Annales scientifiques de l'É.N.S.

Michel Lassalle

Séries de Laurent des fonctions holomorphes dans la complexification d'un espace symétrique compact

Annales scientifiques de l'É.N.S. 4e série, tome 11, no 2 (1978), p. 167-210
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1978_4_11_2_167_0>

Ann. scient. Éc. Norm. Sup.,
4e série, t. 11, 1978, p. 167 à 210.

SÉRIES DE LAURENT DES FONCTIONS HOLOMORPHES DANS LA COMPLEXIFICATION D'UN ESPACE SYMÉTRIQUE COMPACT

PAR MICHEL LASSALLE

Introduction

C'est un résultat classique (dû à Neumann, 1862) que toute fonction holomorphe à l'intérieur d'une ellipse de foyers $(-1, +1)$ et de demi-grand-axe ch R $(R > 0)$ y admet un développement en série de polynômes de Legendre :

$$f(z) = \sum_{l \in \mathbf{N}} c_l P_l(z)$$

normalement convergent sur tout compact et dont les coefficients décroissent exponentiellement :

$$\forall t \in [0, R[, \quad \exists C_t > 0, \quad \forall l \in \mathbf{N}, \qquad |c_l| \leqq C_t e^{-lt}.$$

Ce résultat est à rapprocher de celui également classique obtenu dans l'étude des séries de Laurent. Là encore il y a équivalence entre l'holomorphie d'une fonction dans la couronne circulaire $R_1 < |z| < R_2$ et le comportement exponentiel :

$$\forall t \in]R_1, R_2[, \quad \exists C_t > 0, \quad \forall n \in \mathbf{Z}, \qquad |c_n| \leqq C_t e^{-n \log t}$$

des coefficients de sa série de Laurent :

$$f(z) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} c_n z^n.$$

En particulier si l'on a $R_1 < 1 < R_2$ (resp. $R_1 = 1$; $R_2 = 1$), f admet une restriction analytique (resp. une valeur au bord hyperfonction) sur le cercle unité, dont les coefficients de Fourier sont les coefficients de Laurent de f. Ceux-ci décroissent exponentiellement pour tout $n \in \mathbf{Z}$ (resp. pour tout $n > 0$; pour tout $n < 0$).

Dans cet article nous présentons une généralisation de ces résultats dans le cadre de la théorie des groupes.

Soit pour cela une paire symétrique compacte (G, K) : c'est la donnée d'un groupe analytique compact G, d'un automorphisme involutif $\tilde{\theta}$ de G, et d'un sous-groupe de Lie K tel que $K^0_{\tilde{\theta}} \subset K \subset K_{\tilde{\theta}}$, où l'on désigne par $K_{\tilde{\theta}}$ le sous-groupe des points fixes de $\tilde{\theta}$ et par $K^0_{\tilde{\theta}}$ la composante connexe de l'identité dans $K_{\tilde{\theta}}$. Dans la suite on supposera que K est connexe mais G ne sera pas nécessairement semi-simple.

On note $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{k}$ les algèbres de Lie respectives de G et K, θ la différentielle de $\tilde{\theta}$ à l'identité, et $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ la décomposition en sous-espaces propres de θ. L'espace homogène $X = G/K$ est un espace riemannien globalement symétrique compact. On rappelle à la section 1 les résultats classiques de l'analyse harmonique sur ces espaces, établis pour l'essentiel par E. Cartan [3].

Soient alors G_c et K_c les complexifications universelles de G et K : ce sont des groupes analytiques complexes réductifs. On montre à la section 2 que l'espace homogène $X_c = G_c/K_c$ est une complexification de Stein de $X = G/K$.

G opère à gauche sur X_c. L'essentiel de cet article est consacré à l'étude des domaines de X_c qui sont invariants par l'action de G. Dans la situation envisagée ici, ces domaines sont l'analogue des couronnes circulaires du plan complexe épointé.

On établit à la section 3 une décomposition de $X_c = G_c/K_c$ qui est l'analogue de la décomposition polaire de **C**. Ce résultat permet de caractériser à la section 4 tout domaine G-invariant de X_c par la donnée de sa « base », qui est un ouvert d'une sous-algèbre abélienne maximale de $\mathfrak{p}$ invariant par le groupe de Weyl.

Soit alors f une fonction holomorphe dans un domaine G-invariant $\mathscr{D}$ de X_c. On définit à la section 5 les « coefficients de Laurent » et la « série de Laurent » de f. On montre que celle-ci converge normalement vers f sur tout compact de $\mathscr{D}$ ([1]).

On en déduit (section 6) une caractérisation des domaines G-invariants de X_c qui sont de Stein et la généralisation suivante du « théorème du tube » : l'enveloppe d'holomorphie du domaine G-invariant de X_c de base B est le domaine G-invariant ayant pour base l'enveloppe convexe de B.

L'invariance de la base par le groupe de Weyl fait apparaître ainsi un phénomène d'extension holomorphe très remarquable. En particulier si G est semi-simple, l'enveloppe d'holomorphie de tout domaine G-invariant de X_c est un voisinage de X dans X_c. On voit que dans ce cas toute fonction holomorphe dans un domaine G-invariant « loin du réel » se prolonge nécessairement « jusqu'au réel ».

On donne à la section 7 une application des résultats précédents à la caractérisation des fonctions et des hyperfonctions sur X en termes de « valeurs au bord » de fonctions holomorphes dans des domaines G-invariants de X_c.

A la section 8 on envisage le cas particulier des fonctions holomorphes et K-invariantes dans un domaine G-invariant de X_c (fonctions sphériques).

(1) La preuve nécessite d'introduire l'espace symétrique non compact dual de X et la fonction d'Harish-Chandra associée. Elle utilise de manière cruciale le comportement asymptotique polynomial de l'inverse de celle-ci.

Enfin les trois dernières sections sont consacrées à des exemples. Un premier cas particulier est celui des groupes analytiques compacts (section 9). On sait en effet que tout groupe analytique H peut être considéré comme un espace symétrique $H \times H/\tilde{H}$, où $\tilde{H}$ désigne le sous-groupe de $H \times H$ formé des éléments de la diagonale. Soit alors U un groupe analytique compact de complexification universelle U_c. En vertu de l'identification qu'on vient de rappeler, les domaines $U \times U$-invariants de $U_c \times U_c/\tilde{U}_c$ correspondent aux domaines de U_c bi-invariants par l'action de U. Sous le nom de « domaines de Reinhardt généralisés » ces domaines ont été étudiés dans [6] dans le cas particulier où la base est une boule, et indépendamment dans [14] dans le cas général. Les résultats obtenus ici apparaissent ainsi comme une généralisation de ceux de [14].

Un second exemple est celui des espaces symétriques compacts de rang un. On le traite à la section 10 où l'on considère plus particulièrement le cas de la sphère et du projectif complexe.

Enfin il a paru utile d'indiquer comment retrouver à partir des résultats de cette étude la propriété classique : toute fonction holomorphe à l'intérieur d'une ellipse de foyers $(-1, +1)$ y admet un développement en série de polynômes de Jacobi, normalement convergent sur tout compact. Ce résultat est obtenu à la section 11 pour tous les polynômes de Jacobi $P_l^{(\alpha, \beta)}$ ($l \in \mathbf{N}$) tels que α et β soient entiers ou demi-entiers $\geqq -1/2$.

Je suis particulièrement reconnaissant envers M. Pierre Renouard pour son intérêt constant et de nombreuses discussions. Je remercie M. Jacques Bros qui m'a suggéré cette étude, et MM. Jean-Pierre Bourguignon, Louis Boutet de Monvel, Michel Demazure, Mogens Flensted-Jensen et André Katz pour d'utiles indications.

1. Généralités sur les espaces symétriques compacts

1.1. Notations. — On considère une paire symétrique compacte (G, K) : G est un groupe de Lie compact connexe (non nécessairement semi-simple), K un sous-groupe de Lie de G, et il existe un automorphisme involutif $\tilde{\theta}$ de G tel que

$$K_{\tilde{\theta}}^0 \subset K \subset K_{\tilde{\theta}},$$

où l'on note $K_{\tilde{\theta}}$ le sous-groupe de Lie des points fixes de $\tilde{\theta}$ et $K_{\tilde{\theta}}^0$ la composante connexe de l'identité dans $K_{\tilde{\theta}}$.

Alors ([8], prop. 3.4, p. 174) l'espace homogène $X = G/K$ est un espace riemannien globalement symétrique compact.

Soient $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{k}$ les algèbres de Lie respectives de G et K. L'automorphisme involutif $\tilde{\theta}$ de G induit un automorphisme involutif $\theta = d\tilde{\theta}$ de $\mathfrak{g}$ et la décomposition canonique

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p},$$

où $\mathfrak{k}$ (resp. $\mathfrak{p}$) est l'espace propre de $\mathfrak{g}$ pour la valeur propre $+1$ (resp. -1) de θ.

$\mathfrak{g}$ est la somme directe de son centre $\mathfrak{z}$ et de l'algèbre semi-simple compacte $\mathfrak{g}' = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$:

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{z} \oplus \mathfrak{g}'.$$

En vue des applications ultérieures, il sera commode de ne pas supposer que l'action de G sur G/K est effective. On pose

$$\mathfrak{z}_{\mathfrak{k}} = \mathfrak{z} \cap \mathfrak{k}, \qquad \mathfrak{z}_{\mathfrak{p}} = \mathfrak{z} \cap \mathfrak{p}, \qquad \mathfrak{k}' = \mathfrak{k} \cap \mathfrak{g}', \qquad \mathfrak{p}' = \mathfrak{p} \cap \mathfrak{g}'.$$

Soit $\mathfrak{a}$ une sous-algèbre abélienne, incluse dans $\mathfrak{p}$, et maximale pour ces propriétés. Alors $\mathfrak{z}_{\mathfrak{p}}$ est contenu dans $\mathfrak{a}$ et on a

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{z}_{\mathfrak{p}} \oplus \mathfrak{a}',$$

où $\mathfrak{a}'$ est une sous-algèbre abélienne maximale de $\mathfrak{p}'$.

Soit $\mathfrak{m}'$ une sous-algèbre de $\mathfrak{k}'$, abélienne, centralisant $\mathfrak{a}'$ et maximale pour ces propriétés. Alors

$$\mathfrak{t}' = \mathfrak{m}' \oplus \mathfrak{a}'$$

est une sous-algèbre abélienne maximale de $\mathfrak{g}'$ stable par θ.

On note $\mathfrak{g}'_c$ la complexification de $\mathfrak{g}'$ et $\mathfrak{t}'_c$ la complexification de $\mathfrak{t}'$. Alors ([8], lemme 3.2, p. 221) $\mathfrak{t}'_c$ est une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}'_c$. On note Δ l'ensemble des racines correspondantes.

Celles-ci prennent leurs valeurs réelles sur $i\,\mathfrak{t}'$. On fixe des ordres compatibles sur $i\,\mathfrak{t}'$ et $i\,\mathfrak{a}'$. Soit $\Delta^+ \subset \Delta$ l'ensemble des racines positives correspondantes.

La forme de Killing $\langle\ ,\ \rangle$ induite par $\mathfrak{g}'$ sur $\mathfrak{t}' \times \mathfrak{t}'$ est non dégénérée. A toute forme (²) $\lambda \in (i\,\mathfrak{t}')^*$, on associe le vecteur $H_\lambda \in i\,\mathfrak{t}'$ défini par

$$\forall H \in i\mathfrak{t}', \quad \langle H_\lambda, H \rangle = \lambda(H).$$

Pour tous λ, $\mu \in (i\,\mathfrak{t}')^*$, on pose

$$\langle \lambda, \mu \rangle = \langle H_\lambda, H_\mu \rangle.$$

Pour tout $\alpha \in \Delta$, on note $\tilde{\alpha}$ sa restriction à $\mathfrak{a}'_c$. Si $\tilde{\alpha}$ n'est pas identiquement nulle, on dit que $\tilde{\alpha}$ est une racine restreinte de la paire symétrique $(\mathfrak{g}', \mathfrak{k}')$. On note

$$P_+ = \{\alpha \in \Delta^+, \tilde{\alpha} \neq 0\}, \qquad \Sigma^+ = \{\tilde{\alpha}, \alpha \in P_+\}.$$

$\Sigma^+ \subset (i\,\mathfrak{a}')^*$ est l'ensemble des racines restreintes positives de $(\mathfrak{g}', \mathfrak{k}')$.

On désigne par $i\,\mathfrak{a}'^+$ la chambre de Weyl de $i\,\mathfrak{a}'$ associée à Σ^+. $\mathfrak{a}'^+$ est un cône ouvert convexe de $\mathfrak{a}'$ défini par

$$\mathfrak{a}'^+ = \{H \in \mathfrak{a}' : \gamma(iH) > 0, \ \forall \gamma \in \Sigma^+\}.$$

On note

$$\mathfrak{a}^+ = \mathfrak{z}_{\mathfrak{p}} \oplus \mathfrak{a}'^+, \qquad \overline{\mathfrak{a}^+} = \mathfrak{z}_{\mathfrak{p}} \oplus \overline{\mathfrak{a}'^+},$$

où $\overline{\mathfrak{a}'^+}$ désigne la fermeture de $\mathfrak{a}'^+$ dans $\mathfrak{a}'$.

(²) Si V est un espace vectoriel réel de dimension finie, on note $(i\,V)^*$ l'ensemble des formes **R**-linéaires à valeurs réelles sur $i\,V$.

Soit M (resp. M′) le centralisateur (resp. normalisateur) de $\mathfrak{a}$ dans K. On note W le groupe de Weyl M′/M. W agit dans $i\,\mathfrak{a}$ par la représentation adjointe et dans $(i\,\mathfrak{a})^*$ par la représentation coadjointe. La chambre de Weyl fermée $\overline{\mathfrak{a}^+}$ est un domaine fondamental pour l'action de W dans $\mathfrak{a}$: pour toute partie $B \subset \mathfrak{a}$ invariante par W, on note $\tilde{B} = B/W$ la partie de $\overline{\mathfrak{a}^+}$ correspondante.

On munit désormais $\mathfrak{a}$ d'une norme $\| \ \|$ invariante par le groupe de Weyl. On note b la boule unité ouverte correspondante. On munit $(i\,\mathfrak{a})^*$ de la norme duale encore notée $\| \ \|$. Enfin on désigne par Ad la représentation adjointe de G.

1.2. Représentations de classe un. — On désigne par $\hat{G}$ l'ensemble des classes d'équivalence des représentations irréductibles de G. Dans chaque classe on fixe un représentant M : c'est une représentation unitaire dans un espace hilbertien E_M de dimension finie $d(M)$. L'ensemble des représentations ainsi obtenu est encore noté $\hat{G}$.

On dit qu'une représentation $M \in \hat{G}$ est de classe un par rapport au sous-groupe K s'il existe un vecteur non nul $v \in E_M$ invariant sous l'action de K, c'est-à-dire

$$\forall\, k \in K, \qquad M(k)\,v = v.$$

On note $\hat{G}_K$ l'ensemble des éléments de $\hat{G}$ qui sont de classe un par rapport à K.

Soient maintenant $\mathfrak{t} = \mathfrak{z} \oplus \mathfrak{t}'$ la sous-algèbre abélienne maximale de $\mathfrak{g}$ contenant $\mathfrak{t}'$ et T le tore maximal de G correspondant.

On note Γ_G le réseau unité de G :

$$\Gamma_G = \{ H \in \mathfrak{t} : \exp H = 1 \}$$

et Γ_X le réseau unité de la paire (G, K) :

$$\Gamma_X = \{ H \in \mathfrak{a} : \exp H \in K \}.$$

On sait ([22], th. 4.6.12, p. 98) qu'il existe une correspondance bijective entre les éléments de $\hat{G}$ et les formes linéaires $\lambda \in (i\,\mathfrak{t})^*$,

(i) qui sont la différentielle d'un caractère de T :

$$\lambda(i\,\Gamma_G) \subset 2\pi\mathbf{Z},$$

(ii) dont la restriction λ' à $i\,\mathfrak{t}'$ est une forme intégrale dominante :

$$\forall\, \alpha \in \Delta^+, \quad 2\frac{\langle \lambda', \alpha \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle} \in \mathbf{N}.$$

Toute représentation $M \in \hat{G}$ est spécifiée par une forme linéaire $\lambda \in (i\,\mathfrak{t})^*$ satisfaisant à ces conditions : on dit que λ est le plus haut poids de M.

Les théorèmes suivants caractérisent par leurs plus hauts poids les représentations irréductibles de G qui sont de classe un par rapport à K.

THÉORÈME A. — *Si* $M \in \hat{G}_K$, *son plus haut poids* λ *s'annule sur* $i(\mathfrak{t} \cap \mathfrak{k})$, *c'est-à-dire qu'on a* $\lambda \in (i\,\mathfrak{a})^*$.

Pour la preuve *voir* par exemple [18] (lemme 1, p. 65).

THÉORÈME B. — *Il y a correspondance bijective entre les éléments de* $\hat{G}_K$ *et les formes linéaires* $\lambda \in (i\,\mathfrak{a})^*$ *qui satisfont les conditions :*

(i) $$\lambda(i\Gamma_X) \subset 2\pi\mathbf{Z},$$

(ii) $$\forall \gamma \in \Sigma^+, \quad \frac{\langle \lambda', \gamma \rangle}{\langle \gamma, \gamma \rangle} \in \mathbf{N},$$

où λ' *désigne la restriction de* λ *à* $i\,\mathfrak{a}'$.

Dans le cas où G est un groupe analytique compact semi-simple et $K = K_\theta$, ce résultat a d'abord été établi par E. Cartan [3]. Il est démontré dans [9] (p. 73-79) pour G simplement connexe et K connexe (*voir* aussi [24], vol. 1, th. 3.3.1.1, p. 209-211). Pour la preuve dans le cas général, *voir* [21] (th. 2.4, p. 457).

Remarque 1. — On peut montrer [21] que les conditions suivantes sont équivalentes à celles du théorème B :

(i) $\lambda(i\Gamma_X) \subset 2\pi\mathbf{Z}$,
(ii) $\forall w \in W$, $w\lambda \leqq \lambda$.

Ultérieurement cette caractérisation sera utile (prop. 9 et 18).

Dans toute la suite on note $\mathscr{P}$ l'ensemble des formes linéaires sur $i\,\mathfrak{a}$ qui satisfont à ces conditions. Chaque forme linéaire $\lambda \in \mathscr{P}$ spécifie un élément de $\hat{G}_K$ qu'on désigne par M_λ : c'est une représentation unitaire dans un espace hilbertien E_λ de dimension finie d_λ, muni du produit scalaire $(\,,\,)$.

$X = G/K$ est un espace riemannien globalement symétrique compact. On sait alors ([3]; [23], cor. 8.1, p. 24) que pour tout $\lambda \in \mathscr{P}$ le sous-espace de E_λ formé des vecteurs K-invariants est de dimension un. On choisit dans ce sous-espace un vecteur normé qu'on note v^λ.

Alors ([8], p. 426-427) l'opérateur

$$P_\lambda = \int_K M_\lambda(k)\,dk$$

est un projecteur hermitien de E_λ sur $\mathbf{C}\,v^\lambda$.

1.3. ANALYSE HARMONIQUE SUR X. — On note $\pi_1 : g \to \dot{g}$ la projection naturelle de G sur $X = G/K$, dg (resp. dk) la mesure de Haar de masse un sur G (resp. K), et dx l'unique mesure induite sur X invariante par G et de masse un.

On désigne par $L^2(G)$ [resp. $L^2(X)$] l'espace de Hilbert des fonctions de carré intégrable sur G (resp. X) par rapport à la mesure dg (resp. dx) et $C^\infty(G)$ [resp. $C^\infty(X)$] l'espace vectoriel des fonctions indéfiniment différentiables muni de sa topologie habituelle d'espace de Fréchet.

