonction magnétisante  $\varphi(x)$ , et le moment magnétique d'une aiguille de longueur  $l$  et de diamètre  $D$  est représenté par la formule

$$(5) \quad \gamma = \frac{\omega D^2}{4} \varphi(x) [l - 2\alpha D(1 - px)]$$

jusqu'à des valeurs de  $\gamma$  très-voisines de la limite  $Y$  correspondant à la saturation. Cette limite elle-même est donnée par la formule

$$(6) \quad Y = \frac{\omega D^2}{4} L(l - 2\alpha D),$$

$L$  étant la valeur limite de la fonction magnétisante pour  $x = \infty$ .

*Répétition du passage à la spirale.* — J'ai indiqué, dans la première Partie de ce travail (<sup>1</sup>), que, quand on répète le passage d'une aiguille dans la spirale magnétisante, son moment magnétique augmente, de manière à être représenté par la formule

$$(7) \quad \gamma = A - \frac{B}{n},$$

où  $A$  et  $B$  sont des constantes dépendant de l'intensité de la force magnétisante, et où  $n$  indique le nombre des passages. Il était intéressant de chercher si l'augmentation du moment magnétique considérée provenait d'un simple changement dans la distribution du magnétisme, c'est-à-dire d'un déplacement des pôles vers les extrémités, ou s'il y avait là une véritable augmentation de la quantité de magnétisme permanent conservée par l'aiguille.

La méthode employée ci-dessus m'a permis de résoudre cette question d'une manière satisfaisante. J'ai trouvé que la quantité de magnétisme et la situation des pôles changent à la fois dans ces circonstances, mais cette dernière d'une manière très-peu sensible. La formule (7) s'applique très-bien aux quantités de magnétisme considérées isolément.

Si l'on fait croître l'intensité de la force magnétisante  $x$  à partir de

---

(<sup>1</sup>) Voir *Annales de l'École Normale*, 2<sup>e</sup> série, t. III, p. 22.

zéro, le rapport  $\frac{A}{A-B}$  de la quantité de magnétisme pour  $\infty$  passages à la quantité correspondant au premier passage décroît et tend vers l'unité (1); mais ce qu'il y a de remarquable, c'est que, si l'on cherche, au moyen de la courbe qui représente la fonction magnétisante pour les aiguilles considérées, quelle devrait être l'intensité  $x'$  de la force magnétique pour produire la quantité de magnétisme A après un seul passage, on trouve pour le rapport  $\frac{x'}{x}$  une valeur sensiblement constante.

Le tableau suivant se rapporte à des aiguilles de 0<sup>mm</sup>,553 de diamètre :

COURANT $x$ .	A - B	A	$\frac{A}{A - B}$	$\frac{x'}{x}$
10	1,00	1,28	1,280	1,080
14	2,80	3,49	1,246	1,075
18	5,80	6,76	1,165	1,058
22	10,60	12,19	1,150	1,055
26	15,70	17,50	1,115	1,061
30	19,70	21,37	1,085	1,077
34	22,20	23,49	1,058	1,112
38	23,60	24,45	1,036	1,102
42	24,50	25,11	1,025	1,075
Moyenne.....				1,077

(1) Dans un travail récent (*Annales de Poggendorff*, Ergänzungsband VII), M. Fromme a exprimé des doutes sur ce résultat. D'après lui, le nombre d'impulsions qu'exige une aiguille pour acquérir tout le magnétisme que peut lui communiquer une force donnée croîtrait avec l'intensité de cette force, et la saturation ne pourrait être obtenue que par une infinité d'impulsions.

Ce résultat, au moins bizarre, a été obtenu par l'emploi de forces magnétisantes très-peu considérables agissant sur des ellipsoïdes. Il me paraît que dans ces conditions une foule de causes perturbatrices doivent agir. Je m'abstiendrai cependant d'émettre une opinion quelconque à cet égard, n'ayant moi-même employé que l'action de courants intenses. Mais si M. Fromme veut bien se donner la peine d'aimanter une simple aiguille trempée dur dans une forte spirale animée par 10 éléments Bunsen, il n'aura pas de peine à se convaincre que, dans ce cas, la saturation est atteinte du premier coup, ainsi que le savent tous les physiciens.

On a détaché par une accolade les valeurs du rapport  $\frac{x'}{x}$ , que l'on considère comme le mieux déterminées, parce qu'elles se rapportent à la région de l'*aimantation rapide*, dont nous parlerons par la suite. La moyenne correspondante diffère peu de la moyenne générale, eu égard aux causes multiples d'erreurs qui doivent s'accumuler dans le calcul de  $\frac{x'}{x}$ .

On a d'ailleurs observé que la valeur de ce rapport varie très-peu avec le diamètre des aiguilles, que nous supposons toujours inférieur à 1 millimètre. Sa valeur moyenne paraît comprise entre 1,060 et 1,065.

En ce qui concerne le déplacement des pôles, il était naturel de supposer qu'il correspond exactement à l'accroissement de la quantité de magnétisme, c'est-à-dire que l'aimantation finale est en tous points identique à celle que produirait directement la force magnétique  $x'$ . L'expérience a vérifié cette prévision d'une manière satisfaisante, eu égard à la petitesse des déplacements à mesurer. Voici des nombres relatifs aux aiguilles de 0<sup>mm</sup>,553 de diamètre :

COURANT $x$ .	$d$ (1 <sup>er</sup> passage.)	$d$ (5 <sup>e</sup> passage.)	DIFFÉRENCE	
			observée.	calculée.
33,29	mm 10,073	mm 9,730	+ 0,343	+ 0,309
47,88	7,869	7,570	+ 0,299	+ 0,444

## ARTICLE II. — *Aimantation temporaire des aiguilles minces trempées dur.*

Pour étudier l'aimantation temporaire des aiguilles, on place la spirale magnétisante dans une rainure perpendiculaire au méridien magnétique, et dont le prolongement rencontre le milieu de l'aiguille galvanométrique qui nous a déjà servi dans l'article précédent. La déviation produite par la spirale seule est proportionnelle à l'intensité du

courant, ainsi qu'on l'a déjà expliqué (1). Quand on a introduit une aiguille dans la spirale, la déviation augmente d'une quantité qui peut servir de mesure au moment magnétique temporaire de l'aiguille, mais seulement sous certaines conditions que nous allons préciser.

