

# ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

A. GUICHARDET

D. WIGNER

## **Sur la cohomologie réelle des groupes de Lie simples réels**

*Annales scientifiques de l'É.N.S. 4<sup>e</sup> série*, tome 11, n° 2 (1978), p. 277-292

[http://www.numdam.org/item?id=ASENS\\_1978\\_4\\_11\\_2\\_277\\_0](http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1978_4_11_2_277_0)

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1978, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (<http://www.elsevier.com/locate/ansens>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

## SUR LA COHOMOLOGIE RÉELLE DES GROUPES DE LIE SIMPLES RÉELS

PAR A. GUICHARDET ET D. WIGNER

ABSTRACT. — A simple Lie group  $G$  has a nontrivial continuous 2-cohomology group  $H^2(G, \mathbf{R})$  (which is then 1-dimensional) if and only if the symmetric space  $G/K$  admits a  $G$ -invariant complex structure. Explicit cocycles are constructed for these nontrivial cohomology classes. We also give some results for  $H^2(G, \mathbf{Z})$  and  $H^2(G, \mathbf{T})$ .

### 0. Introduction

Le but de ce travail est de construire explicitement des 2-cocycles réels différentiables pour tous les groupes de Lie simples réels qui admettent de tels cocycles non triviaux. Notre construction est basée sur la décomposition de Cartan  $G = K \cdot \exp \mathfrak{p}$  où  $K$  est un sous-groupe compact maximal de  $G$  et  $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{p}$  la décomposition de Cartan de  $\mathfrak{g}$ ; pour les groupes considérés, il existe des morphismes non triviaux de  $K$  dans  $\mathbf{T}$ ; on choisit un tel morphisme  $u$  et on pose  $v_0(g) = u(k)$  pour tout  $g = k \cdot \exp P \in G$ ; on peut alors définir un 2-cocycle réel différentiable  $f$  par

$$f(g_1, g_2) = \frac{1}{2\pi} \arg(v_0(g_1) \cdot v_0(g_2) \cdot v_0(g_1 g_2)^{-1}),$$

où  $\arg$  est une détermination continue de la fonction argument.

La construction ci-dessus présente le défaut de faire intervenir explicitement la décomposition  $g = k \cdot \exp P$ , pas très aisée à calculer; c'est pourquoi nous construisons (à l'aide de l'action de  $G$  dans le complexifié de  $\mathfrak{p}$ ) une autre fonction  $v$  ayant même argument que  $v_0$ , mais plus simple à calculer. On peut aussi définir  $v(g)$  comme étant le jacobien complexe de l'action de  $g$  à l'origine de  $G/K$ , espace hermitien symétrique que l'on plonge dans un espace vectoriel complexe au moyen du plongement d'Harish-Chandra; on a d'ailleurs  $v(g) = u(J(g, 0))$  où  $J$  est le « facteur d'automorphie canonique » décrit dans [10], chap. II, § 5.

Nous déduisons de là des descriptions explicites des 2-cocycles boréliens à valeurs dans  $\mathbf{Z}$  et dans  $\mathbf{T}$ .

Par ailleurs les groupes de Lie simples considérés ici sont aussi caractérisés par le fait que  $G/K$  est un espace hermitien symétrique, et sont donc bien connus: ce sont, à un revêtement fini près, les groupes  $SU(p, q)$  avec  $p, q \geq 1$ ;  $SO_0(2, q)$  avec  $q = 1$  ou  $q \geq 3$ ;  $Sp(n, \mathbf{R})$  avec  $n \geq 1$ ;  $SO^*(2n)$  avec  $n \geq 2$ ; et enfin deux groupes exceptionnels. Nous

calculons explicitement la fonction  $v$  pour les groupes des quatre premières grandes classes; le résultat obtenu est particulièrement simple dans le cas de  $SU(p, q)$ , puisqu'alors, représentant un élément  $g$  de ce groupe par une matrice

$$\begin{matrix} p & q \\ p \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} \end{matrix}$$

on peut prendre la fonction  $v(g) = \det g_{11}$ . Dans le cas de  $SL(2, \mathbf{R})$ , on peut prendre

$$v(g) = \frac{1}{2}(a + d + ib - ic) \quad \text{pour } g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Les auteurs tiennent à remercier J. Dixmier et I. Satake pour les enseignements bibliographiques qu'ils leur ont fournis.

### 1. Préliminaires

Soient  $G$  un groupe de Lie semi-simple réel connexe de centre fini,  $K$  un sous-groupe compact maximal,  $\mathfrak{g}$  et  $\mathfrak{k}$  leurs algèbres de Lie,  $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{p}$  la décomposition de Cartan. La cohomologie relative de  $\mathfrak{g}$  par rapport à  $\mathfrak{k}$  à coefficients réels est définie par

$$H^s(\mathfrak{g}, \mathfrak{k}, \mathbf{R}) = \text{Hom}_{\mathfrak{k}}(\Lambda^s \mathfrak{p}, \mathbf{R})$$

(rappelons qu'ici l'opérateur cobord du complexe considéré est identiquement nul). La cohomologie de  $G$  à coefficients réels, i. e. les  $H^s(G, \mathbf{R})$ , peut être définie indifféremment à l'aide de cochaînes différentiables, ou continues (cf. [4]), ou boréliennes (cf. [1] et [13]). A tout  $s$ -cocycle différentiable  $f$  sur  $G$  on peut associer d'abord un  $s$ -cocycle différentiable  $f'$  vérifiant

$$f'(g_1, \dots, g_s) = f'(k_0^{-1} g_1 k_1, k_1^{-1} g_2 k_2, \dots, k_{s-1}^{-1} g_s k_s)$$

pour tous  $g_1, \dots, g_s \in G$  et tous  $k_0, \dots, k_s \in K$ ; puis un  $s$ -cocycle  $\Delta f' \in H^s(\mathfrak{g}, \mathfrak{k}, \mathbf{R})$  par

$$\Delta f'(X_1, \dots, X_s) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_s} \varepsilon_{\sigma} \frac{d^s}{dt_1 \dots dt_s} f'(\exp t_1 X_{\sigma_1}, \dots, \exp t_s X_{\sigma_s}) \Big|_{t_1 = \dots = 0};$$

on obtient ainsi un *isomorphisme* de  $H^s(G, \mathbf{R})$  sur  $H^s(\mathfrak{g}, \mathfrak{k}, \mathbf{R})$  (voir démonstration en appendice).

On démontre aussi, mais nous ne l'utiliserons pas, que  $H^s(G, \mathbf{R})$  est isomorphe à la cohomologie réelle de  $\hat{G}/K$  ou  $\hat{G}$  est une forme compacte quelconque de  $G$ .

LEMME 1. — *On suppose  $G$  simple. Alors :*

(a)  $[\mathfrak{p}, \mathfrak{p}] = \mathfrak{k}$ ;

(b) la représentation adjointe de  $\mathfrak{k}$  dans  $\mathfrak{p}$  est irréductible;

(c) les conditions suivantes sont équivalentes :

(i)  $H^2(G, \mathbf{R}) \neq 0$ ;

(ii)  $\text{Hom}_{\mathfrak{t}}(\Lambda^2 \mathfrak{p}, \mathbf{R}) \neq 0$ ;

(iii) il existe un opérateur linéaire  $J$  dans  $\mathfrak{p}$ , permutable à  $\text{ad } \mathfrak{f}$ , de carré  $-I$  (i. e. une structure complexe  $\mathfrak{f}$ -invariante);

(iv)  $G/K$  admet une structure complexe  $G$ -invariante;

(v) le centre  $\mathcal{Z}(\mathfrak{f})$  de  $\mathfrak{f}$  est non nul;

(vi)  $\text{Hom}(\mathfrak{f}, \mathbf{R})$  (ensemble des morphismes d'algèbres de Lie) est non nul.