L'application $f \to \tilde{f} = f \circ \pi_1$ est un isomorphisme de $C^\infty(X)$ [resp. $L^2(X)$] sur le sous-espace $C_0^\infty(G)$ [resp. $L_0^2(G)$] formé des éléments de $C^\infty(G)$ [resp. $L^2(G)$] invariants à droite par K.

Si $f \in L^2(G)$ sa transformée de Fourier est définie par

$$\hat{f}(M) = \int_G f(g) M^*(g)\, dg \qquad (M \in \hat{G}).$$

C'est pour tout $M \in \hat{G}$ un opérateur continu dans E_M. On a une formule d'inversion

$$f(g) \simeq \sum_{M \in \hat{G}} d(M) \operatorname{tr}[\hat{f}(M) M(g)] \qquad (g \in G).$$

L'expression du second membre est appelée série de Fourier de f. Si $f \in L^2(G)$ la convergence a lieu en moyenne vers f. Si $f \in C^\infty(G)$ sa série de Fourier converge vers f absolument dans la topologie de $C^\infty(G)$ ([24], vol. 1, th. 4.4.2.1, p. 261).

G opère sur $L^2(X)$ par la représentation régulière à gauche. Il est classique ([3]; [23], th. 8.1, p. 22) que cette action se décompose suivant $\hat{G}_K$. Plus précisément chacune des représentations de classe un pour la paire (G, K) apparaît dans la représentation régulière avec une multiplicité égale à un.

Si $f \in L^2(X)$ on définit sa transformée de Fourier par

$$\hat{f}(M) = \hat{\tilde{f}}(M) \qquad (M \in \hat{G}). \tag{1}$$

Seuls les coefficients des éléments de $\hat{G}_K$ sont non nuls et on obtient facilement à partir de l'invariance à droite par K de $\tilde{f}$:

$$\hat{f}(M_\lambda) = \int_G f(\dot{g}) P_\lambda M_\lambda^*(g)\, dg \qquad (\lambda \in \mathscr{P}).$$

On a la formule d'inversion

$$f(\dot{g}) \simeq \sum_{\lambda \in \mathscr{P}} d_\lambda \operatorname{tr}[\hat{f}(M_\lambda) M_\lambda(g) P_\lambda] \qquad (g \in G),$$

avec les mêmes remarques que ci-dessus concernant la convergence. L'expression du second membre est appelée série de Fourier de f.

Ultérieurement une formulation plus explicite sera utile. Soit $\{ v_j^\lambda, 1 \leqq j \leqq d_\lambda \}$ une base orthonormée de E_λ avec $v_1^\lambda = v^\lambda$. Les éléments matriciels

$$\tilde{\varphi}_j^\lambda(g) = (M_\lambda(g) v_1^\lambda, v_j^\lambda) \qquad (g \in G) \tag{2}$$

sont des fonctions analytiques sur G invariantes à droite par K. On note $\{ \varphi_j^\lambda; \lambda \in \mathscr{P}, 1 \leqq j \leqq d_\lambda \}$ les fonctions sur X correspondantes.

L'élément matriciel

$$\tilde{\varphi}_1^\lambda(g) = (M_\lambda(g) v_1^\lambda, v_1^\lambda) \qquad (g \in G)$$

est appelé fonction sphérique zonale de la représentation M_λ. Clairement $\tilde{\varphi}_1^\lambda$ est bi-invariante par K et on a $\tilde{\varphi}_1^\lambda(1) = 1$.

Il est immédiat que dans cette base la transformée de Fourier $\hat{f}(\mathrm{M}_\lambda)$ $(\lambda \in \mathscr{P})$ d'une fonction $f \in \mathrm{L}^2(\mathrm{X})$ s'identifie à une matrice-ligne $\hat{f}(\lambda) = \{\hat{f}_j(\lambda), 1 \leqq j \leqq d_\lambda\}$, avec

$$\hat{f}_j(\lambda) = (\hat{f}(\mathrm{M}_\lambda) v_j^\lambda, v_1^\lambda) = \int_{\mathrm{X}} f(x) \overline{\varphi_j^\lambda(x)}\, dx. \tag{3}$$

On dit que les scalaires $\{\hat{f}_j(\lambda); \lambda \in \mathscr{P}, 1 \leqq j \leqq d_\lambda\}$ sont les coefficients de Fourier de f. La série de Fourier de f prend la forme

$$f(x) \simeq \sum_{\lambda \in \mathscr{P}} d_\lambda \sum_{j=1}^{d_\lambda} \hat{f}_j(\lambda)\, \varphi_j^\lambda(x) \qquad (x \in \mathrm{X}).$$

On pose désormais pour tout $\lambda \in \mathscr{P}$,

$$\|\hat{f}(\lambda)\|^2 = \sum_{j=1}^{d_\lambda} |\hat{f}_j(\lambda)|^2,$$

$$\|\varphi^\lambda(x)\|^2 = \sum_{j=1}^{d_\lambda} |\varphi_j^\lambda(x)|^2 \qquad (x \in \mathrm{X}).$$

On vérifie facilement que ces définitions ne dépendent pas du choix de la base $\{v_j^\lambda, 1 \leqq j \leqq d_\lambda\}$. On a en effet

$$\begin{aligned} \|\hat{f}(\lambda)\| &= |||\hat{f}(\mathrm{M}_\lambda)|||, \\ \|\varphi^\lambda(\dot{g})\| &= |||\mathrm{M}_\lambda(g)\mathrm{P}_\lambda||| \qquad (g \in \mathrm{G}), \end{aligned} \tag{4}$$

où $|||\mathrm{R}||| = [\mathrm{tr}\, \mathrm{R}^* \mathrm{R}]^{1/2}$ désigne la norme de Hilbert-Schmidt de $\mathrm{R} \in \mathscr{L}(\mathrm{E}_\lambda)$.

Si $f \in \mathrm{L}^2(\mathrm{X})$ est invariante à gauche par K, on dit que f est une fonction sphérique sur X. Sa série de Fourier prend alors la forme plus simple

$$f(x) \simeq \sum_{\lambda \in \mathscr{P}} d_\lambda \hat{f}_1(\lambda)\, \varphi_1^\lambda(x) \qquad (x \in \mathrm{X}).$$

2. Complexification d'un espace symétrique compact

Dans toute la suite de cet article on considère une paire symétrique compacte (G, K) telle que le sous-groupe K soit *connexe* : $\mathrm{K} = \mathrm{K}_\theta^0$. G n'est pas nécessairement semi-simple. Les notations sont celles introduites à la section précédente.

2.1. GROUPES ANALYTIQUES COMPLEXES RÉDUCTIFS. — On désigne par (G_c, γ) [resp. (K_c, γ')] une complexification universelle du groupe analytique compact G (resp K). C'est la donnée ([11], chap. XVII. 5, p. 204) d'un groupe analytique complexe G_c (resp. K_c) et d'un morphisme continu $\gamma : \mathrm{G} \to \mathrm{G}_c$ (resp. $\gamma' : \mathrm{K} \to \mathrm{K}_c$), tels que tout morphisme continu de G (resp. K) dans un groupe analytique complexe H se factorise uniquement par γ (resp. γ') en un morphisme holomorphe de G_c (resp. K_c) dans H.

On sait ([11], th. 5.1 et 5.3, p. 205-208) que les morphismes γ et γ' sont injectifs, que $\gamma(\mathrm{G})$ [resp. $\gamma'(\mathrm{K})$] est un sous-groupe compact maximal de G_c (resp. K_c). L'algèbre de Lie de G_c (resp. K_c) est la complexification $\mathfrak{g}_c = \mathfrak{g} \oplus i\,\mathfrak{g}$ (resp. $\mathfrak{k}_c = \mathfrak{k} \oplus i\,\mathfrak{k}$) de celle de

G (resp. K). Enfin G_c et K_c sont des groupes analytiques complexes réductifs : chacun admet une représentation holomorphe fidèle de dimension finie et toutes leurs représentations holomorphes de dimension finie sont semi-simples.

Par la propriété universelle de K_c, il existe un morphisme holomorphe unique σ de K_c dans G_c tel que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, hook] \arrow[d, hook, "\gamma'"'] & G \arrow[d, hook, "\gamma"] \\ K_c \arrow[r, dashed, "\sigma"'] & G_c \end{tikzcd}$$

$\sigma(K_c)$ est le groupe analytique complexe immergé dans G_c d'algèbre de Lie $d\sigma(\mathfrak{k}_c)$. La proposition suivante montre que nous pouvons identifier K_c et $\sigma(K_c)$.

PROPOSITION 1. — *Le morphisme* σ *est injectif.*

Preuve. — Soit ρ une représentation holomorphe fidèle de G_c dans $GL(n, \mathbf{C})$ pour un certain n. G_c est isomorphe au groupe analytique complexe $\rho(G_c)$ immergé dans $GL(n, \mathbf{C})$. On peut alors considérer σ comme une représentation holomorphe de K_c. σ est fidèle sur $\gamma'(K)$ puisque le morphisme γ est injectif. D'autre part l'algèbre de Lie de $\gamma'(K)$ engendre sur $\mathbf{C}$ celle de K_c. Un résultat classique ([11], th. 5.2, p. 207) indique alors que σ est fidèle sur K_c. ■

PROPOSITION 2. — $\sigma(K_c)$ *est un sous-groupe analytique complexe de* G_c.

Preuve. — C'est une conséquence immédiate du résultat classique suivant (*voir* par exemple [17], appendice, p. 217) : si on identifie G_c [donc $\sigma(K_c)$] à un groupe analytique complexe immergé dans $GL(n, \mathbf{C})$, G_c et $\sigma(K_c)$ sont fermés dans $GL(n, \mathbf{C})$. $\sigma(K_c)$ est ainsi un groupe analytique complexe immergé et fermé dans G_c, d'où le résultat. ■

On identifie désormais K_c au sous-groupe analytique complexe $\sigma(K_c)$ de G_c et G (resp. K) au sous-groupe analytique compact $\gamma(G)$ [resp. $\gamma(K)$] de G_c.

2.2. UNE COMPLEXIFICATION DE STEIN. — Dans toute la suite on munit l'espace homogène $X = G/K$ de sa structure habituelle de variété analytique réelle (3). On note $\pi_1 : G \to X$ la projection naturelle.

Il résulte de la proposition 2 qu'on peut munir l'espace homogène $X_c = G_c/K_c$ d'une unique structure de variété analytique complexe telle que (G_c, K_c, X_c, π_2) soit une fibration principale holomorphe (π_2 désigne la projection canonique de G_c dans X_c).

Le résultat suivant a été établi dans [16] (th. 5, p. 151; *voir* aussi [17], p. 206).

THÉORÈME C. — *Soit* (P, G, B, π) *une fibration principale holomorphe dont l'espace* P *est une variété de Stein. Si le groupe structural* G *est un groupe analytique complexe réductif, la base* B *est aussi une variété de Stein.*

---

(3) Si X possède une structure complexe, celle-ci n'interviendra pas.

On sait ([16], th. 1, p. 139) que le groupe analytique complexe réductif G_c est une variété de Stein. Le théorème C implique alors immédiatement la

PROPOSITION 3. — *L'espace homogène* $X_c = G_c/K_c$ *est une variété de Stein.*
En particulier il apparaît ainsi que X_c est nécessairement non compact.

PROPOSITION 4. — X_c *est une complexification de* X.

Preuve. — On note X′ l'orbite de $x_0 = \pi_2(1)$ dans X_c par l'action de G. De la connexité de K et K_c et du fait que $\mathfrak{g} \cap \mathfrak{k}_c = \mathfrak{k}$, il résulte que $G \cap K_c = K$. L'application de X dans X_c définie par $\xi : g\,K \to g.x_0$ établit alors une correspondance bijective entre X et X′.

Par un résultat classique ([8], prop. 4.4.*a*, p. 115) ξ est une immersion. Mais on sait que toute immersion injective d'une variété compacte est un plongement : X′ est une sous-variété de X_c et ξ un difféomorphisme analytique de X sur X′.

On considère alors le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, hook] \arrow[d, "\pi_1"'] & G_c \arrow[d, "\pi_2"] \\ X \arrow[r, hook, "\xi"'] & X_c \end{tikzcd}$$

Soit $(e_1, \ldots, e_s)$ une base de $\mathfrak{p}$. Il existe un voisinage $\mathcal{U}$ de 0 dans $\mathbf{C}^s$ et un voisinage U de x_0 dans X_c qui sont homéomorphes. L'application de U dans $\mathcal{U}$ donnée par

$$\pi_2[\exp(z_1 e_1 + \ldots + z_s e_s)] \to (z_1, \ldots, z_s)$$

définit une carte locale de X_c centrée en x_0.

De même il existe un voisinage $\mathcal{U}'$ de 0 dans $\mathbf{R}^s$ et un voisinage U′ de x_0 dans X′ homéomorphes par l'application

$$\xi \circ \pi_1[\exp(x_1 e_1 + \ldots + x_s e_s)] \to (x_1, \ldots, x_s).$$

On en déduit qu'il existe un voisinage $V \subset U$ de x_0 dans X_c tel que $V \cap X'$ soit exactement l'ensemble des points où s'annulent simultanément les fonctions $\{\operatorname{Im} z_j,\ 1 \leqq j \leqq s\}$, ce qui achève la preuve. ■

On identifie désormais X à la sous-variété $X' = G.x_0$ de X_c au moyen du difféomorphisme ξ.

2.3. FONCTIONS HOLOMORPHES INVARIANTES. — On note $\mathcal{O}$ (resp. $\tilde{\mathcal{O}}$) le faisceau des fonctions holomorphes sur X_c (resp. G_c). Soit $\tilde{\mathcal{D}}$ un domaine de G_c invariant à droite par K_c : $\tilde{\mathcal{D}}\,K_c = \tilde{\mathcal{D}}$, et $\mathcal{D} = \pi_2(\tilde{\mathcal{D}})$ le domaine de X_c correspondant. L'application $f \to \tilde{f} = f \circ \pi_2$ est un isomorphisme de $\mathcal{O}(\mathcal{D})$ sur le sous-espace de $\tilde{\mathcal{O}}(\tilde{\mathcal{D}})$ formé des fonctions invariantes à droite par K_c.

PROPOSITION 5. — *Soient* $\tilde{\mathcal{D}}$ *un domaine de* G_c *invariant à droite par* K_c *et* $f \in \tilde{\mathcal{O}}(\tilde{\mathcal{D}})$. *Il est équivalent de dire :*

(i) *f est invariante à droite par* K,

(ii) *f est invariante à droite par* K_c.

Preuve. — Soit g un élément arbitraire de $\tilde{\mathscr{D}}$. L'orbite de g par l'action à droite de K_c est contenue dans $\tilde{\mathscr{D}}$ et on définit une fonction $f^\natural$ sur K_c en posant

$$f^\natural(k) = f(gk) \qquad (k \in K_c).$$

$f^\natural$ est holomorphe dans K_c comme composée de f et de la translation à gauche par g. $f^\natural$ est donc constante sur K_c si et seulement si elle est constante sur K : mais c'est respectivement l'invariance de f par l'action à droite de K_c ou de K. ■

On a évidemment un résultat analogue pour des fonctions et des domaines invariants à gauche (resp. bi-invariants) par K_c.

3. Un théorème de décomposition

Par la propriété universelle de G_c, l'automorphisme involutif θ de G se prolonge de manière unique en un automorphisme involutif holomorphe de G_c, qu'on note encore $\tilde{\theta}$ et dont la différentielle à l'identité est l'extension linéaire complexe de θ. Clairement K_c est la composante connexe de l'identité dans le sous-groupe de G_c formé des points fixes de $\tilde{\theta}$. Il en résulte que l'espace homogène $X_c = G_c/K_c$ est un espace (non riemannien) symétrique.

G est un sous-groupe compact maximal de G_c invariant par $\tilde{\theta}$. On a alors le théorème suivant qui est la transcription dans la situation envisagée ici d'un résultat général ([4]) sur la fibration des espaces symétriques ([1], prop. 60.1, p. 173; [15], th. 3.5, p. 172).

THÉORÈME D. — *L'application de* $G \times \mathfrak{p}$ *dans* X_c *définie par* $\delta : (g, H) \to \pi_2(g.\exp iH)$ *munit l'espace symétrique* X_c *d'une structure d'espace fibré associé à la fibration principale* (G, K, X, π_1) *de fibre type* $\mathfrak{p}$. *Ici* K *opère à gauche sur* $G \times \mathfrak{p}$ *par la loi*

(5) $$k.(g, H) = (gk^{-1}, \operatorname{Ad} k.H) \qquad (k \in K,\ g \in G,\ H \in \mathfrak{p}).$$

Pour toute la suite ce résultat et son corollaire suivant sont fondamentaux.

THÉORÈME 1. — *On a la décomposition suivante de* X_c :

$$X_c = G.\exp i\overline{\mathfrak{a}^+}.x_0.$$

Tout élément de X_c *peut s'écrire*

(6) $$x = g.\exp i A(x).x_0$$

où $A(x) \in \overline{\mathfrak{a}^+}$ *est unique, mais non* $g \in G$.

Preuve. — C'est un résultat classique ([8], lemme 6.3, p. 211; th. 2.12, p. 248) que $\mathfrak{p} = \operatorname{Ad} k.\overline{\mathfrak{a}^+}$. Tout élément de $\mathfrak{p}$ peut s'écrire

(7) $$H = \operatorname{Ad} k.A,$$

où $A \in \overline{\mathfrak{a}^+}$ est unique, mais non $k \in K$.

([4]) On en trouvera dans [5] une autre illustration.

Le théorème D indique (*voir* par exemple [2], § 6.5.1, p. 66) que $(G \times \mathfrak{p}, K, X_c, \delta)$ est une fibration principale pour l'action de K sur $G \times \mathfrak{p}$ donnée par (5). Tout élément de X_c peut donc s'écrire :

$$x = \delta(g, H) = \pi_2(g.\exp i H) = g.\exp i H.x_0,$$

avec $g \in G$, $H \in \mathfrak{p}$. De plus on a

$$\delta(g, H) = \delta(g', H'),$$

si et seulement si il existe $k \in K$ tel que

$$g = g' k^{-1}, \qquad H = \mathrm{Ad}\, k.H'.$$

Ceci combiné avec (7) implique immédiatement le théorème. ∎

Remarque 2. — (6) est une décomposition de Cartan généralisée. On verra à la section 9 que lorsque X s'identifie à un groupe analytique compact U, X_c s'identifie à sa complexification universelle U_c et (6) à la décomposition de Cartan de U_c.

4. Domaines G-invariants

G_c opère à gauche sur X_c. Soit $\mathscr{D}$ un domaine (i. e. un ouvert connexe) de X_c invariant par l'action de G : $G.\mathscr{D} = \mathscr{D}$.

PROPOSITION 6. — *$\mathscr{D}$ est un espace fibré associé à la fibration principale* (G, K, X, π_1) *de fibre type* D, *où* D *est un domaine de* $\mathfrak{p}$ *invariant par* Ad K.

Preuve. — En vertu du théorème D il suffit d'établir l'existence d'un ouvert D de $\mathfrak{p}$ tel que $\delta^{-1}(\mathscr{D}) = G \times D$. Nécessairement D sera alors invariant par Ad K. Par une propriété classique des fibrations principales (si la base et le groupe structural sont connexes, l'espace l'est), D sera également connexe.

