

ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

ANDRÉ HAEFLIGER

Sur la cohomologie de l'algèbre de Lie des champs de vecteurs

Annales scientifiques de l'É.N.S. 4^e série, tome 9, n° 4 (1976), p. 503-532

http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1976_4_9_4_503_0

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1976, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (<http://www.elsevier.com/locate/ansens>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR LA COHOMOLOGIE DE L'ALGÈBRE DE LIE DES CHAMPS DE VECTEURS

PAR ANDRÉ HAEFLIGER

A Henri Cartan,
à l'occasion de son
70^e anniversaire

Introduction

Le but de cet article est de démontrer les théorèmes suivants, dont les démonstrations sont esquissées dans [9], et qui complètent les résultats de Gelfand et Fuchs ([4], [5]).

Soit \mathcal{L}_M l'algèbre de Lie des champs de vecteurs différentiables sur une variété M de dimension n , munie de la topologie C^∞ . On désigne par $C^*(\mathcal{L}_M)$ l'algèbre des formes multilinéaires alternées continues sur \mathcal{L}_M à valeurs réelles, avec la différentielle usuelle.

Soit Ω_M l'algèbre des formes différentielles sur M avec la topologie C^∞ .

THÉORÈME A. — *Il existe un espace vectoriel gradué V ne dépendant que de n , de dimension finie en chaque degré et nul en degré $\leq 2n$;*

une différentielle sur l'algèbre $S^(\Omega_M \otimes V)$ des formes multilinéaires continues symétriques sur l'espace vectoriel gradué $\Omega_M \otimes V$ ne dépendant que de la différentielle dans Ω_M et des classes de Pontrjagin de M ;*

et un homomorphisme continu

$$\Phi_M : S^*(\Omega_M \otimes V) \rightarrow C^*(\mathcal{L}_M)$$

d'algèbres différentielles graduées induisant un isomorphisme en cohomologie.

L'intérêt de ce théorème est justifié par le résultat suivant :

THÉORÈME B. — *Soit A une algèbre différentielle graduée de dimension finie, nulle en degré supérieur à $2n$ et;*

soit $\alpha : A \rightarrow \Omega_M$ un morphisme induisant un isomorphisme sur la cohomologie.

Il existe alors sur l'algèbre $S^(A \otimes V)$ des formes multilinéaires symétriques sur $A \otimes V$ une différentielle telle que l'homomorphisme*

$$S^*(\Omega_M \otimes V) \rightarrow S^*(A \otimes V)$$

induit par $\alpha \otimes 1$ induise un isomorphisme en cohomologie.

Ainsi dans ce cas, le calcul de la cohomologie de $C^*(\mathcal{L}_M)$ se ramène au calcul de la cohomologie d'un complexe fini en chaque degré. Des énoncés plus complets des théorèmes A et B sont donnés dans 3.1.

Disons brièvement comment est construit l'espace vectoriel V . La cohomologie $H^*(n)$ des champs de vecteurs formels sur R^n a été calculée par Gelfand-Fuchs (cf. [5]); c'est une algèbre de dimension finie, avec $H^q(n) = 0$ si $0 < q \leq 2n$. Soit $L(n)$ l'algèbre de Lie graduée libre sur l'espace vectoriel gradué W , où W_{q-1} est le dual de $H^q(n)$ pour $q \neq 0$ et nul pour $q = 0$. Alors V est égal à $L(n)$ avec les degrés élevés d'une unité.

Les théorèmes précédents sont encore vrais si l'on remplace \mathcal{L}_M (resp. Ω_M) par l'algèbre de Lie des champs de vecteurs (resp. les formes différentielles) à support compact. Comme cas particulier, on obtient le résultat suivant :

COROLLAIRE. — *La cohomologie de l'algèbre de Lie des champs de vecteurs à support compact sur R^n est l'algèbre symétrique sur l'espace vectoriel gradué $\Sigma^{-n}V$ obtenu à partir de V en diminuant les degrés de n unités.*

Dans cette rédaction, nous avons surtout insisté sur le point de vue algébrique (réduisant ainsi au minimum le rôle de l'analyse fonctionnelle). Nous avons redonné au paragraphe 2 une démonstration du théorème de Guillemin-Losik que nous utilisons essentiellement.

Les méthodes de ce travail peuvent sans doute s'appliquer pour calculer la cohomologie de \mathcal{L}_M avec des coefficients non triviaux.

Nous renvoyons à [9] pour les commentaires relatifs à la conjecture de Bott et la description dans la théorie de Sullivan de l'espace des sections d'un fibré.

L'auteur a grandement profité de conversations avec Dennis Sullivan.

1. Préliminaires algébriques

Dans ce paragraphe, le corps de base K est de caractéristique 0.

1.1. L'ALGÈBRE DES FORMES MULTILINÉAIRES SYMÉTRIQUES. — Le but de ce paragraphe est de préciser les conventions de signes.

Un espace vectoriel gradué inférieurement V est une collection d'espaces vectoriels V_q indexés par les entiers q . A tout espace vectoriel gradué inférieurement correspond un espace vectoriel gradué supérieurement V avec $V^q = V_{-q}$ et réciproquement.

Si V et W sont des espaces vectoriels gradués, alors $V \otimes W$ est l'espace vectoriel gradué dont la composante de degré n est la somme directe des $V_q \otimes W_{n-q}$, $q \in \mathbf{Z}$.

$\text{Hom}(V, W)$ est l'espace vectoriel gradué dont la composante de degré n est le produit direct des espaces vectoriels d'applications linéaires $\text{Hom}(V_q, W_{n+q})$, $q \in \mathbf{Z}$.

Une différentielle sur V est une application de V dans V telle que $d^2 = 0$ et que d soit de degré -1 si V est gradué inférieurement et $+1$ dans le cas contraire. On dira que V est un espace vectoriel différentiel gradué (ou DG-espace vectoriel).

Si V et W sont des DG-espaces vectoriels, on définit une différentielle sur $V \otimes W$ par la formule

$$d(v \otimes w) = dv \otimes w + (-1)^{\text{deg } v} v \otimes dw$$

et sur $\text{Hom}(V, W)$ par

$$(df)(v) = d(fv) - (-1)^{\text{deg } f} f(dv).$$

Si V, V', W, W' sont des DG-espaces vectoriels, et si $f \in \text{Hom}(V, W)$ et $f' \in \text{Hom}(V', W')$, alors $f \otimes f' \in \text{Hom}(V \otimes V', W \otimes W')$ est défini par

$$(f \otimes f')(v \otimes v') = (-1)^{\text{deg } f' \cdot \text{deg } v} f(v) \otimes f'(v').$$

On aura alors

$$d(f \otimes f') = df \otimes f' + (-1)^{\text{deg } f} f \otimes df'.$$

L'algèbre symétrique $S_*(V)$ sur V est le quotient de l'algèbre tensorielle $T_*(V)$ sur V par l'idéal engendré par les éléments de la forme $x \otimes y - (-1)^{\text{deg } x \cdot \text{deg } y} y \otimes x$. Ainsi pour une permutation σ , on a dans $S_n(V)$:

$$v_{\sigma(1)} \cdot v_{\sigma(2)} \cdots v_{\sigma(n)} = \pm v_1 \cdot v_2 \cdots v_n,$$

le signe $+$ ou $-$ correspond à la signature de la permutation induite sur les variables de degré impair.

Par convention, dans une égalité où les mêmes symboles gradués apparaissent dans les deux membres, le signe \pm signifie que l'on doit mettre le signe correspondant à la permutation qui fait passer d'un membre à l'autre. Par exemple, une des formules ci-dessus pourra s'écrire :

$$(df)(v) = d(fv) - \pm f(dv).$$

$S^*(V)$ est une algèbre graduée commutative (c'est-à-dire $ab = \pm ba$). L'application diagonale $V \rightarrow V \oplus V$ s'étend suivant un homomorphisme d'algèbre unique

$$\Delta : S_*(V) \rightarrow S_*(V \otimes V) = S_*(V) \otimes S_*(V)$$

qui fait de $S_*(V)$ une coalgèbre graduée commutative (en fait une algèbre de Hopf).

Si C est une coalgèbre graduée avec comultiplication Δ , et A une algèbre graduée avec multiplication $m : A \otimes A \rightarrow A$, alors $\text{Hom}(C, A)$ est naturellement une algèbre graduée, le produit étant défini par

$$f \cdot g = m(f \otimes g) \Delta.$$

Si C et A sont plus différentielles et commutatives, alors $\text{Hom}(C, A)$ est une algèbre différentielle graduée commutative.

Lorsque $C = S_*(V)$, l'algèbre $\text{Hom}(C, A)$ sera notée $S^*(V, A)$, ou simplement $S^*(V)$ si A est le corps des scalaires, et sera appelée l'algèbre des formes multilinéaires symétriques sur V à valeur dans A . Le sous-espace vectoriel gradué de $S^*(V, A)$ dont les éléments s'annulent sur les produits d'éléments de V ne contenant pas p facteurs, sera désigné par $S^p(V, A)$. Ce sont les formes p -linéaires symétriques sur V .

Si $f \in S^p(V, A)$ et $f' \in S^{p'}(V, A)$, alors le produit ff' est la forme $(p+p')$ -linéaire symétrique définie suivant nos conventions par

$$(ff')(v_1, \dots, v_{p+p}) = \sum \pm f(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(p)}) f'(v_{\sigma(p+1)}, \dots, v_{\sigma(p+p)}),$$

où σ parcourt les permutations de la forme $\sigma(1) < \dots < \sigma(p)$ et $\sigma(p+1) < \dots < \sigma(p+p)$.