(d) si les conditions ci-dessus sont remplies :

(i') On a  $\dim H^2(G, \mathbf{R}) = \dim \text{Hom}_{\mathfrak{t}}(\Lambda^2 \mathfrak{p}, \mathbf{R}) = \dim \mathcal{Z}(\mathfrak{f}) = \dim \text{Hom}(\mathfrak{f}, \mathbf{R}) = 1$ ;

(ii') il existe  $Z_0 \in \mathcal{Z}(\mathfrak{f})$  tel que  $J = \text{ad } Z_0|_{\mathfrak{p}}$ , ce qui entraîne que  $J$  est antisymétrique pour la forme de Killing  $B$ .

(iii') en associant à toute  $\Psi \in \text{Hom}(\mathfrak{f}, \mathbf{R})$  la forme  $(X, Y) \mapsto \Phi(X, Y) = \Psi([X, Y])$ , on obtient un isomorphisme de  $\text{Hom}(\mathfrak{f}, \mathbf{R})$  sur  $\text{Hom}_{\mathfrak{t}}(\Lambda^2 \mathfrak{p}, \mathbf{R})$ ;

(iv')  $\text{Hom}_{\mathfrak{t}}(\Lambda^s \mathfrak{p}, \mathbf{R})$  est nul pour tout  $s$  impair;

(v') la structure complexe  $G$ -invariante sur  $G/K$  est hermitienne.

Tous ces résultats sont classiques et se trouvent à peu près dans [2], chap. VIII.

Les groupes  $G$  vérifiant les conditions équivalentes du lemme 1 c sont, à un revêtement fini près (qui ne change pas la cohomologie réelle) les suivants :

(I)  $SU(p, q)$ ,  $p, q \geq 1$ ;

(II)  $SO_0(2, q)$ ,  $q = 1$  ou  $q \geq 3$  [ $SO_0(2, 2)$  n'est pas simple];

(III)  $Sp(n, \mathbf{R})$ ,  $n \geq 1$ ;

(IV)  $SO^*(2n)$ ,  $n \geq 2$  [ $SO^*(2)$  n'est pas simple];

(V) la forme réelle de  $E_6$  de caractère  $-14$  (rappelons que le caractère de  $G$  est le nombre  $\dim \mathfrak{p} - \dim \mathfrak{f}$ );

(VI) la forme réelle de  $E_7$  de caractère  $-25$ ;

(cf. [2], chap. IX).

## 2. Construction de 2-Cocycles sur $G$

A partir de maintenant on suppose vérifiées les conditions équivalentes du lemme 1 c. On notera  $E$  l'application  $t \mapsto e^{2nit}$  de  $\mathbf{R}$  sur  $\mathbf{T}$ ; si  $v$  est une application de  $G$  dans  $\mathbf{C}^*$ , on note  $\partial_m v$  sont cobord ( $m$  signifiant « multiplicatif ») :

$$\partial_m v(g_1, g_2) = v(g_1) \cdot v(g_2) \cdot v(g_1 g_2)^{-1}.$$

D'après le lemme 1 on obtient un élément quelconque  $\Phi$  de  $H^2(\mathfrak{g}, \mathfrak{f}, \mathbf{R})$  en posant, pour  $X_1, X_2 \in \mathfrak{p}$ ,

$$\Phi(X_1, X_2) = \Psi([X_1, X_2]),$$

où  $\Psi$  est un morphisme de  $\mathfrak{f}$  dans  $\mathbf{R}$ . On va maintenant construire des 2-cocycles différentiables sur  $G$  admettant pour dérivés les divers  $\Phi$ ; il va naturellement intervenir des

morphismes de  $K$  dans  $T$  admettant les  $\Psi$  comme différentielles. Rappelons que l'application  $(k, P) \mapsto k \cdot \exp P$  est un difféomorphisme de  $K \times \mathfrak{p}$  sur  $G$ .

**THÉORÈME 1.** — Soit  $v$  une fonction différentiable de  $G$  dans  $C^*$  vérifiant les conditions suivantes :

- (a) la restriction de  $v$  à  $K$  est un morphisme non trivial de  $K$  dans  $T$ ;
- (b) la restriction de  $v$  à  $\exp \mathfrak{p}$  est strictement positive et  $K$ -invariante;
- (c)  $v(k \cdot \exp P) = v(k) \cdot v(\exp P)$  pour tous  $k \in K$  et  $P \in \mathfrak{p}$ .

Notons  $u$  la restriction de  $v$  à  $K$  et  $D u_e$  sa différentielle en  $e$ ; posons  $w(g) = v(g) / |v(g)|$  pour tout  $g \in G$ . Il existe un unique 2-cocycle différentiable réel  $f$  sur  $G$  vérifiant  $E \circ f = \partial_m w$  et  $f(e, e) = 0$ . De plus

- (1)  $f(g_1, g_2) = 0$  si  $g_1$  ou  $g_2$  appartient à  $K$ ,
- (2)  $f(g_1, g_2) = f(k_0^{-1} g_1 k_1, k_1^{-1} g_2 k_2), \quad \forall g_i \in G, k_i \in K,$
- (3)  $\Delta f(X_1, X_2) = \frac{i}{2\pi} D u_e([X_1, X_2]), \quad \forall X_i \in \mathfrak{p}.$

*Démonstration.* — Notons tout de suite que (2) est une simple conséquence de (1) et du fait que  $f$  est un cocycle.

Les hypothèses faites sur  $v$  entraînent

- (4)  $\partial_m w(kg_1, g_2) = \partial_m w(g_1, g_2 k), \quad \forall g_i \in G, k \in K,$
- (5)  $\partial_m w(g_1, g_2) = 1$  si  $g_1$  ou  $g_2 \in K$ .

donc  $\partial_m w$  passe au quotient en une application différentiable  $\varphi$  de  $K \backslash G \times G / K$  dans  $T$ ; comme  $K \backslash G$  et  $G / K$  sont simplement connexes, il existe une application différentiable  $\tilde{\varphi}$  de  $K \backslash G \times G / K$  dans  $\mathbf{R}$  vérifiant

$$E \circ \tilde{\varphi} = \varphi, \quad \tilde{\varphi}(K e, e K) = 0;$$

on a, en vertu de (5) :

- (6)  $\tilde{\varphi}(K e, x) = \tilde{\varphi}(y, e K) = 0, \quad \forall x, y.$

Posons  $f(g_1, g_2) = \tilde{\varphi}(K g_1, g_2 K)$ ;  $f$  est différentiable, vérifie  $E \circ f = \partial_m w$  et aussi (1) à cause de (6);  $f$  est un cocycle car

$$E \circ \partial f = \partial_m (E \circ f) = 1$$

et, comme  $G$  est connexe,  $\partial f = 0$ . Démontrons enfin (3). Pour cela nous utiliserons le lemme suivant :

**LEMME 2.** — Pour  $X_1, X_2 \in \mathfrak{p}$  on a

$$2\pi i \Delta f(X_1, X_2) = \frac{d^2}{dt_1 dt_2} (w(\exp t_1 X_1 \cdot \exp t_2 X_2) - w(\exp t_2 X_2 \cdot \exp t_1 X_1))$$

pour  $t_1 = t_2 = 0$ .