La déviation produite par l'aiguille de moment temporaire  $M$  est donnée par la formule de Gauss

$$(1) \quad \text{tang } \alpha = \frac{2M\mu}{T r^3},$$

à la condition que la longueur de l'aiguille soit négligeable par rapport à la distance  $r$  de son centre à l'aiguille galvanométrique. S'il en est autrement, la formule de Gauss doit être complétée en multipliant le second membre par un facteur dont le premier terme est l'unité, et les termes successifs de l'ordre des puissances 2, 4, 6, ..., de  $\frac{l}{r}$ . Les valeurs de  $\text{tang } \alpha$  demeurent proportionnelles à  $M$  pour une même aiguille ou des aiguilles de même longueur, mais cessent de l'être pour des aiguilles de longueurs différentes dont les centres coïncident.

De là la nécessité de placer la spirale très-loin de l'aiguille galvanométrique, et, par suite, l'obligation de se contenter de déviations médiocres ou très-faibles pour évaluer les moments. J'ai récemment obvié à cet inconvénient en rendant l'aiguille galvanométrique presque astatique à l'aide d'un barreau compensateur placé au-dessus de l'aiguille dans une situation invariable.

On a de fortes raisons d'admettre, *a priori*, que la distance des pôles temporaires des aiguilles à leur extrémité est indépendante de l'intensité du courant. En effet, les aiguilles se trouvent soumises, pendant l'aimantation temporaire, à une force magnétique qui a la même valeur en tous leurs points, c'est-à-dire à une force analogue à la force coercitive introduite par Green dans ses calculs sur les aiguilles satu-

---

(1) Si l'on veut rendre les expériences actuelles comparables à celles de l'article précédent, il faut déterminer le rapport des déviations  $\alpha$  et  $\alpha'$  qu'un même courant, traversant la spirale galvanométrique de l'article précédent et la grande spirale magnétisante, imprime à l'aiguille, et multiplier les nouvelles mesures d'intensité par le rapport  $\frac{\alpha'}{\alpha}$ .



rées (1); la distribution du magnétisme et la situation des pôles doivent être les mêmes dans les deux cas. La même observation était applicable aux aiguilles de rupture (2), pour lesquelles nous avons vérifié directement que les pôles occupent une situation invariable (3).

Nous acceptons provisoirement cette conclusion que j'ai vérifiée de la manière la plus complète dans le cas des barres. Ainsi la détermination des moments temporaires équivaut à celle des quantités de magnétisme, quand la distance  $\frac{d'}{2}$  d'un pôle temporaire à l'extrémité voisine est connue par les expériences sur les aiguilles saturées. Il a paru commode, pour éliminer le plus possible toute cause d'erreur, de comparer la déviation produite par l'aiguille aimantée temporairement à celle qu'elle produit dans la même situation par son aimantation résiduelle, après la suppression du courant.

Soient

$\rho$  le rapport de ces déviations;

$m'$  et  $m$  les quantités de magnétisme temporaire et permanente;

$\delta$  la double distance d'un pôle temporaire à l'extrémité voisine;

$d$  la même quantité pour l'aimantation permanente, déterminée par la formule (3) de l'article précédent;

$r$  le rapport  $\frac{m'}{m}$ .

On a, avec un haut degré d'approximation,

$$(2) \quad \rho = \frac{m'(l-\delta')}{m(l-d)} = r \frac{l-\delta}{l-d}.$$

Le tableau suivant indique les valeurs trouvées pour  $r$  avec des aiguilles de  $\sigma^{\text{mm}}$ , 553.

(1) J'ai vérifié (voir *Annales de l'École Normale*, 2<sup>e</sup> série, t. III, p. 37) que la formule de Green est conforme aux résultats de l'expérience, en ce qui concerne les aiguilles saturées.

(2) Au moment où l'on détache une aiguille du centre d'une aiguille beaucoup plus longue, elle se trouve soumise en chacun de ses points à la même force magnétique.

(3) Voir *Annales de l'École Normale*, 2<sup>e</sup> série, t. III, p. 43.

COURANT.	$\rho$	$r$		DIFFÉRENCE.	POIDS.
		observé.	calculé.		
8,45	8,573	7,290	6,399	+ 0,891	2
10,56	4,255	3,590	3,932	-- 0,342	1
11,79	3,819	3,058	3,237	-- 0,179	4
12,81	3,293	2,765	2,848	-- 0,083	1
14,39	3,089	2,641	2,438	+ 0,203	2
15,25	3,000	2,271	2,279	-- 0,008	1
17,27	2,409	2,086	2,011	+ 0,077	1
18,75	2,073	1,727	1,877	-- 0,150	2
20,28	2,167	1,834	1,773	+ 0,061	6
23,56	1,919	1,622	1,623	-- 0,001	5
26,50	1,624	1,399	1,539	-- 0,150	6
31,32	1,581	1,374	1,442	-- 0,078	7
36,24	1,506	1,390	1,400	-- 0,010	2
41,79	1,462	1,331	1,368	-- 0,037	3
68,68	1,343	1,343	1,297	+ 0,042	7

Les nombres de la dernière colonne indiquent le nombre d'aiguilles employées pour déterminer la valeur correspondante de  $\rho$ ; afin d'éviter toute erreur systématique, provenant du calcul de  $r$ , on a employé, pour diverses intensités du courant, des aiguilles de diverses longueurs dont on plaçait toujours le centre à une distance fixe de l'aiguille galvanométrique (<sup>1</sup>).