On note $P = \delta(K \times \mathfrak{p})$: c'est une sous-variété analytique fermée de X_c. L'application de $\mathfrak{p}$ dans X_c définie par $\eta : H \to \exp i H. x_0$ est un difféomorphisme analytique de $\mathfrak{p}$ sur P ([2], § 6.5.2, p. 66). Soit $D = \eta^{-1}(P \cap \mathscr{D})$: c'est un ouvert de $\mathfrak{p}$. L'invariance de $\mathscr{D}$ par l'action de G implique immédiatement que $\delta^{-1}(\mathscr{D}) = G \times D$. ∎

Soient $\mathscr{D}$ un domaine G-invariant de X_c, D le domaine de $\mathfrak{p}$ invariant par Ad K correspondant. En vertu du résultat précédent, $(G \times D, K, \mathscr{D}, \delta)$ est une fibration principale pour l'action de K sur $G \times D$ donnée par (5). Tout élément de $\mathscr{D}$ peut donc s'écrire

$$x = g.\exp i H.x_0,$$

avec $g \in G$, $H \in D$. On dit que

$$B = D \cap \mathfrak{a}$$

est la *base* du domaine $\mathscr{D}$. C'est un ouvert de $\mathfrak{a}$ invariant par le groupe de Weyl mais non nécessairement connexe.

On note $\tilde{B} = B/W$ la partie de $\overline{\mathfrak{a}^+}$ correspondante. Il résulte de la décomposition (6) que $\tilde{B}$ est exactement l'ensemble $\{ A(x), x \in \mathscr{D} \}$ des éléments de $\overline{\mathfrak{a}^+}$ définis par

$$x = g . \exp i A(x) . x_0 \qquad (x \in \mathscr{D}).$$

$\tilde{B}$ est une partie *connexe* relativement ouverte de $\overline{\mathfrak{a}^+}$. En effet soit M le centralisateur de $\mathfrak{a}$ dans K. On sait ([8], p. 381) que l'application de $K/M \times \mathfrak{a}^+$ dans $\mathfrak{p}$ définie par $(k\,M, H) \to \mathrm{Ad}\, k . H$ est un difféomorphisme de $K/M \times \mathfrak{a}^+$ dans $\mathfrak{p}$ moins un ensemble un ensemble de dimension topologique $\leqq \dim \mathfrak{p} - 2$. La connexité de $\tilde{B} \cap \mathfrak{a}^+$ et donc celle de $\tilde{B}$ en résultent.

On note désormais $\mathscr{D}_B$ le domaine G-invariant de X_c de base B :

$$\mathscr{D}_B = G . \exp i B . x_0.$$

On considère la famille $\{ \mathscr{D}_\varepsilon, \varepsilon > 0 \}$ des domaines G-invariants de X_c de base $\varepsilon\, b$, où b désigne la boule unité ouverte de $\mathfrak{a}$. Ce sont des voisinages de X dans X_c.

PROPOSITION 7. — *Les voisinages* G-*invariants de* X *dans* X_c *forment un système fondamental de voisinages de* X *dans* X_c.

Preuve. — Soit V un voisinage de X dans X_c. Il est clair que $\bigcap_{g \in G} g . V$ est un sous-ensemble de V invariant par l'action de G. On va montrer que c'est un voisinage de X dans X_c. On note $\zeta : G \times X_c \to X_c$ la loi d'opération (à gauche) de G dans X_c. $\zeta^{-1}(V)$ est un voisinage de $\{ 1 \} \times X$ dans $G \times X_c$.

La compacité de X implique que $\zeta^{-1}(V)$ contient un ouvert élémentaire $U \times W$, avec $1 \in U$ et $X \subset W$. En effet si $\zeta^{-1}(V)$ contient la réunion de la famille d'ouverts élémentaires $\{ U_\alpha \times W_\alpha, \alpha \in A \}$, les ouverts $\{ W_\alpha, \alpha \in A \}$ forment un recouvrement de X dont on peut extraire un sous-recouvrement fini $\{ W_{\alpha_i}, i \in I \}$. Alors il suffit de prendre

$$U = \bigcap_{i \in I} U_{\alpha_i} \qquad \text{et} \qquad W = \bigcup_{i \in I} W_{\alpha_i}.$$

On en déduit immédiatement que $\bigcap_{g \in U^{-1}} g . V$ est un voisinage de X dans X_c contenant W.

Considérons maintenant le recouvrement de G par la famille d'ouverts $\{ g\, U^{-1}, g \in G \}$. Comme G est compact, on peut en extraire un sous-recouvrement fini $\{ g_j\, U^{-1}, j \in J \}$. On a donc

$$\bigcap_{g \in G} g . V = \bigcap_{j \in J} (g_j \bigcap_{g \in U^{-1}} g . V)$$

qui est un voisinage de X dans X_c comme intersection finie de tels voisinages. ∎

COROLLAIRE. — *La famille* $\{ \mathscr{D}_\varepsilon, \varepsilon > 0 \}$ *forme un système fondamental de voisinages ouverts de* X *dans* X_c.

5. Séries de Laurent des fonctions holomorphes

On se propose de donner dans cette section une caractérisation des fonctions qui sont holomorphes dans un domaine G-invariant de X_c. Les résultats auxiliaires suivants seront utiles.

5.1. Fonctions d'appui. — Soit B une partie bornée de $\mathfrak{a}$. On appelle fonction d'appui de B et on note h_B l'application de $(i\,\mathfrak{a})^*$ dans $\mathbf{R}$ définie par $h_B : \mu \to \sup_{H \in B} \mu(i\,H)$. Elle est continue et homogène de degré un :

$$h_B(t\,\mu) = t\,h_B(\mu) \qquad (t > 0).$$

On appelle polaire de B le fermé convexe de $(i\,\mathfrak{a})^*$ défini par

$$\hat{B} = \{\mu \in (i\,\mathfrak{a})^* : h_B(\mu) \leqq 1\}.$$

Ultérieurement les relations suivantes seront utiles. Si B est une partie bornée de $\mathfrak{a}$ et B^c son enveloppe convexe, on a

$$h_B = h_{B^c}. \tag{8}$$

Si A et B sont deux parties bornées de $\mathfrak{a}$, on a

$$h_{A+B} = h_A + h_B. \tag{9}$$

Enfin on a pour tout $\varepsilon > 0$,

$$h_{\varepsilon b}(\mu) = \varepsilon \,||\, \mu \,||\tag{10}$$

par définition de la norme duale.

Proposition 9. — *Soit* B *une partie bornée de* $\mathfrak{a}$ *invariante par le groupe de Weyl,* $\tilde{B} = B/W$ *la partie de* $\overline{\mathfrak{a}^+}$ *correspondante. On a la relation suivante entre les fonctions d'appui de* B *et de* $\tilde{B}$:

$$\forall \lambda \in \mathscr{P}, \quad h_B(\lambda) = h_{\tilde{B}}(\lambda).$$

Preuve. — Il suffit d'établir que

$$\forall \lambda \in \mathscr{P}, \quad h_B(\lambda) \leqq h_{\tilde{B}}(\lambda)$$

puisque $\tilde{B} \subset B$ implique évidemment pour tout $\mu \in (i\,\mathfrak{a})^*$,

$$h_B(\mu) \geqq h_{\tilde{B}}(\mu).$$

Mais on a vu (remarque 1) que pour tout $\lambda \in \mathscr{P}$, on a

$$\forall w \in W, \quad w\lambda \leqq \lambda.$$

On en déduit que pour tout $H \in \overline{\mathfrak{a}^+}$, on a

$$\forall w \in W, \lambda \in \mathscr{P}, \qquad \lambda(iw\,H) = w^{-1}\lambda(i\,H) \leqq \lambda(i\,H).$$

D'où le résultat. ■

5.2. Séries de Laurent. — Par la propriété universelle du groupe G_c, chaque représentation M_λ ($\lambda \in \mathscr{P}$) du groupe G dans E_λ (et son adjointe M_λ^*) se prolonge de manière unique en une représentation holomorphe (encore notée M_λ ou M_λ^*) de G_c dans E_λ. On remarque que dans cette extension les éléments de la forme ($\exp i\,X$, $X \in \mathfrak{g}$) sont représentés par des opérateurs hermitiens définis positifs.

Il en résulte que les éléments matriciels

$$\tilde{\varphi}_j^\lambda(g) = (M_\lambda(g) v_1^\lambda, v_j^\lambda),$$
$$\tilde{\psi}_j^\lambda(g) = (M_\lambda^*(g) v_j^\lambda, v_1^\lambda)$$

($g \in G_c$; $1 \leqq j \leqq d_\lambda$) sont des fonctions holomorphes dans G_c. Leur invariance à droite par K qui est immédiate implique en vertu de la proposition 5 leur invariance à droite par K_c. On note φ_j^λ et ψ_j^λ ($1 \leqq j \leqq d_\lambda$) les fonctions sur X_c correspondantes : elles sont holomorphes dans X_c.

PROPOSITION 10. — *Soit f une fonction holomorphe dans un domaine $\mathscr{D}$ de X_c invariant par l'action de* G. *Le scalaire*

$$\hat{f}_j(\lambda) = \int_G f(g.x)\psi_j^\lambda(g.x)\,dg \qquad (\lambda \in \mathscr{P};\ 1 \leqq j \leqq d_\lambda) \tag{11}$$

ne dépend pas du choix de $x \in \mathscr{D}$.

Preuve. — Il est clair que $\hat{f}_j(\lambda)$ est une fonction holomorphe de x dans l'ouvert connexe $\mathscr{D}$. Pour conclure il suffit donc de montrer qu'elle est constante sur une orbite $G.y$, avec $y \in \mathscr{D}$ arbitraire (5). Mais c'est une conséquence immédiate de l'invariance par translation de la mesure dg. ■

DÉFINITION. — On dit que les scalaires $\{\hat{f}_j(\lambda);\ \lambda \in \mathscr{P},\ 1 \leqq j \leqq d_\lambda\}$ sont les coefficients de Laurent de la fonction holomorphe f. On appelle série de Laurent de f la série

$$\sum_{\lambda \in \mathscr{P}} d_\lambda \sum_{j=1}^{d_\lambda} \hat{f}_j(\lambda)\varphi_j^\lambda(x) \qquad (x \in \mathscr{D}).$$

Remarque 3. — Si $\mathscr{D}$ contient X dans son adhérence et si f admet sur X une restriction continue f_0, les coefficients de Laurent de f sont les coefficients de Fourier (3) de f_0.

Soient $\mathscr{D}$ un domaine G-invariant de X_c et $f \in \mathscr{O}(\mathscr{D})$. Pour tout $x \in \mathscr{D}$ on note f_x la fonction C^∞ sur G obtenue par restriction de f à l'orbite $G.x$. On note $\{\hat{f}_x(M),\ M \in \hat{G}\}$ sa transformée de Fourier, définie par

$$\hat{f}_x(M) = \int_G f(g.x)M^*(g)\,dg \qquad (M \in \hat{G}).$$

Le résultat suivant va clarifier le rapport entre les coefficients de Fourier de f_x ($x \in \mathscr{D}$) et les coefficients de Laurent de f.

THÉORÈME 2. — *Soient $\mathscr{D}$ un domaine* G-*invariant de* X_c, *f une fonction holomorphe dans $\mathscr{D}$, $\{\hat{f}_j(\lambda);\ \lambda \in \mathscr{P},\ 1 \leqq j \leqq d_\lambda\}$ la famille de ses coefficients de Laurent, et $\{\hat{f}_x(M),\ M \in \hat{G}\}$ les opérateurs définis précédemment.*

(5) En effet on a certainement : $\dim_{\mathbf{R}} G.y \geqq \dim_{\mathbf{R}} G.x_0 = \dim_{\mathbf{C}} X_c$.

On a pour tout $x \in \mathscr{D}$,

(12) $$\hat{f}_x(\mathrm{M}) = 0 \quad \text{si} \quad \mathrm{M} \notin \hat{\mathrm{G}}_{\mathrm{K}},$$

et si $\mathrm{M} \in \hat{\mathrm{G}}_{\mathrm{K}}$,

(13) $$(\hat{f}_x(\mathrm{M}_\lambda) v_j^\lambda, v_k^\lambda) = \hat{f}_j(\lambda) \varphi_k^\lambda(x) \qquad (\lambda \in \mathscr{P};\ 1 \leqq j, k \leqq d_\lambda).$$

Preuve. — La fonction $\tilde{f} = f \circ \pi_2$ est holomorphe et invariante à droite par K_c dans l'ouvert connexe $\tilde{\mathscr{D}} = \pi_2^{-1}(\mathscr{D})$ de G_c, qui est G-invariant à gauche et K_c-invariant à droite.

L'opérateur continu

$$\mathrm{A}(\mathrm{M}) = \int_{\mathrm{G}} \tilde{f}(gh) \mathrm{M}^*(gh)\, dg \qquad (\mathrm{M} \in \hat{\mathrm{G}},\ h \in \tilde{\mathscr{D}})$$

est indépendant du choix de h. En effet A (M) est une fonction holomorphe de $h \in \tilde{\mathscr{D}}$, constante sur chaque orbite G h_0 ($h_0 \in \tilde{\mathscr{D}}$ arbitraire), donc constante dans $\tilde{\mathscr{D}}$.

Par la K_c-invariance à droite de $\tilde{\mathscr{D}}$, on a donc pour tout $k \in \mathrm{K}$,

$$\mathrm{A}(\mathrm{M}) = \int_{\mathrm{G}} \tilde{f}(ghk) \mathrm{M}^*(ghk)\, dg \qquad (\mathrm{M} \in \hat{\mathrm{G}},\ h \in \tilde{\mathscr{D}})$$

et par la K_c-invariance à droite de $\tilde{f}$,

$$\mathrm{A}(\mathrm{M}) = \int_{\mathrm{G}} \tilde{f}(gh) \mathrm{M}^*(ghk)\, dg.$$

Ou encore pour tout $k \in \mathrm{K}$,

$$\int_{\mathrm{G}} \tilde{f}(gh) \mathrm{M}^*(g)\, dg = \mathrm{M}(h) \mathrm{M}(k) \mathrm{A}(\mathrm{M}) \qquad (\mathrm{M} \in \hat{\mathrm{G}},\ h \in \tilde{\mathscr{D}}).$$

On peut intégrer cette relation sur le groupe K. On obtient pour tout $\mathrm{M} \notin \hat{\mathrm{G}}_{\mathrm{K}}$,

$$\int_{\mathrm{G}} \tilde{f}(gh) \mathrm{M}^*(g)\, dg = 0 \qquad (h \in \tilde{\mathscr{D}})$$

et pour tout $\mathrm{M} \in \hat{\mathrm{G}}_{\mathrm{K}}$,

$$\int_{\mathrm{G}} \tilde{f}(gh) \mathrm{M}_\lambda^*(g)\, dg = \mathrm{M}_\lambda(h) \mathrm{P}_\lambda \mathrm{A}(\mathrm{M}_\lambda) \qquad (\lambda \in \mathscr{P},\ h \in \tilde{\mathscr{D}}).$$

La première relation n'est autre que (12). De la seconde on obtient pour tout $h \in \tilde{\mathscr{D}}$,

$$\int_{\mathrm{G}} \tilde{f}(gh) (\mathrm{M}_\lambda^*(g) v_j^\lambda, v_k^\lambda)\, dg = (\mathrm{M}_\lambda(h) \mathrm{P}_\lambda \mathrm{A}(\mathrm{M}_\lambda) v_j^\lambda, v_k^\lambda) = (\mathrm{A}(\mathrm{M}_\lambda) v_j^\lambda, \mathrm{P}_\lambda [\mathrm{M}_\lambda(h)]^* v_k^\lambda)$$
$$(\lambda \in \mathscr{P};\ 1 \leqq j, k \leqq d_\lambda),$$

où on a utilisé l'hermiticité de P_λ.

Maintenant on a le résultat élémentaire

$$\forall \lambda \in \mathscr{P},\ h \in G_c, \qquad P_\lambda [M_\lambda(h)]^* v_k^\lambda = \overline{\tilde{\varphi}_k^\lambda(h)}\, v_1^\lambda \qquad (1 \leqq k \leqq d_\lambda)$$

obtenu immédiatement à partir de (2) et de la décomposition

$$[M_\lambda(h)]^* v_k^\lambda = \sum_{l=1}^{d_\lambda} ([M_\lambda(h)]^* v_k^\lambda, v_l^\lambda)\, v_l^\lambda.$$

Il en résulte que l'on a pour tout $h \in \tilde{\mathscr{D}}$,

$$\int_G \tilde{f}(gh)(M_\lambda^*(g) v_j^\lambda, v_k^\lambda)\, dg = \tilde{\varphi}_k^\lambda(h)(A(M_\lambda) v_j^\lambda, v_1^\lambda).$$

Ou encore pour tout $x \in \mathscr{D}$,

$$\int_G f(g.x)(M_\lambda^*(g) v_j^\lambda, v_k^\lambda)\, dg = \varphi_k^\lambda(x)(A(M_\lambda) v_j^\lambda, v_1^\lambda) \qquad (\lambda \in \mathscr{P};\ 1 \leqq j, k \leqq d_\lambda).$$

Il suffit alors de remarquer que

$$\tilde{f}_j(\lambda) = (A(M_\lambda) v_j^\lambda, v_1^\lambda)$$

pour conclure. ■

Remarque 4. — Ce résultat peut être considéré comme une généralisation de la propriété classique suivante. Si une fonction f est holomorphe dans une couronne de Laurent $R_1 < |z| < R_2$ du plan complexe épointé et si l'on désigne par $\{c_n, n \in \mathbf{Z}\}$ la famille de ses coefficients de Laurent, on a pour tout $r \in]R_1, R_2[$,

$$\int_0^{2\pi} f(re^{i\theta})\, e^{-in\theta}\, d\theta = c_n r^n.$$

En voici un premier corollaire.

PROPOSITION 11. — *Soient $\mathscr{D}$ un domaine* G-*invariant de* X_c, *f une fonction holomorphe dans $\mathscr{D}$. Si la série de Laurent de f converge normalement sur tout compact de $\mathscr{D}$, elle converge vers f.*

Preuve. — La somme de la série de Laurent de f :

$$\sum_{\lambda \in \mathscr{P}} d_\lambda \sum_{j=1}^{d_\lambda} \hat{f}_j(\lambda)\, \varphi_j^\lambda(x) \qquad (x \in \mathscr{D})$$

est une fonction f' holomorphe dans $\mathscr{D}$. Il suffit donc ([5]) de montrer que $f = f'$ sur une orbite $G.y$ ($y \in \mathscr{D}$ arbitraire).

Compte tenu de l'identité

$$\varphi_j^\lambda(g.y) = \sum_{k=1}^{d_\lambda} (M_\lambda(g) v_k^\lambda, v_j^\lambda)\, \varphi_k^\lambda(y) \qquad (\lambda \in \mathscr{P},\ 1 \leqq j \leqq d_\lambda)$$

qui résulte facilement de la définition (2), la restriction f'_y de f' à $G.y$ peut s'écrire

$$f'_y(g) = \sum_{\lambda \in \mathscr{P}} d_\lambda \sum_{j,k=1}^{d_\lambda} [\hat{f}_j(\lambda)\varphi_k^\lambda(y)](M_\lambda(g)v_k^\lambda, v_j^\lambda) \qquad (g \in G).$$

Ou encore grâce au théorème 2,

$$f'_y(g) = \sum_{M \in \hat{G}} d(M)\,\mathrm{tr}[\hat{f}_y(M)M(g)] \qquad (g \in G).$$

Considérée comme série de Fourier sur G de la fonction $C^\infty f_y$, la série du membre de droite converge absolument uniformément vers f_y. On a donc $f'_y = f_y$. ■

Soient $f \in \mathcal{O}(\mathscr{D})$ et $\{\hat{f}_j(\lambda); \lambda \in \mathscr{P}, 1 \leqq j \leqq d_\lambda\}$ la famille de ses coefficients de Laurent. On note désormais

$$\|\hat{f}(\lambda)\|^2 = \sum_{j=1}^{d_\lambda} |\hat{f}_j(\lambda)|^2 \qquad (\lambda \in \mathscr{P}).$$

C'est pour tout $\lambda \in \mathscr{P}$ une quantité indépendante du choix de la base $\{v_j^\lambda, 1 \leqq j \leqq d_\lambda\}$ de E_λ.