*Démonstration du lemme.* — On peut supposer  $X_1$  et  $X_2$  linéairement indépendants; prenons une base  $X_1, \dots, X_n$  de  $\mathfrak{g}$  commençant par  $X_1, X_2$ , et les coordonnées canoniques de deuxième espèce correspondantes : tout élément de la forme  $\exp t_1 X_1 \dots \exp t_n X_n$  a pour coordonnées  $t_1, \dots, t_n$ . On a, pour  $t_1$  et  $t_2$  voisins de 0, en notant  $\partial_i, \partial_i \partial_j, \dots$  les dérivations partielles :

$$\begin{aligned} 2\pi i \cdot f(\exp t_1 X_1, \exp t_2 X_2) &= \log(w(t_1, 0, 0, \dots) \cdot w(0, t_2, 0, \dots) \cdot w(t_1, t_2, 0, \dots)^{-1}), \\ \frac{d}{dt_1}(\text{idem}) \Big|_{t_1=0} &= \partial_1 w(e) \cdot w(0, t_2, 0, \dots)^{-1} \cdot \partial_1 w(0, t_2, 0, \dots), \\ \frac{d^2}{dt_1 dt_2}(\text{idem}) \Big|_{t_1=t_2=0} &= \partial_1 w(e) \cdot \partial_2 w(e) - \partial_1 \partial_2 w(e) \\ &= \frac{d}{dt} w(\exp t X_1) \Big|_{t=0} \cdot \frac{d}{dt} w(\exp t X_2) \Big|_{t=0} \\ &\quad - \frac{d^2}{dt_1 dt_2} w(\exp t_1 X_1 \cdot \exp t_2 X_2) \Big|_{t_1=t_2=0}, \end{aligned}$$

d'où le lemme.

*Fin de la démonstration du théorème.* — En vertu du lemme 2 et d'une formule classique relative aux groupes de Lie (cf. [2], p. 96), on a

$$\begin{aligned} 2\pi i \cdot \Delta f(X_1, X_2) &= (\tilde{X}_2 \tilde{X}_1 w)(e) - (\tilde{X}_1 \tilde{X}_2 w)(e) \\ &= -Dw_e([X_1, X_2]) = -Du_e([X_1, X_2]). \end{aligned}$$

C.Q.F.D.

*Remarque.* — On peut exprimer le théorème 1 sous la forme plus simple suivante :  $f$  est la détermination continue (qui existe d'après le théorème) de la fonction

$$(g_1, g_2) \mapsto \frac{1}{2\pi} \arg(v(g_1) \cdot v(g_2) \cdot v(g_1 g_2)^{-1})$$

égale à 0 au point  $(e, e)$ .

*Remarque 2.* — On trouvera dans [14] et [15] des procédés plus généraux mais moins explicites pour associer à tout élément de  $H^n(\mathfrak{g}, \mathfrak{k}, \mathbf{R})$  un  $n$ -cocycle sur  $G$ .

### 3. Construction de fonctions $v$ vérifiant les conditions (a), (b), (c) du théorème 1

Remarquons tout d'abord que  $f$  ne dépend que de  $w = v/|v|$ , donc que de  $u = v|_{\mathbf{K}}$ ; en fait  $f$  est même indépendant de  $u$  à un facteur constant près, car si l'on part de  $u^n$  au lieu de  $u$ , on obtient le cocycle  $nf$ . Pour obtenir une fonction  $v$  vérifiant (a), (b), (c), on peut évidemment se donner  $u \in \text{Hom}(\mathbf{K}, \mathbf{T})$  et poser  $v(g) = u(k)$  si  $g = k \cdot \exp P$ ; mais le calcul explicite de  $w$  nécessite alors la connaissance de la décomposition  $g = k \cdot \exp P$ , qui n'est pas très aisée à calculer. On va indiquer un autre procédé permettant d'obtenir des fonctions  $v$ .

THÉORÈME 2. — Notons  $\mathfrak{g}_c, \mathfrak{k}_c, \mathfrak{p}_c$  les complexifiés de  $\mathfrak{g}, \mathfrak{k}, \mathfrak{p}$ ,  $J$  une structure complexe  $\mathfrak{k}$ -invariante sur  $\mathfrak{p}$ ; pour  $g \in G$  on note encore  $\text{Ad } g$  l'action adjointe de  $g$  dans  $\mathfrak{g}_c$ ; on note  $\mathfrak{p}_c^+$  et  $\mathfrak{p}_c^-$  les deux composantes  $\mathfrak{k}$ -irréductibles de  $\mathfrak{p}_c$ :  $\mathfrak{p}_c^\pm$  est l'ensemble des éléments de  $\mathfrak{p}_c$  de la forme  $X \pm iJX$  avec  $X \in \mathfrak{p}$ . On note  $\Pi$  le projecteur de  $\mathfrak{g}_c$  sur  $\mathfrak{p}_c^+$  parallèlement à  $\mathfrak{k}_c + \mathfrak{p}_c^-$ ; pour  $g \in G$  on note  $T_g$  l'opérateur  $\mathbb{C}$ -linéaire suivant dans  $\mathfrak{p}_c^+$ :

$$T_g = \Pi \circ \text{Ad } g \Big|_{\mathfrak{p}_c^+}.$$

Alors la fonction  $v$  définie par  $v(g) = \det T_g$  vérifie les conditions (a), (b), (c) du théorème 1.

Démonstration. — Soient  $k \in K$  et  $P \in \mathfrak{p}$ ; on sait que  $\text{Ad } k$  permute à  $\Pi$  et que  $(\text{ad } P)^n(\mathfrak{p}_c)$  est inclus dans  $\mathfrak{k}_c$  pour  $n$  impair et dans  $\mathfrak{p}_c$  pour  $n$  pair; notons  $\Pi'$  (resp.  $\Pi''$ ) le projecteur de  $\mathfrak{p}_c$  sur  $\mathfrak{p}_c^+$  parallèlement à  $\mathfrak{p}_c^-$  (resp. de  $\mathfrak{g}_c$  sur  $\mathfrak{p}_c$  parallèlement à  $\mathfrak{k}_c$ ); on a  $\Pi = \Pi' \circ \Pi''$  et

$$\begin{aligned} T_{k, \exp P} &= \Pi' \circ \Pi'' \circ \text{Ad } k \circ \sum_{n=0}^{\infty} (n!)^{-1} (\text{ad } P)^n \Big|_{\mathfrak{p}_c^+} \\ &= \text{Ad } k \circ \Pi' \circ \Pi'' \circ \sum_{n=0}^{\infty} (n!)^{-1} (\text{ad } P)^n \Big|_{\mathfrak{p}_c^+} \\ &= \text{Ad } k \circ \Pi' \circ \sum_{n=0}^{\infty} (2n!)^{-1} (\text{ad } P)^{2n} \Big|_{\mathfrak{p}_c^+} \\ &= \text{Ad } k \circ \Pi' \circ \text{ch ad } P \Big|_{\mathfrak{p}_c^+}. \end{aligned}$$