Il faut remarquer que nous n'obtenons pas la convention usuelle. Par exemple si V est homogène de degré 1, A le corps de base et f, f' de degré 1, alors :

$$(ff')(v, v') = -f(v)f'(v') + f(v')f'(v).$$

1.2. COHOMOLOGIE D'UNE ALGÈBRE DE LIE DIFFÉRENTIELLE GRADUÉE. — Une algèbre de Lie graduée L est un espace vectoriel gradué muni d'un crochet bilinéaire

$$[\] : L_r \times L_s \rightarrow L_{r+s}$$

vérifiant :

$$\begin{aligned} [x, y] &= -\pm [y, x], \\ [x, [y, z]] &= [[x, y], z] + \pm [y, [x, z]]. \end{aligned}$$

L est de plus différentielle si l'on s'est donné une différentielle d de degré -1 telle que

$$d[x, y] = [dx, y] + \pm [x, dy].$$

Soit ΣL la suspension de L , c'est-à-dire l'espace vectoriel gradué $(\Sigma L)_q = L_{q-1}$. Par cet isomorphisme $x \in L_{q-1}$ correspond à Σx .

Dans la coalgèbre symétrique $S_*(\Sigma L)$ sur ΣL , on définit une différentielle d par la formule (cf. [12], p. 291) :

$$\begin{aligned} d(\Sigma x_1 \dots \Sigma x_p) &= \sum_k \pm \Sigma x_1 \dots \Sigma dx_k \dots \Sigma x_p \\ &+ \sum_{k < l} \pm \Sigma [x_k, x_l] \cdot \Sigma x_1 \dots \hat{\Sigma} x_k \dots \hat{\Sigma} x_l \dots \Sigma x_p. \end{aligned}$$

Pour le signe dans la deuxième somme, on remplace x_l par $d \Sigma x_l$ et on applique la convention de signe.

Explicitement, sous la première somme le signe sera $+$ ou $-$ suivant que

$$\deg x_1 + \dots + \deg x_{i-1} + i$$

est pair ou impair. Sous la seconde somme, le signe est $+$ ou $-$ suivant que

$$\begin{aligned} &(\deg x_1 + \dots + \deg x_{k-1} + \deg x_l + k + 1)(\deg x_k + 1) \\ &+ (\deg x_1 + \dots + \deg x_{l-1} + l - 1)(\deg x_l + 1) \end{aligned}$$

est pair ou impair.

d est une codérivation de carré nul.

Cette coalgèbre différentielle sera notée $C_*(L)$ et appelée *la coalgèbre différentielle des chaînes sur L* .

Soit A une algèbre différentielle graduée. Par dualité, on obtient sur l'algèbre $S^*(\Sigma L; A)$ des formes multilinéaires symétriques sur ΣL à valeur dans A une différentielle d qui en fait une algèbre graduée différentielle. Cette algèbre sera notée $C^*(L; A)$ et sera appelée *l'algèbre différentielle des cochaînes sur L à valeur dans A* (avec l'action triviale de L sur A). Sa cohomologie est par définition la cohomologie de L à valeur dans A .

Lorsque tous les L_r sont nuls pour $r \neq 0$ et $d = 0$, on retrouve la définition usuelle de la cohomologie d'une algèbre de Lie à valeur dans A , car une p -forme alternée sur $L = L_0$ s'identifie à une p -forme symétrique f sur ΣL . Par cette identification, si $x_i \in L$, on écrira souvent $(f x_1, \dots, x_p)$ au lieu de $f(\Sigma x_1, \dots, \Sigma x_p)$; mais il faut se souvenir que dans la première écriture, les variables x_i sont considérées comme de degré 1. Notons toutefois que nos conventions de signes ne redonnent pas les conventions usuelles pour la multiplication et la différentielle du complexe standard.

On utilisera le théorème suivant qui est classique (essentiellement dû à Hilton pour le cas gradué). On pourra en trouver une démonstration dans l'appendice B de Quillen [12].

THÉORÈME. — Soit V un espace vectoriel gradué positivement (i. e. $V_q = 0$ pour $q < 0$). Soit L l'algèbre de Lie graduée libre sur V (avec différentielle nulle). Considérons le dual $\Sigma V'$ de ΣV comme une algèbre graduée avec multiplication et différentielle triviale. Soit $C^+(L)$ la sous-algèbre (sans élément unité) de $C^*(L)$ formée des $C^p(L)$ avec $p > 0$.

Alors le morphisme d'algèbre différentielle graduée

$$C^+(L) \rightarrow \Sigma V',$$

appliquant C^p sur 0 pour $p \neq 1$ et qui sur $C^1(L)$ est la restriction au sous-espace ΣV de ΣL , induit un isomorphisme de la cohomologie réduite de $C^*(L)$ sur $\Sigma V'$.

1.3. DÉCOMPOSITION DE POSTNIKOV D'UN MORPHISME. — Dans ce paragraphe, toutes les algèbres sont graduées positivement, commutatives sur un corps k de caractéristique 0.

Soit B une algèbre différentielle graduée. Un fibré de base B est une algèbre de la forme $B \otimes F$, où F est une algèbre graduée, $B \otimes F$ étant munie d'une différentielle d telle que l'inclusion $b \mapsto b \otimes 1$ de B dans $B \otimes F$ commute avec d . Ainsi $B \otimes F$ est une B -algèbre différentielle, libre comme module sur B .

Supposons que F soit l'algèbre symétrique $S_*(V)$ sur un espace vectoriel gradué positivement (i. e. $V^q = 0$ si $q < 0$). Soit $V^{[q]}$ l'espace vectoriel gradué obtenu en tronquant V en dimension q (i. e. la composante de degré r de $V^{[q]}$ est égale à V^r si $r \leq q$, à 0 sinon). La différentielle sur $B \otimes S_*(V)$ est complètement déterminée par la différentielle de B et la différentielle des éléments de la forme $1 \otimes v$, où $v \in V$.

On dira qu'un fibré de la forme $B \otimes S_*(V)$ sur B est un fibré de Postnikov si $V^q = 0$ pour $q \leq 1$ et si pour tout $v \in V^q$, alors $d(1 \otimes v) \in B \otimes S_*(V^{(q-1)})$. Ainsi les sous-espaces, $B \otimes S_*(V^{[q]})$ sont des sous-algèbres différentielles.

Dans la terminologie de Sullivan, cela signifie que $B \otimes F$ est obtenue à partir de B par extension de Hirsch successives, de degrés croissants. Si B est le corps de base, c'est la notion d'algèbre minimale 1-connexe.

Soit $\pi : B \rightarrow A$ un homomorphisme d'algèbres différentielles. Alors A peut être considérée comme une B -algèbre différentielle. Une décomposition de Postnikov de π est un fibré de Postnikov $B \otimes S^*(V)$ sur B muni d'un homomorphisme de B -algèbres différentielles

$$B \otimes S_*(V) \rightarrow A$$

induisant un isomorphisme en cohomologie.

On se contentera de démontrer le théorème d'existence suivant :

PROPOSITION. — Soit $\pi : B \rightarrow A$ un homomorphisme d'algèbres différentielles graduées positivement telles que

$$H^0(B) = H^0(A) = K, \quad H^1(B) = H^1(A) = 0 \quad \text{et} \quad H^2(B) \rightarrow H^2(A)$$

soit injectif.

Alors il existe une décomposition de Postnikov de π .

Démonstration. — Par récurrence, il suffit de montrer la proposition suivante. Supposons que l'homomorphisme induit par π sur la cohomologie soit un isomorphisme en degré $r < q$ et soit injectif pour $r = q$ où $q \geq 2$. Il existe un espace vectoriel V^q homogène de degré q , une différentielle sur $B \otimes S_*(V^q)$ qui en fasse une B -algèbre différentielle et telle que $d(1 \otimes v) \in B \otimes 1$ pour $v \in V^q$, et un homomorphisme de B -algèbre différentielle

$$P : B \otimes S_*(V^q) \rightarrow A$$

tel que l'homomorphisme induit sur la cohomologie soit un isomorphisme en degré $< q+1$ et injectif en degré $\leq q+1$.

Soit $\{x_i\}_{i \in I}$ une base du noyau de $H^{q+1}(\pi) : H^{q+1}(B) \rightarrow H^{q+1}(A)$ et soient ξ_i des cocycles représentant les x_i .

Soit $\{y_j\}_{j \in J}$ une base du conoyau de $H^q(\pi) : H^q(B) \rightarrow H^q(A)$ et soient η_j des cocycles représentant les y_j .

Soit V^q l'espace vectoriel homogène de degré q ayant pour base les x_i et les y_j . La différentielle sur $B \otimes S_*(V^q)$ est définie en posant

$$d(1 \otimes x_i) = +\xi_i \otimes 1,$$

$$d(1 \otimes y_j) = 0,$$

$$d(b \otimes 1) = db \otimes 1.$$

Le morphisme P est défini par les relations

$$P(1 \otimes x_i) = a_i \otimes 1, \quad \text{où} \quad da_i = \xi_i, \quad P(1 \otimes y_j) = \eta_j$$

et

$$P(b \otimes 1) = \pi(b).$$

Il commute avec d .

Il est clair que $H^r(P)$ est un isomorphisme pour $r < q$ et surjectif pour $r = q$. Montrons qu'il est aussi injectif pour $r = q$.

En utilisant le fait que $H^0(B) = K$, on voit que tout cocycle de degré q dans $B \otimes S_*(V^q)$ est homologue à un cycle de la forme

$$c = \sum 1 \otimes \mu_j y_j + b \otimes 1 \quad \text{où} \quad b \text{ est un cocycle de } B.$$

S'il appartient au noyau de $H^q(P)$, les scalaires μ_j sont tous nuls; donc b est dans le noyau de $H^q(\pi)$, et par l'hypothèse de récurrence, il est homologue à 0.