5.3. Inégalités.

Proposition 12. — *Avec la notation* (6) :

$$x = g.\exp i\,A(x).x_0 \qquad (g \in G,\ A(x) \in \overline{\mathfrak{a}^+}),$$

on a pour tout $\lambda \in \mathscr{P}$ *et tout* $x \in X_c$,

$$\|\varphi^\lambda(x)\| = \|\varphi^\lambda(\exp i\,A(x).x_0)\|, \tag{14}$$

$$\|\varphi^\lambda(x)\| \leqq e^{\lambda(iA(x))}. \tag{15}$$

Preuve. — A partir de (6) et de la relation (4), la relation suivante est immédiate :

$$\|\varphi^\lambda(x)\| = |||M_\lambda(g.\exp i\,A(x))P_\lambda||| \qquad (\lambda \in \mathscr{P},\ x \in X_c),$$

où $|||R||| = [\mathrm{tr}\,R^* R]^{1/2}$ désigne la norme de Hilbert-Schmidt de $R \in \mathscr{L}(E_\lambda)$. L'égalité (14) résulte alors de l'unitarité des opérateurs $\{M_\lambda(g), g \in G\}$.

Désignons par $\{\tilde{\omega}_j, 1 \leqq j \leqq d_\lambda\}$ la famille des poids (avec multiplicité) de la représentation M_λ. Pour tout $\tilde{\omega}_j \in (i\,\mathfrak{t})^*$, on note $\omega_j \in (i\,\mathfrak{a})^*$ la forme linéaire obtenue par restriction à $i\,\mathfrak{a}$.

On sait alors que λ est le plus haut des éléments de la famille $\{\omega_j, 1 \leqq j \leqq d_\lambda\}$ dans l'ordre induit par $i\,\overline{\mathfrak{a}^+}$. C'est-à-dire,

$$\forall H \in \overline{\mathfrak{a}^+}, \quad \omega_j(iH) \leqq \lambda(iH) \qquad (1 \leqq j \leqq d_\lambda). \tag{16}$$

Dans une base convenable $\{e_j^\lambda, 1 \leqq j \leqq d_\lambda\}$ de E_λ, l'opérateur $M_\lambda[\exp i\,A(x)]$ $(x \in X_c)$ est représenté par la matrice diagonale hermitienne définie positive

$$\{e^{\omega_j(iA(x))}, 1 \leqq j \leqq d_\lambda\}.$$

Il en résulte que pour tout $x \in X_c$ on a

$$\begin{aligned}\|\varphi^\lambda(x)\|^2 &= \operatorname{tr}[P_\lambda[M_\lambda(\exp iA(x))]^*[M_\lambda(\exp iA(x))]P_\lambda] \\ &= \operatorname{tr}[P_\lambda M_\lambda(\exp 2iA(x))] \\ &= \sum_{j=1}^{d_\lambda} e^{2\omega_j(iA(x))}(P_\lambda e_j^\lambda, e_j^\lambda).\end{aligned}$$

Finalement (16) implique

$$\|\varphi^\lambda(x)\|^2 \leqq e^{2\lambda(iA(x))}\operatorname{tr} P_\lambda = e^{2\lambda(iA(x))}. \quad \blacksquare$$

Remarque 5. — On observera qu'en vertu de (15), on a pour tout $x \in X$,

$$\|\varphi^\lambda(x)\| \leqq 1. \tag{17}$$

PROPOSITION 13. — *Pour tout $\lambda \in \mathscr{P}$ il existe un nombre réel $a(\lambda) \in]0, 1[$ tel que la fonction sphérique zonale*

$$\varphi_1^\lambda(\exp iH.x_0) = (M_\lambda(\exp iH)v_1^\lambda, v_1^\lambda) \qquad (H \in \mathfrak{a})$$

satisfasse pour tout $H \in \overline{\mathfrak{a}^+}$,

$$a(\lambda)e^{\lambda(iH)} \leqq \varphi_1^\lambda(\exp iH.x_0) \leqq e^{\lambda(iH)}.$$

Preuve. — On conserve les notations précédentes. $\{\omega_j, 1 \leqq j \leqq d_\lambda\}$ désigne la famille des restrictions à $i\mathfrak{a}$ des poids de la représentation M_λ. $\{e_j^\lambda, 1 \leqq j \leqq d_\lambda\}$ est une base orthonormée de E_λ telle que pour tout $H \in \mathfrak{a}$,

$$M_\lambda(H)e_j^\lambda = \omega_j(H)e_j^\lambda \qquad (1 \leqq j \leqq d_\lambda).$$

e_1^λ est un vecteur normé dans l'espace (à une dimension) du plus haut poids $\lambda \equiv \omega_1$.

Si on décompose le vecteur normé K-invariant v_1^λ sur cette base :

$$v_1^\lambda = \sum_{j=1}^{d_\lambda}(v_1^\lambda, e_j^\lambda)e_j^\lambda,$$

il est classique (*voir* par exemple [18], lemme 1, p. 65) que sa composante sur e_1^λ est non nulle :

$$\forall \lambda \in \mathscr{P}, \quad (v_1^\lambda, e_1^\lambda) \neq 0.$$

D'autre part un calcul élémentaire montre qu'on a

$$\varphi_1^\lambda(\exp iH.x_0) = \sum_{j=1}^{d_\lambda}|(v_1^\lambda, e_j^\lambda)|^2 e^{\omega_j(iH)} \qquad (H \in \mathfrak{a}).$$

Pour tout $H \in \overline{\mathfrak{a}^+}$ il en résulte grâce à (16),

$$|(v_1^\lambda, e_1^\lambda)|^2 e^{\lambda(iH)} \leqq \varphi_1^\lambda(\exp iH.x_0) \leqq e^{\lambda(iH)},$$

d'où l'énoncé avec

$$a(\lambda) = |(v_1^\lambda, e_1^\lambda)|^2. \quad \blacksquare$$

On va donner dans la section suivante une expression plus explicite de $a(\lambda)$.

5.4. La fonction c d'Harish-Chandra. — Pour tout $\lambda \in \mathscr{P}$ on désigne maintenant par v^λ un vecteur K-invariant normé de E_λ, et par e^λ un vecteur normé dans l'espace (à une dimension) du plus haut poids λ de la représentation M_λ. On considère la quantité $a(\lambda) = |(v^\lambda, e^\lambda)|^2$.

Remarquons d'abord qu'il existe un nombre complexe $c \neq 0$ tel que l'on ait

$$v^\lambda = c\,P_\lambda e^\lambda.$$

D'où

$$(P_\lambda e^\lambda, e^\lambda) = c^{-1}(v^\lambda, e^\lambda).$$

Mais l'hermiticité de P_λ implique

$$(v^\lambda, e^\lambda) = (P_\lambda v^\lambda, e^\lambda) = (v^\lambda, P_\lambda e^\lambda) = \bar{c}^{-1}.$$

Finalement on obtient

$$(P_\lambda e^\lambda, e^\lambda) = |c|^{-2} = |(v^\lambda, e^\lambda)|^2.$$

D'où

$$a(\lambda) = \int_K (M_\lambda(k)e^\lambda, e^\lambda)\,dk. \tag{18}$$

On peut donner de cette intégrale une interprétation plus précise. Ceci nécessite l'introduction de la paire symétrique non compacte duale de la paire symétrique compacte (G, K).

Soient pour cela les sous-algèbres nilpotentes de $\mathfrak{g}_c$ définies par

$$\mathfrak{n}_c^+ = \sum_{\alpha \in P_+} \mathfrak{g}_c^\alpha, \; \mathfrak{n}_c^- = \sum_{\alpha \in P_+} \mathfrak{g}_c^{-\alpha},$$

où pour tout $\alpha \in \Delta$ on note $\mathfrak{g}_c^\alpha$ le sous-espace radiciel correspondant. Si l'on pose

$$\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{k} \oplus i\,\mathfrak{p},$$
$$\mathfrak{n}^+ = \mathfrak{g}_0 \cap \mathfrak{n}_c^+, \qquad \mathfrak{n}^- = \mathfrak{g}_0 \cap \mathfrak{n}_c^-,$$

$\mathfrak{g}_0$ est une sous-algèbre réductive de $\mathfrak{g}_c$ et on a une décomposition d'Iwasawa

$$\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{k} \oplus i\,\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}^+.$$

On désigne par G_0 le groupe analytique immergé dans G_c d'algèbre $\mathfrak{g}_0$. G_0 est un groupe réel réductif, K un sous-groupe compact maximal de G_0, et (G_0, K) une paire symétrique non compacte pour la restriction à G_0 de l'automorphisme involutif $\tilde{\theta}$ de G_c.

On a une décomposition d'Iwasawa

$$G_0 = KAN^+,$$

où A désigne le sous-groupe analytique de G_0 d'algèbre $i\,\mathfrak{a}$, et N^+ le sous-groupe analytique de G_0 d'algèbre $\mathfrak{n}^+$. Pour $g \in G_0$ on note $k(g)$ [resp. $H(g)$] l'unique élément de K (resp. de $i\,\mathfrak{a}$) tel que $g \in k(g).\exp H(g).N^+$.

On note N^- le sous-groupe analytique de G_0 d'algèbre $\mathfrak{n}^-$ et dn^- la mesure de Haar sur N^-. On sait ([7], lemme 44, p. 287; [24], vol. II, p. 73) que celle-ci peut être normalisée de manière que

$$\int_K f(k)\,dk = \int_{M\times N^-} f(mk(n^-))\,e^{-2\rho(H(n^-))}\,dm\,dn^-,$$

où $\rho\in(i\,\mathfrak{a}')^*$ désigne la demi-somme des racines restreintes positives (avec multiplicité) : $\rho = 1/2 \sum_{\alpha\in P_+} \tilde{\alpha}$.

(En fait ce résultat est obtenu dans [7] dans le cas où G_0 est un groupe analytique réel semi-simple à centre fini mais l'extension à la situation un peu plus générale envisagée ici est facile.)

Si l'on applique cette formule d'intégration à (18), on obtient

$$a(\lambda) = \int_{M\times N^-} (M_\lambda(mk(n^-))\,e^\lambda, e^\lambda)\,e^{-2\rho(H(n^-))}\,dm\,dn^-,$$

puis à l'aide d'un calcul donné dans [24] (vol. I, p. 211) et qu'on ne répétera pas

$$a(\lambda) = \int_{N^-} e^{-(\lambda+2\rho)(H(n^-))}\,dn^- \qquad (\lambda\in\mathscr{P}). \tag{19}$$

Soient maintenant G'_0 le sous-groupe analytique de G_0 d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}'_0 = \mathfrak{k}'\oplus i\,\mathfrak{p}'$, K' (resp. A') le sous-groupe analytique de G'_0 d'algèbre $\mathfrak{k}'$ (resp. $i\,\mathfrak{a}'$). G'_0 est un groupe réel semi-simple à centre fini ([24], vol. I, lemme 1.1.5.6, p. 44) et on a une décomposition d'Iwasawa $G'_0 = K'A'N^+$.

Il est clair que N^- est contenu dans G'_0. Par l'unicité de la décomposition d'Iwasawa ceci implique que pour tout $n^-\in N^-$, $H(n^-)\in i\,\mathfrak{a}'$.

Alors on peut réécrire (19) sous la forme

$$a(\lambda) = \int_{N^-} e^{-(\lambda'+2\rho)(H(n^-))}\,dn^-,$$

où pour tout $\lambda\in\mathscr{P}$ on note $\lambda'\in(i\,\mathfrak{a}')^*$ sa restriction à $i\,\mathfrak{a}'$.

Ce résultat est à comparer avec l'expression classique ([7], p. 291; [24], vol. II, p. 326) de la fonction d'Harish-Chandra pour la paire symétrique non compacte (G'_0, K') :

$$c(\lambda) = \int_{N^-} e^{-(i\lambda+\rho)(H(n^-))}\,dn^-,$$

avec $\lambda\in\mathfrak{a}'^*_c = \mathfrak{a}'^*\oplus(i\,\mathfrak{a}')^*$ arbitraire. On obtient ainsi

$$a(\lambda) = c(-i(\lambda'+\rho)) \qquad (\lambda\in\mathscr{P}). \tag{20}$$

On peut alors énoncer le résultat suivant qui sera utile ultérieurement.

PROPOSITION 14. — *La fonction a^{-1} est à croissance lente sur $\mathscr{P}$* :

$$\exists\, r\in\mathbf{N},\ C>0,\quad \forall\,\lambda\in\mathscr{P},\qquad [a(\lambda)]^{-1} \leqq C(1+\|\lambda\|)^r.$$

Preuve. — C'est une conséquence immédiate de (20) puisque l'on sait ([24], vol. II, prop. 9.1.7.2, p. 327) que la fonction c^{-1} est à croissance lente sur $\mathfrak{a}'^*_c$. ∎

5.5. CARACTÉRISATION DES FONCTIONS HOLOMORPHES.

THÉORÈME 3. — *Soit* $\mathscr{D}_B$ *le domaine* G-*invariant de* X_c *de base* B. *Toute fonction* f *holomorphe dans* $\mathscr{D}_B$ *y admet un développement en série de Laurent :*

$$f(x) = \sum_{\lambda \in \mathscr{P}} d_\lambda \sum_{j=1}^{d_\lambda} \hat{f}_j(\lambda)\, \varphi_j^\lambda(x) \qquad (x \in \mathscr{D}_B),$$

normalement convergent sur tout compact de $\mathscr{D}_B$.

Les coefficents de Laurent de f *satisfont la condition :*

(★) *Pour tout compact* $K \subset B$ *invariant par le groupe de Weyl, il existe une constante* $C_K > 0$ *telle que*

$$\forall \lambda \in \mathscr{P}, \quad \| \hat{f}(\lambda) \| \leqq C_K\, e^{-h_K(\lambda)}.$$

Preuve. — Remarquons d'abord qu'il résulte du théorème 2 que pour tout $x \in \mathscr{D}_B$,

$$\forall \lambda \in \mathscr{P}, \quad \hat{f}_j(\lambda) = [\varphi_1^\lambda(x)]^{-1} \int_G f(g.x)(M_\lambda^*(g)\, v_j^\lambda, v_1^\lambda)\, dg \qquad (1 \leqq j \leqq d_\lambda).$$

C'est en effet (13) où l'on a choisi $k = 1$.

En vertu du théorème 1 tout élément de $\mathscr{D}_B$ peut s'écrire $x = g.\exp i\,H.x_0$, avec $H \in B$. En particulier pour $x = \exp i\,H.x_0$, la relation précédente devient

$$(21) \qquad \forall H \in B,\ \lambda \in \mathscr{P}, \qquad \hat{f}_j(\lambda) = [\varphi_1^\lambda(\exp i\,H.x_0)]^{-1} \int_G f(g.\exp i\,H.x_0)\, \overline{\varphi_j^\lambda(g.x_0)}\, dg \qquad (1 \leqq j \leqq d_\lambda).$$

Compte tenu de (17) et si l'on pose

$$C_H = \sup_{g \in G} | f(g.\exp i\,H.x_0) | \qquad (H \in B),$$

ceci implique

$$\forall H \in B,\ \lambda \in \mathscr{P}, \qquad \| \hat{f}(\lambda) \| \leqq C_H [\varphi_1^\lambda(\exp i\,H.x_0)]^{-1}.$$

Soit alors $\tilde{B} = B/W \subset \overline{\mathfrak{a}^+}$. En écrivant la relation précédente pour $H \in \tilde{B}$ et en appliquant la proposition 13, on obtient

$$(22) \qquad \forall H \in \tilde{B},\ \lambda \in \mathscr{P}, \qquad \| \hat{f}(\lambda) \| \leqq C_H [a(\lambda)]^{-1} e^{-\lambda(iH)}.$$

(*a*) On peut maintenant établir la condition (★). Il suffit de démontrer la condition suivante qui en vertu de la proposition 14 lui est visiblement équivalente :

Pour tout compact $K \subset B$ invariant par le groupe de Weyl, il existe une constante $C_K > 0$ telle que

$$\forall \lambda \in \mathscr{P}, \quad \| \hat{f}(\lambda) \| \leqq C_K [a(\lambda)]^{-1} e^{-h_K(\lambda)}.$$

Soit pour cela un compact $K \subset B$ invariant par W, $\tilde{K} = K/W$ le compact de $\tilde{B}$ correspondant. Il résulte de la définition de la fonction d'appui de $\tilde{K}$ que

$$\forall \lambda \in \mathscr{P}, \quad \exists Q_\lambda \in \tilde{K}, \qquad \lambda(i Q_\lambda) = h_{\tilde{K}}(\lambda).$$

Et par la proposition 9

$$\forall \lambda \in \mathscr{P}, \quad \exists Q_\lambda \in \tilde{K}, \qquad \lambda(i Q_\lambda) = h_K(\lambda). \tag{23}$$

Posons alors [6]

$$C_K = \sup_{H \in \tilde{K}} C_H = \sup_{x \in \mathscr{D}_K} |f(x)|. \tag{24}$$

Il résulte de (22) et (23) que

$$\forall \lambda \in \mathscr{P}, \quad \|\hat{f}(\lambda)\| \leqq C_K [a(\lambda)]^{-1} e^{-h_K(\lambda)}, \tag{25}$$

ce qui est le résultat souhaité.

(*b*) On va ensuite montrer que la série de Laurent de f converge normalement sur tout compact de $\mathscr{D}_B$. La somme sera alors une fonction holomorphe dans $\mathscr{D}_B$ qui coïncidera avec f grâce à la proposition 11.

Soit pour cela Δ un compact de $\mathscr{D}_B$. On note

$$\tilde{K} = \{A(x),\ x \in \Delta\} \qquad \text{et} \qquad K = \bigcup_{w \in W} w\tilde{K},$$

les compacts de $\overline{\mathfrak{a}^+}$ et $\mathfrak{a}$ correspondants. Il existe un compact $L \subset B$ invariant par W, et un $\varepsilon > 0$ tels que

$$K + \varepsilon b \subset L,$$

où b désigne la boule unité ouverte de $\mathfrak{a}$. Alors il résulte de (9) et (10) que

$$\forall \lambda \in \mathscr{P}, \quad h_L(\lambda) \geqq h_K(\lambda) + \varepsilon \|\lambda\|.$$

Pour tout $x \in \Delta$, ceci implique

$$\forall \lambda \in \mathscr{P}, \quad \lambda(i A(x)) \leqq h_{\tilde{K}}(\lambda) = h_K(\lambda) \leqq h_L(\lambda) - \varepsilon \|\lambda\|. \tag{26}$$

A partir de la condition ($\star$) et de la proposition 12, on obtient d'autre part

$$\exists C_L > 0, \quad \forall \lambda \in \mathscr{P},\ x \in \Delta,$$
$$\left| d_\lambda \sum_{j=1}^{d_\lambda} \hat{f}_j(\lambda) \varphi_j^\lambda(x) \right| \leqq d_\lambda \|\hat{f}(\lambda)\| . \|\varphi^\lambda(x)\| \leqq C_L d_\lambda e^{\lambda(iA(x)) - h_L(\lambda)}.$$

D'où en tenant compte de (26),

$$\exists C, \varepsilon > 0, \quad \forall \lambda \in \mathscr{P},\ x \in \Delta, \quad \left| d_\lambda \sum_{j=1}^{d_\lambda} \hat{f}_j(\lambda) \varphi_j^\lambda(x) \right| \leqq C d_\lambda e^{-\varepsilon \|\lambda\|}. \tag{27}$$

[6] Pour tout compact $K \subset B$ invariant par W, on note par extension : $\mathscr{D}_K = G \exp i K . x_0$.