Ceci démontre la condition (c); ensuite la restriction de  $v$  à  $K$  est évidemment un morphisme de  $K$  dans  $\mathbb{T}$ ; il est non trivial parce que, notant  $Z_0$  un élément du centre de  $\mathfrak{k}$  tel que  $\text{ad } Z_0 \Big|_{\mathfrak{p}} = J$ , on a

$$T_{\exp tZ_0} = e^{-it} I \quad \text{pour tout réel } t.$$

La restriction de  $v$  à  $\exp \mathfrak{p}$  est  $K$ -invariante parce que

$$T_{k, \exp P, k^{-1}} = T_k \cdot T_{\exp P} \cdot T_k^{-1};$$

reste à voir qu'elle est strictement positive. Pour cela définissons un produit scalaire hermitien  $(\cdot | \cdot)$  sur  $\mathfrak{p}_c$  par la condition que  $(X | Y) = B(X, Y)$  pour  $X, Y \in \mathfrak{p}$ , où  $B$  est la forme de Killing. Utilisant le fait que  $J$  est  $B$ -antisymétrique (lemme 1 c), on vérifie immédiatement que  $\mathfrak{p}_c^+$  et  $\mathfrak{p}_c^-$  sont orthogonaux; donc  $\Pi'$  est hermitien. D'autre part, pour tout  $P \in \mathfrak{p}$ ,  $(\text{ad } P)^2 \Big|_{\mathfrak{p}}$  étant  $B$ -symétrique et positif  $(\text{ad } P)^2 \Big|_{\mathfrak{p}_c}$  est hermitien et positif. Mais

$$T_{\exp P} = I_{\mathfrak{p}_c^+} + \sum_{n=1}^{\infty} \Pi' \circ (2n!)^{-1} (\text{ad } P)^{2n} \Big|_{\mathfrak{p}_c^+};$$

$T_{\exp P}$  est donc égal à  $I$  plus un opérateur hermitien positif; son déterminant est donc strictement positif.

C.Q.F.D.

Nous allons maintenant donner deux autres définitions de la fonction  $v$  du théorème 2. Notons  $G_c$  le groupe simplement connexe d'algèbre de Lie  $\mathfrak{g}_c$ ,  $K_c$  le sous-groupe d'algèbre

de Lie  $\mathfrak{k}_c$ ; posons  $P_{\pm} = \exp \mathfrak{p}_c^{\pm}$ ; supposons  $G$  plongé dans  $G_c$ . On sait (cf. [2], chap. VIII, § 7) que  $P_{\pm}$  est un sous-groupe abélien de  $G_c$ , difféomorphe à  $\mathfrak{p}_c^{\pm}$  par l'application  $\exp$ , dont nous noterons  $\log$  l'application réciproque; que l'application naturelle

$$P_- \times K_c \times P_+ \rightarrow G_c$$

est un difféomorphisme du premier espace sur un ouvert du second contenant  $G$  (on peut donc écrire tout  $g \in G$  sous la forme

$$g = \exp p_-(g) \cdot k(g) \cdot \exp p_+(g),$$

et enfin que l'application  $g \mapsto p_-(g)$  passe au quotient en une injection  $M$  de  $G/K$  dans  $\mathfrak{p}_c^-$  à image ouverte (plongement d'Harish-Chandra). L'action naturelle de  $g \in G$  sur  $G/K$  se transporte par  $M$  en une action, notée  $A_g$ , sur  $\text{Im } M$ .

Pour  $g \in G_c$  on définit encore  $T_g$  par la formule du théorème 2.

**THÉORÈME 3.** — *Pour tout  $g \in G$ ,  $v(g)$  est égal au déterminant de l'opérateur  $T_{k(g)} = \text{Ad } k(g)|_{\mathfrak{p}_c^+}$ , et aussi au conjugué du déterminant de la différentielle de  $A_g$  au point 0.*

*Démonstration.* — Écrivons  $g = \exp p_- \cdot k \cdot \exp p_+$  la décomposition de  $g$ ; on a

$$T_g = \Pi \circ e^{\text{ad } p_-} \circ \text{Ad } k \circ e^{\text{ad } p_+} |_{\mathfrak{p}_c^+},$$

comme  $\mathfrak{p}_c^+$  est une sous-algèbre abélienne on a aussi

$$T_g = \Pi \circ e^{\text{ad } p_-} \circ \text{Ad } k |_{\mathfrak{p}_c^+};$$

mais  $(\text{ad } p_-)^n (\mathfrak{p}_c^+)$  est inclus dans  $\mathfrak{k}_c$  pour  $n$  impair, dans  $\mathfrak{p}_c^-$  pour  $n = 2$  (vérification facile), donc nul pour  $n \geq 3$ ; on a donc :

$$T_g = \text{Ad } k |_{\mathfrak{p}_c^+},$$

ce qui établit la première assertion. Pour démontrer la seconde, considérons les applications

$$G/K \xrightarrow{M} P_- \xrightarrow{N} G_c/K_c P_+;$$

soit  $X$  un élément de  $\mathfrak{p}_-$ ,  $f$  une fonction  $C^\infty$  sur  $G_c/K_c P_+$ , identifiée à une fonction sur  $G_c$ ; on a

$$\begin{aligned} (A_g X_0)(f \circ N) &= (g \cdot N(X_0))(f) = \frac{d}{dt} f(g \cdot \exp tX) \\ &= \frac{d}{dt} f(\exp p_- \cdot k \cdot \exp p_+ \cdot \exp tX) \\ &= \frac{d}{dt} f(\exp p_- \cdot k \cdot \exp(t \cdot e^{\text{ad } p_+}(X))) \\ &= \frac{d}{dt} f(\exp p_- \cdot k \cdot \exp(tX + t \text{ad } p_+(X) + \frac{t}{2}(\text{ad } p_+)^2(X))) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{d}{dt} f(\exp p_- \cdot k \cdot \exp tX) \\
&= \frac{d}{dt} f(\exp p_- \cdot \exp(t \cdot \text{Ad } k(X))) \\
&= (\text{Ad } k(X))_{A_g(0)}(f \circ N),
\end{aligned}$$

d'où :

$$A_g X_0 = (\text{Ad } k(X))_{A_g(0)},$$

ce qui démontre la seconde assertion.

#### 4. Description de $H^2(G, \mathbf{Z})$ et $H^2(G, \mathbf{T})$

Il s'agit ici de la cohomologie définie à l'aide de cochaînes boréliennes; on note  $s$  une section borélienne de l'application  $E : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{T}$ . On prend ici pour  $u$  un générateur du groupe  $\text{Hom}(\mathbf{K}, \mathbf{T})$ .