Montrons enfin que $H^{q+1}(P)$ est injectif. En utilisant l'hypothèse que $H^1(B) = 0$, on voit que tout cocycle de degré $q+1$ dans $B \otimes S_*(V^q)$ est homologue à un cocycle de la forme

$$c = b \otimes 1, \quad \text{où } b \text{ est un cocycle.}$$

Si $P(b \otimes 1) = \pi(b)$ est homologue à 0, alors b est homologue à une somme $\sum \mu_j \xi_j$, $\mu_j \in K$, donc $b \otimes 1$ est homologue à $\sum \mu_j \xi_j \otimes 1$ qui est le bord de $\sum 1 \otimes \mu_j x_j$.

1.4. CHANGEMENT DE BASE. — Soit $E = B \otimes F$ un fibré de base B . Examinons tout d'abord la différentielle d_E sur E .

Soit $\varepsilon : B \rightarrow K$ une augmentation et soit B^+ son noyau. Alors $B^+ \otimes F$ est un idéal différentiel et le quotient de $B \otimes F$ par cet idéal est isomorphe à F muni d'une différentielle d_F . Cette algèbre différentielle F sera appelée *la fibre au-dessus de ε* . Soit d_B la différentielle de B .

L'application τ de F dans $B \otimes F$ définie par

$$1 \otimes \tau = d_E - 1 \otimes d_F - d_B \otimes 1$$

est une dérivation telle que $(\varepsilon \otimes 1) \tau = 0$.

Réciproquement si B et F sont des algèbres différentielles et si $\tau : F \rightarrow B \otimes F$ est une dérivation telle que $d_E = 1 \otimes d_F + d_B \otimes 1 + 1 \otimes \tau$ soit de carré nul, alors $E = B \otimes F$ muni de la différentielle d_E est un fibré de base B , et fibre F , noté $B \otimes_\tau F$.

Convenons qu'un élément de $B \otimes F$ est de filtration p s'il appartient à l'idéal engendré par les éléments de la forme $b \otimes 1$, où le degré de b est $\geq p$.

LEMME. — *Supposons que τ applique F dans les éléments de filtration 2. Alors la suite spectrale associée à la filtration ci-dessus et qui converge vers $H^*(B \otimes F)$ a comme terme E_2 :*

$$E_2^{p,q} = H^p(B) \otimes H^q(F).$$

La démonstration est immédiate.

Soit $\beta : B \rightarrow B'$ un homomorphisme d'algèbres différentielles. Si A est une B -algèbre différentielle, alors l'algèbre A' déduite de A par le changement de base β est la B' -algèbre différentielle $A' = B' \otimes_B A$ (B' est considéré comme une B -algèbre par β .) Cette construction est évidemment fonctorielle.

Si l'on prend le cas d'un fibré $E = B \otimes_\tau F$ de base B , on obtient par changement de base le fibré $E' = B' \otimes_{\tau'} F$ de base B' , où $\tau' = (\beta \otimes 1)\tau$.

PROPOSITION. — *Soit $P : B \otimes_\tau F \rightarrow B \otimes_\rho G$ un morphisme de fibrés de base B (i. e. P est morphisme de B -algèbres différentielles) induisant un isomorphisme sur la cohomologie.*

Supposons que $B^0 = K$ et $B^1 = 0$. Alors par tout changement de base $\beta : B \rightarrow B'$ on obtient un morphisme

$$P' : B' \otimes_{\tau'} F \rightarrow B' \otimes_{\rho'} G$$

induisant un isomorphisme en cohomologie.

Il en résulte par exemple que si P est une décomposition de Postnikov, cette propriété subsiste par changement de base (avec les hypothèses de la proposition).

Pour la démonstration, on remarque que τ et ρ vérifient l'hypothèse du lemme ci-dessus. Comme P induit un isomorphisme en cohomologie pour les espaces totaux et pour la base, un théorème de comparaison classique de suites spectrales implique que P induit un isomorphisme de $H(F)$ sur $H(G)$. Alors P' induisant un isomorphisme sur la cohomologie des fibres et des bases, induit aussi un isomorphisme de $H(B' \otimes_{\tau} F)$ sur $H(B' \otimes_{\rho} G)$.

2. Exposé de résultats de Gelfand-Fuchs et Guillemin-Losik

2.1. LA COHOMOLOGIE DE L'ALGÈBRE DE LIE DES CHAMPS DE VECTEURS FORMELS. — Soit $\mathcal{L}_0(\mathbb{R}^n)$ l'algèbre de Lie des champs de vecteurs formels sur \mathbb{R}^n . C'est l'algèbre de Lie des jets d'ordre infini à l'origine de \mathbb{R}^n des champs de vecteurs définis au voisinage de l'origine. Il est muni de la topologie de la limite projective des jets d'ordre fini.

Sur cet espace vectoriel, une forme multilinéaire alternée continue ne dépend que des jets d'ordre fini des champs de vecteurs. On désignera encore par $C^*(\mathcal{L}_0(\mathbb{R}^n))$ les cochaînes continues sur l'algèbre de Lie des champs de vecteurs formels avec la structure multiplicative et la différentielle définie suivant les conventions des paragraphes 1.1 et 1.2. Si v et v' sont des jets de champs de vecteurs et ω une forme linéaire sur $\mathcal{L}_0(\mathbb{R}^n)$ alors :

$$d\omega(v, v') = -\omega([v, v']).$$

Gelfand et Fuchs ont calculé complètement la cohomologie de l'algèbre de Lie des champs de vecteurs formels. Pour énoncer leur résultat, il faut définir le complexe \hat{W}_n .

Soit $E(u_1, \dots, u_n)$ l'algèbre extérieure sur des générateurs u_i de degré $2i-1$. Soit $\hat{R}[c_1, c_2, \dots, c_n]$ le quotient de l'algèbre des polynômes dans les variables c_i de degré $2i$ par l'idéal des polynômes de degré total supérieur à $2n$. Sur le produit tensoriel $\hat{W}_n = E(u_1, \dots, u_n) \otimes \hat{R}[c_1, \dots, c_n]$ on définit une différentielle en posant

$$d(u_i \otimes 1) = 1 \otimes c_i.$$

THÉORÈME (Gelfand-Fuchs [5]). — *Il existe un homomorphisme d'algèbre différentielle*

$$\hat{W}_n \rightarrow C^*(\mathcal{L}_0(\mathbb{R}^n))$$

induisant un isomorphisme sur la cohomologie.

Il en résulte que la cohomologie de $\mathcal{L}_0(\mathbb{R}^n)$ est de dimension finie et $2n$ -connexe. De plus la structure multiplicative est triviale. En fait, Vey a construit une base de $H^*(\hat{W}_n)$ représentée par des cocycles tels que le produit de deux d'entre eux soit toujours nuls.

COMPLÈMENT (J. Vey [6]). — *Considérons la cohomologie $H^*(\hat{W}_n) = H(\mathcal{L}_0(\mathbb{R}^n))$ comme une algèbre différentielle graduée avec structure multiplicative triviale et différentielle nulle. Il existe un homomorphisme d'algèbre différentielle*

$$H^*(\hat{W}_n) \rightarrow \hat{W}_n$$

induisant un isomorphisme sur la cohomologie.

Nous allons décrire avec plus de précision l'isomorphisme de Gelfand-Fuchs.

Rappelons tout d'abord la définition de l'algèbre de Weil $W(\mathfrak{gl}_n)$ de l'algèbre de Lie de $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{R})$ (cf. [3]). C'est l'algèbre graduée commutative libre engendrée par les $2n^2$ éléments θ_j^i et Ω_j^i de degré respectif 1 et 2, les entiers i et j variant de 1 à n . La différentielle d est caractérisée par la relation

$$d\theta_j^i = -\sum \theta_k^i \wedge \theta_j^k + \Omega_j^i.$$

Cette algèbre vérifie la propriété universelle suivante : étant donnés des éléments a_j^i de degré 1 d'une algèbre différentielle graduée commutative A , il existe un morphisme unique de $W(\mathfrak{gl}_n)$ dans A appliquant θ_j^i sur a_j^i .

L'algèbre $C^*(\mathcal{L}_0(\mathbb{R}^n))$ est engendrée librement par les 1-formes. Si v est un jet de champ de vecteurs de composantes v^1, \dots, v^n , les x_i étant les coordonnées dans \mathbb{R}^n , posons

$$\omega_{j_1, \dots, j_k}^i(v) = \frac{\partial^k v^i}{\partial x^{j_1} \dots \partial x^{j_k}}(0).$$

Ces 1-formes forment une base de $C^1(\mathcal{L}_0(\mathbb{R}^n))$. On a par exemple

$$d\omega_j^i = -\sum \omega_k^i \omega_j^k - \sum \omega_{jk}^i \omega^k.$$

Il existe un morphisme unique de $W(\mathfrak{gl}_n)$ dans $C^*(\mathcal{L}_0(\mathbb{R}^n))$ appliquant les θ_j^i sur les ω_j^i . Comme les Ω_j^i sont appliqués sur $\sum \omega^k \omega_{jk}^i$, et que les produits de $n+1$ éléments de cette forme sont nuls, ce morphisme définit par passage au quotient un morphisme

$$\hat{W}(\mathfrak{gl}_n) \rightarrow C^*(\mathcal{L}_0(\mathbb{R}^n)),$$

où $\hat{W}(\mathfrak{gl}_n)$ est le quotient de $W(\mathfrak{gl}_n)$ par l'idéal engendré par le produit de n éléments de la forme Ω_j^i .

Gelfand-Fuchs démontrent que ce morphisme induit un isomorphisme en cohomologie.