Les nombres de la quatrième colonne ont été calculés par la formule

$$(3) \quad r = 1,2619 + \frac{\alpha}{(x-3)^2}$$

avec  $\log \alpha = 2,18355$ ;  $x$  représente l'intensité du courant. La même formule convient très-bien pour exprimer le rapport  $r$  pour des aiguilles plus grosses, de 0<sup>mm</sup>,687 et 0<sup>mm</sup>,957 de diamètre par exemple, à

(<sup>1</sup>) Pour cela, l'aiguille en expérience est maintenue au fond d'un tube fermé par un bout, qui pénètre à frottement dans la spirale magnétisante; ce tube est divisé en demi-millimètres, et l'on règle sa position au moyen d'un repère fixe tracé sur le tube qui porte la spirale.

la condition de faire  $a = \alpha D$ ,  $\alpha$  étant une constante (1). Une formule analogue convient aussi pour l'acier de Bessemer étudié par Rowland, si ce n'est pour les intensités les plus fortes; le rapport  $r$  présente alors une augmentation notable, observée aussi dans quelques-unes de mes expériences, et sur laquelle nous reviendrons par la suite.

Nous avons vu déjà qu'il n'y a pas, à proprement parler, de fonction de magnétisme permanent pour les aiguilles trempées de différents diamètres; il n'y a pas non plus pour ces aiguilles de véritable fonction de magnétisme temporaire, et l'on vient de voir qu'entre certaines limites de grosseur le rapport des deux quantités de magnétisme dépend du diamètre, résultat parfaitement incompatible avec l'existence de ces deux fonctions. Toutefois, si, trempant une série d'aiguilles de même diamètre, on les réduit ultérieurement à des diamètres divers par l'action de l'acide, nous savons déjà qu'il y a une fonction de magnétisme permanent bien déterminée, et il y a aussi une fonction de magnétisme temporaire: le rapport  $r$  devient indépendant du diamètre; il conserve pour toutes les aiguilles la valeur correspondant au diamètre des aiguilles mères d'après la formule (3). Le tableau suivant se rapporte à des aiguilles de diamètre primitif égal à  $1^{\text{mm}}, 178$ .

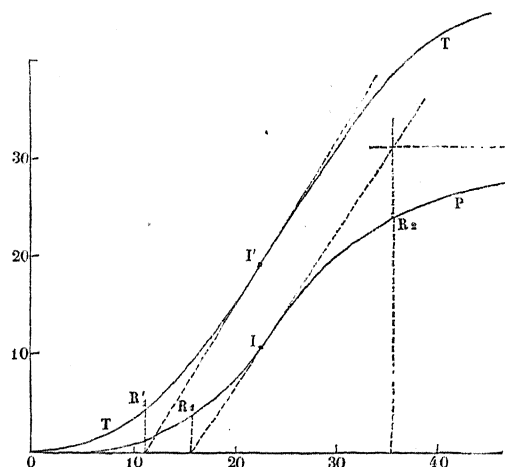
COURANT.	$r$		DIFFÉRENCE.
	Valeur moyenne.	Calcul.	
19,55	2,323	2,449	- 0,126
27,91	1,862	1,786	+ 0,076
36,25	1,609	1,556	+ 0,053
45,50	1,498	1,442	+ 0,056

La seconde colonne fournit la moyenne des valeurs de  $r$  obtenues avec les aiguilles rongées superficiellement et réduites à  $1^{\text{mm}}, 088$ ,  $0^{\text{mm}}, 348$ ,  $0^{\text{mm}}, 854$  et  $0^{\text{mm}}, 762$ .

(1) Cette formule empirique réussit très-bien pour les aiguilles de  $0^{\text{mm}}, 45$  à  $1^{\text{mm}}, 50$ , trempées au rouge sombre; mais elle est loin d'être générale.

On peut aussi s'assurer directement que la fonction de magnétisme temporaire est constante, comme on l'a fait pour la fonction de magnétisme permanent. La courbe T ci-jointe (fig. 3) a été obtenue au

Fig. 3.



moyen des aiguilles de  $0^{\text{mm}},553$ . On voit qu'elle présente les mêmes caractères généraux que la courbe P relative au magnétisme permanent. La portion de la courbe R, R<sub>2</sub> comprise entre le pied de la tangente au point d'inflexion et le point où cette tangente coupe l'asymptote horizontale de la courbe est la région de l'*aimantation rapide*. L'étendue de cette région, et les coordonnées des deux courbes correspondant aux points extrêmes caractérisent très-bien, à défaut des courbes complètes, les qualités magnétiques de l'acier employé.

### ARTICLE III. — *Aimantation temporaire et permanente des aiguilles minces faiblement trempées.*

Ces expériences ont été, comme les précédentes, faites avec le fil d'acier pour pivots, du commerce de l'horlogerie; mais, au lieu de tremper les aiguilles au rouge, on les employait dans l'état où les livre le fabricant, c'est-à-dire non trempées. Il ne peut être question ici d'expériences de rupture, et il est très-commode de prendre pour

point de départ non l'étude de l'aimantation permanente, mais celle de l'aimantation temporaire.