**THÉORÈME 4.** — *L'application  $\tilde{f} = f - \partial(s \circ w)$  appartient à  $Z^2(G, \mathbf{Z})$ ; sa classe dans  $H^2(G, \mathbf{Z})$  est un générateur de ce dernier groupe, qui est isomorphe à  $\mathbf{Z}$ .*

*Démonstration.* — Il résulte de [1] théorème 4, que l'application de restriction  $H^2(G, \mathbf{Z}) \rightarrow H^2(\mathbf{K}, \mathbf{Z})$  est un isomorphisme. D'autre part dans la suite exacte de cohomologie

$$H^1(\mathbf{K}, \mathbf{R}) \rightarrow H^1(\mathbf{K}, \mathbf{T}) = \text{Hom}(\mathbf{K}, \mathbf{T}) \xrightarrow{\alpha} H^2(\mathbf{K}, \mathbf{Z}) \rightarrow H^2(\mathbf{K}, \mathbf{R}),$$

les termes extrêmes sont nuls, donc  $\alpha$  est un isomorphisme; il en résulte que  $H^2(G, \mathbf{Z})$  est isomorphe à  $\mathbf{Z}$ . Par ailleurs il est clair que  $\tilde{f}$  est un 2-cocycle entier non trivial. Il suffit maintenant de montrer que la classe de  $\tilde{f}|_{\mathbf{K} \times \mathbf{K}}$  dans  $H^2(\mathbf{K}, \mathbf{Z})$  est un générateur; mais  $\tilde{f}|_{\mathbf{K} \times \mathbf{K}}$  est égal à  $-\partial(s \circ w)$  puisque  $f|_{\mathbf{K} \times \mathbf{K}} = 0$  et  $w|_{\mathbf{K}} = u$ ; autrement dit la classe de  $\tilde{f}|_{\mathbf{K} \times \mathbf{K}}$  dans  $H^2(\mathbf{K}, \mathbf{Z})$  n'est autre que  $\alpha(u)$ ; notre assertion résulte alors de ce que  $u$  est un générateur de  $\text{Hom}(\mathbf{K}, \mathbf{T})$ .

**THÉORÈME 5.** — *Soit  $k$  un nombre réel;  $E \circ kf$  est un 2-cocycle différentiable de  $G$  dans  $\mathbf{T}$ , qui est trivial si et seulement si  $k$  est entier. Si de plus le groupe fondamental  $\pi_1(G)$  est sans torsion, tout 2-cocycle borélien de  $G$  dans  $\mathbf{T}$  est équivalent à un cocycle de la forme  $E \circ kf$ .*

*Démonstration.* — Il est clair que  $E \circ kf$  est un 2-cocycle différentiable, trivial si  $k$  est entier. Inversement supposons  $E \circ kf$  trivial; alors  $kf$  est équivalent dans  $Z^2(G, \mathbf{R})$  à un cocycle entier, et il en est de même de  $k\tilde{f}$ ; le théorème 4 implique alors que  $k$  est entier.

Supposons maintenant  $\pi_1(G)$  sans torsion; les résultats de [1] entraînent que  $H^3(G, \mathbf{Z}) = 0$ ; enfin la suite exacte de cohomologie montre que l'application  $H^2(G, \mathbf{R}) \rightarrow H^2(G, \mathbf{T})$  est surjective.

*Remarque 3.* — L'hypothèse «  $\pi_1(G)$  sans torsion » est vérifiée pour les groupes  $SU(p, q)$ ,  $\text{Sp}(n, \mathbf{R})$ ,  $\text{SO}^*(2n)$ ,  $\text{SO}_0(2, 1)$ , mais pas pour  $\text{SO}_0(2, q)$  pour  $q \geq 3$ ; on doit

remplacer ce dernier par un revêtement d'ordre 2 ayant pour sous-groupe compact maximal  $SO(2) \times Spin(q)$ . Sans cette hypothèse on peut seulement affirmer que  $H^3(G, \mathbf{Z})$  est fini <sup>(1)</sup> (toujours d'après [1]), et donc que l'image de  $H^2(G, \mathbf{R})$  dans  $H^2(G, \mathbf{T})$  est d'indice fini.

### 5. Exemples

On va examiner ici les cas (I) à (IV), laissant les groupes exceptionnels pour un travail ultérieur. On notera  $M(p, q, \mathbf{C})$  l'ensemble des matrices complexes à  $p$  lignes et  $q$  colonnes;  $M_s(p, q, \mathbf{C})$  (resp.  $M_{as}(p, q, \mathbf{C})$ ) le sous-ensemble de celles qui sont symétriques (resp. antisymétriques) <sup>(2)</sup>. Pour éviter des confusions on notera  $E \times E$  le complexifié d'un espace vectoriel réel  $E$ , et  $(X, Y)$  ses éléments (plutôt que  $E \oplus iE$  et  $X + iY$ ). Pour chacun des exemples étudiés on décrit successivement  $G, K, \mathfrak{g}$ , son involution de Cartan  $\theta, \mathfrak{f}$ , l'élément  $Z_0$  de  $\mathfrak{f}$  qui définit la structure complexe  $J$  de  $\mathfrak{p}, \mathfrak{p}, J, \mathfrak{p}_c^+$ , l'opérateur  $T_g$  du théorème 2,  $v(g) = \det T_g$ , une fonction  $v'$  plus simple que  $v$  vérifiant aussi les conditions (a), (b), (c) du théorème 1; et enfin une forme bilinéaire alternée  $\mathfrak{f}$ -invariante  $\Phi$  sur  $\mathfrak{p}$ .

CAS (I).

$G$  est l'ensemble des matrices complexes

$$g = \begin{pmatrix} p & q \\ g_{11} & g_{12} \\ q & g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}$$

vérifiant  $g j g^* = j$  et  $\det g = 1$  où  $j = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}$ .

$K$  est l'ensemble des matrices ci-dessus où  $g_{12} = g_{21} = 0$ ,  $g_{11} \in U(p)$ ,  $g_{22} \in U(q)$  et  $\det g_{11} \cdot \det g_{22} = 1$ .

$\mathfrak{g}$  est l'ensemble des matrices complexes

$$X = \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{12}^* & X_{22} \end{pmatrix}$$

où  $X_{11}$  et  $X_{22}$  sont antihermitiennes et  $\text{Tr } X_{11} + \text{Tr } X_{22} = 0$ .

$\theta(X) = -X^*$ .

$\mathfrak{f}$  est l'ensemble des matrices ci-dessus où  $X_{12} = X_{21} = 0$ .

$$Z_0 = \frac{pq}{p+q} \begin{pmatrix} iI/p & 0 \\ 0 & iI/q \end{pmatrix}$$

$\mathfrak{p}$  est l'ensemble des matrices  $X = \begin{pmatrix} 0 & R \\ R^* & 0 \end{pmatrix}$  où  $R \in M(p, q, \mathbf{C})$ ; on l'identifie à  $M(p, q, \mathbf{C})$  par  $X \leftrightarrow R$ ; alors  $J(R)$  est le produit ordinaire  $iR$ .

<sup>(1)</sup> Et isomorphe au sous-groupe de torsion de  $\pi_1(G)$ .

<sup>(2)</sup> Dans le cas où  $p = q$ .

$\mathfrak{p}_c^+$  est l'ensemble des couples  $(R, iR)$  où  $R \in M(p, q, \mathbf{C})$ ; on l'identifie à  $M(p, q, \mathbf{C})$  par  $(R, iR) \leftrightarrow R$ . Alors

$$\begin{aligned} T_g(R) &= g_{11} R g_{22}^*, \\ v(g) &= (\det g_{11})^q (\det g_{22})^p, \\ v'(g) &= \det g_{11} \end{aligned}$$

[en fait on peut montrer que  $v(g) = (v'(g))^{p+q}$ ]:

$$\Phi(X_1, X_2) = i \operatorname{Tr}(R_1 R_2^* - R_2 R_1^*).$$

CAS (II).

$G$  est l'ensemble des matrices réelles

$$g = \begin{matrix} & 2 & q \\ 2 & \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} \end{matrix}$$

vérifiant  $g_j g = j$ ,  $\det g = 1$ ,  $\det g_{11} > 0$ , où  $j = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}$   $K$  est l'ensemble des matrices ci-dessus où  $g_{12} = g_{21} = 0$ ,  $g_{11} \in \operatorname{SO}(2)$ ,  $g_{22} \in \operatorname{SO}(q)$ .