D'autre part, définissons les $c_i \in W(\mathfrak{gl}_n)$ par la relation

$$1 + c_1 + \dots + c_n = \text{déterminant de } \left(I + \frac{1}{2\pi} \Omega \right),$$

où I est la matrice unité et Ω la matrice de coefficients Ω_j^i . Les c_i sont des cocycles, et comme $W(\mathfrak{gl}_n)$ est acyclique, il existe des u_i tels que $du_i = c_i$. On désigne encore par les mêmes lettres les images des c_i et des u_i dans le quotient $\hat{W}(\mathfrak{gl}_n)$.

Par un argument de suites spectrales on voit que l'homomorphisme évident de \hat{W}_n dans $\hat{W}(\mathfrak{gl}_n)$ appliquant les u_i sur les u_i et les c_i sur les c_i , induit un isomorphisme sur la cohomologie.

2.2. LE THÉORÈME DE GUILLEMIN-LOSIK. — Soit \mathcal{L}_M l'algèbre de Lie des champs de vecteurs différentiables sur M . Si N est une sous-variété de M , on désignera par $\mathcal{L}_N(M)$ ou simplement \mathcal{L}_N l'algèbre de Lie quotient de \mathcal{L}_M par l'idéal des champs de vecteurs dont les jets d'ordre infini s'annulent aux points de N . On désignera par Ω_M ou Ω_N les formes différentielles sur M ou N .

Désignons par $C^*(\mathcal{L}_M, \Omega_M)$ l'algèbre différentielle graduée des cochaînes sur \mathcal{L}_M à valeur dans l'algèbre différentielle graduée Ω_M avec action triviale. Dans les notations de 1.1 et 1.2, c'est l'algèbre des formes symétriques sur $\Sigma \mathcal{L}_M$ à valeur dans l'algèbre Ω_M , la différentielle étant définie à partir de la différentielle de la coalgèbre $S_*(\Sigma \mathcal{L}_M)$ (cf. 1.2) et de la dérivée extérieure dans Ω_M .

Ainsi, pour une forme $f \in C^1(\mathcal{L}_M, \Omega_M^q)$ sa différentielle df a deux composantes :

l'une dans $C^1(\mathcal{L}_M, \Omega_M^{q+1})$ donnée par $(df)(v) = d(f(v))$;

l'autre dans $C^2(\mathcal{L}_M, \Omega_M^q)$ donnée par $df(v_1, v_2) = (-1)^{q+1} f([v_1, v_2])$. C'est un module sur l'algèbre différentielle Ω_M .

On désignera par $C_\Delta^*(\mathcal{L}_M, \Omega_M)$ la sous-algèbre différentielle de $C^*(\mathcal{L}_M, \Omega_M)$ dont les éléments sont les formes f vérifiant la condition suivante : pour tout $x \in M$, la forme différentielle $f(v_1, \dots, v_p)$ au point x ne dépend différentiablement que des jets d'ordre fini des champs de vecteurs v_i au point x . Une telle forme peut se représenter comme une section différentiable d'un fibré vectoriel sur M .

Si N est une sous-variété de M , on définit d'une manière analogue l'algèbre différentielle $C_\Delta^*(\mathcal{L}_N(M), \Omega_N)$ et l'on a une application de restriction $C_\Delta^*(\mathcal{L}_M, \Omega_M) \rightarrow C_\Delta^*(\mathcal{L}_N(M), \Omega_N)$.

Sur l'algèbre $\Omega_M \otimes \hat{W}_n$, définissons une différentielle d par les formules suivantes. Soient p_i des formes différentielles de degré i sur M représentant les classes de Pontrjagin de M . Alors :

$$d(\alpha \otimes 1) = d\alpha \otimes 1,$$

$$d(1 \otimes c_i) = 0,$$

$$d(1 \otimes u_i) = 1 \otimes c_i - p_{i/2} \otimes 1$$

(on convient que $p_{i/2} = 0$ si i est impair).

Munie de cette différentielle, cette algèbre sera notée $\Omega_M \otimes_p \hat{W}_n$. C'est un fibré sur l'algèbre différentielle Ω_M dans la terminologie de 1.3.

Remarquons que si l'on fait un autre choix p'_i pour représenter les classes de Pontrjagin, il existe un isomorphisme de Ω_M -algèbre différentielle

$$\Omega_M \otimes_p \hat{W}_n \rightarrow \Omega_M \otimes_{p'} \hat{W}_n$$

appliquant $1 \otimes c_i$ sur $1 \otimes c_i$ et $1 \otimes u_i$ sur $1 \otimes u_i + v_i \otimes 1$ où v_i est une forme telle que $dv_i = p_i - p'_i$.

Si A est une sous-variété de M , on définit de même $\Omega_N \otimes_p \hat{W}_n$ en remplaçant p_i par sa restriction à N .

THÉORÈME (Losik [11] Guillemin [8]). — *Il existe un homomorphisme de Ω_M -algèbre différentielle graduée*

$$\Omega_M \otimes_p \hat{W}_n \rightarrow C_\Delta^*(\mathcal{L}_M, \Omega_M)$$

induisant un isomorphisme sur la cohomologie.

Cet homomorphisme est compatible avec les restrictions à une sous-variété N de M , et induit aussi sur ces restrictions des isomorphismes en cohomologie.

Démonstration. — Nous redonnons brièvement une démonstration de ce théorème. Guillemin et Losik considèrent sur $C_{\Delta}^*(\mathcal{L}_M, \Omega_M)$ la différentielle correspondant à l'action non triviale de \mathcal{L}_M sur Ω_M ; mais en fait les deux complexes sont isomorphes.

Soit P le fibré des repères d'ordre infini de M , c'est-à-dire des jets d'ordre infini à l'origine des difféomorphismes locaux de \mathbb{R}^n dans M . Un tel jet de but x est appelé un repère en x . C'est la limite projective des repères d'ordre fini; les notions de vecteurs tangents et de formes différentielles sur P sont définies comme limites projectives et inductives respectivement.

Si r est un repère en x , jet du difféomorphisme ρ , et si v est un champ de vecteurs, alors $r^{-1}v$ est le jet à l'origine du champ de vecteur $\rho_*^{-1}(v)$.

Si v engendre un sous-groupe à 1 paramètre h_t , alors le vecteur tangent à la courbe $t \mapsto \text{jet en } 0 \text{ de } h_t \circ \rho$, sera noté $v(r)$. La correspondance $v \mapsto v(r)$ induit un isomorphisme de l'espace vectoriel des jets d'ordre infini en x de champs de vecteurs sur l'espace tangent à P en r .

Soit $C_{\Delta}^*(\mathcal{L}_M, \Omega_P)$ l'algèbre différentielle des cochaînes f sur \mathcal{L}_M^c à valeur dans les formes différentielles Ω_P sur P , la valeur de la forme $f(v_1, \dots, v_p)$ en un repère r en x ne dépendant que des jets d'ordre fini des v_i en x .

Soit ω une 1-forme sur $\mathcal{L}_0(\mathbb{R}^n)$. On désignera par $\bar{\omega}$ la 1-forme différentielle sur P définie par

$$\langle \bar{\omega}, v(r) \rangle = \omega(r^{-1}v)$$

et par $\tilde{\omega} \in C_{\Delta}^1(\mathcal{L}_M, \Omega_P^0)$ la 1-forme définie par

$$\tilde{\omega}(v)(r) = \omega(r^{-1}v).$$

Si v et w sont des champs de vecteurs, on a les formules suivantes, faciles à établir

$$d\omega(r^{-1}v, r^{-1}w) = \langle d(\tilde{\omega}(v)), w(r) \rangle = (d\tilde{\omega})(v, w)(r) = \langle d\bar{\omega}, v(r) \wedge w(r) \rangle.$$

En particulier

$$\begin{aligned} d\bar{\omega}_j^i &= -\sum \bar{\omega}_k^i \bar{\omega}_j^k + \sum \bar{\omega}^k \bar{\omega}_{jk}^i, \\ d\tilde{\omega}_j^i &= -\sum \tilde{\omega}_k^i \tilde{\omega}_j^k + \sum \tilde{\omega}^k \tilde{\omega}_{jk}^i \\ &\quad + \sum \bar{\omega}_j^k \tilde{\omega}_k^i - \sum \bar{\omega}_k^i \tilde{\omega}_j^k - \sum \bar{\omega}_{jk}^i \tilde{\omega}^k + \sum \bar{\omega}^k \tilde{\omega}_{jk}^i. \end{aligned}$$

Il existe un homomorphisme unique d'algèbres différentielles de $W(\mathfrak{gl}_n)$ dans $C_{\Delta}^*(\mathcal{L}_M, \Omega_P)$ appliquant θ_j^i sur $\bar{\omega}_j^i + \tilde{\omega}_j^i$. Mais comme Ω_j^i est appliqué sur

$$\sum (\bar{\omega}^k + \tilde{\omega}^k)(\bar{\omega}_{jk}^i + \tilde{\omega}_{jk}^i),$$

cet homomorphisme se factorise suivant un morphisme

$$\hat{W}(\mathfrak{gl}_n) \rightarrow C_{\Delta}^*(\mathcal{L}_M, \Omega_P).$$

Considérons maintenant le fibré PO des repères d'ordre 1 orthonormaux sur M relativement à une métrique riemannienne. On plonge PO dans P en utilisant en chaque point les coordonnées géodésiques.