Les aiguilles étudiées sont placées à une distance de l'aiguille galvanométrique égale à  $0^m, 50$  ou  $0^m, 60$ , et l'on opère d'après la méthode employée dans l'article précédent (1). A cette distance, et avec les dimensions des aiguilles employées, la formule de Gauss est applicable sans faire intervenir les termes correctifs, et l'on peut comparer les moments d'aiguilles de longueurs différentes sans rien savoir *a priori* sur la position des pôles. Considérons  $n$  aiguilles de longueurs différentes  $l, l', \dots$ , et soumettons-les à l'action de la même force magnétisante; soient  $\frac{X}{2}$  la distance d'un pôle à l'extrémité voisine dans une aiguille quelconque;  $m, m', m'', \dots$  les moments observés, on doit avoir

$$(1) \quad \frac{m}{l - X} = \frac{m'}{l' - X} = \frac{m''}{l'' - X} = \dots$$

Ces équations permettent de vérifier que  $X$  est constant, et d'en obtenir la valeur approchée. On trouve que  $X$  ne change pas, quelle que soit l'intensité de la force magnétisante.

Pour des aiguilles de  $0^{mm}, 920$  de diamètre on a trouvé  $\frac{X}{2} = 10^{mm}, 33$ ; dans les mêmes aiguilles trempées dur  $\frac{X}{2} = 4^{mm}, 6$ . La quantité  $X$  est donc liée à l'état de l'acier; elle dépend de sa conductibilité magnétique, comme on le verra par la suite de ce Mémoire.

*Fonction de magnétisme temporaire.* — La distance polaire étant connue, on peut, comme pour les aiguilles trempées, construire la courbe qui représente cette fonction. Le tableau suivant a été obtenu pour des aiguilles de  $0^{mm}, 526$  de diamètre. La seconde colonne se rapporte au magnétisme temporaire, la troisième au magnétisme permanent; la dernière donne la valeur du rapport  $r$  de ces deux quantités.

---

(1) La quantité de magnétisme étant beaucoup plus forte dans les aiguilles faiblement trempées que dans les mêmes aiguilles fortement trempées, l'emploi des grandes distances n'affaiblit pas assez les valeurs absolues des déviations pour rendre les mesures incertaines dans le cas actuel, comme cela avait lieu dans l'article précédent.

COURANT.	T	P	$r$
3,87	1,003	0,300	3,343
5,44	1,589	0,871	1,867
6,57	2,416	.....	.....
8,00	3,375	2,297	1,891
9,87	3,702	.....	.....
11,56	4,434	.....	.....
14,84	5,017	3,073	1,633
20,25	5,487	3,265	1,681
32,50	6,704	3,731	1,796
43,75	6,449	.....	.....
60,37	7,543	3,819	1,975

Le tableau qui précède donne lieu à de nombreuses observations. En premier lieu, on remarque que l'aimantation, soit temporaire, soit permanente, commence à devenir sensible pour des valeurs très-faibles de la force magnétisante, ce qui n'avait pas lieu dans le cas de l'acier trempé très-dur; le point d'inflexion de chaque courbe est aussi plus voisin de l'origine, et au delà les courbes, surtout celles qui se rapportent au magnétisme temporaire, se rapprochent bien plus lentement de leur asymptote. En un mot, la variation des quantités de magnétisme s'effectue avec beaucoup moins de roideur, et les courbes qui s'y rapportent présentent moins d'analogie avec de simples lignes brisées, telles que les fournirait la vieille théorie de la force coercitive. Ce caractère se présente aussi de la manière la plus nette dans les courbes données par Rowland pour les diverses sortes de fer, en opposition avec les résultats fournis par l'acier Bessemer.

Remarquons aussi que le rapport  $r$ , que nous avons trouvé décroissant vers une certaine limite quand l'intensité de la force magnétisante croît indéfiniment, présente, dans le cas de l'acier trempé doux, un minimum très-net, au delà duquel  $r$  augmente d'une manière très-sensible. L'existence de ce minimum de  $r$ , qui se présente ici pour la première fois dans mes expériences, paraît cependant être un fait assez général. Je retrouve ce minimum dans toutes les expériences faites par

Rowland sur le fer, l'acier, le nickel et le cobalt, quoique avec des caractères particuliers, suivant l'état et la nature de la substance. On en jugera par le tableau suivant (1) :

	F.	r.
Fer Norway magnétique....	{ 0,2673 0,9305 36,86	3,875 1,350 minimum. 2,099
Fer <i>Burden's best</i> normal ..	{ 0,1456 1,655 36,60	3,823 1,366 minimum. 2,073
<i>Burden's best</i> brûlé.....	{ 0,553 1,317 51,03	2,193 1,243 minimum. 1,511
Acier Bessemer normal....	{ 0,1356 7,495 38,99	18,176 1,358 minimum. 1,523
Fil d'acier Stubb.....	{ 1,084 20,54 38,64	12,47 1,519 minimum. 1,692
Nickel pur normal.....	{ 2,136 5,900 82,92	2,394 1,472 minimum. 2,227
Cobalt pur normal.....	{ 3,925 21,06 117,00	7,160 2,452 minimum. 3,244

Les limites entre lesquelles sont demeurées comprises les forces magnétisantes que j'ai employées sont plus étroites que celles qui ont été atteintes dans les expériences du savant américain, et il me paraît très-probable que le minimum de  $r$  se serait nettement accusé, même dans le cas de l'acier trempé très-dur, si la limite supérieure de  $F$  eût été suffisamment élevée dans mes expériences. La valeur de  $F$

(1) Les valeurs de  $r$  ont été calculées d'après les nombres fournis par Rowland dans les deux Mémoires publiés dans le *Philosophical Magazine*, en août 1873 et novembre 1874.

correspondant au minimum de  $r$  s'abaisse beaucoup dans le cas de la trempe douce; c'est pourquoi l'existence de ce minimum a été aisément reconnue dans ce dernier cas.

ARTICLE IV. — *Expériences sur les barreaux cylindriques.*

Les expériences précédentes ont été dirigées de manière à permettre l'étude de la fonction magnétisante et à déterminer directement la situation des pôles. Celles-ci ont eu pour objet de fournir les constantes caractéristiques de la distribution du magnétisme, dans des circonstances très-variées. On va voir que les deux problèmes dépendent en dernière analyse des mêmes éléments physiques à déterminer.