$\mathfrak{g}$  est l'ensemble des matrices réelles

$$X = \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ {}^t X_{12} & X_{22} \end{pmatrix}$$

où  $X_{11}$  et  $X_{22}$  sont antisymétriques.

$$\theta(X) = -{}^t X.$$

$\mathfrak{f}$  est l'ensemble des matrices ci-dessus où  $X_{12} = X_{21} = 0$ .

$$Z_0 = \left( \begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & & 0 \end{array} \right)$$

$\mathfrak{p}$  est l'ensemble des matrices

$$X = \begin{pmatrix} 0 & X_{12} \\ {}^t X_{12} & 0 \end{pmatrix}$$

où  $X_{12} \in M(2, q, \mathbf{R})$ ;  $X_{12}$  est composée de deux lignes  $X_{121}$ ,  $X_{122}$ ; on identifie  $\mathfrak{p}$  à  $M(1, q, \mathbf{C})$  par  $X \leftrightarrow R = X_{121} + i X_{122}$ ; alors  $J(R)$  est le produit ordinaire  $iR$ .

$\mathfrak{p}_c^+$  est identique à celui du cas (I) en remplaçant  $p$  par 1.

Calcul de  $T_g$ : écrivons

$$g = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in G, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix}, \quad C = (C_1 C_2), \quad B_i = (b_{ij}), \quad C_i = (c_{ij}),$$

$$D = (d_{jk}), \quad j, k = 1, \dots, q.$$

Alors :

$$T_g(\mathbf{R}) = -\frac{1}{2}(\mathbf{B}_1 + i\mathbf{B}_2) \cdot {}^t\mathbf{R} \cdot {}^t(\mathbf{C}_1 - i\mathbf{C}_2) + \frac{1}{2}(a_{11} + a_{22} + ia_{21} - ia_{12}) \cdot \mathbf{R} \cdot {}^t\mathbf{D}$$

$$v(g) = \det \left[ -\frac{1}{2}(b_{1k} + ib_{2k})(c_{1j} - ic_{2j}) + \frac{1}{2}(a_{11} + a_{22} + ia_{21} - ia_{12})d_{jk} \right]_{j,k=1,\dots,q}$$

$$v'(g) = \frac{1}{2}(a_{11} + a_{22} + ia_{21} - ia_{12})$$

(en fait on peut montrer que  $v = v'$  lorsque  $q = 1$ , et cela reste probablement vrai dans le cas général).

$\Phi$  est donnée par la même formule que dans le cas (I).

CAS (III).

$G$  est l'ensemble des matrices réelles

$$g = \begin{matrix} n & n \\ n & n \end{matrix} \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}$$

verifiant  $gj^t g = j$  où  $j = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{I} \\ -\mathbf{I} & 0 \end{pmatrix}$ .

$K$  est l'ensemble des matrices

$$k = \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} \\ -k_{12} & k_{11} \end{pmatrix}$$

avec

$$\begin{aligned} k_{11} {}^t k_{11} + k_{12} {}^t k_{12} &= \mathbf{I}, \\ k_{11} {}^t k_{12} - k_{12} {}^t k_{11} &= 0; \end{aligned}$$

$K$  est isomorphe à  $U(n)$  par  $k \leftrightarrow k_{11} + ik_{12}$ .

$g$  est l'ensemble des matrices réelles

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \mathbf{X}_{11} & \mathbf{X}_{12} \\ \mathbf{X}_{21} & -{}^t\mathbf{X}_{11} \end{pmatrix}$$

où  $\mathbf{X}_{12}$  et  $\mathbf{X}_{21}$  sont symétriques.

$$\theta(\mathbf{X}) = -{}^t\mathbf{X}.$$

$\mathfrak{f}$  est l'ensemble des matrices

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \mathbf{X}_{11} & \mathbf{X}_{12} \\ -\mathbf{X}_{12} & \mathbf{X}_{11} \end{pmatrix}$$

où  $\mathbf{X}_{11}$  est antisymétrique et  $\mathbf{X}_{12}$  symétrique.

$$Z_0 = (1/2)j.$$

$\mathfrak{p}$  est l'ensemble des matrices

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \mathbf{X}_{11} & \mathbf{X}_{12} \\ \mathbf{X}_{12} & -\mathbf{X}_{11} \end{pmatrix}$$

où  $X_{11}$  et  $X_{12}$  sont symétriques; on l'identifie à  $M_s(n, \mathbf{C})$  par

$$X \leftrightarrow R = X_{11} - iX_{12};$$

alors  $J(R)$  est le produit ordinaire  $iR$ .

$p_c^+$  s'identifie, par le même procédé qu'aux cas précédents, à  $M_s(n, \mathbf{C})$ ; alors :

$$T_g(R) = \frac{1}{4}(g_{11} + g_{22} + ig_{12} - ig_{21}) \cdot R \cdot {}^t(g_{11} + g_{22} + ig_{12} - ig_{21}),$$

$$v(g) = \left( \det \frac{1}{2}(g_{11} + g_{22} + ig_{12} - ig_{21}) \right)^{2n},$$

$$v'(g) = \det \frac{1}{2}(g_{11} + g_{22} + ig_{12} - ig_{21}),$$

$\Phi$  est donné par la même formule que dans les cas précédents.

CAS (IV).

$G$  est l'ensemble des matrices complexes de la même forme qu'au cas (III) mais vérifiant  $g {}^t g = I$  et  $g j g^* = j$ .

$K$  est le même qu'au cas (III).

$g$  est l'ensemble des matrices complexes

$$X = \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ -{}^t X_{12} & -X_{11} \end{pmatrix}$$

où  $X_{11}$  est antisymétrique et  $X_{12}$  hermitienne.

$$\theta(X) = -X^*.$$

$\mathfrak{f}$  est le même qu'au cas (III); idem pour  $Z_0$ .

$p$  est l'ensemble des matrices de la même forme qu'au cas (III), mais où  $X_{11}$  et  $X_{12}$  sont imaginaires pures et antisymétriques; on l'identifie à  $M_{as}(n, \mathbf{C})$  par la même formule qu'au cas (III); la suite est identique à celle du cas (III).

## 6. Remarques diverses

*Remarque 4.* — Considérons le groupe  $G = \text{Sp}(1, \mathbf{R}) = \text{SL}(2, \mathbf{R})$ ; on a, pour tout

$$g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in G,$$

$$v'(g) = \frac{1}{2}(a + d + ib - ic);$$

le 2-cocycle  $f$  est égal au produit de  $1/2 \pi$  par une détermination continue de la fonction  $\arg \partial_m w$  où  $w(g) = v'(g)/|v'(g)|$ . Notons maintenant  $\arg$  cont cette détermination continue. D'autre part notons  $\arg z$ , pour tout  $z \in \mathbf{C}^*$ , l'argument de  $z$  vérifiant

$-\pi \leq \arg z < \pi$ ; suivant le théorème 4, on obtient un 2-cocycle entier borélien  $\varphi$  équivalent à  $f$  en posant

$$2\pi\varphi(g_1, g_2) = \arg \operatorname{cont} \partial_m w(g_1, g_2) - \arg(a_1 + d_1 + ib_1 - ic_1) - \arg(a_2 + d_2 + ib_2 - ic_2) + \arg(a_1 a_2 + \dots - id_1 c_2).$$

On utilise en Théorie des Formes modulaires un 2-cocycle entier borélien voisin du nôtre (cf. [5] ou [8], § 3.2) :

$$2\pi\Psi(g_1, g_2) = \arg(ic_2 + d_2) + \arg \frac{c_1 b_2 + d_1 d_2 + i(c_1 a_2 + d_1 c_2)}{ic_2 + d_2} - \arg(c_1 b_2 + d_1 d_2 + i(c_1 a_2 + d_1 c_2)).$$

Par ailleurs, pour les groupes  $\operatorname{Sp}(n, \mathbf{R})$  Dupont a donné dans [6] un 2-cocycle sous la forme d'une intégrale.