En composant l'homomorphisme précédent avec la restriction à PO, on obtient un homomorphisme

$$\widehat{W}(\mathfrak{gl}_n) \rightarrow C_{\Delta}^*(\mathcal{L}_M, \Omega_{PO})$$

que l'on peut prolonger de manière unique suivant un homomorphisme de Ω_{PO} -algèbre différentielle

$$\lambda : \Omega_{PO} \otimes \widehat{W}(\mathfrak{gl}_n) \rightarrow C_{\Delta}^*(\mathcal{L}_M, \Omega_{PO}).$$

Pour redescendre à Ω_M , on va faire agir le groupe orthogonal O_n sur les deux membres.

Tout d'abord O_n agit sur Ω_{PO} , puisque PO est un fibré O_n -principal; il en résulte aussi que tout élément de l'algèbre de Lie \mathfrak{o}_n de O_n agit par produit intérieur sur Ω_{PO} . Les éléments basiques (c'est-à-dire O_n -invariants et annulés par tous les produits intérieurs de \mathfrak{o}_n) de Ω_{PO} s'identifient aux éléments de Ω_M .

O_n opère également sur $\widehat{W}(\mathfrak{gl}_n)$ par restriction de l'action naturelle de GL_n ; de même \mathfrak{o}_n opère par produit intérieur.

On fera alors opérer O_n et \mathfrak{o}_n diagonalement sur $\Omega_{PO} \otimes \widehat{W}(\mathfrak{gl}_n)$ et seulement sur Ω_{PO} dans $C_{\Delta}^*(\mathcal{L}_M, \Omega_{PO})$. L'homomorphisme λ commute avec ces opérations.

Dans $\Omega_{PO} \otimes \widehat{W}_n$, on définit une différentielle d dépendant comme ci-dessus d'un choix de formes $p_i \in \Omega_M$ représentant les classes de Pontrjagin de M identifiées à des éléments de Ω_{PO} . Avec cette différentielle, on notera cette algèbre $\Omega_{PO} \otimes_p \widehat{W}_n$. On fera opérer O_n et \mathfrak{o}_n sur le premier facteur seulement.

On va construire un morphisme de Ω_{PO} -algèbres différentielles

$$\mu : \Omega_{PO} \otimes_p \widehat{W}_n \rightarrow \Omega_{PO} \otimes \widehat{W}(\mathfrak{gl}_n)$$

commutant avec les opérations de O_n et \mathfrak{o}_n .

Pour cela, on choisit des formes v_{2i} sur Ω_{PO} invariantes par O_n et telles que

$$dv_{2i} = p_i \quad (\text{on posera } v_{2i+1} = 0).$$

On choisira pour $u_i \in \widehat{W}(\mathfrak{gl}_n)$ une forme GL_n -invariante pour i pair et O_n -basique pour i impair et telle que $du_i = c_i$.

On posera alors :

$$\mu(1 \otimes u_i) = 1 \otimes u_i - v_i \otimes 1,$$

$$\mu(1 \otimes c_i) = 1 \otimes c_i.$$

En composant λ avec μ , on obtient un morphisme de Ω_{PO} -algèbre différentielle commutant avec les actions de O_n et \mathfrak{o}_n :

$$\Omega_{PO} \otimes_p \widehat{W}_n \rightarrow C_{\Delta}^*(\mathcal{L}_M, \Omega_{PO}),$$

d'où, en passant aux éléments O_n -basiques, le morphisme cherché

$$\varphi : \Omega_M \otimes_p \widehat{W}_n \rightarrow C_{\Delta}^*(\mathcal{L}_M, \Omega_M).$$

Il est clair que ce morphisme est fonctoriel pour les restrictions aux sous-variétés, et que lorsque l'on se restreint à n'importe quel point x de M , on obtient un homomorphisme de $\hat{W}_n = \Omega_x \otimes \hat{W}_n$ dans $C^*(\mathcal{L}_x(M), \Omega_x) \approx C^*(\mathcal{L}_O(\mathbb{R}^n))$, qui n'est autre que celui qui est décrit dans 2.1. D'après le théorème de Gelfand-Fuchs, il induit donc un isomorphisme en cohomologie.

C'est de cette propriété dont nous aurons besoin pour la suite (cf. 5.4). De là, il résulte d'ailleurs facilement, par un argument usuel de théorie des faisceaux, que le morphisme ϕ induit un isomorphisme en cohomologie.

2.3. DÉCOMPOSITION DE POSTNIKOV DE $C_\Delta^*(\mathcal{L}_M, \Omega_M)$. — Le modèle minimal, ou décomposition de Postnikov, de l'algèbre \hat{W}_n (cf. 2.1) est obtenu de la manière suivante :

DÉFINITION DE $L(n)$. — Soit $\tilde{H}_*(n)$ l'espace vectoriel gradué inférieurement, nul en degré 0 et égal au dual de $H^k(\hat{W}_n)$ pour $k \neq 0$.

Soit $L(n) = L(\Sigma^{-1} \tilde{H}(n))$ l'algèbre de Lie libre sur l'espace vectoriel $\Sigma^{-1}(\tilde{H}(n))$ obtenu à partir de $\tilde{H}(n)$ en diminuant les degrés d'une unité.

THÉORÈME 1. — *L'algèbre différentielle $C^*(L(n))$ des cochaînes sur l'algèbre de Lie libre $L(n)$ décrite ci-dessus est une décomposition de Postnikov de \hat{W}_n , ou de $C^*(\mathcal{L}_O(\mathbb{R}^n))$ d'après 2.1.*

C'est une conséquence immédiate du théorème énoncé en 1.2 [on prend $V = \Sigma^{-1} \tilde{H}(n)$], et du complément dans 2.1.

Pour construire la décomposition de Postnikov de l'inclusion de Ω_M dans $C_\Delta^*(\mathcal{L}_M, \Omega_M)$, il suffit d'après 2.2 de construire celle de l'inclusion de Ω_M dans $\Omega_M \otimes_p \hat{W}_n$.

Soit P_n le quotient de l'anneau des polynômes dans des variables $p_1, \dots, p_{n/2}$, où p_i est de degré $4i$, par l'idéal des éléments de degré supérieur à $2n$. On considère P_n comme une algèbre avec différentielle nulle.

Soit $P_n \otimes_p \hat{W}_n$ le fibré sur P_n , de fibre \hat{W}_n (cf. 1.4), où p est la dérivation de \hat{W}_n dans $P_n \otimes \hat{W}_n$ définie par

$$p(u_i) = -p_{i/2} \otimes 1 \quad \text{et} \quad p(c_i) = 0.$$

Il est clair que $\Omega_M \otimes_p \hat{W}_n$ est obtenu à partir de $P_n \otimes_p \hat{W}_n$ par le changement de base $P_n \rightarrow \Omega_M$ appliquant les p_i sur les représentants choisis pour les classes de Pontrjagin de M .

Pour obtenir la décomposition de Postnikov de l'inclusion de P_n dans $P_n \otimes \hat{W}_n$, on peut appliquer la proposition 1.3, et d'après 1.4, elle sera de la forme $P_n \otimes_\tau C^*(L(n))$, où $C^*(L(n))$ est décrite dans le théorème 1 et τ est une dérivation de $C^*(L(n))$ dans $P_n \otimes C^*(L(n))$ que je ne sais pas décrire explicitement.

Par le changement de base $P_n \rightarrow \Omega_M$, et en appliquant 1.4, on obtient la décomposition de Postnikov de l'inclusion de Ω_M dans $C_\Delta(\mathcal{L}_M, \Omega_M)$. D'où :

THÉORÈME 2. — *Il existe une dérivation $\tau : C^*(L(n)) \rightarrow \Omega_M \otimes C^*(L(n))$ ne dépendant que du choix de représentants pour les classes de Pontrjagin de M , et un homomorphisme*

de Ω_M -algèbres différentielles graduées

$$\varphi_M : \Omega_M \otimes_{\tau} C^*(L(n)) \rightarrow C^*_\Delta(\mathcal{L}_M, \Omega_M)$$

induisant un isomorphisme sur la cohomologie.

Si τ' est déterminé par un autre choix de formes représentant les classes de Pontrjagin, il existe un isomorphisme de Ω_M -algèbres différentielles de $\Omega_M \otimes_{\tau'} C^*(L(n))$ sur $\Omega_M \otimes_{\tau} C^*(L(n))$. En particulier, si les classes de Pontrjagin de M sont nulles, on peut choisir τ nulle.

Le résultat reste vrai par changement de base en remplaçant M par une sous-variété N de M et \mathcal{L}_M par $\mathcal{L}_N(M)$.

3. Énoncé des résultats

3.1. ÉNONCÉ DES THÉORÈMES PRINCIPAUX. — Soit M une variété différentiable de dimension n et soit N une sous-variété localement fermée de M éventuellement avec bord.

Soit \mathcal{L}_M l'algèbre de Lie des champs de vecteurs différentiables sur M , avec la topologie C^∞ . On désignera par $\mathcal{L}_N(M)$ ou simplement \mathcal{L}_N , l'algèbre de Lie quotient de \mathcal{L}_M par la sous-algèbre des champs de vecteurs dont les jets d'ordre infini s'annulent sur N . On considérera également l'algèbre de Lie \mathcal{L}_M^c des champs de vecteurs à support compact sur M et son quotient \mathcal{L}_N^c .

Ω_M ou Ω_N désignera l'algèbre des formes différentielles sur M ou N , avec la topologie C^∞ . De même, Ω_N^c sera l'algèbre des formes différentielles à support compact sur N .

Soit $L(n)$ l'algèbre de Lie graduée libre sur l'espace vectoriel W , où W_q est le dual de $H^{q+1}(\hat{W}_n) = H^{q+1}(\mathcal{L}_0(\mathbb{R}^n))$ si $q \neq 0$, et $W_0 = 0$. Rappelons que W , donc $L(n)$, est nulle en degré inférieur à $2n$ (cf. 2.1 et 2.3).