1. J'ai déjà établi ailleurs (1) que les moments magnétiques  $\gamma$  d'aiguilles cylindriques minces, trempées dur et aimantées à saturation, sont représentés par la formule

$$(1) \quad \gamma = A a^2 \left( x - \frac{2}{\beta} \frac{e^{\frac{\beta x}{2}} - e^{-\frac{\beta x}{2}}}{e^{\frac{\beta x}{2}} + e^{-\frac{\beta x}{2}}} \right) \text{ avec } \beta = \frac{B}{a},$$

donnée pour la première fois par Biot et rattachée par Green à la théorie de la force coercitive. J'ai fait voir aussi (2) que la même formule s'applique aux aiguilles tirées par voie de rupture du centre d'aiguilles non saturées. Des expériences incomplètes (3) m'avaient fait supposer à la même époque que la formule (1) n'était pas applicable aux aiguilles plus grosses, ce qui m'a engagé à reprendre dans le cas des barres cylindriques de 6 à 10 millimètres de diamètre une série de recherches analogues (4) dont je publie aujourd'hui les résultats.

La mesure des moments magnétiques a été effectuée par la méthode appliquée dans les articles II et III du présent Mémoire. La nécessité

(1) Voir *Annales de l'École Normale supérieure*, t. III, p. 34.

(2) Voir *Annales de l'École Normale supérieure*, t. III, p. 43.

(3) Voir *Annales de l'École Normale supérieure*, t. III, p. 44.

(4) Aciers tréfilés français, de MM. Peugeot et Jackson, en tringles de 2 mètres. Ces aciers sont extrêmement homogènes.



d'opérer parfois sur des barres de longueur considérable a exigé quelques dispositions spéciales que je vais indiquer en peu de mots. La bobine employée à produire l'aimantation est formée d'un tube en zinc de 1<sup>m</sup>, 20 de long et de 5 centimètres de diamètre, portant 1 kilomètre de fil de cuivre isolé, roulé en 7 couches superposées. L'enroulement est disposé de façon que l'on puisse à volonté utiliser tout ou partie de la bobine. Un chemin de fer en bois horizontal, mobile autour d'un axe vertical qui passe par le prolongement du fil de l'aiguille galvanométrique (<sup>1</sup>), est disposé perpendiculairement au méridien magnétique. La bobine est montée sur quatre roulettes, et peut être éloignée à volonté; elle porte un index qui glisse le long du rail sur une règle divisée dont le zéro coïncide avec l'axe de rotation. Les barreaux sont soutenus dans l'axe même de la bobine par une disposition appropriée.

On a vérifié que la déviation produite par un barreau de 50 centimètres de long est exactement proportionnelle au cube de la distance de son milieu à l'aiguille, dès que cette distance est supérieure à 2 mètres : elle a été prise en général beaucoup plus grande.

Dans ces conditions, j'ai trouvé que la formule (1) pour des valeurs de A et de B convenablement choisies représente toujours exactement les moments magnétiques, pourvu que tous les barreaux, vierges d'aimantation antérieure, soient aimantés dans des conditions identiques. Elle s'applique aussi bien à l'aimantation temporaire qu'à l'aimantation permanente, aux barres d'acier doux qu'aux barres fortement trempées, et soit qu'on aimante à saturation, ou qu'on anime la bobine par un courant d'intensité constante trop faible pour saturer.

Les tableaux suivants sont destinés à montrer sur quelques exemples le degré d'accord de l'expérience et de la formule (<sup>2</sup>).

(<sup>1</sup>) L'aiguille est rendue presque astatique à l'aide d'un barreau compensateur. Voir p. 137.

(<sup>2</sup>) On croit utile de prévenir le lecteur que les nombres qui représentent en unités arbitraires les moments magnétiques mesurés dans cet article sont toujours évalués avec la même unité, plusieurs centaines de fois plus grande que celle dont on a fait usage dans les articles précédents. Comme les expériences correspondantes ont été faites les unes à Reims, les autres à Paris, les données ont manqué pour établir la valeur *exacte* du rapport des deux unités.

*Barreaux saturés de 7 millimètres de diamètre non trempés.*

LON- GUEURS.	AIMANTATION TEMPORAIRE.			AIMANTATION PERMANENTE.		
	Observation.	Calcul.	Différences.	Observation.	Calcul.	Différences.
5,0	0,75	0,758	— 0,008	0,056	0,074	— 0,018
7,2	2,13	2,062	+ 0,068	0,187	0,222	— 0,035
9,8	4,12	4,368	— 0,248	0,469	0,547	— 0,078
12,4	7,13	7,852	— 0,722	0,845	1,068	— 0,223
15,0	12,54	11,896	+ 0,648	1,726	1,692	+ 0,023
19,8	20,25	20,358	— 0,108	3,440	3,517	— 0,077
25,0	30,19	30,260	— 0,070	6,328	6,847	— 0,519
30,0	37,72	40,087	— 2,367	10,91	10,524	+ 0,386
34,5	48,96	49,037	— 0,067	15,18	14,442	+ 0,368
40,0	.....	.....	.....	21,81	21,81	0,000
	$A_1 = 4,081, B_1 = \frac{1}{7,142}.$			$A_2 = 2,34, B_2 = \frac{1}{17,857}.$		