On sait (*voir* par exemple [22], lemme 5.6.7, p. 126) que d_λ est à croissance lente sur $\mathscr{P}$. (27) établit donc la convergence normale de la série de Laurent de f sur tout compact de $\mathscr{D}_B$, ce qui achève la preuve du théorème 3. ■

Remarque 6. — En vertu de l'homogénéité de h_K, la condition ($\star$) est une condition « de décroissance (ou de croissance) exponentielle » sur $\mathscr{P}$, suivant que l'on se trouve dans la région $h_K > 0$ ou $h_K < 0$ de $(i\,\mathfrak{a})^*$. C'est-à-dire respectivement l'extérieur ou l'intérieur du cône asymptote du polaire de K.

Soit $\mathscr{D}_B$ le domaine G-invariant de X_c de base B. On choisit une famille exhaustive $\{ K_n, n \in \mathbf{N} \}$ de compacts de B invariants par W. On note $\mathscr{K}_n$ l'espace de Banach des fonctions holomorphes dans $\mathscr{D}^0_{K_n}$ et continues [6] dans $\mathscr{D}_{K_n}$, muni de la norme

$$\| f \|_n = \sup_{x \in \mathscr{D}_{K_n}} | f(x) |.$$

L'espace $\mathscr{O}(\mathscr{D}_B)$ des fonctions holomorphes dans $\mathscr{D}_B$ est la limite projective des espaces $\mathscr{K}_n$:

$$\mathscr{O}(\mathscr{D}_B) = \varprojlim_{n \in \mathbf{N}} \mathscr{K}_n.$$

On note $\hat{\mathscr{O}}_n$ l'espace des familles $\hat{l} = \{ \hat{l}(\lambda), \lambda \in \mathscr{P} \}$ de vecteurs

$$\hat{l}(\lambda) = (\hat{l}_1(\lambda), \ldots, \hat{l}_{d_\lambda}(\lambda)) \in \mathbf{C}^{d_\lambda},$$

telles que

$$\| \hat{l} \|_n = \sup_{\lambda \in \mathscr{P}} \| \hat{l}(\lambda) \| \, e^{h_{K_n}(\lambda)} < +\infty.$$

Muni de la norme $\| \ \|_n$, $\hat{\mathscr{O}}_n$ est un espace de Banach et on pose

$$\hat{\mathscr{O}}(\mathscr{D}_B) = \varprojlim_{n \in \mathbf{N}} \hat{\mathscr{O}}_n.$$

PROPOSITION 15. — *La « transformation de Laurent » qui à toute fonction f holomorphe dans $\mathscr{D}_B$ associe la famille $\hat{f} = \{ \hat{f}_j(\lambda); \lambda \in \mathscr{P}, 1 \leqq j \leqq d_\lambda \}$ de ses coefficients de Laurent est un isomorphisme de $\mathscr{O}(\mathscr{D}_B)$ sur $\hat{\mathscr{O}}(\mathscr{D}_B)$.*

Preuve. — Par le théorème 3 la transformation de Laurent est une bijection de $\mathscr{O}(\mathscr{D}_B)$ sur $\hat{\mathscr{O}}(\mathscr{D}_B)$.

Comme la fonction a^{-1} est à croissance lente sur $\mathscr{P}$ (prop. 14), on a tout aussi bien

$$\hat{\mathscr{O}}(\mathscr{D}_B) = \varprojlim_{n \in \mathbf{N}} \hat{\mathscr{O}}'_n,$$

où l'on désigne par $\hat{\mathscr{O}}'_n$ l'espace de Banach des familles $\hat{l} = \{ \hat{l}(\lambda), \lambda \in \mathscr{P} \}$ telles que

$$\| \hat{l} \|'_n = \sup_{\lambda \in \mathscr{P}} \| \hat{l}(\lambda) \| \, a(\lambda) \, e^{h_{K_n}(\lambda)} < +\infty$$

muni de la norme $\| \ \|'_n$.

La continuité de la transformation de Laurent est alors assurée par (24) et (25), qui impliquent pour tout $f \in \mathcal{O}(\mathcal{D}_B)$ et tout $n \in \mathbf{N}$,

$$\|\hat{f}\|'_n \leqq \|f\|_n.$$

Inversement si $\hat{f} \in \hat{\mathcal{O}}_{n+1}$, le (*b*) de la preuve du théorème 3 indique que la série de Laurent de f converge absolument dans l'espace de Banach $\mathcal{K}_n$. On a donc

$$\|f\|_n \leqq \sum_{\lambda \in \mathcal{P}} d_\lambda \left\| \sum_{j=1}^{d_\lambda} \hat{f}_j(\lambda)\, \varphi_j^\lambda \right\|_n.$$

D'où en tenant compte de l'inégalité de Schwarz et de la proposition 12,

$$\|f\|_n \leqq \sum_{\lambda \in \mathcal{P}} d_\lambda \|\hat{f}(\lambda)\| e^{h_{K_n}(\lambda)}.$$

Posons alors

$$C_n = \sum_{\lambda \in \mathcal{P}} d_\lambda e^{h_{K_n}(\lambda) - h_{K_{n+1}}(\lambda)} \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

Il vient pour tout $f \in \mathcal{O}(\mathcal{D}_B)$ et tout $n \in \mathbf{N}$,

$$\|f\|_n \leqq C_n \|\hat{f}\|_{n+1}.$$

La continuité de la transformation de Laurent réciproque en résulte. ■

6. Enveloppe d'holomorphie, convexité

On a vu (prop. 3) que X_c est une variété de Stein. Nous donnons dans cette section une caractérisation des domaines G-invariants de X_c qui sont de Stein.

6.1. EXTENSION HOLOMORPHE.

PROPOSITION 16. — *Toute fonction holomorphe dans le domaine* G-*invariant de* X_c *de base* B *se prolonge au domaine* G-*invariant ayant pour base l'enveloppe convexe de* B.

Preuve. — Si $f \in \mathcal{O}(\mathcal{D}_B)$ ses coefficients de Laurent satisfont la condition (★) du théorème 3. Mais on sait [*voir* (8)] que pour tout compact $K \subset B$, on a

$$h_K = h_{K^c}.$$

Soit $\{K_n, n \in \mathbf{N}\}$ une famille exhaustive de compacts de B invariants par W. La famille $\{K_n^c, n \in \mathbf{N}\}$ est une famille exhaustive de compacts de B^c invariants par W. Par le (*b*) de la preuve du théorème 3, la série de Laurent de f est holomorphe dans $\mathcal{D}_{B^c}$ et y définit le prolongement de f annoncé. ■

L'extension holomorphe ainsi obtenue est en général considérable. Examinons en particulier le cas où $\mathfrak{z}_\mathfrak{p} = \{0\}$. Si B est un ouvert de $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}'$ invariant par W, son enveloppe convexe B^c est alors nécessairement un voisinage de l'origine dans $\mathfrak{a}$. On a donc la

PROPOSITION 17. — *Si* $\mathfrak{z}_\mathfrak{p} = \{0\}$, *toute fonction holomorphe dans un domaine* G-*invariant arbitraire de* X_c *se prolonge à un voisinage de* $X = G.x_0$ *dans* X_c. *En particulier elle admet sur* X *une restriction analytique* (*réelle*).

Si l'action de G sur $X = G/K$ est effective, l'hvpothèse $\mathfrak{z}_\mathfrak{p} = \{0\}$ correspond à la situation où G est semi-simple. On voit que dans ce cas toute fonction holomorphe dans un domaine G-invariant « loin du réel » se prolonge nécessairement « jusqu'au réel » ([7]).

6.2. DOMAINES G-INVARIANTS A BASE CONVEXE. — On va établir maintenant le

THÉORÈME 4. — *Tout domaine* G-*invariant de* X_c *à base convexe est une variété de Stein.*

La preuve sera tout à fait analogue à celle donnée dans [14] (th. 3; *voir* aussi [6] lorsque la base est une boule) dans le cas particulier où X est un groupe analytique compact. Le résultat auxiliaire suivant sera utile.

PROPOSITION 18. — *Soit* B *une partie convexe bornée de* $\mathfrak{a}$ *invariante par* W. *L'ensemble*

$$\Omega = \{H \in \mathfrak{a} : \exists \lambda \in \mathscr{P}, \lambda(iH) = h_B(\lambda)\}$$

est dense dans $\partial B \cap \overline{\mathfrak{a}^+}$.

On a établi un résultat analogue dans [14] (prop. 11). Le lecteur vérifiera que la démonstration qu'on y donne s'applique ici sans difficulté. [On utilise la propriété suivante de $\mathscr{P}$ qui résulte facilement de la caractérisation donnée à la remarque 1 : si A désigne la chambre de Weyl duale de $\mathfrak{a}^+$ dans $(i\,\mathfrak{a})^*$, on a : $\mathscr{P} \subset \overline{A}$ et le cône engendré par $\mathscr{P}$ est dense dans $\overline{A}$.]

Preuve du théorème 4. — Il suffit de démontrer le théorème dans le cas d'un domaine G-invariant à base convexe *bornée* : tout domaine G-invariant à base convexe sera alors une variété de Stein comme réunion d'une suite continue croissante d'ouverts de Stein.

Soit donc $\mathscr{D}_B$ un domaine G-invariant à base B convexe bornée. X_c étant une variété de Stein, il suffit de montrer que $\mathscr{D}_B$ est holomorphiquement convexe.

(*a*) On considère pour cela la famille $\{\hat{s}_j(\lambda);\ \lambda \in \mathscr{P},\ 1 \leqq j \leqq d_\lambda\}$ de scalaires positifs définis par

$$\forall \lambda \in \mathscr{P}, \quad \hat{s}_j(\lambda) = [a(\lambda)]^{-1} e^{-h_B(\lambda)} \delta_{1j} \qquad (1 \leqq j \leqq d_\lambda).$$

Par la proposition 15 ce sont les coefficients de Laurent d'une fonction $s \in \mathcal{O}(\mathscr{D}_B)$:

$$s(x) = \sum_{\lambda \in \mathscr{P}} d_\lambda [a(\lambda)]^{-1} e^{-h_B(\lambda)} \varphi_1^\lambda(x) \qquad (x \in \mathscr{D}_B).$$

Cette fonction est invariante par K_c et à valeurs réelles sur $\exp i\,\mathfrak{a}.x_0$. En particulier on a par la proposition 13,

$$\forall H \in \overline{\mathfrak{a}^+}, \quad s(\exp iH.x_0) \geqq \sum_{\lambda \in \mathscr{P}} d_\lambda e^{\lambda(iH) - h_B(\lambda)}. \tag{28}$$

Soit alors H un point arbitraire de l'ensemble $\Omega \subset \partial B \cap \overline{\mathfrak{a}^+}$ défini à la proposition 18. Il existe une forme linéaire $\lambda_H \in \mathscr{P}$ telle que

$$\lambda_H(iH) = h_B(\lambda_H)$$

([7]) On en verra ultérieurement un exemple intéressant (§ 11.4 : Remarque finale).

et il est clair que $n\,\lambda_{\mathrm{H}} \in \mathscr{P}$ pour tout entier $n \geqq 1$. (28) implique donc

$$s(\exp i\,\mathrm{H}.x_0) \geqq \sum_{n\geqq 1} d_{n\lambda_{\mathrm{H}}} e^{n\lambda_{\mathrm{H}}(i\mathrm{H}) - h_{\mathrm{B}}(n\lambda_{\mathrm{H}})} = \sum_{n\geqq 1} d_{n\lambda_{\mathrm{H}}}.$$

Ainsi s est holomorphe dans $\mathscr{D}_{\mathrm{B}}$ et partout non bornée sur $\hat{\Omega} = \exp i\,\Omega.x_0 \subset \partial\mathscr{D}_{\mathrm{B}}$.

(*b*) Pour tout point $y \in \partial\mathscr{D}_{\mathrm{B}}$, on va montrer qu'il existe une fonction $s_y \in \mathscr{O}(\mathscr{D}_{\mathrm{B}})$, non bornée en tous les points d'une suite $\{ y_n,\ n \in \mathrm{N} \}$ d'éléments de $\partial\mathscr{D}_{\mathrm{B}}$ convergeant vers y. La convexité holomorphe de $\mathscr{D}_{\mathrm{B}}$ en résultera.

Soit donc $y \in \partial\mathscr{D}_{\mathrm{B}}$ arbitraire. On a par la décomposition (6),

$$y = \tilde{g}.\exp i\,\mathrm{A}(y).x_0 \qquad (\tilde{g} \in \mathrm{G},\ \mathrm{A}(y) \in \partial\mathrm{B} \cap \overline{\mathfrak{a}^+}).$$

En vertu du (*a*), la fonction s_y définie par

$$s_y(x) = s(\tilde{g}^{-1}.x)$$

est holomorphe dans $\mathscr{D}_{\mathrm{B}}$ et partout bon bornée sur $\tilde{g}.\hat{\Omega} \subset \partial\mathscr{D}_{\mathrm{B}}$. Mais Ω est dense dans $\partial\mathrm{B} \cap \overline{\mathfrak{a}^+}$ et si on extrait une suite $\{ \mathrm{H}_n,\ n \in \mathrm{N} \}$ d'éléments de Ω convergeant vers $\mathrm{A}(y)$, la suite $\{ y_n,\ n \in \mathrm{N} \}$ d'éléments de $\tilde{g}.\hat{\Omega}$ définis par $y_n = \tilde{g}.\exp i\,\mathrm{H}_n.x_0$ converge vers y. D'où le résultat. ■

Remarque 7. — On aurait pu établir que tout domaine G-invariant $\mathscr{D}_{\mathrm{B}}$ à base convexe bornée est pseudoconvexe, en montrant que c'est exactement le domaine de convergence de la série

$$\Phi(x) = \sum_{\lambda \in \mathscr{P}} [a(\lambda)]^{-2} e^{-2h_{\mathrm{B}}(\lambda)} \| \varphi^{\lambda}(x) \|^2.$$

Comme somme de carrés de modules de fonctions holomorphes dans X_c, Φ est alors une fonction pluri-sous-harmonique dans $\mathscr{D}_{\mathrm{B}}$, non bornée partout sur la frontière de $\mathscr{D}_{\mathrm{B}}$. D'où le résultat.

En vertu de la proposition 16 et du théorème 4, on a finalement le

THÉORÈME 5. — *L'enveloppe d'holomorphie du domaine* G-*invariant de* X_c *de base* B *est le domaine* G-*invariant ayant pour base l'enveloppe convexe de* B.

6.3. UNE PROPRIÉTÉ DE CONTOUR APPARENT. — La forme de Killing de l'algèbre semi-simple compacte $\mathfrak{g}' = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ induit sur $\mathfrak{p}' = \mathfrak{g}' \cap \mathfrak{p}$ une forme bilinéaire définie négative qu'on note B. On munit $\mathfrak{p}$ d'un produit scalaire euclidien $\langle\, ,\, \rangle$ satisfaisant aux conditions suivantes :

(i) la décomposition $\mathfrak{p} = \mathfrak{z}_{\mathfrak{p}} \oplus \mathfrak{p}'$ est une décomposition orthogonale pour $\langle\, ,\, \rangle$,

(ii) pour tous $\mathrm{H}_1, \mathrm{H}_2 \in \mathfrak{p}'$, on a $\langle \mathrm{H}_1, \mathrm{H}_2 \rangle = -\mathrm{B}(\mathrm{H}_1, \mathrm{H}_2)$.

On note $\mathfrak{p} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{s}$ la décomposition orthogonale (resp. $\omega : \mathfrak{p} \to \mathfrak{a}$ la projection orthogonale) associée à ce produit scalaire.

On sait que $\mathfrak{p}$ est stable par Ad K : pour tout $\mathrm{H} \in \mathfrak{p}$ on note $\mathrm{O}(\mathrm{H})$ son orbite dans $\mathfrak{p}$ par Ad K. On désigne par $\mathrm{W}(\mathrm{H})$ l'ensemble des éléments de $\mathfrak{a}$ qui sont conjugués à H par Ad K : c'est une orbite du groupe de Weyl.

On a alors le résultat suivant qui est une propriété de « contour apparent » des orbites dans $\mathfrak{p}$ de Ad K ([13], th. 8.2, p. 452).

THÉORÈME E. — *Pour tout* $H \in \mathfrak{p}$, *on a*

$$\omega\, O(H) = [W(H)]^c.$$

(En fait la propriété n'est démontrée dans [13] que pour $\mathfrak{g}$ semi-simple. Mais K agit trivialement dans $\mathfrak{z}_{\mathfrak{p}}$ par la représentation adjointe et l'énoncé un peu plus général donné ici s'obtient de manière évidente.)

Soit maintenant $\mathscr{D}_B$ le domaine G-invariant de X_c de base B. On a vu (prop. 6) que $\mathscr{D}_B$ est un espace fibré associé à la fibration principale (G, K, X, π_1) de fibre type D, où D est un domaine de $\mathfrak{p}$ invariant par Ad K avec

$$B = D \cap \mathfrak{a}, \qquad D = \operatorname{Ad} K . B.$$

Le théorème E implique alors immédiatement

$$\omega\, D = B^c.$$

En d'autres termes pour tout domaine G-invariant de X_c, la projection orthogonale sur $\mathfrak{a}$ de sa fibre type est exactement l'enveloppe convexe de sa base.

Le théorème 5 apparaît ainsi comme une propriété de « contour apparent » dont on peut donner la formulation suivante :

THÉORÈME 5. — *L'enveloppe d'holomorphie du domaine* G-*invariant de* X_c *de fibre type* D *est le plus grand domaine* G-*invariant de* X_c *dont la fibre type ait sur* $\mathfrak{a}$ *la même projection orthogonale que* D.

Il est possible qu'il existe une démonstration directe du résultat sous cette forme.

7. Valeurs au bord

7.1. FONCTIONS ANALYTIQUES ET HYPERFONCTIONS. — On note $\mathscr{A}(X)$ l'espace des fonctions analytiques (réelles) sur X muni de sa topologie habituelle d'espace de Fréchet. Pour tout $\varepsilon > 0$ on note $\mathscr{D}_\varepsilon$ le domaine G-invariant de X_c de base $\varepsilon\, b$. Par le corollaire de la proposition 7, $\mathscr{A}(X)$ est limitive inductive des espaces $\mathscr{O}(\mathscr{D}_\varepsilon)$:

$$\mathscr{A}(X) = \varinjlim_{\varepsilon > 0} \mathscr{O}(\mathscr{D}_\varepsilon).$$

On note $\hat{\mathscr{A}}_\varepsilon$ l'espace de Banach des familles $\hat{l} = \{ \hat{l}(\lambda), \lambda \in \mathscr{P} \}$ de vecteurs $\hat{l}(\lambda) = (\hat{l}_1(\lambda), \ldots, \hat{l}_{d_\lambda}(\lambda)) \in \mathbf{C}^{d_\lambda}$, telles que

$$\| \hat{l} \|_\varepsilon = \sup_{\lambda \in \mathscr{P}} \| \hat{l}(\lambda) \| e^{\varepsilon \| \lambda \|} < +\infty,$$

muni de la norme $\| \;\; \|_\varepsilon$. On pose

$$\hat{\mathscr{A}}(X) = \varinjlim_{\varepsilon > 0} \hat{\mathscr{A}}_\varepsilon.$$

Il est clair qu'alors on a tout aussi bien

$$\hat{\mathscr{A}}(\mathrm{X}) = \varinjlim_{\varepsilon > 0} \hat{\mathcal{O}}(\mathscr{D}_\varepsilon).$$

PROPOSITION 19. — *La transformation de Fourier est un isomorphisme de* $\mathscr{A}$ (X) *sur* $\hat{\mathscr{A}}$ (X).