*Remarque 5.* — Pour chacun des exemples (I) à (IV),  $\mathfrak{p}$  s'identifie à un espace de matrices complexes, et de plus on peut définir un 2-cocycle sur  $\mathfrak{g}$  par la même formule :

$$\Phi(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2) = i \operatorname{Tr}(\mathbf{R}_1 \mathbf{R}_2^* - \mathbf{R}_2 \mathbf{R}_1^*).$$

Ceci suggère de définir, pour tout entier  $s$ , un 2  $s$ -cocycle complexe  $\Phi_s^s$  par

$$\Phi_s^s(\mathbf{R}_1, \dots, \mathbf{R}_{2s}) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{2s}} \varepsilon_\sigma \cdot \operatorname{Tr}(\mathbf{R}_{\sigma_1} \mathbf{R}_{\sigma_2}^* \dots \mathbf{R}_{\sigma_{2s-1}} \mathbf{R}_{\sigma_{2s}}^*);$$

on a alors  $\Phi = i \Phi_1^1$ ; on peut ensuite faire des cup-produits de ces cocycles et poser

$$\Phi_{s_1, \dots, s_m}^s = \Phi_{s_1}^{s_1} \cup \dots \cup \Phi_{s_m}^{s_m},$$

avec  $s = s_1 + \dots + s_m$ . Nous avons vérifié que pour  $G = \operatorname{SU}(p, q)$  et pour  $s = 1, 2, 3$ , les cocycles ainsi obtenus engendrent  $H^{2s}$ ; on peut conjecturer que c'est encore vrai pour tout  $s$ . Par contre ce n'est pas vrai pour  $G = \operatorname{SO}_0(2, q)$ ; pour ce groupe on a en effet :

— pour  $q$  impair

$$\dim H^{2s} = \begin{cases} 1 & \text{si } s = 0, 1, \dots, q, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

— pour  $q$  pair

$$\dim H^{2s} = \begin{cases} 1 & \text{si } s = 0, 1, \dots, q/2 - 1, q/2 + 1, \dots, q, \\ 2 & \text{si } s = q/2, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Or pour un  $s$  donné les divers  $\Phi_{s_1, \dots, s_m}^s$  sont proportionnels à la  $s$ -ième cup-puissance de  $\Phi_1^1$ . Un cocycle non proportionnel à celui-ci pour  $s = q/2$  est le suivant :

$$(\mathbf{R}_1, \dots, \mathbf{R}_{2s}) \mapsto \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{2s}} \varepsilon_\sigma \det \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{\sigma_1} \\ \mathbf{R}_{\sigma_2} \\ \vdots \\ \mathbf{R}_{\sigma_{2s-1}} \\ \mathbf{R}_{\sigma_{2s}} \end{bmatrix}$$

(on considère chaque  $\mathbf{R}_j$  comme élément de  $M(1, q, \mathbf{C})$ ).

Nous espérons revenir sur ces questions dans un travail ultérieur.

## APPENDICE

ISOMORPHISME DE  $H^n(G, E)$  SUR  $H^n(\mathfrak{g}, \mathfrak{k}, E)$ .

Pour tout  $G$ -module différentiable  $E$ , W. T. Van Est a démontré l'existence d'un tel isomorphisme en utilisant la suite spectrale qui porte son nom; nous construisons ici un isomorphisme explicite. On note  $U$  la représentation de  $G$  dans  $E$ .

D'après [4] et [11] on a deux résolutions fortement injectives de  $E$  :

$$0 \rightarrow E \rightarrow C^0 \rightarrow C^1 \rightarrow \dots$$

$$0 \rightarrow E \rightarrow \Omega^0 \rightarrow \Omega^1 \rightarrow \dots$$

$C^n$  est l'ensemble des applications différentiables de  $G^{n+1}$  dans  $E$ , notées habituellement  $(g_0, g_1, \dots, g_n) \mapsto f[g_0(g_1, \dots, g_n)]$ , et vérifiant les relations suivantes :

$$f[g_0(g_1, \dots, g_n)] = 0 \quad \text{si l'un des } g_i \text{ appartient à } K (i = 1, \dots, n),$$

$$f[g_0(g_1, \dots, g_n)] = f[g_0 k_0 (k_0^{-1} g_1 k_1, k_1^{-1} g_2 k_2, \dots, k_{n-1}^{-1} g_n k_n)]$$

pour tous  $g_i \in G, k_i \in K$ ; l'action de  $G$  est donnée par

$$(\gamma f)[g_0(g_1, \dots, g_n)] = U_{\gamma} \cdot f[\gamma^{-1} g_0(g_1, \dots, g_n)]$$

et l'opérateur cobord par

$$\begin{aligned} (\delta f)[g_0(g_1, \dots, g_n)] &= f[g_0 g_1(g_2, \dots, g_n)] \\ &+ \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i f[g_0(g_1, \dots, g_i g_{i+1}, \dots, g_n)] \\ &+ (-1)^n f[g_0(g_1, \dots, g_{n-1})]. \end{aligned}$$

$\Omega^n$  est l'ensemble  $\Omega^n(G/K, E)$  des  $n$ -formes différentielles  $C^\infty$  sur  $G/K$  à valeurs dans  $E$ ; si  $\omega$  est une telle forme, et  $X_1, \dots, X_n$  des vecteurs tangents en un point  $x$  de  $G/K$ , on note  $\omega_x(X_1, \dots, X_n)$  la valeur de  $\omega$  sur  $X_1, \dots, X_n$ ; si maintenant  $X_1, \dots, X_n$  sont des champs de vecteurs tangents, on note  $\omega(X_1, \dots, X_n)$  la fonction  $x \mapsto \omega_x(X_1, \dots, X_n)$ .

L'action de  $G$  sur  $\Omega^n$  est donnée par

$$(\gamma \omega)_x = U_{\gamma} \circ \omega_{\gamma^{-1}x} \circ D_x \tau_{\gamma^{-1}},$$

où  $\tau_{\gamma}$  est l'application  $x \mapsto \gamma \cdot x$  et  $D_x \tau_{\gamma}$  sa différentielle au point  $x$ ; l'opérateur cobord est donné par

$$\begin{aligned} (d\omega)(X_1, \dots, X_n) &= \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} X_i \cdot \omega(X_1, \dots, \hat{X}_i, \dots, X_n) \\ &+ \sum_{i < j} (-1)^{i+j} \omega([X_i, X_j], X_1, \dots, \hat{X}_i, \dots, \hat{X}_j, \dots, X_n) \end{aligned}$$

$(X_i \cdot \omega(X_1, \dots, \hat{X}_i, \dots, X_n))$  désigne la valeur prise par le champ de vecteurs  $X_i$  sur la fonction  $\omega(X_1, \dots, \hat{X}_i, \dots, X_n)$ .