*Barreaux non saturés de 10 millimètres de diamètre non trempés.*

LON- GUEURS.	AIMANTATION TEMPORAIRE.			AIMANTATION PERMANENTE.		
	Observation.	Calcul.	Différences.	Observation.	Calcul.	Différences.
11,6	2,60	2,121	+ 0,479	.....	.....	.....
15,0	3,63	3,828	— 0,198	.....	.....	.....
19,2	6,68	6,712	— 0,032	1,223	1,198	+ 0,025
24,5	11,47	10,540	+ 0,930	2,573	2,357	+ 0,216
29,4	16,17	15,520	+ 0,650	4,149	3,781	+ 0,368
34,5	21,75	20,362	+ 1,388	5,333	5,659	— 0,426
39,4	23,44	25,090	— 1,650	7,571	7,788	— 0,217
	$A_1 = 0,9966, B_1 = \frac{1}{7,142}.$			$A_2 = 0,723, B_2 = \frac{1}{17,857}.$		

Les résultats fournis par l'acier non trempé, auquel se rapportent les tableaux précédents, sont particulièrement intéressants :

En premier lieu, le coefficient B est indépendant de l'intensité du courant qui produit l'aimantation. A l'aimantation temporaire correspond une valeur déterminée

$$B_1 = \frac{I}{7,142} ;$$

à l'aimantation permanente une valeur beaucoup plus petite

$$B_2 = \frac{I}{17,857}.$$

Ce coefficient ne change pas avec le diamètre des barreaux. On voit aisément, en faisant  $x$  très-grand dans la formule (1), que  $\frac{I}{\beta} = \frac{a}{B}$  représente la distance d'un pôle à l'extrémité voisine dans les barres longues. Pour  $a = 1^\circ$ , on a

$$\frac{I}{\beta_1} = 7^\circ,142, \quad \frac{I}{\beta_2} = 17^\circ,857,$$

et ces distances polaires sont caractéristiques de l'acier employé, l'une pour l'aimantation temporaire, l'autre pour l'aimantation permanente.

Deuxièmement, le coefficient  $A_1$  relatif à la saturation temporaire est plus grand que le coefficient  $A_2$  correspondant à la saturation permanente. En général  $A_1$  et  $A_2$  sont deux fonctions de l'intensité de la force magnétisante qui ne diffèrent pas de celles que nous avons étudiées dans les articles I, II et III, sous le nom de *fonctions de magnétisme temporaire et permanent*. Mais les expériences sur les barres n'ont pas été dirigées dans le but d'étudier la variation de ces fonctions.

Les barreaux trempés fournissent des résultats analogues, pourvu qu'on ne considère que des barreaux de même trempe. Les valeurs de  $A_1$  et de  $A_2$  sont plus faibles que pour les barreaux naturels; la valeur de  $B_1$  pour la trempe que j'ai employée devient égale à  $\frac{1}{8}$  et demeure constante quelle que soit l'intensité de la force magnétisante. Mais la valeur de  $B_2$  croît avec l'intensité de cette force; sa valeur initiale est  $\frac{I}{13,75}$  et se réduit à  $\frac{1}{8}$  pour les forces magnétisantes les plus intenses

que j'ai employées. Ces résultats sont du même genre que ceux que j'ai obtenus dans l'Article I pour les valeurs de  $d = \frac{2a}{B}$ .

Tels sont les résultats directs obtenus par l'étude des moments. Passons aux inductions qu'on en tire relativement à la distribution. Si l'on admet que la quantité de magnétisme libre contenue dans une tranche d'épaisseur  $du$  située à une distance  $u$  du milieu d'un barreau quelconque de la série que l'on étudie soit représentée par la formule

$$(2) \quad z = A a^2 \beta \frac{e^{\beta u} - e^{-\beta u}}{e^{\frac{\beta x}{a}} - e^{-\frac{\beta x}{a}}},$$

le moment magnétique  $\gamma$  sera représenté par la formule (1). Les mêmes lettres dans les deux formules se rapportent aux mêmes quantités.

Inversement nous admettrons avec Biot (1) que, si les moments magnétiques vérifient la formule (1), les distributions sont conformes à la formule (2). Les expériences précédentes nous fournissent les valeurs des deux constantes A et B caractéristiques de la distribution.

Pour nous rendre un compte exact du rôle physique de ces constantes, considérons le cas d'une barre de longueur infinie. La distribution est alors représentée, à partir de l'extrémité de la barre prise pour origine, par la formule

$$(2 \text{ bis}) \quad z = A a^2 \beta e^{-\beta u} = AB a e^{-\frac{B}{a} u}.$$

Si l'on fait varier seulement A, la courbe de distribution demeure semblable à elle-même, sa *forme* n'est pas modifiée. Il en est ainsi dans le cas de l'aimantation temporaire produite par des courants de différente intensité. Si, au contraire, on fait varier B, la courbe de distribution pour une même valeur de l'ordonnée extrême se rapproche d'autant plus vite de l'axe des abscisses que B est plus grand; quand B augmente, la distribution magnétique se *raccourcit*; elle *s'allonge* quand B dimi-

---

(1) L'induction que nous employons ici n'a rien de *nécessaire a priori*. On peut concevoir une infinité de distributions magnétiques différentes fournissant les mêmes valeurs des moments magnétiques; mais la formule (2) ayant été vérifiée directement par divers observateurs, on peut employer le mode de raisonnement que nous empruntons à Biot en toute sécurité.

nue. Ainsi l'aimantation temporaire est plus *courte* que l'aimantation permanente (1).

On peut, avec M. Jamin, appeler  $A$  le coefficient de *capacité*,  $\frac{1}{B}$  le coefficient de *conductibilité* de l'acier étudié. La mesure de la distance des pôles d'une barre longue à l'extrémité voisine fournit la valeur absolue de son coefficient de conductibilité dans les conditions de l'aimantation. La *conductibilité temporaire* est invariable, quelle que soit l'intensité de la force magnétisante; il n'en est ainsi pour la *conductibilité permanente* que dans le cas de l'acier non trempé (2).