Preuve. — Sur $\mathscr{A}$ (X) transformation de Fourier et transformation de Laurent coïncident en vertu de la remarque 3. Par la proposition 15 la transformation de Fourier est un isomorphisme de $\mathcal{O}(\mathscr{D}_\varepsilon)$ sur $\hat{\mathcal{O}}(\mathscr{D}_\varepsilon)$. D'où l'assertion, en vertu d'une propriété classique des limites inductives. ■

Remarque 8. — Par le théorème 3, si $f \in \mathscr{A}$ (X) sa « série de Fourier-Laurent »

$$\sum_{\lambda \in \mathscr{P}} d_\lambda \sum_{j=1}^{d_\lambda} \hat{f}_j(\lambda) \varphi_j^\lambda$$

converge absolument vers f dans la topologie de $\mathcal{O}(\mathscr{D}_\varepsilon)$, pour un certain $\varepsilon > 0$. L'injection $\mathcal{O}(\mathscr{D}_\varepsilon) \to \mathscr{A}$ (X) étant continue, elle converge absolument vers f dans la topologie de $\mathscr{A}$ (X).

X est une variété analytique réelle compacte sans bord. L'espace $\mathscr{B}$ (X) des hyperfonctions sur X s'identifie alors canoniquement avec celui des fonctionnelles analytiques sur X (muni de la topologie faible).

Il en résulte une définition des coefficients de Fourier $\{ \hat{t}_j(\lambda); \lambda \in \mathscr{P}, 1 \leqq j \leqq d_\lambda \}$ d'une hyperfonction $t \in \mathscr{B}$ (X) :

$$(29) \qquad \forall \lambda \in \mathscr{P}, \quad \hat{t}_j(\lambda) = \langle t, \overline{\varphi_j^\lambda} \rangle = \langle t, \psi_j^\lambda \rangle \qquad (1 \leqq j \leqq d_\lambda).$$

Pour tout $\varepsilon > 0$ on note $\hat{\mathscr{B}}_\varepsilon$ l'espace de Banach des familles $\hat{l} = \{ \hat{l}(\lambda), \lambda \in \mathscr{P} \}$ telles que

$$\| \hat{l} \|^\varepsilon = \sup_{\lambda \in \mathscr{P}} \| \hat{l}(\lambda) \| e^{-\varepsilon \| \lambda \|} < +\infty,$$

muni de la norme $\| \quad \|^\varepsilon$. On pose

$$\hat{\mathscr{B}}(\mathrm{X}) = \varprojlim_{\varepsilon > 0} \hat{\mathscr{B}}_\varepsilon.$$

PROPOSITION 20. — *La transformation de Fourier est un isomorphisme de* $\mathscr{B}$ (X) *sur* $\hat{\mathscr{B}}$ (X).

Preuve. — On note $\lambda \to \lambda_*$ l'involution de $\mathscr{P}$ correspondant à l'application qui à tout $\mathrm{M}_\lambda \in \hat{\mathrm{G}}_\mathrm{K}$ associe la représentation contragrédiente ([8]). Dans la base duale $\mathrm{M}_{\lambda_*}(g)$ $(g \in \mathrm{G})$ est représenté par la matrice conjuguée de $\mathrm{M}_\lambda(g)$. On a en particulier :

$$\forall \lambda \in \mathscr{P}, \, x \in \mathrm{X}, \qquad \varphi_j^{\lambda_*}(x) = \overline{\varphi_j^\lambda(x)} \qquad (1 \leqq j \leqq d_\lambda).$$

([8]) Si w_0 désigne l'unique élément du groupe de Weyl qui transforme les racines restreintes positives en racines restreintes négatives, on a : $\lambda_* = -w_0 \lambda$.

En vertu de la remarque 8, on a pour tout $f \in \mathscr{A}(X)$ et tout $t \in \mathscr{B}(X)$,

$$\begin{aligned} \langle t, f \rangle &= \sum_{\lambda \in \mathscr{P}} d_\lambda \sum_{j=1}^{d_\lambda} \hat{f}_j(\lambda) \langle t, \varphi_j^\lambda \rangle \\ &= \sum_{\lambda \in \mathscr{P}} d_\lambda \sum_{j=1}^{d_\lambda} \hat{f}_j(\lambda) \hat{t}_j(\lambda_*). \end{aligned}$$

Par cette formule de dualité on identifie le dual (faible) de $\hat{\mathscr{A}}(X)$ à l'espace des familles $\{ \hat{l}(\lambda), \lambda \in \mathscr{P} \}$ telles que

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists C_\varepsilon > 0, \quad \forall \lambda \in \mathscr{P}, \qquad \| \hat{l}(\lambda) \| \leqq C_\varepsilon e^{\varepsilon \|\lambda\|},$$

c'est-à-dire à $\hat{\mathscr{B}}(X)$. L'assertion est alors une conséquence immédiate de la proposition 19. ■

Remarques 9. — (*a*) On aurait pu obtenir ces résultats à partir de la caractérisation donnée dans [4] (prop. 4-5, p. 254; *voir* aussi [14], prop. 7-8) des fonctions analytiques et des hyperfonctions sur G.

(*b*) Il résulte de ce qui précède que si $t \in \mathscr{B}(X)$, sa série de Fourier

$$\sum_{\lambda \in \mathscr{P}} d_\lambda \sum_{j=1}^{d_\lambda} \hat{t}_j(\lambda) \varphi_j^\lambda$$

converge vers t dans la topologie (faible) de $\mathscr{B}(X)$.

7.2. VALEURS AU BORD HYPERFONCTIONS. — Soit $\mathscr{D}_B$ un domaine G-invariant à base convexe contenant $X = G.x_0$ dans son adhérence. On a vu (prop. 17) que si $\mathfrak{z}_\mathfrak{p} = \{ 0 \}$, $\mathscr{D}_B$ est nécessairement un voisinage de X dans X_c. Ce n'est cependant pas nécessairement le cas si $\mathfrak{z}_\mathfrak{p} \neq \{ 0 \}$.

Dans la suite de cette section, et sans qu'on le précise à chaque fois, on se place sous l'hypothèse $\mathfrak{z}_\mathfrak{p} \neq \{ 0 \}$. A partir du théorème 3, on peut alors facilement caractériser le comportement « au bord » d'une fonction holomorphe dans $\mathscr{D}_B$.

DÉFINITION. — Soit $\mathscr{D}_B$ un domaine G-invariant de X_c à base convexe, avec $0 \in \partial B$. A toute fonction $f \in \mathcal{O}(\mathscr{D}_B)$ on associe une hyperfonction $\dot{f}$ appelée sa *valeur au bord* sur X de la façon suivante. Pour tout $a \in \mathscr{A}(X)$ (prolongeable à $\mathscr{D}_\varepsilon$ pour un certain $\varepsilon > 0$), on pose

$$\langle \dot{f}, a \rangle = \int_G f(g.x)\, a(g.x)\, dg, \tag{30}$$

avec x arbitraire dans $\mathscr{D}_\varepsilon \cap \mathscr{D}_B$. On vérifie que cette définition est indépendante du choix de x.

PROPOSITION 21. — *Soient* $t \in \mathscr{B}(X)$, $\{ \hat{t}_j(\lambda); \lambda \in \mathscr{P}, 1 \leqq j \leqq d_\lambda \}$ *la famille de ses coefficients de Fourier*, B *un ouvert convexe de* $\mathfrak{a}$ *invariant par* W, *avec* $0 \in \partial B$. *Il est équivalent de dire :*

(i) *t est la valeur au bord sur* X *d'une fonction f holomorphe dans le domaine* G-*invariant* $\mathscr{D}_B$ *de base* B,

(ii) *pour tout compact* $K \subset B$ *invariant par* W, *il existe une constante* $C_K > 0$ *telle que*

$$\forall \lambda \in \mathscr{P}, \quad \|\hat{t}(\lambda)\| \leqq C_K e^{-h_K(\lambda)}.$$

La série de Fourier-Laurent de t converge alors normalement vers f sur tout compact de $\mathscr{D}_B$.

Preuve. — C'est une conséquence immédiate du théorème 3 si l'on fait la remarque suivante. Si $t \in \mathscr{B}(X)$ est la valeur au bord de $f \in \mathscr{O}(\mathscr{D}_B)$, les coefficients de Fourier de t et les coefficients de Laurent de f sont égaux en vertu des définitions (11), (29) et (30). ∎

7.3. Fonctions C^∞ et distributions.

Proposition 22. — *Soient* $t \in \mathscr{B}(X)$, B *un ouvert convexe de* $\mathfrak{a}$ *invariant par* W, *avec* $0 \in \partial B$. *Il est équivalent de dire :*

(i) $t \in C^\infty(X)$ *et c'est la restriction à* X *d'une fonction* $f \in \mathscr{O}(\mathscr{D}_B)$,

(ii) *pour tout compact* K *invariant par* W (*avec* $0 \in K \subset B \cup \{0\}$), *et pour tout entier* $N \geqq 0$, *il existe une constante* $C_{K,N} > 0$ *telle que*

$$\forall \lambda \in \mathscr{P}, \quad \|\hat{t}(\lambda)\| \leqq C_{K,N}(1+\|\lambda\|)^{-N} e^{-h_K(\lambda)}. \tag{31}$$

La série de Fourier-Laurent de t converge alors normalement vers f sur tout compact de $\mathscr{D}_B$.

Remarque 10. — La caractérisation précédente diffère de celles obtenues à la proposition 21 et au théorème 3 en ceci qu'il est nécessaire pour l'équivalence de ne considérer que les compacts K tels que $0 \in K \subset B \cup \{0\}$: cette condition garantit que la fonction d'appui h_K est à valeurs positives. Dans la région $h_K = 0$ (l'intérieur du cône asymptote du polaire de K), (31) est ainsi une condition de « décroissance rapide », tandis que c'est partout ailleurs une condition de « décroissance exponentielle ». On peut exprimer ce résultat en disant que le polaire de B est le « support essentiel » de t.

Preuve. — (i) ⇒ (ii) :

Soit K un compact invariant par W avec $0 \in K \subset B \cup \{0\}$. La condition (31) pour $N = 0$ résulte immédiatement de la remarque 3 et du théorème 3. (En fait une légère modification doit être apportée à l'argument puisque $0 \in K$ mais c'est de façon évidente.)

Soient alors D (G) [resp. D (X)] l'algèbre des opérateurs différentiels linéaires invariants à gauche sur G (resp. X), $\{e_1, \ldots, e_n\}$ une base du centre $\mathfrak{z}$ de $\mathfrak{g}$ et Δ l'opérateur de Casimir de $\mathfrak{g}' = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$. L'opérateur

$$\Delta_1 = 1 + \Delta - \sum_{j=1}^{n} e_j^2$$

appartient au centre de D (G). Ses coefficients de Fourier sont donc des homothéties : on note γ_λ ($\lambda \in \mathscr{P}$) les scalaires $\geqq 1$ définis par

$$M_\lambda(\Delta_1) = \gamma_\lambda^2 \mathbf{1}_{E_\lambda} \qquad (\lambda \in \mathscr{P}).$$

Soit Γ l'élément de D (X) obtenu par restriction de Δ_1 à C_0^∞ (G) ([8], lemme 2.2, p. 390). On a

$$(\Gamma t)^{\sim} = \Delta_1 \tilde{t} \tag{32}$$

et par un calcul classique

$$(\Delta_1 \tilde{t})^{\wedge} (M_\lambda) = M_\lambda (\Delta_1) \hat{\hat{t}} (M_\lambda) = \gamma_\lambda^2 \hat{\hat{t}} (M_\lambda),$$

d'où il vient en vertu de (1) et (32),

$$(\Gamma t)^{\wedge} (\lambda) = \gamma_\lambda^2 \hat{t} (\lambda) \qquad (\lambda \in \mathscr{P}).$$

Finalement pour tout entier $N \geqq 0$, on obtient,

$$\hat{t}(\lambda) = (\gamma_\lambda)^{-2N} (\Gamma^N t)^{\wedge} (\lambda) \qquad (\lambda \in \mathscr{P}).$$

On peut appliquer le théorème 3 à la fonction $\Gamma^N f \in \mathcal{O} (\mathscr{D}_B)$ dont la restriction sur X est $\Gamma^N t \in C^\infty$ (X). Il vient

$$\exists C_{K,N} > 0, \quad \forall \lambda \in \mathscr{P}, \qquad \| \hat{t}(\lambda) \| \leqq C_{K,N} (\gamma_\lambda)^{-2N} e^{-h_K(\lambda)}.$$

Mais on sait (*voir* par exemple [14], remarque 4) que sur $\mathscr{P}$, γ_λ et $(1 + \| \lambda \|)$ sont équivalents. La condition (ii) en résulte.

(ii) $\Rightarrow$ (i) :

Pour tout compact K tel que $0 \in K$ la fonction d'appui h_K est à valeurs $\geqq 0$. La condition (ii) implique donc une condition de décroissance rapide sur $\mathscr{P}$, dont on sait (*voir* par exemple [4], p. 251) qu'elle est caractéristique des éléments de C^∞ (X). Par le (*b*) de la preuve du théorème 3, la série de Fourier-Laurent de *t* converge normalement sur tout compact de $\mathscr{D}_B$. La somme est une fonction holomorphe dans $\mathscr{D}_B$ dont la restriction à X coïncide avec *t*. ■

Le résultat suivant s'établit de manière tout à fait analogue. La démonstration en est laissée au lecteur.

PROPOSITION 23. — *Soient* $t \in \mathscr{B}$ (X), B *un ouvert convexe de* $\mathfrak{a}$ *invariant par* W, *avec* $0 \in \partial B$. *Il est équivalent de dire :*

(i) *t est une distribution sur* X *et c'est la valeur au bord d'une fonction* $f \in \mathcal{O} (\mathscr{D}_B)$,

(ii) *il existe un entier* $N \geqq 0$ *et, pour tout compact* K *invariant par* W (*avec* $0 \in K \subset B \cup \{ 0 \}$), *une constante* $C_K > 0$ *tels que*

$$\forall \lambda \in \mathscr{P}, \quad \| \hat{t}(\lambda) \| \leqq C_K (1 + \| \lambda \|)^N e^{-h_K(\lambda)}.$$

La série de Fourier-Laurent de t converge alors normalement vers f sur tout compact de $\mathscr{D}_B$.

8. Fonctions holomorphes invariantes

8.1. FONCTIONS SPHÉRIQUES. — Soit $\mathscr{D}$ un domaine G-invariant de X_c. G opère à gauche sur $\mathcal{O} (\mathscr{D})$ par la représentation naturelle. Le résultat suivant est à comparer avec la proposition 5.

PROPOSITION 24. — *Soit* $f \in \mathcal{O}(\mathcal{D})$. *Il est équivalent de dire :*

(i) f *est* K-*invariante,*

(ii) *ses coefficients de Laurent satisfont pour tout* $\lambda \in \mathcal{P}$,

$$\hat{f}_j(\lambda) = 0 \qquad (2 \leqq j \leqq d_\lambda),$$

(iii) f *est* K_c-*invariante.*

Preuve. — (i) $\Rightarrow$ (ii) :

Remarquons d'abord que l'on a pour tout $x \in X_c$ et tout $\lambda \in \mathcal{P}$,

$$\int_K \psi_j^\lambda(k^{-1}.x)\,dk = \delta_{1j}\,\psi_1^\lambda(x) \qquad (1 \leqq j \leqq d_\lambda). \tag{33}$$

En effet si l'on pose $x = g.x_0$ ($g \in G_c$), la définition de ψ_j^λ entraîne

$$\int_K \psi_j^\lambda(k^{-1}.x)\,dk = \int_K (M_\lambda^*(k^{-1}g)\,v_j^\lambda,\, v_1^\lambda)\,dk$$
$$= (M_\lambda^*(g)\,P_\lambda\, v_j^\lambda,\, v_1^\lambda) = \delta_{1j}(M_\lambda^*(g)\,v_1^\lambda,\, v_1^\lambda).$$

Dans la définition (11) du coefficient de Laurent $\hat{f}_j(\lambda)$, utilisons alors l'invariance de f par K. Il vient pour tout $k \in K$,

$$\hat{f}_j(\lambda) = \int_G f(kg.x)\,\psi_j^\lambda(g.x)\,dg \qquad (x \in \mathcal{D}).$$

Ou encore en vertu de l'invariance par translation de la mesure dg,

$$\hat{f}_j(\lambda) = \int_G f(g.x)\,\psi_j^\lambda(k^{-1}g.x)\,dg \qquad (x \in \mathcal{D}).$$

Pour conclure il suffit alors d'intégrer cette relation sur le groupe K en tenant compte de (33).

(ii) $\Rightarrow$ (iii) :

Pour tout $\lambda \in \mathcal{P}$, la fonction sphérique zonale $\varphi_1^\lambda(x)$ ($x \in X_c$) est K_c-invariante en vertu de la proposition 5. La série de Laurent de f est donc K_c-invariante. On applique alors le théorème 3. ■

Remarque 11. — Toute fonction f holomorphe et K-invariante dans le domaine G-invariant $\mathcal{D}$ se prolonge donc en une fonction holomorphe et K_c-invariante dans le domaine K_c-invariant $\mathcal{D}' = K_c.\mathcal{D}$. Sa série de Laurent

$$\sum_{\lambda \in \mathcal{P}} d_\lambda\,\hat{f}_1(\lambda)\,\varphi_1^\lambda(x) \qquad (x \in \mathcal{D}')$$

converge normalement vers f sur tout compact de $\mathcal{D}'$.

Il convient cependant d'observer que $\mathcal{D}'$ n'étant pas G-invariant, l'expression du coefficient de Laurent de f :

$$\hat{f}_1(\lambda) = \int_G f(g.x)\,\psi_1^\lambda(g.x)\,dg \qquad (\lambda \in \mathcal{P})$$

n'est valide que pour $x \in \mathcal{D}$.

8.2. UNE SITUATION PLUS GÉNÉRALE. — Nous aurons ultérieurement besoin d'une propriété tout à fait analogue au résultat précédent mais un peu plus générale.

Considérons pour cela un sous-groupe analytique H de G tel que la paire (G, H) soit une paire symétrique compacte. On note τ l'automorphisme involutif de $\mathfrak{g}$ correspondant, $\mathfrak{h}$ l'algèbre de Lie de H, et $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{q}$ la décomposition de $\mathfrak{g}$ en sous-espaces propres de τ. Soit $\mathfrak{d}$ une sous-algèbre abélienne, incluse dans $\mathfrak{p} \cap \mathfrak{q}$, et maximale pour ces propriétés. On peut supposer qu'on a choisi $\mathfrak{a}$ telle que $\mathfrak{d} \subset \mathfrak{a}$. Soit $\mathfrak{b}$ une sous-algèbre abélienne maximale dans $\mathfrak{q}$ contenant $\mathfrak{d}$.

On désigne par H_c la complexification universelle de H et par $\hat{G}_H$ l'ensemble des éléments de $\hat{G}$ qui sont de classe un par rapport à H. En vertu du théorème B, $\hat{G}_H$ est en correspondance bijective avec un sous-ensemble discret de $(i\,\mathfrak{b})^*$ qu'on note $\mathcal{Q}$. Pour tout $\lambda \in \mathcal{Q}$ on choisit un vecteur normé $w^\lambda \in E_\lambda$ invariant par l'action de H.