Si $A = \{A^q\}$ est une algèbre différentielle graduée commutative (avec ou sans élément unité), on désignera par $A \otimes L(n)$ l'algèbre de Lie différentielle graduée définie par

$$\begin{aligned} \deg(a \otimes l) &= \deg l - \deg a, \\ [a \otimes l, a' \otimes l'] &= (-1)^{\deg l \cdot \deg a'} aa' \otimes [l, l'], \\ d(a \otimes l) &= da \otimes l. \end{aligned}$$

On désignera par V la suspension de $L(n)$ (cf. 1.2), et par $S^*(\Omega_N \otimes V)$ l'algèbre des formes multilinéaires symétriques continues à valeurs réelles sur l'espace vectoriel gradué $\Omega_N \otimes L(n)$. Le degré de $\omega \otimes v$ est égal à $\deg v - \deg \omega$.

$C^*(\mathcal{L}_N)$ désigne l'algèbre différentielle des cochaînes continues à valeurs réelles sur l'algèbre de Lie \mathcal{L}_N .

THÉORÈME A. — Pour toute sous-variété N de M , il existe sur l'algèbre graduée $S^*(\Omega_N \otimes V)$ une différentielle continue et un homomorphisme d'algèbres différentielles graduées

$$\Phi_N : S^*(\Omega_N \otimes V) \rightarrow C^*(\mathcal{L}_N)$$

induisant un isomorphisme en cohomologie.

Par restriction de M à N , on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} S^*(\Omega_M \otimes V) & \xrightarrow{\Phi_M} & C^*(\mathcal{L}_M) \\ \uparrow & & \uparrow \\ S^*(\Omega_N \otimes V) & \xrightarrow{\Phi_N} & C^*(\mathcal{L}_N) \end{array}$$

La différentielle sur $S^*(\Omega_N \otimes V)$ ne dépend que de l'entier n , de la différentielle de Ω_N et d'un choix de formes de Ω_M représentant les classes de Pontrjagin de M . Un autre choix conduirait à une algèbre différentielle graduée isomorphe.

Si les classes de Pontrjagin et M sont nulles, alors $S^*(\Omega_N \otimes V)$ est l'algèbre différentielle des cochaînes continues sur l'algèbre de Lie différentielle graduée $\Omega_M \otimes L(n)$.

Dans ce qui précède, on peut remplacer partout \mathcal{L}_N par \mathcal{L}_N^c et Ω_N par Ω_N^c .

Après des préliminaires algébriques (4.1), nous montrerons en 4.2 comment construire la différentielle sur $S^*(\Omega_M \otimes V)$ à partir du théorème 2 de 2.3. L'homomorphisme Φ_M apparaîtra en 4.3 comme le dual d'un morphisme continu

$$\Psi_M : C_*(\mathcal{L}_M) \rightarrow S_*(\Omega_M \otimes V)$$

de coalgèbres différentielles graduées.

La démonstration que Φ_M induit un isomorphisme en cohomologie est renvoyée au paragraphe 5.

THÉORÈME B. — Soit A une algèbre graduée commutative de dimension finie telle que $A^q = 0$ pour $q < 0$ et $q \geq 2n$. Supposons qu'il existe un morphisme $\alpha : A \rightarrow \Omega_M$ induisant un isomorphisme sur la cohomologie.

Il existe alors sur $S^*(A \otimes V)$ une différentielle et un morphisme de $S^*(\Omega_M \otimes V)$ dans $S^*(A \otimes V)$ induisant un isomorphisme en cohomologie.

On a le même théorème en remplaçant Ω_M par Ω_M^c , mais on n'exige plus que A ait un élément unité.

Si les classes de Pontrjagin sont nulles, alors $S^*(A \otimes V)$ est l'algèbre différentielle des cochaînes sur l'algèbre de Lie différentielle graduée $A \otimes L(n)$.

Les hypothèses du théorème B sont toujours vérifiées pour une variété simplement connexe M dont la cohomologie réelle est de dimension finie.

En effet dans ce cas, comme me l'a fait remarquer Sullivan, on peut construire A en prenant le quotient du modèle minimal de Ω_M par l'idéal formé des éléments de degré $> n$ et d'un supplémentaire des cocycles dans la composante de degré n .

Dans le cas non simplement connexe, un contre exemple est donné par une surface de genre 2 (remarque due à Sullivan).

3.2. CONSTRUCTION D'UNE BASE DE $L(n)$. — Soit W un espace vectoriel gradué. On peut décrire une base de l'algèbre de Lie libre $L(W)$ sur W de la manière suivante.

On part d'une base $\{e_i\}_{i \in I}$ de W . On construit ensuite une base de Hall H de l'algèbre de Lie libre sur l'ensemble $X =$ réunion des e_i , comme dans Bourbaki [2] p. 30. On la complète ensuite en ajoutant pour tout $v \in H$ de degré impair l'élément $[v, v]$.

Rappelons comment on peut construire H . Chaque élément u de H est obtenu en faisant des crochets d'éléments de la base e_i de W ; le nombre de ces éléments est la longueur $l(u)$ de u . Les éléments de longueur 1 dans H sont les éléments de la base e_i de W munie d'un ordre total. Les éléments de longueur 2 de H sont les crochets $[e_i, e_j]$, avec $e_i < e_j$, et on les ordonne. D'une manière générale, H est ordonné de sorte que si $u, v \in H$, et si $l(u) < l(v)$, alors $u < v$. Un crochet w de longueur ≤ 3 appartient à H si et seulement si $w = [a, [b, c]]$, où $a, b, c \in H$, $a < [b, c]$ et $a \geq b$.

Si W a une base contenant n éléments, alors le nombre $c(r)$ des éléments de H de longueur r est donné par la formule (cf. Bourbaki [2] p. 36) :

$$c(r) = \frac{1}{r} \sum_{d|r} \mu(d) n^{r/d},$$

où d parcourt les diviseurs de r et où $\mu(d)$ est la fonction de Möbius.

On voit d'après cette formule que $c(r)$ augmente très rapidement avec r . Par exemple si $n = 2$, on a

$$c(30) = 35\,790\,267,$$

$$c(31) = 69\,273\,666.$$

Par exemple $L(2)$ et $L(3)$ sont les algèbres de Lie libre sur des espaces vectoriels de dimension 5 et 17 respectivement (cf. [6]).

On imagine sans peine que, même pour des petites valeurs de n , le nombre des éléments de longueur r dans une base de $L(n)$ croît très rapidement avec r .

3.3. APPLICATION AUX CHAMPS DE VECTEURS A SUPPORT COMPACT SUR $M \times \mathbf{R}$.

THÉORÈME. — Soit M une variété différentiable de dimension $n-1$ dont les classes de Pontrjagin sont nulles, et dont la cohomologie réelle $H_c^*(M)$ à support compact est de dimension finie. Alors la cohomologie de l'algèbre de Lie des champs de vecteurs à support compact sur $M \times \mathbf{R}$ est isomorphe à l'algèbre symétrique sur l'espace vectoriel gradué dual de $H_c^*(M) \otimes L(n)$.

Démonstration. — La cohomologie à support compact $H_c^*(M \times \mathbf{R})$ de $M \times \mathbf{R}$ est de dimension finie [puisqu'elle est isomorphe comme espace vectoriel à $\widetilde{H}_c^*(M)$], et la multiplication est triviale.

Il existe un morphisme d'algèbre

$$H_c^*(M \times \mathbf{R}) \rightarrow \Omega_{M \times \mathbf{R}}^c,$$

dont l'image est formée de cocycles et qui induit un isomorphisme en cohomologie. Il suffit en effet de faire correspondre aux éléments d'une base de $H_c^*(M \times \mathbf{R})$ des représentants qui sont des formes dont les supports sont poussés le long du facteur \mathbf{R} de sorte qu'ils ne se rencontrent pas deux à deux.

D'après les théorèmes A et B, le cohomologie de $C^*(\mathcal{L}_{M \times \mathbf{R}}^c)$ est isomorphe à la cohomologie de l'algèbre de Lie graduée $H_c^*(M \times \mathbf{R}) \otimes L(n)$. Mais dans cette algèbre de Lie, tous les crochets sont nuls, puisque la multiplication dans $H_c^*(M \times \mathbf{R})$ est triviale. Il en

résulte que la différentielle sur les cochaînes de cette algèbre de Lie est triviale. L'algèbre de ces cochaînes est justement isomorphe à l'algèbre des formes multilinéaires symétriques sur $\Sigma H_c^*(M \times R) \otimes L(n) \approx H_c^*(M) \otimes L(n)$.

Remarques. — Si dans l'énoncé du théorème précédent, on laisse tomber l'hypothèse que $H_c^*(M)$ est de dimension finie, on peut voir facilement que la cohomologie de l'algèbre de Lie des champs de vecteurs à support compact dans $M \times R$ est isomorphe à l'algèbre des formes multilinéaires symétriques sur $H_c^*(M) \otimes L(n)$. Il suffit pour cela de représenter M comme une limite croissante de sous-variétés ouvertes dont les cohomologies à support compact sont de dimension finie, et de faire un passage à la limite convenable.

La même méthode de démonstration pourrait s'appliquer au cas où $M \times R$ serait remplacé par un ouvert convenable U de R^n , pour lequel la multiplication dans $H_c^*(U)$ est triviale (par exemple U pourrait être un voisinage régulier d'un bouquet de sphères).