2. Après avoir étudié la distribution dans une barre vierge d'aimantation antérieure, j'ai cherché à appliquer la même méthode aux barres déjà aimantées que l'on soumet une seconde fois à l'action magnétisante. J'ai choisi le cas le plus simple : celui des barres non trempées, primitivement saturées.

*Action d'un courant direct.* — Une deuxième application d'une force magnétisante directe n'altère pas le moment permanent d'une barre saturée; mais quelque faible que puisse être cette force, le barreau acquiert, pendant qu'il est soumis à son action, un moment temporaire supérieur à son moment permanent.

De plus on reconnaît qu'il est impossible de représenter ces moments temporaires par une formule unique de la forme de l'équation (1); on réussit au contraire très-bien en prenant la formule à deux termes

$$(3) \quad y = c_1 A_1 \left( x - \frac{2}{\beta_1} \frac{e^{\frac{\beta_1 x}{2}} - e^{-\frac{\beta_1 x}{2}}}{e^{\frac{\beta_1 x}{2}} + e^{-\frac{\beta_1 x}{2}}} \right) + c_2 A_2 \left( x - \frac{2}{\beta_2} \frac{e^{\frac{\beta_2 x}{2}} - e^{-\frac{\beta_2 x}{2}}}{e^{\frac{\beta_2 x}{2}} + e^{-\frac{\beta_2 x}{2}}} \right),$$

(1) Aucune force constante ne peut donc produire sur un barreau une distribution de même forme que la distribution permanente. Ce résultat est en opposition avec la théorie de la force coercitive.

(2) Le nombre des fonctions ou des constantes nécessaires pour définir complètement un acier donné au point de vue magnétique est, comme on voit, assez considérable. Il faut connaître les deux fonctions de magnétisme  $A_1$  et  $A_2$  (ou au moins les constantes caractéristiques de l'aimantation rapide) et les deux coefficients de conductibilité  $B_1$  et  $B_2$ . Encore ne définit-on ainsi que l'état de l'acier *tel qu'il est*, et l'étude complète est à refaire pour chaque degré de trempé.

dans laquelle  $A_1$  et  $A_2$ ,  $\beta_1$  et  $\beta_2$  ont les valeurs caractéristiques de l'aimantation temporaire et de l'aimantation permanente à saturation; de plus  $c_1$  et  $c_2$  sont déterminés par les conditions suivantes :

1° Le premier terme contenant les coefficients *temporaires* représente le moment temporaire (c'est-à-dire total) que le barreau vierge d'aimantation prendrait par une première application de la force magnétisante  $F$  employée.

2° Le deuxième terme est la différence du moment permanent de saturation et du moment permanent que la force  $F$  est capable de produire. Ainsi soient  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  les *capacités* temporaire et permanente du barreau pour la force  $F$ , on a

$$(4) \quad \begin{cases} c_1 A_1 = \alpha_1, \\ c_2 A_2 = A_2 - \alpha_2. \end{cases}$$

Appliquant la méthode de raisonnement de Biot, nous serons conduits à représenter la distribution du magnétisme dans les barreaux considérés par la formule (5),

$$(5) \quad z = \alpha_1 a^2 \beta_1 \frac{e^{\beta_1 u} - e^{-\beta_1 u}}{\frac{\beta_1 l}{e^{\frac{\beta_1 l}{2}} + e^{-\frac{\beta_1 l}{2}}}} + (A_2 - \alpha_2) a^2 \beta_2 \frac{e^{\beta_2 u} - e^{-\beta_2 u}}{\frac{\beta_2 l}{e^{\frac{\beta_2 l}{2}} + e^{-\frac{\beta_2 l}{2}}}}.$$

La distribution magnétique est la superposition de deux distributions, l'une *courte* (temporaire) égale à celle que produirait une première application de la force  $F$ ; l'autre *longue* (permanente) égale au résidu de la distribution primitive diminuée en quantité de la portion de magnétisme permanent correspondant à  $F$ . Ce qu'il y a de curieux, c'est que la totalité de la distribution courte n'est pas empruntée à la distribution permanente primitive; de nouveau magnétisme est évoqué des profondeurs moléculaires pour faire l'appoint  $\alpha_1 - \alpha_2$ , tandis qu'une portion souvent très-considérable  $A_2 - \alpha_2$  de l'aimantation primitive demeure distribuée à la façon *permanente* (distribution longue) comme insensible à l'action de la force magnétisante. Il me semble qu'il y a là un fait de haut intérêt, au point de vue de la théorie du magnétisme.

Les tableaux suivants sont destinés à fournir des exemples relatifs à l'application des formules (3) et (4). Ils se rapportent à des barreaux de 1 centimètre de diamètre.

LONGUEURS.	MOMENT DE SATURATION		MOMENT DE RÉAIMANTATION		DIFFÉRENCES.
	temporaire.	permanente.	observé.	calculé.	
39,6	99,085	33,95	56,834	56,834	0,000
34,4	82,214	22,45	42,391	43,169	- 0,878
29,4	60,729	15,38	.....	.....	.....
24,8	43,730	8,92	21,478	22,166	- 0,688
22,1	29,066	6,91	14,635	15,127	- 0,492
19,6	23,422	5,13	12,033	11,883	+ 0,150
15,6	10,712	1,86	6,148	5,160	+ 0,988
$c_1$ observé..... 0,40024 $c_2$ observé..... 0,52528    calculé..... 0,52924.					

Les valeurs de  $c_1$  et  $c_2$  ont été mesurées par l'aimantation de barres de même espèce que celles de l'expérience, mais aimantées pour la première fois. La valeur dite *calculée* de  $c_2$  est celle qui a dû être employée concurremment avec  $c_1$  pour obtenir les nombres de la quatrième colonne.