On se place désormais sous l'hypothèse suivante : $\hat{G}_H \cap \hat{G}_K$, en correspondance bijective avec $\mathcal{P} \cap \mathcal{Q} \subset (i\,\mathfrak{d})^*$, est non vide. Pour tout $\lambda \in \mathcal{P} \cap \mathcal{Q}$ on pose alors

$$\tilde{\varphi}_0^\lambda(g) = (M_\lambda(g)\, v_1^\lambda,\ w^\lambda),$$
$$\tilde{\psi}_0^\lambda(g) = (M_\lambda^*(g)\, w^\lambda,\ v_1^\lambda) \qquad (g \in G_c).$$

Clairement les fonctions $\tilde{\varphi}_0^\lambda$ et $\tilde{\psi}_0^\lambda$ sont holomorphes dans G_c, invariantes à gauche par H et à droite par K. En vertu de la proposition 5 elles sont donc invariantes à gauche par H_c et à droite par K_c. On note $\tilde{\varphi}_0^\lambda$ et $\tilde{\psi}_0^\lambda$ les fonctions holomorphes et H_c-invariantes dans X_c correspondantes.

Procédant comme à la proposition 24, on a alors le résultat suivant qui sera utile à la section 11.

PROPOSITION 25. — *Soient $\mathcal{D}$ un domaine* G*-invariant de* X_c *et* $f \in \mathcal{O}(\mathcal{D})$. *Il est équivalent de dire :*

(i) *f est* H*-invariante,*

(ii) *f est* H_c*-invariante,*

(iii) *sa série de Laurent prend la forme*

$$\sum_{\lambda \in \mathcal{P} \cap \mathcal{Q}} d_\lambda \hat{f}_0(\lambda)\, \varphi_0^\lambda(x) \qquad (x \in \mathcal{D}),$$

avec

$$\hat{f}_0(\lambda) = \int_G f(g.x)\, \psi_0^\lambda(g.x)\, dg \qquad (x \in \mathcal{D}).$$

On pourrait formuler une remarque analogue à la remarque 11.

9. Un premier exemple : les groupes compacts

Soient U un groupe analytique compact (non nécessairement semi-simple), C un tore maximal de U, et U_c la complexification universelle de U. On note $\mathfrak{u}$ et $\mathfrak{c}$ les algèbres de Lie respectives de U et C, et W le groupe de Weyl de U par rapport à C.

On désigne par $\tilde{U}$ la diagonale $\{(u, u), u \in U\}$ du produit direct $U \times U$. C'est l'ensemble des points fixes de l'automorphisme involutif $\tilde{\theta}$ de $U \times U$ défini par $\tilde{\theta} : (u_1, u_2) \to (u_2, u_1)$. La paire $(U \times U, \tilde{U})$ est une paire symétrique compacte et l'espace homogène $U \times U/\tilde{U}$ un espace riemannien globalement symétrique compact ([8], § 6, p. 188; § 4, p. 254).

Clairement $U_c \times U_c$ est la complexification universelle de $U \times U$. On note $\tilde{U}_c$ la diagonale de $U_c \times U_c$: c'est l'ensemble des points fixes de l'extension de $\tilde{\theta}$ à $U_c \times U_c$. L'espace homogène $U_c \times U_c/\tilde{U}_c$ est alors un espace (non riemannien) symétrique.

L'automorphisme involutif $\tilde{\theta}$ de $U \times U$ induit un automorphisme involutif $\theta = d\tilde{\theta}$ de l'algèbre de Lie $\mathfrak{u} \times \mathfrak{u}$ défini par $\theta : (X, Y) \to (Y, X)$. On note

$$\mathfrak{u} \times \mathfrak{u} = \mathfrak{u}_+ \oplus \mathfrak{u}_-,$$

la décomposition en sous-espaces propres de θ, avec

$$\mathfrak{u}_+ = \{(X, X), X \in \mathfrak{u}\} \qquad \text{et} \qquad \mathfrak{u}_- = \{(X, -X), X \in \mathfrak{u}\}.$$

La sous-algèbre

$$\mathfrak{c}_- = \{(X, -X), X \in \mathfrak{c}\}$$

est clairement une sous-algèbre abélienne, incluse dans $\mathfrak{u}_-$, et maximale pour ces propriétés. On note W_- le groupe de Weyl de $\mathfrak{u} \times \mathfrak{u}$ par rapport à $\mathfrak{c}_-$.

On sait ([1], p. 91) que l'application de $U_c \times U_c/\tilde{U}_c$ dans U_c définie par σ : $(g_1, g_2)\,\tilde{U}_c \to g_1\, g_2^{-1}$ est un isomorphisme de variétés analytiques complexes. On note σ sa différentielle au point $x_0 = (1, 1)\,\tilde{U}_c$: c'est un isomorphisme de $\mathfrak{u}_-$ sur $\mathfrak{u}$ défini par σ : $(X, -X) \to 2\,X$.

Alors il est immédiat qu'au moyen de ces isomorphismes on peut identifier :

– $\mathfrak{c}_-$ et $\mathfrak{c}$, W_- et W, les parties de $\mathfrak{c}_-$ invariantes par W_- et les parties de $\mathfrak{c}$ invariantes par W,

– la décomposition (6),

$$U_c \times U_c/\tilde{U}_c = (U \times U).\exp i\,\mathfrak{c}_-.x_0$$

et la décomposition classique

$$U_c = U.\exp i\,\mathfrak{c}.U$$

(décomposition « de Cartan » de U_c),

– le domaine $U \times U$-invariant de $U_c \times U_c/\tilde{U}_c$ de base $B \subset \mathfrak{c}_-$:

$$\mathscr{D}_B = (U \times U).\exp i\,B.x_0$$

et le domaine de U_c :

$$\tilde{\sigma}(\mathscr{D}_B) = U.\exp i\,\sigma(B).U,$$

bi-invariant par l'action de U.

Enfin on sait ([22], lemme 2.3.10, p. 27) que l'ensemble des classes de représentations irréductibles de $U \times U$ qui sont de classe un par rapport à $\tilde{U}$ est en correspondance bijective avec l'ensemble $\hat{U}$ des classes de représentations irréductibles de U.

A partir de ces identifications il est alors facile (on le laisse au lecteur) de transcrire les propriétés de l'analyse harmonique dans les domaines $U \times U$-invariants de $U_c \times U_c/\tilde{U}_c$ telles qu'on les a obtenues dans cet article, en autant de propriétés de l'analyse harmonique dans les domaines de U_c bi-invariants par l'action de U.

Sous le nom de « domaines de Reinhardt généralisés » ces domaines ont été étudiés dans [6] dans le cas particulier où la base est une boule, et indépendamment dans [14] dans le cas général. On vérifiera qu'on retrouve ainsi les résultats de [14].

Remarque 12. — L'ensemble $P \subset (i\,\mathfrak{c})^*$ des plus hauts poids des représentations irréductibles de U et l'ensemble $\mathscr{P}_- \subset (i\,\mathfrak{c}_-)^*$ des plus hauts poids des représentations irréductibles de $U \times U$ qui sont de classe un par rapport à $\tilde{U}$ sont en correspondance bijective par l'application transposée de σ définie par $\sigma' : \lambda \to (\lambda, -\lambda)$.
On sait ([8], § V, p. 407) que les fonctions sphériques zonales de $U \times U/\tilde{U}$ sont les caractères normés $\{ \chi_\lambda, \lambda \in P \}$ des représentations irréductibles de U :

$$\chi_\lambda(g) = \frac{1}{d_\lambda} \operatorname{tr}[M_\lambda(g)] \qquad (g \in U_c,\ \lambda \in P).$$

Il est alors facile de calculer directement la fonction a définie sur $\mathscr{P}_-$ à la proposition 13. On obtient

$$a(\sigma'(\lambda)) = d_\lambda \qquad (\lambda \in P).$$

Compte tenu de (20), l'expression explicite de la fonction d'Harish-Chandra due à Gindikin et Karpelevič redonne d'ailleurs dans ce cas la formule classique de Weyl pour d_λ (*voir* [24], vol. II, exemple, p. 327).

10. Espaces symétriques compacts de rang un

On considère maintenant l'exemple où $X = G/K$ est un espace symétrique compact de rang un (c'est-à-dire tel que $\dim \mathfrak{a} = 1$) dont le groupe d'isotropie est connexe. En vertu d'une classification classique (*voir* par exemple [20]), on sait qu'il s'agit (outre le tore $S^{(1)}$) de :

— la sphère $S^{(n)} = SO(n+1)/SO(n)$ ($n \geqq 2$), de dimension réelle n;

— l'espace projectif complexe $P^{(n)}(\mathbf{C}) = SU(n+1)/S(U(1) \times U(n))$ ($n \geqq 1$), de dimension réelle $2n$;

— l'espace projectif quaternionique $P^{(n)}(\mathbf{H}) = Sp(n+1)/Sp(1) \times Sp(n)$ ($n \geqq 1$), de dimension réelle $4n$;

— le plan projectif de Cayley $F_4/Spin(9)$, de dimension réelle 16.

En basse dimension on a les isomorphismes

$$P^{(1)}(\mathbf{C}) = S^{(2)}, \qquad P^{(1)}(\mathbf{H}) = S^{(4)}.$$

Du fait que $\dim \mathfrak{a} = 1$ résultent plusieurs propriétés que ces espaces ont en commun :

(*a*) L'ensemble Σ^+ des racines restreintes positives est réduit à deux éléments $\{ \alpha/2, \alpha \}$ (sauf pour la sphère $\Sigma^+ = \{ \alpha \}$). En vertu du théorème B, il en résulte dans chaque cas que

$$\mathscr{P} = \{ \lambda \in (i\,\mathfrak{a})^* : \lambda = l\alpha,\ l \in \mathbf{N} \}.$$

Les représentations de classe un de la paire (G, K) sont ainsi paramétrées par les entiers naturels. Pour tout $l \in \mathbf{N}$ on note φ_j^l et ψ_j^l $(1 \leqq j \leqq d_l)$ les éléments matriciels correspondants.

(*b*) Le groupe de Weyl est réduit à deux éléments : l'identité et la symétrie par rapport à l'origine. Ceci implique ([23], cor. 8.3, p. 25) que pour tout $l \in \mathbf{N}$ les fonctions φ_j^l $(1 \leqq j \leqq d_l)$ prennent des valeurs réelles sur X. On a donc

$$\varphi_j^l(x) = \psi_j^l(x) \qquad (x \in \mathrm{X};\ 1 \leqq j \leqq d_l)$$

et par continuation analytique la relation précédente s'étend à tout X_c.

(*c*) Si l'on pose $\mathfrak{a} = \mathbf{R}\,\mathrm{H}_0$ [avec $\alpha(\mathrm{H}_0) = 1$], un ouvert convexe de $\mathfrak{a}$ invariant par W s'identifie à un intervalle $]-\mathrm{R}, +\mathrm{R}[$. On note $\mathscr{D}_\mathrm{R}$ le domaine G-invariant de X_c de base $]-\mathrm{R}, +\mathrm{R}[$: en vertu du théorème 4, c'est un voisinage de Stein de X dans X_c. Par la décomposition (6), tout élément de $\mathscr{D}_\mathrm{R}$ peut s'écrire

$$x = g.\exp it\,\mathrm{H}_0.x_0,$$

avec $t \in [0, \mathrm{R}[$ unique, mais non $g \in \mathrm{G}$.

Pour tout $t > 0$ on pose $x_t = \exp it\,\mathrm{H}_0.x_0$. Pour tout $f \in \mathcal{O}(\mathscr{D}_\mathrm{R})$ on note $\{\hat{f}_j(l);\ l \in \mathbf{N},\ 1 \leqq j \leqq d_l\}$ la famille de ses coefficients de (Fourier-) Laurent définis par

$$\hat{f}_j(l) = \int_\mathrm{G} f(g.x)\,\varphi_j^l(g.x)\,dg \qquad (x \in \mathscr{D}_\mathrm{R}),$$

ou encore en vertu de (21),

$$\hat{f}_j(l) = [\varphi_1^l(x_t)]^{-1} \int_\mathrm{G} f(g.x_t)\,\varphi_j^l(g.x_0)\,dg,$$

avec $t \in [0, \mathrm{R}[$ arbitraire.

Nous explicitons maintenant le théorème 3 dans le cas de la sphère et de l'espace projectif complexe.

10.1. La sphère. – On a $\mathrm{G}_c = \mathrm{SO}(n+1, \mathbf{C})$, $\mathrm{K}_c = \mathrm{SO}(n, \mathbf{C})$. $\mathrm{S}_c^{(n)} = \mathrm{G}_c/\mathrm{K}_c$ est une variété algébrique affine de dimension complexe n définie par le polynôme $\left[\sum_{i=1}^{n+1} z_i^2 - 1\right]$. C'est un espace fibré de base $\mathrm{S}^{(n)}$ et de fibre type $\mathbf{R}^n$.

Il est classique (*voir* par exemple [23], exemple 1, p. 25) que la représentation de SO $(n+1)$ de plus haut poids $l\alpha$ $(l \in \mathbf{N})$ se réalise dans l'espace des polynômes harmoniques homogènes de degré l à $(n+1)$ variables réelles, de dimension

$$d_l = \frac{(2l+n-1)(n+l-2)!}{(n-1)!\,l!}.$$

On note E_l l'espace des restrictions à $\mathrm{S}^{(n)}$ de tels polynômes (harmoniques sphériques de degré l). Soit $\{\mathrm{S}_j^l,\ 1 \leqq j \leqq d_l\}$ une base orthonormée de E_l. On sait [20] que l'harmonique sphérique zonale S_1^l s'identifie au polynôme de Gegenbauer normé : $\lambda_l\, C_l^{(n-1)/2}$, avec

$$\lambda_l^{-1} = C_l^{(n-1)/2}(1) = \binom{l+n-2}{l}.$$

Alors toute fonction f holomorphe dans un domaine SO$(n+1)$-invariant $\mathcal{D}_R \subset S_c^{(n)}$ de base $]-R, +R[$ y admet un développement en harmoniques sphériques

$$f(x) = \sum_{l \in \mathbf{N}} d_l \sum_{j=1}^{d_l} \hat{f}_j(l)\, S_j^l(x) \qquad (x \in \mathcal{D}_R)$$

normalement convergent sur tout compact de $\mathcal{D}_R$ et dont les coefficients décroissent exponentiellement :

$$(34) \qquad \forall t \in [0, R[, \quad \exists C_t > 0, \quad \forall l \in \mathbf{N}, \qquad \| \hat{f}(l) \| \leqq C_t e^{-lt}.$$

10.2. Le projectif complexe. — On ne fait évidemment pas intervenir ici la structure complexe naturelle de $P^{(n)}(\mathbf{C})$, qu'on considère comme variété analytique réelle de dimension $2n$. On a $G_c = SL(n+1, \mathbf{C})$, $K_c = S(\mathbf{C}^* \times GL(n, \mathbf{C}))$. $[P^{(n)}(\mathbf{C})]_c$ est un espace fibré de base $P^{(n)}(\mathbf{C})$ et de fibre type $\mathbf{C}^n$.

On sait ([23], exemple 2, p. 25) que la représentation de SU$(n+1)$ ayant $l\alpha$ $(l \in \mathbf{N})$ pour plus haut poids se réalise dans l'espace des polynômes harmoniques à $2(n+1)$ variables réelles $(z_1, \ldots, z_{n+1}, \bar{z}_1, \ldots, \bar{z}_{n+1})$ qui sont séparément homogènes de degré l en $(z_1, \ldots, z_{n+1})$ et $(\bar{z}_1, \ldots, \bar{z}_{n+1})$. On note E_l l'espace des fonctions sur $P^{(n)}(\mathbf{C})$ obtenues à partir de tels polynômes par passage au quotient pour la projection canonique $\mathbf{C}^{n+1} \setminus \{0\} \to P^{(n)}(\mathbf{C})$. On dit que E_l, de dimension

$$d_l = \frac{2l+n}{n}\left[\frac{(l+n-1)!}{l!(n-1)!}\right]^2$$

est l'espace des harmoniques hermitiennes de degré l. On choisit une base orthonormée $\{H_j^l, 1 \leqq j \leqq d_j\}$ de E_l. Alors [20] l'harmonique hermitienne zonale H_1^l s'identifie au polynôme de Jacobi normé $\mu_l\, P_l^{(n-1, 0)}$, avec

$$\mu_l^{-1} = P_l^{(n-1, 0)}(1) = \binom{l+n-1}{l}.$$

Toute fonction f holomorphe dans un domaine SU$(n+1)$-invariant $\mathcal{D}_R \subset [P^{(n)}(\mathbf{C})]_c$ de base $]-R, +R[$ y admet un développement en harmoniques hermitiennes

$$f(x) = \sum_{l \in \mathbf{N}} d_l \sum_{j=1}^{d_l} \hat{f}_j(l)\, H_j^l(x) \qquad (x \in \mathcal{D}_R)$$

normalement convergent sur tout compact de $\mathcal{D}_R$ et dont les coefficients satisfont la loi (34) de décroissance exponentielle.

Remarque 13. — En vertu de la proposition 24 on voit dans chaque cas que si f est $\mathrm{SO}(n)$-invariante [resp. $\mathrm{S}(\mathrm{U}(1)\times\mathrm{U}(n))$-invariante] dans $\mathscr{D}_{\mathrm{R}}$, sa série de Laurent se réduit à un développement en polynômes de Jacobi particuliers ([9]) $\mathrm{C}_l^{(n-1)/2}$ (resp. $\mathrm{P}_l^{(n-1,\,0)}$). La section suivante va préciser cette propriété.

11. Séries de polynômes de Jacobi

Le résultat suivant est classique ([19], th. 9.1.1, p. 245).

THÉORÈME F. — *Toute fonction holomorphe à l'intérieur d'une ellipse de foyers* $(-1, +1)$ *et de demi-grand-axe* $\operatorname{ch} \mathrm{R}$ $(\mathrm{R} > 0)$ *y admet un développement en série de polynômes de Jacobi :*

$$f(z) = \sum_{l\in\mathbf{N}} c_l \mathrm{P}_l^{(\alpha,\,\beta)}(z) \qquad (\alpha > -1,\ \beta > -1)$$

normalement convergent sur tout compact et dont les coefficients décroissent exponentiellement :

$$\forall t \in [0, \mathrm{R}[,\quad \exists\, \mathrm{C}_t > 0,\quad \forall\, l \in \mathbf{N},\qquad |c_l| \leqq \mathrm{C}_t\, e^{-lt}. \tag{35}$$

Nous nous proposons maintenant d'indiquer comment on peut établir cette propriété à partir de nos résultats pour tous les polynômes de Jacobi tels que α et β soient entiers ou demi-entiers $\geqq -1/2$. La situation où cette condition n'est pas satisfaite est sans rapport direct avec la théorie des groupes.

Il convient d'observer que la démonstration que nous donnons est tout à fait différente dans son principe de la preuve classique ([19], p. 251). Celle-ci repose sur l'introduction des « fonctions de Jacobi de seconde espèce » ([10]). La démonstration qui suit a lieu au contraire « hors du plan complexe », plus précisément sur la sphère complexe $\mathrm{S}_c^{(n)}$.

Pour la clarté de l'exposé il est utile de traiter d'abord le cas des polynômes de Gegenbauer [c'est-à-dire ([9]) $\alpha = \beta = (n-2)/2$; $n \geqq 2$]. On indique ensuite comment la méthode suivie (qui simplifie et généralise celle de [6]) peut être adaptée au cas des polynômes de Jacobi tels que $\alpha, \beta \in 1/2\,\mathbf{Z}$; $\alpha, \beta \geqq -1/2$.