COROLLAIRE. — *La cohomologie de l'algèbre de Lie des champs de vecteurs à support compact sur R_n est isomorphe à l'algèbre symétrique sur le dual de l'espace vectoriel gradué $\Sigma^{-n+1} L(n)$, obtenu à partir de $L(n)$ en abaissant les degrés de $n-1$ unités.*

3.4. MODÈLES MINIMAUX. — Le théorème suivant montre que dans plusieurs cas particuliers intéressants, on peut décrire complètement le modèle minimal, au sens de Sullivan, de l'algèbre différentielle des cochaînes continues sur l'algèbre des champs de vecteurs d'une variété. En revanche, le calcul de sa cohomologie est beaucoup plus difficile.

THÉORÈME. — *Soit M une variété différentiable de dimension n dont la cohomologie réelle $H^*(M)$ est de dimension finie et dont les classes de Pontrjagin sont nulles. Supposons de plus qu'il existe un homomorphisme d'algèbres différentielles graduées*

$$H^*(M) \rightarrow \Omega_M$$

induisant un isomorphisme sur la cohomologie, (c'est le cas par exemple si M est un espace symétrique).

Alors l'algèbre différentielle des cochaînes sur l'algèbre de Lie graduée $H^(M) \otimes L(n)$ est un modèle minimal pour $C^*(\mathcal{L}_M)$.*

Démonstration. — D'après les théorèmes A et B, il existe des morphismes d'algèbres différentielles graduées.

$$C^*(\Omega_M \otimes L(n)) \rightarrow C^*(\mathcal{L}_M)$$

et

$$C^*(\Omega_M \otimes L(n)) \rightarrow C^*(H^*(M) \otimes L(n))$$

induisant des isomorphismes en cohomologie. L'algèbre différentielle $C^*(H^*(M) \otimes L(n))$ est une algèbre libre ayant comme générateurs les éléments d'une base de la suspension du dual de $H^*(M) \otimes L(n)$. La différentielle de chaque générateur étant décomposable d'après 2.1; c'est donc bien une algèbre minimale. D'après la théorie générale, on peut trouver un morphisme d'algèbres différentielles graduées

$$C^*(H^*(M) \otimes L(n)) \rightarrow C^*(\Omega_M \otimes L(n))$$

induisant un isomorphisme en cohomologie.

Cas particulier de S^1 . — Notons que $L(1)$ est l'algèbre de Lie triviale n'ayant qu'un générateur en degré 2. Donc la différentielle dans le modèle minimal $C^*(H^*(S^1) \otimes L(1))$ est nulle.

On retrouve donc bien le résultat de Gelfand-Fuchs, à savoir que la cohomologie de l'algèbre de Lie des champs de vecteurs sur le cercle est une algèbre libre avec deux générateurs de degré 2 et 3 respectivement.

Cas de la sphère S^n , pour $n \geq 2$. — La cohomologie de l'algèbre de Lie des champs de vecteurs sur S^n semble difficile à décrire globalement. D'après le théorème précédent, c'est la cohomologie de l'algèbre différentielle $C^*(H^*(S^n) \otimes L(n))$.

En utilisant l'expression donnée en 3.2 pour le nombre de crochets de longueur donnée dans une base de Hall de $L(n)$, on peut vérifier que $H^*(\mathcal{L}_{S^n})$ a un nombre infini de générateurs.

4. Construction et propriétés du modèle

On pourrait définir la différentielle sur le modèle $S^*(\Omega_M \otimes V)$ en la construisant d'abord sur les produits de formes linéaires continues et en l'étendant ensuite par continuité et densité à toutes les formes multilinéaires symétriques comme dans [9].

Nous présentons ici une autre méthode qui évite la considération de la topologie sur $S^*(\Omega_M \otimes V)$ et qui permet théoriquement de donner des formules plus explicites. Le désavantage est qu'il faut travailler avec la notion de coalgèbre qui est moins familière que celle d'algèbre.

4.1. COALGÈBRE DIFFÉRENTIELLE SUR UNE ALGÈBRE DIFFÉRENTIELLE. — Soit A une algèbre différentielle graduée commutative sur un corps K de caractéristique 0.

Une coalgèbre différentielle graduée C sur A (ou une A -coalgèbre différentielle graduée) est un module différentiel gradué C sur A muni de deux applications.

$$\Delta : C \rightarrow C \otimes_A C,$$

$$\varepsilon : C \rightarrow A$$

qui sont des morphismes de A -modules différentiels gradués et qui vérifient les propriétés usuelles de l'application diagonale et de la co-unité dans une coalgèbre.

Elle est *co-commutative* si $\Delta T = \Delta$, où $T : C \otimes_A C \rightarrow C \otimes_A C$ est défini par $T(x \otimes y) = (-1)^{\deg x \cdot \deg y} y \otimes x$.

Si l'on part d'une coalgèbre différentielle C sur K , alors $A \otimes C$ est naturellement une coalgèbre différentielle sur A , dite obtenue à partir de C par extension des scalaires.

Soit $\alpha : A \rightarrow A'$ un morphisme d'algèbres différentielles graduées. Soient M et M' des modules différentiels gradués sur A et A' respectivement. Un morphisme $f : M \rightarrow M'$ sur α est un morphisme de A -modules différentiels gradués, où M' est considéré comme un A -modules *via* α . Si $g : N \rightarrow N'$ est aussi un morphisme sur α , alors par définition $f \otimes_\alpha g : M \otimes_A N \rightarrow M' \otimes_{A'} N'$ est le morphisme sur α , défini par

$$(f \otimes_\alpha g)(m \otimes_A n) = \pm f(m) \otimes_{A'} g(n).$$

Si C et C' sont des coalgèbres différentielles graduées sur A et A' resp. un morphisme $f : C \rightarrow C'$ sur α est un morphisme de modules sur α tel que $(f \otimes_\alpha f) \circ \Delta_C = \Delta_{C'} \circ f$ et $\varepsilon' \circ f = \alpha \circ \varepsilon$.

Coalgèbre symétrique sur un A-module. — Soit W un A -module gradué et soit $S_*^A(W)$ l'algèbre symétrique sur le A -module W . C'est aussi une coalgèbre sur A , co-commutative, l'application diagonale étant l'homomorphisme d'algèbre prolongeant l'inclusion diagonale de W dans $W \times W$. On appellera $S_*^A(W)$ la coalgèbre symétrique sur le A -module W .

Le A -module W peut aussi être considéré comme un espace vectoriel sur K , par l'inclusion e de K dans A définie par l'unité. Alors la coalgèbre symétrique $S_*^K(W)$ sur le K -module W [aussi notée simplement $S_*(W)$] s'envoie naturellement par un homomorphisme de coalgèbre sur e dans $S_*^A(W)$:

$$S_e : S_*^K(W) \rightarrow S_*^A(W)$$

obtenu en remplaçant le produit tensoriel sur K par le produit tensoriel sur A .

PROPOSITION. — Soit d une différentielle sur $S_*^A(W)$ qui en fasse une coalgèbre différentielle graduée sur A . Il existe alors une différentielle d unique sur $S_*^K(W)$ qui en fasse une K -coalgèbre différentielle graduée et telle que S_e commute avec d .

Soit C une coalgèbre différentielle graduée sur K , co-commutative et connexe (cf. Quillen [12] p. 282). Pour tout homomorphisme $f : C \rightarrow S_*^A(W)$ de coalgèbre différentielle graduée sur $e : K \rightarrow A$, il existe un homomorphisme unique $F : C \rightarrow S_*^K(W)$ de coalgèbre différentielle graduée tel que $S_e \circ F = f$:

$$\begin{array}{ccc} C & & \\ \downarrow F & \searrow f & \\ S_*^K(W) & \xrightarrow{S_e} & S_*^A(W) \end{array}$$

Démonstration. — Soit j^A la projection naturelle de $S_*^A(W)$ sur $S_1^A(W)$. Soit de même j^K la projection de $S_*^K(W)$ sur W . On a évidemment $j^K = j^A S_e$. Il existe sur $S_*^K(W)$ une codérivation unique d telle que $j^K d = j^A d S_e$, (cf. Quillen [12] p. 286). Elle vérifie $d S_e = S_e d$. Ceci implique $j^K d^2 = 0$, donc $d^2 = 0$.

F est l'unique homomorphisme de K -coalgèbre graduée tel que $j^K F = j^A f$ (cf. Quillen p. 285). On a $j^K d F = j^K F d$, donc F commute avec d .

Des expressions explicites pour d et F seront données en 4.2 pour le cas particulier qui nous intéresse.

Exemple. Algèbre de Lie différentielle graduée sur A. — C'est un A -module différentiel gradué L muni d'un crochet $L \otimes_A L \rightarrow L$ antisymétrique qui est un morphisme de A -module différentiel gradué.

Par exemple, si L^K est une algèbre de Lie différentielle graduée sur K , alors par extension des scalaires de K à A , on a sur $A \otimes L^K$ une structure d'algèbre de Lie différentielle graduée sur A avec

$$[a \otimes l, a' \otimes l'] = (-1)^{\text{deg } l \cdot \text{deg } a'} aa' \otimes [l, l'] \quad \text{et} \quad d(a \otimes l) = da \otimes l + (-1)^{\text{deg } a} a \otimes dl.$$

Soit ΣL la suspension du A -module L . Par définition $(\Sigma L)_q = L_{q-1}$; si Σ est l'application canonique de L_{q-1} sur $(\Sigma L)_q$, on a $a \Sigma x = (-1)^{\deg a} \Sigma ax$.

Sur la coalgèbre symétrique $S_*^A(\Sigma L)$, appelée la co-algèbre des chaînes sur la A -algèbre de Lie L , notée $C_*^A(L)$, on a une différentielle définie par les mêmes formules que dans 1.2.