Voici d'ailleurs le résumé de toute une expérience pour cinq valeurs de F différentes :

$c_1$ observé.	$c_2$ observé.	$c_2$ calculé.
0,03688	0,9625	0,9630
0,05123	0,9370	0,9370
0,13113	0,8418	0,8826
0,77836	0,0770	0,0232

Ces résultats présentent un accord général satisfaisant avec ceux que M. Jamin a obtenus par la mesure des ordonnées extrêmes, à l'aide du contact d'épreuve (1).

*Action d'un courant inverse sur une barre cylindrique saturée.* — Dans ce cas, le barreau conserve après la cessation du courant un moment

(1) Voir *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. LXXX, p. 417 et suivantes.

permanent positif ou négatif, que l'on représente très-bien par la formule (1), avec la valeur  $B_2$  de  $B$  caractéristique de l'aimantation permanente. Il n'a pas été possible de formuler par une loi simple la relation du coefficient de capacité  $c_2 A_2$ , à la capacité permanente  $\alpha_2$  correspondante; la diminution  $A_2(1 - c_2)$  est beaucoup plus grande que  $\alpha$ , et paraît se rapprocher de la limite  $2\alpha_2$  assignée par M. Jamin, quand on considère des forces de plus en plus grandes.

Le moment des barreaux pendant l'action du courant ne peut être représenté que par une formule à deux termes

$$(6) \quad \gamma = c_2 A_2 \left( x - \frac{2}{\beta_2} \frac{e^{\frac{\beta_2 x}{2}} - e^{-\frac{\beta_2 x}{2}}}{e^{\frac{\beta_2 x}{2}} + e^{-\frac{\beta_2 x}{2}}} \right) - c_1 A_1 \left( x - \frac{2}{\beta_1} \frac{e^{\frac{\beta_1 x}{2}} - e^{-\frac{\beta_1 x}{2}}}{e^{\frac{\beta_1 x}{2}} + e^{-\frac{\beta_1 x}{2}}} \right).$$

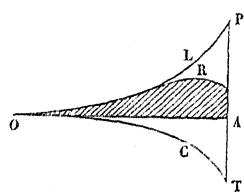
La valeur  $c_2 A_2$  est égale à la valeur fixée expérimentalement par les expériences du paragraphe précédent; quant à  $c_1 A_1$ , il est, comme dans le cas de la réaimantation, égal à  $\alpha_1$ .

La formule de distribution correspondante

$$z = c_2 A_2 \alpha^2 \beta_2 \frac{e^{\beta_2 u} - e^{-\beta_2 u}}{e^{\frac{\beta_2 x}{2}} + e^{-\frac{\beta_2 x}{2}}} - \alpha_1 a^2 \beta_1 \frac{e^{\beta_1 u} - e^{-\beta_1 u}}{e^{\frac{\beta_1 x}{2}} + e^{-\frac{\beta_1 x}{2}}}$$

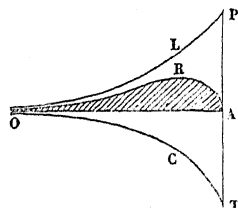
présente une particularité singulière. Elle représente la superposition d'une distribution *longue* et d'une distribution inverse plus courte. La forme de la distribution résultante diffère profondément de celle de la distribution ordinaire.

Fig. 4.



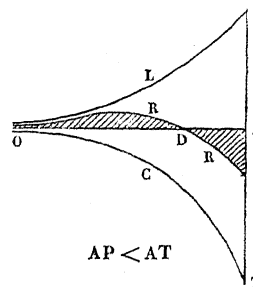
AP > AT

Fig. 5.



AP = AT

Fig. 6.



AP < AT

Les courbes ci-dessus sont destinées à montrer aux yeux les cas



principaux. Pour des valeurs convenables de la force  $F$  la courbe de distribution coupe l'axe des abscisses comme on le voit dans la *fig.* 6, et comprend deux plages de signe contraire. Le barreau porteur de cette distribution présente deux points conséquents  $D$  symétriques par rapport à son milieu  $O$ .

Cette conséquence des formules des moments est trop curieuse pour que je n'aie pas cherché à la mettre en évidence par des expériences directes. A cet effet, j'ai réglé l'intensité du courant qui désaimante, de manière que l'action d'un barreau préalablement saturé fût nulle sur un point éloigné, c'est-à-dire que la position d'équilibre de mon aiguille galvanométrique était la même que le barreau fût ou non plongé dans la spirale. Dans une expérience, le barreau saturé, de 40 centimètres de long et de 1 centimètre de diamètre, produisait une déviation positive de 102 divisions de la règle, et, après la cessation du courant, il déviait encore dans le même sens de 8 divisions. Son action pendant le passage du courant était inférieure à 0,25 d'une division, ce qui est justement la limite des erreurs de lecture. Son moment magnétique était donc sensiblement nul. J'ai alors fait glisser la bobine le long de son chemin de fer de bois, et constaté, à l'aide d'une petite aiguille très-fortement trempée et rendue sensiblement astatique par un barreau compensateur, l'existence de polarités contraires énergiques à l'extrémité même du barreau et un peu plus près du milieu. Cette expérience délicate, mais absolument concluante, grâce à la régularité et à la symétrie des résultats obtenus, ne peut laisser aucun doute sur la légitimité de l'induction qui nous a guidé dans cette portion de notre étude.

En résumé, il semble ressortir de ces dernières expériences qu'il existe entre l'aimantation temporaire et l'aimantation permanente une sorte d'indépendance plus tranchée qu'on ne l'avait admis jusqu'ici. Je persiste à penser qu'on doit l'attribuer au moins en partie à une différence d'origine résultant d'une véritable hétérogénéité magnétique de l'acier (1).

---

(1) Voir *Annales de l'École Normale supérieure*, t. III, p. 52.