11.1. NOTATIONS. — On reprend désormais (et jusqu'à la fin) les notations de la section 10.1 : $\mathrm{G} = \mathrm{SO}(n+1)$; $\mathrm{K} = \mathrm{SO}(n)$ est le sous-groupe d'isotropie du point $x_0 \in \mathrm{S}^{(n)}$ dont les coordonnées dans $\mathbf{R}^{n+1}$ sont $(1, 0, \ldots, 0)$. $\mathfrak{g}$ (resp. $\mathfrak{k}$) est l'algèbre des matrices antisymétriques d'ordre $n+1$ (resp. n) et on a

$$\mathfrak{p} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{Y} \\ -{}^t\mathrm{Y} & 0 \end{pmatrix},\ \mathrm{Y} \text{ matrice-ligne } 1\times n \right\}.$$

([9]) On rappelle ([19], p. 80) qu'à une constante près le polynôme de Gegenbauer C_l^{λ} n'est autre que le polynôme de Jacobi $\mathrm{P}_l^{(\alpha,\,\alpha)}$, avec $\alpha = \lambda - (1/2)$.

([10]) Pour un traitement de ces dernières dans le cadre de la théorie des groupes, *voir* par exemple le chapitre III de [10].

Une sous-algèbre abélienne maximale dans $\mathfrak{p}$ est donnée par $\mathfrak{a} = \mathbf{R}\, H_0$, avec $H_0 = E_{1,\, n+1} - E_{n+1,\, 1}$ (on donne au symbole E_{ij} sa signification classique). Il n'y a qu'une racine restreinte positive définie par $\alpha : t\, H_0 \to t$. W est le groupe à deux éléments. Un ouvert convexe de $\mathfrak{a}$ invariant par W s'identifie par α à un intervalle $]-R, +R[$. On note $\mathscr{D}_R$ le domaine SO $(n+1)$-invariant de $S_c^{(n)}$ correspondant.

On a la décomposition de Cartan $G = K.\exp \mathfrak{a}.K$. Tout élément de SO $(n+1)$ peut s'écrire

$$g = k'.\exp\theta\, H_0 . k, \tag{36}$$

où $\theta \in [0, \pi]$ est unique, mais non $k, k' \in SO(n)$.

Soit $\tilde{\Phi}$ la fonction sur SO $(n+1)$ définie par $\tilde{\Phi} : g \to (g x_0, x_0)$, où l'on note $(,)$ le produit scalaire euclidien dans $\mathbf{R}^{n+1}$. Clairement $\tilde{\Phi}$ est bi-invariante par SO (n) et avec la décomposition (36), on obtient

$$\tilde{\Phi}(g) = \cos\theta.$$

Comme élément matriciel de la représentation naturelle de SO $(n+1)$, $\tilde{\Phi}$ se prolonge en une fonction holomorphe dans SO $(n+1, \mathbf{C})$. En vertu de la proposition 5, cette extension est bi-invariante par SO $(n, \mathbf{C})$. On note Φ la fonction holomorphe et SO $(n, \mathbf{C})$-invariante dans $S_c^{(n)}$ qui lui correspond.

Il est classique [20] que sur $S^{(n)}$ l'harmonique sphérique zonale S_1^l $(l \in \mathbf{N})$ se factorise par la fonction Φ et le polynôme de Gegenbauer normé. Par continuation analytique c'est encore le cas sur $S_c^{(n)}$:

$$S_1^l(x) = \lambda_l\, C_l^{(n-1)/2}(\Phi(x)) \qquad (x \in S_c^{(n)}). \tag{37}$$

11.2. Les ellipses comme contours apparents. — Pour tout $R > 0$ on note e_R l'ellipse de foyers $(-1, +1)$ et de demi-grand-axe ch R. On désigne par E_R le compact dont elle est la frontière et par $\mathring{E}_R$ son intérieur. Il est élémentaire de vérifier que e_R est exactement l'ensemble des points de $\mathbf{C}$ qui s'écrivent $z = \cos(\theta \pm i R)$, avec $\theta \in [0, \pi]$. On note $\mathscr{O}(\mathring{E}_R)$ l'espace des fonctions holomorphes dans $\mathring{E}_R$ et $\mathscr{O}^{\natural}(\mathscr{D}_R)$ l'espace des fonctions holomorphes et SO $(n, \mathbf{C})$-invariantes dans $\mathscr{D}_R$.

En vertu de la décomposition (6), tout élément de $\mathscr{D}_R$ peut s'écrire

$$x = g.\exp \mathrm{it}\, H_0 . x_0,$$

avec $t \in [0, R[$ unique, mais non $g \in SO(n+1)$. Pour tout $t > 0$ on pose $x_t = \exp \mathrm{it}\, H_0 . x_0$. On note $G.x_t$ son orbite par SO $(n+1)$.

Le résultat suivant peut être considéré comme une propriété de « contour apparent » des orbites de SO $(n+1)$ dans $S_c^{(n)}$.

Proposition 26. — *Le compact E_t est exactement l'image par Φ de l'orbite $G.x_t$.*

Preuve. — En vertu de la décomposition de Cartan (36), tout élément de $G.x_t$ s'écrit

$$x = k'.\exp\theta\, H_0 . k . \exp \mathrm{it}\, H_0 . x_0,$$

avec $\theta \in [0, \pi]$ et $k, k' \in \mathrm{SO}(n)$. D'où par la bi-invariance de $\tilde{\Phi}$ sous l'action de $\mathrm{SO}(n, \mathbf{C})$,

$$\begin{aligned}\Phi(x) &= \tilde{\Phi}(\exp\theta\,\mathrm{H}_0 . k . \exp it\,\mathrm{H}_0)\\ &= (k . \exp it\,\mathrm{H}_0 . x_0, \exp-\theta\,\mathrm{H}_0 . x_0),\end{aligned}$$

avec $\theta \in [0, \pi]$ et $k \in \mathrm{SO}(n)$ arbitraires. Désignons par $\{ k_{ij}, 1 \leqq i, j \leqq n \}$ les éléments matriciels de $k \in \mathrm{SO}(n)$. Comme l'on a

$$\exp it\,\mathrm{H}_0 . x_0 = \begin{bmatrix} \cos it \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -\sin it \end{bmatrix}, \qquad \exp-\theta\,\mathrm{H}_0 . x_0 = \begin{bmatrix} \cos\theta \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \sin\theta \end{bmatrix},$$

on obtient

$$\Phi(x) = \cos it \cos\theta - k_{1n} \sin it \sin\theta. \tag{38}$$

Lorsque $k_{1n} = \pm 1$ (resp. $k_{1n} = 0$) et que θ varie entre 0 et π, $\Phi(x)$ décrit l'ellipse e_t (resp. son grand-axe $[-\operatorname{ch} t, \operatorname{ch} t]$). D'autre part l'orthogonalité de k implique $|k_{1n}| \leqq 1$. Comme (38) peut s'écrire

$$\Phi(x) = \pm\, k_{1n} \cos(\theta \pm it) + (1 \mp k_{1n}) \cos\theta \cos it,$$

on voit que $\Phi(\mathrm{G} . x_t)$ est exactement l'enveloppe convexe de e_t et de son grand-axe, c'est-à-dire précisément le compact E_t. ■

PROPOSITION 27. — *L'application* $f \to f \circ \Phi$ *est un isomorphisme de* $\mathcal{O}(\mathring{\mathrm{E}}_{\mathrm{R}})$ *sur* $\mathcal{O}^{\natural}(\mathcal{D}_{\mathrm{R}})$.

Preuve. — Il résulte de la proposition 26 que $\Phi(\mathcal{D}_{\mathrm{R}}) = \mathring{\mathrm{E}}_{\mathrm{R}}$. Si $f \in \mathcal{O}(\mathring{\mathrm{E}}_{\mathrm{R}})$, on a donc $f \circ \Phi \in \mathcal{O}^{\natural}(\mathcal{D}_{\mathrm{R}})$ puisque Φ est holomorphe et $\mathrm{SO}(n, \mathbf{C})$-invariante dans $\mathrm{S}_c^{(n)}$.

Inversement si $g \in \mathcal{O}^{\natural}(\mathcal{D}_{\mathrm{R}})$, la proposition 24 implique que sa série de Laurent prend la forme

$$g(x) = \sum_{l \in \mathbf{N}} d_l \hat{g}_1(l)\, \mathrm{S}_1^l(x) \qquad (x \in \mathcal{D}_{\mathrm{R}}),$$

ou encore compte tenu de (37),

$$g(x) = \sum_{l \in \mathbf{N}} d_l \lambda_l \hat{g}_1(l)\, \mathrm{C}_l^{(n-1)/2}(\Phi(x)) \qquad (x \in \mathcal{D}_{\mathrm{R}}).$$

En vertu de la proposition 26, la convergence normale de cette série sur tout compact de $\mathcal{D}_{\mathrm{R}}$ implique la convergence normale sur tout compact de $\mathring{\mathrm{E}}_{\mathrm{R}}$ de la série

$$\sum_{l \in \mathbf{N}} d_l \lambda_l \hat{g}_1(l)\, \mathrm{C}_l^{(n-1)/2}(z) \qquad (z \in \mathring{\mathrm{E}}_{\mathrm{R}}).$$

La somme définit une fonction $f \in \mathcal{O}(\mathring{\mathrm{E}}_{\mathrm{R}})$ telle que $g = f \circ \Phi$. ■

Il est clair qu'on a ainsi établi le théorème F pour le cas des polynômes de Gegenbauer, c'est-à-dire (9) $\alpha = \beta = (n-2)/2$ $(n \geqq 2)$, la loi de décroissance (35) étant impliquée par (34).

11.3. Les polynômes de Jacobi comme harmoniques sphériques. — Soient maintenant q et p deux entiers positifs tels que $q+p = n+1$ ($n \geqq 2$). On note $\mathbf{R}^q$ (resp. $\mathbf{R}^p$) le sous-espace engendré par les q premiers (resp. les p derniers) vecteurs de la base canonique de $\mathbf{R}^{n+1}$. On considère le sous-groupe $H = SO(q) \times SO(p)$ de $SO(n+1)$ qui laisse ces sous-espaces invariants.

On définit une fonction χ sur $S^{(n)}$ de la façon suivante. Tout élément de $S^{(n)}$ s'écrit de manière unique

$$x = \cos\theta\, x' + \sin\theta\, x'',$$

avec $\theta \in [0, \pi/2]$, et $x' \in S^{(n)} \cap \mathbf{R}^q$, $x'' \in S^{(n)} \cap \mathbf{R}^p$. Alors on pose

$$\chi(x) = \cos 2\theta.$$

C'est clairement une fonction $SO(q) \times SO(p)$-invariante sur $S^{(n)}$. Si $x = g.x_0$ ($g \in SO(n+1)$), $\chi(x)$ est somme de carrés d'éléments matriciels de g. Il en résulte que la fonction χ se prolonge en une fonction holomorphe dans $S_c^{(n)}$. Cette extension est alors invariante par $SO(q, \mathbf{C}) \times SO(p, \mathbf{C})$ en vertu de la proposition 5.

On sait ([8], p. 349) que la paire $[SO(n+1), SO(q) \times SO(p)]$ est une paire symétrique compacte. Avec les notations introduites en 8.2, on a

$$\mathfrak{q} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & X \\ -{}^tX & 0 \end{pmatrix}, \text{X matrice } q \times p \right\}.$$

$\mathfrak{a} = \mathbf{R}\, H_0$ est une sous-algèbre abélienne maximale dans $\mathfrak{p} \cap \mathfrak{q}$. A partir du théorème B on établit facilement que

$$\mathscr{P} \cap \mathscr{Q} = \{ \lambda \in (i\,\mathfrak{a})^* : \lambda = 2\,l\,\alpha,\ l \in \mathbf{N} \}.$$

Réalisée dans l'espace E_{2l} des harmoniques sphériques de degré $2\,l$, la représentation de classe un de la paire $[SO(n+1), SO(n)]$ ayant $2\,l\,\alpha$ pour plus haut poids possède donc un vecteur $SO(q) \times SO(p)$-invariant qu'on note S_0^{2l}.

On a pu déterminer ce vecteur $SO(q) \times SO(p)$-invariant (*voir* par exemple [12], th. 4.1, p. 241) :

$$S_0^{2l}(x) = P_l^{(p/2-1,\, q/2-1)}(\chi(x)) \qquad (x \in S^{(n)}).$$

On voit qu'on dispose ainsi d'une interprétation des polynômes de Jacobi à coefficients entiers ou demi-entiers $\geqq -1/2$ comme harmoniques sphériques invariantes. Par continuation analytique la relation précédente s'étend à tout $S_c^{(n)}$.

Pour tout $R > 0$, on note $\mathscr{O}^\#(\mathscr{D}_R)$ l'espace des fonctions holomorphes et $SO(q, \mathbf{C}) \times SO(p, \mathbf{C})$-invariantes dans $\mathscr{D}_R$. En vertu de la proposition 25, la série de Laurent de $f \in \mathscr{O}^\#(\mathscr{D}_R)$ se réduit à un développement sur les harmoniques sphériques S_0^{2l} ($l \in \mathbf{N}$) :

$$f(x) = \sum_{l \in \mathbf{N}} d_{2l}\, \hat{f}_0(2\,l)\, S_0^{2l}(x) \qquad (x \in \mathscr{D}_R).$$

Par un calcul analogue à celui donné à la proposition 26 (mais plus complexe et faisant intervenir une décomposition de Cartan généralisée de $SO(n+1)$ donnée en [12], p. 243; *voir* aussi [5]), on montrerait que pour tout $t > 0$, $\chi(G.x_t) = E_{2t}$.

En conséquence $\chi(\mathscr{D}_{R/2}) = \mathring{E}_R$ et l'application $f \to f \circ \chi$ est un isomorphisme de $\mathscr{O}(\mathring{E}_R)$ sur $\mathscr{O}^{\#}(\mathscr{D}_{R/2})$. Ceci établit le théorème F pour $\alpha = (p/2)-1$, $\beta = (q/2)-1$.

11.4. REMARQUE FINALE. — Désignons par $E_{RR'}$ le compact du plan complexe dont la frontière est $e_R \cup e_{R'}$ $(R > R' > 0)$ et par $\mathscr{D}_{RR'}$ le domaine SO $(n+1)$-invariant de $S_c^{(n)}$ de base $]-R, -R'[\cup]R', R[$. On pourrait penser que l'application $f \to f \circ \Phi$ (resp. $f \to f \circ \chi$) est un isomorphisme de $\mathscr{O}(\mathring{E}_{RR'})$ sur $\mathscr{O}^{\natural}(\mathscr{D}_{RR'})$ [resp. $\mathscr{O}^{\#}(\mathscr{D}_{R/2\ R'/2})$]. Il n'en est rien.

En effet il résulte clairement de la proposition 26 (resp. de son analogue) que

$$\Phi(\mathscr{D}_{RR'}) = \mathring{E}_R \qquad [\text{resp. } \chi(\mathscr{D}_{R/2\ R'/2}) = \mathring{E}_R].$$

On voit ainsi que les seules fonctions holomorphes dans la « couronne elliptique » $\mathring{E}_{RR'}$ qui peuvent se relever en fonctions holomorphes dans un domaine SO $(n+1)$-invariant de $S_c^{(n)}$ sont celles qui se prolongent dans $\mathring{E}_R$, c'est-à-dire « jusqu'au réel ».

On retrouve donc naturellement ici le même phénomène qu'à la proposition 17.

Il est d'ailleurs classique ([19], th. 9.2.2, p. 252) que la description des fonctions holomorphes dans une couronne elliptique (et pas plus loin) requiert la considération de développements en séries de « fonctions de Jacobi de seconde espèce » ([10]). On voit qu'aucune interprétation en termes de théorie des groupes n'a pu être donnée ici à ce type de développement, et que c'est abusivement qu'on parle à son propos d'analogue du développement de Laurent.

BIBLIOGRAPHIE

[1] M. BERGER, *Les espaces symétriques non compacts* (*Ann. scient. Éc. Norm. Sup.*, t. 74, 1957, p. 85-177).

[2] N. BOURBAKI, *Variétés différentiables et analytiques*, Fascicule de résultats, § 1 à 7, Hermann, Paris, 1967.

[3] E. CARTAN, *Sur la détermination d'un système orthogonal complet dans un espace de Riemann symétrique clos* (*Rend. Circ. Mat. Palermo*, vol. 53, 1929, p. 217-252).

[4] A. CEREZO, *Solutions analytiques des équations invariantes sur un groupe compact ou complexe réductif* (*Ann. Inst. Fourier*, vol. 25, 1975, p. 249-277).

[5] M. FLENSTED-JENSEN, *Spherical Functions on Rank one Symmetric Spaces and Generalizations*, p. 339-342, in *Harmonic Analysis on Homogeneous Spaces*, Amer. Math. Soc., Providence, 1973.

[6] L. FROTA-MATTOS, *Analytic Continuation of the Fourier Series on Connected Compact Lie Groups*, Thèse, Rutgers University (1975).

[7] HARISH-CHANDRA, *Spherical Functions on a Semi-Simple Lie Group*, I (*Amer. J. Math.*, vol. 80, 1958, p. 241-310).

[8] S. HELGASON, *Differential Geometry and Symmetric Spaces*, Academic Press, New York, 1962.

[9] S. HELGASON, *A Duality for Symmetric Spaces with Applications to Group Representations* (*Advances in Math.*, vol. 5, 1970, p. 1-154).

[10] R. HERMANN, *Fourier Analysis on Groups and Partial Wave Analysis*, Benjamin, New York, 1969.

[11] G. HOCHSCHILD, *The Structure of Lie Groups*, Holden-Day, San Francisco, 1965.

[12] T. KOORNWINDER, *The Addition Formula for Jacobi Polynomials and Spherical Harmonics* (*S.I.A.M. J. Appl. Math.*, vol. 25, 1973, p. 236-246).

[13] B. KOSTANT, *On Convexity, the Weyl Group and the Iwasawa Decomposition* (*Ann. scient. Éc. Norm. Sup.*, t. 6, 1973, p. 413-455).

[14] M. Lassalle, *Sur la transformation de Fourier-Laurent dans un groupe analytique complexe réductif* [*Ann. Inst. Fourier*, vol. 28, 1978 (à paraître)].

[15] O. Loos, *Symmetric Spaces*, vol. I, Benjamin, New York, 1969.

[16] Y. Matsushima et A. Morimoto, *Sur certains espaces fibrés holomorphes sur une variété de Stein* (*Bull. Soc. math. Fr.*, t. 88, 1960, p. 137-155).

[17] Y. Matsushima, *Espaces homogènes de Stein des groupes de Lie complexes* (*Nagoya Math. J.*, vol. 16, 1960, p. 205-218).

[18] W. Schmid, *Die Randwerte holomorpher Funktionen auf hermitesch symmetrischen Raümen* (*Invent. Math.*, vol. 9, 1969, p. 61-80).

[19] G. Szegö, *Orthogonal Polynomials*, Amer. Math. Soc., Providence, 1975.

[20] R. Takahashi, *Fonctions de Jacobi et représentations des groupes de Lie*, p. 701-710, in *Analyse harmonique sur les groupes de Lie*, *Lecture Notes*, n° 497, Springer, Berlin, 1975.

[21] M. Takeuchi, *Polynomial Representations Associated with Symmetric Bounded Domains* (*Osaka J. Math.*, vol. 10, 1973, p. 441-475).

[22] N. Wallach, *Harmonic Analysis on Homogeneous Spaces*, Marcel Dekker, New York, 1973.

[23] N. Wallach, *Minimal Immersions of Symmetric Spaces into Spheres*, p. 1-40, in *Symmetric Spaces*, Marcel Dekker, New York, 1972.

[24] G. Warner, *Harmonic Analysis on Semi-Simple Lie Groups*, vol. I-II, Springer, Berlin, 1972.

(Manuscrit reçu le 14 septembre 1977,
révisé le 15 février 1978.)

Michel Lassalle
5, avenue de Verrières,
91300 Massy