Notons  $C^{*G}$  (resp.  $\Omega^{*G}$ ) le sous-complexe de  $C^*$  (resp.  $\Omega^*$ ) formé des éléments  $G$ -invariants; les cohomologies de  $C^{*G}$  et  $\Omega^{*G}$  sont canoniquement isomorphes, celle de  $C^{*G}$  n'est autre que  $H^*(G, E)$ ; de plus tout morphisme de complexes  $T$  de  $C^*$  dans  $\Omega^*$  commençant par  $\text{id} : E \rightarrow E$  induit l'isomorphisme canonique entre les cohomologies de  $C^{*G}$  et de  $\Omega^{*G}$ . D'autre part on obtient un isomorphisme  $S$  de  $\Omega^{*G}$  sur le complexe  $\text{Hom}_T(\Lambda^* \mathfrak{p}, E)$  en associant à toute forme différentielle  $G$ -invariante sa valeur au point  $e \in K$ .

On va utiliser le morphisme  $T$  défini comme suit : à toute  $f \in C^n$  associons la  $n$ -forme différentielle  $T'(f)$  sur  $G$  définie par

$$T'(f)_g(\tilde{X}_1, \dots, \tilde{X}_n) = \sum_{\sigma} \varepsilon_{\sigma} \frac{d^n}{dt_1 \dots dt_n} f [g(\exp t_1 X_{\sigma_1}, \dots, \exp t_n X_{\sigma_n})]$$

(la dérivée est prise pour  $t_1 = \dots = t_n = 0$ ;  $\tilde{X}$  désigne le champ de vecteurs invariant à gauche associé à  $X \in \mathfrak{g}$  on voit facilement que  $T'(f)$  provient d'une forme différentielle sur  $G/K$ ; c'est cette dernière forme qu'on note  $T(f)$ . La seule chose à vérifier est que  $T$  est compatible avec les opérateurs cobords  $\delta$  de  $C^*$  et  $d$  de  $\Omega^*$ ; car ceci fait il sera clair qu'en composant  $T^G : C^{*G} \rightarrow \Omega^{*G}$  avec  $S$ , on obtiendra l'application  $f' \mapsto df'$  considérée au paragraphe 1.

Vérifions donc que  $T'(\delta f) = d(T'(f))$  pour  $f \in C^{n-1}$ . On a

$$\begin{aligned} T(\delta f)_g(\tilde{X}_1, \dots, \tilde{X}_n) &= \sum_{\sigma} \varepsilon_{\sigma} \frac{d^n}{dt_1 \dots dt_n} \left\{ f [g \cdot \exp t_1 X_{\sigma_1} (\exp t_2 X_{\sigma_2}, \dots, \exp t_n X_{\sigma_n})] \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i f [g(\exp t_1 X_{\sigma_1}, \dots, \exp t_i X_{\sigma_i} \right. \\ &\quad \left. \times \exp t_{i+1} X_{\sigma_{i+1}}, \dots, \exp t_n X_{\sigma_n})] \right. \\ &\quad \left. + (-1)^n f [g(\exp t_1 X_{\sigma_1}, \dots, \exp t_{n-1} X_{\sigma_{n-1}})] \right\}; \end{aligned}$$

le dernier terme est nul; en utilisant la formule de Hausdorff on obtient

$$\begin{aligned} T'(\delta f)_g(\tilde{X}_1, \dots, \tilde{X}_n) &= \sum_{\sigma} \varepsilon_{\sigma} \frac{d^n}{dt_1 \dots dt_n} \left\{ f [g \cdot \exp t_1 X_{\sigma_1} (\exp t_2 X_{\sigma_2}, \dots, \exp t_n X_{\sigma_n})] \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i f \left[ g \left( \exp t_1 X_{\sigma_1}, \dots, \exp \frac{1}{2} t_i t_{i+1} \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \left. \times [X_{\sigma_i}, X_{\sigma_{i+1}}], \dots, \exp t_n X_{\sigma_n} \right) \right] \right\} \\ &= \sum_{j=1}^n (-1)^{j+1} \cdot X_j \cdot T'(f)_g(X_1, \dots, \hat{X}_j, \dots, X_n) \\ &\quad + \sum_{i < j} (-1)^{i+j} \cdot T'(f)_g([X_i, X_j], X_1, \dots, \hat{X}_i, \dots, \hat{X}_j, \dots, X_n) \\ &= d(T'(f))_g(\tilde{X}_1, \dots, \tilde{X}_n). \end{aligned}$$

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] D. WIGNER, *Algebraic Cohomology of Topological Groups* (*Trans. Amer. Math. Soc.*, t. 178, 1973, p. 83-93).
- [2] S. HELGASON, *Differential Geometry and Symmetric Spaces*, Academic Press.
- [3] W. T. VAN EST, *Group Cohomology and Lie Algebra Cohomology in Lie Groups*, I, II (*Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Series A 56 = Indag. Math.*, t. 15, 1953, p. 484-504).
- [4] G. P. HOCHSCHILD and G. D. MOSTOW, *Cohomology of Lie Groups* (*Illinois J. Math.*, t. 6, 1962, p. 367-401).
- [5] T. ASAI, *The Reciprocity of Dedekind Sums and the Factor Set for the Universal Covering Group of  $SL(2, \mathbf{R})$*  (*Nagoya Math. J.*, t. 37, 1970, p. 67-80).
- [6] J. L. DUPONT, *Curvature and Characteristic Classes* [*Lecture Notes in Math.*, (t. 640, 1978)].
- [7] J. L. KOSZUL, *Homologie et cohomologie des algèbres de Lie* (*Bull. Soc. Math. France*, t. 78, 1950, p. 65-127).
- [8] R. A. RANKIN, *Modular Forms and Functions*, Cambridge Univ. Press, 1977.
- [9] A. BOREL and F. HIRZEBRUCH, *Characteristic Classes and Homogeneous Spaces*, I (*Amer. J. Math.*, t. 80, 1958, p. 458-538).
- [10] I. SATAKE, Livre en préparation sur les espaces symétriques.
- [11] W. T. VAN EST, *On Algebraic Cohomology Concepts in Lie Group*, I, II (*Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Series A 58*, 1955, p. 225-233 et 286-294).
- [12] W. T. VAN EST, *A Generalization of the Cartan-Leray Spectral Sequence*, I, II (*Ibid.*, 61, 1958, p. 399-406 et 407-413).
- [13] C. C. MOORE, *Group Extensions and Cohomology for Locally Compact Groups*, III, IV (*Trans. Amer. Math. Soc.*, t. 221, 1976, p. 1-33 et 35-58).
- [14] H. SHULMAN and P. TISCHLER, *Leaf Invariants for Foliations and the Van Est Isomorphism* (*J. Diff. Geom.*, t. 11, 1976, p. 535-546).
- [15] J.-L. DUPONT, *Simplicial de Rham Cohomology and Characteristic Classes of Flat Bundles* (*Topology*, t. 15, 1976, p. 233-245).

(Manuscrit reçu le 25 janvier 1978.)

A. GUICHARDET et D. WIGNER,  
 Centre de Mathématiques,  
 École polytechnique,  
 91120 Palaiseau.