On peut aussi considérer L comme une algèbre de Lie sur K et former la coalgèbre différentielle $C_*^K(L)$ des chaînes sur L comme dans 1.2. Sa différentielle coïncide avec celle qui est construite dans la proposition précédente. L'application canonique de $C_*^K(L)$ dans $C_*^A(L)$ est un morphisme de coalgèbres différentielles graduées.

Fonctorialité. — Soit W (resp. W') un module gradué sur A (resp. A') et soit $\alpha : A' \rightarrow A$ un morphisme de K -algèbres différentielles graduées.

On suppose donné sur $S_*^{A'}(W')$ et $S_*^A(W)$ des différentielles qui en font des coalgèbres différentielles graduées sur A' et A .

Soit $f : S_*^{A'}(W') \rightarrow S_*^A(W)$ un morphisme sur α de coalgèbres différentielles graduées. Il induit un morphisme unique $f^K : S_*^K(W') \rightarrow S_*^K(W)$ de K -coalgèbres différentielles graduées tel que

$$\begin{array}{ccc} S_*^K(W') & \rightarrow & S_*^{A'}(W') \\ \downarrow & & \downarrow \\ S_*^K(W) & \rightarrow & S_*^A(W) \end{array}$$

commute.

Par exemple un tel f pourrait être construit par extension des scalaires $\alpha : A' \rightarrow A$ comme suit; si la différentielle sur $S_*^{A'}(W')$ est déjà donnée et si l'on pose $W = A \otimes_{A'} W'$, on obtient sur $S_*^A(W)$ une différentielle par l'égalité $S_*^A(W) \approx A \otimes_{A'} S_*^{A'}(W')$ et un morphisme $f = \alpha \otimes_{A'} \text{id}$.

Supposons de plus que la différentielle d dans $S_*^A(W)$ soit nulle sur l'élément unité de $A = S_0^A(W)$. Ce sera certainement le cas si W est gradué inférieurement et positivement. Alors d induit sur W une différentielle $d^0 = j^A di^A$, où $i^A : W \rightarrow S_*^A(W)$ et $j^A : S_*^A(W) \rightarrow W$ sont l'inclusion et la projection naturelle.

THÉORÈME DE COMPARAISON. — *Avec les notations qui précèdent, supposons W et W' gradués positivement et supposons que l'homomorphisme $j^A \circ f \circ i^{A'} : W' \rightarrow W$ induise un isomorphisme $H_*(W') \rightarrow H_*(W)$ pour les différentielles induites sur W' et W .*

Alors $f^K : S_^K(W') \rightarrow S_*^K(W)$ induit un isomorphisme sur l'homologie.*

Démonstration. — Définissons dans $S_*(W)$ une filtration croissante en posant

$$F^r = \otimes_{i \leq r} S_i(W).$$

Comme W est gradué positivement, elle est convergente. Le terme E_k^0 est égal à $S_k(W)$ et la différentielle d^0 est définie par

$$d^0(w_1 \dots w_k) = \pm \sum w_1 \dots d^0 w_i \dots w_k$$

d'après la formule de Künneth (cf. [12] p. 280) on a

$$E_k^1 = H_*(E_k^0) = S_k(H_*(W)).$$

Introduisons sur $S_*(W')$ une filtration semblable; il est clair que f^K induit sur les termes E^1 un isomorphisme puisqu'il induit un isomorphisme de $H_*(W)$ sur $H_*(W')$. Donc f^K induit un isomorphisme sur la cohomologie.

4.2. CONSTRUCTION DE LA DIFFÉRENTIELLE SUR $S^*(\Omega_M \otimes V)$ ET DE Φ_M . — Dans ce paragraphe, nous allons construire une différentielle sur la coalgèbre symétrique $S_*(\Omega_M \otimes V)$ et un morphisme

$$\psi_M : C_*(\mathcal{L}_M) \rightarrow S_*(\Omega_M \otimes V)$$

de coalgèbres différentielles graduées. Par dualité, on en déduira une différentielle sur $S^*(\Omega_M \otimes V)$ et le morphisme Φ_M .

Comme dans 3.1, posons $V = \Sigma L(n)$. Dans l'énoncé du théorème 2 de 2.3, $\Omega_M \otimes S^*(V) = \Omega_M \otimes C^*(L(n))$ est muni d'une différentielle qui en fait une Ω_M -algèbre différentielle. Le fait que l'on a affaire à une décomposition de Postnikov n'interviendra pas essentiellement dans la suite.

Soit $S_*^{\Omega_M}(\Omega_M \otimes V)$ la Ω_M -coalgèbre symétrique sur le Ω_M -module $\Omega_M \otimes V$. On peut interpréter $\Omega_M \otimes S^*(V)$ comme la Ω_M -algèbre $\text{Hom}_{\Omega_M}(S_*^{\Omega_M}(\Omega_M \otimes V), \Omega_M)$ duale de $S_*^{\Omega_M}(\Omega_M \otimes V)$, ou ce qui revient au même comme la Ω_M -algèbre $S_{\Omega_M}^*(\Omega_M \otimes V, \Omega_M)$ des formes Ω_M -multilinéaires symétriques sur $\Omega_M \otimes V$. Si $\alpha \in \Omega_M$ et $g \in S^*(V)$, alors $\alpha \otimes g$ est identifié à la forme

$$(\alpha \otimes g)(\alpha_1 v_1, \dots, \alpha_p v_p) = \pm \alpha \alpha_1 \dots \alpha_p g(v_1, v_2, \dots, v_p).$$

De plus, comme $\Omega_M \otimes V$ est gradué positivement et que ses composantes de degré fixé sont des Ω_M -modules avec base finie, la Ω_M -coalgèbre $S_*^{\Omega_M}(\Omega_M \otimes V)$ et la Ω_M -algèbre $\Omega_M \otimes S^*(V)$ sont duales l'une de l'autre sur Ω_M . On obtient donc par dualité sur $S_*^{\Omega_M}(\Omega_M \otimes V)$ une différentielle qui en fait une Ω_M -coalgèbre différentielle graduée.

D'après la proposition de 4.1, il existe sur $S_*(\Omega_M \otimes V)$ une différentielle unique telle que le morphisme naturel

$$S_*(\Omega_M \otimes V) \rightarrow S_*^{\Omega_M}(\Omega_M \otimes V)$$

commute avec d .

Elle est donnée explicitement en fonction de la différentielle de $S_*^{\Omega_M}(\Omega_M \otimes V)$, par la formule suivante. Soit $\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_r \in S_r(\Omega_M \otimes V)$ produit des $\alpha_i \in \Omega_M \otimes V$. Désignons par $\bar{d}(\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_r)$ le composé de la différentielle d de $S_*^{\Omega_M}(\Omega_M \otimes V)$ avec la projection j sur $\Omega_M \otimes V$ appliqué au produit des α_i considérés comme éléments de $S_*^{\Omega_M}(\Omega_M \otimes V)$.

Alors

$$(1) \quad d(\alpha_1 \dots \alpha_r) = \sum_{k=1}^r \sum_{\sigma} \pm \alpha_{\sigma(1)} \dots \alpha_{\sigma(k-1)} \bar{d}(\alpha_{\sigma(k)} \dots \alpha_{\sigma(r)})$$

où σ parcourt les permutations telles que

$$\sigma(1) < \dots < \sigma(k-1), \quad \sigma(k) < \dots < \sigma(r).$$

Une différentielle sur $\Omega_M \otimes S^*(V)$ provenant d'un autre choix de formes représentant les classes de Pontrjagin donnerait sur $S_*^{\Omega_M}(\Omega_M \otimes V)$ une différentielle d' qui conduirait à une coalgèbre différentielle isomorphe à la précédente d'après le théorème 2 de 2.3. D'après la functorialité mentionnée en 4.1, on obtiendrait sur $S_*(\Omega_M \otimes V)$ une structure d'algèbre différentielle isomorphe à la précédente.

Si les classes de Pontrjagin de M sont nulles, alors la différentielle sur

$$\Omega_M \otimes S^*(V) = \Omega_M \otimes C^*(L(n)) = C_{\Omega_M}^*(\Omega_M \otimes L(n))$$

est celle qui est donnée sur les cochaînes de l'algèbre de Lie $\Omega_M \otimes L(n)$ sur Ω_M . On obtient donc en vertu de 4.1 sur $S_*(\Omega_M \otimes V) = C_*(\Omega_M \otimes L(n))$ la différentielle sur les chaînes de l'algèbre de Lie $\Omega_M \otimes L(n)$ sur R .

Construction de $\Psi_M : C_(\mathcal{L}_M) \rightarrow S_*(\Omega_M \otimes V)$.* — Nous pouvons interpréter le Ω_M -morphisme

$$\varphi_M : \Omega_M \otimes S^*(V) \rightarrow C_{\Delta}^*(\mathcal{L}_M, \Omega_M) \subset C^*(\mathcal{L}_M, \Omega_M)$$

du théorème 2 de 2.3 comme le dual sur Ω_M d'un morphisme de Ω_M -coalgèbres différentielles graduées

$$\varphi'_M : \Omega_M \otimes C_*(\mathcal{L}_M) \rightarrow S_*^{\Omega_M}(\Omega_M \otimes V).$$

En effet, la Ω_M -algèbre différentielle graduée $C^*(\mathcal{L}_M, \Omega_M)$ des cochaînes continues ou non sur \mathcal{L}_M à valeur dans Ω_M peut être considérée comme le dual sur Ω_M de la coalgèbre $\Omega_M \otimes C_*(\mathcal{L}_M)$. Cette dernière s'injecte dans son bidual sur Ω_M et l'homomorphisme φ'_M est donc obtenu en composant cette injection avec le dual sur Ω_M de φ_M .

En composant l'inclusion $C_*(\mathcal{L}_M) \rightarrow \Omega_M \otimes C_*(\mathcal{L}_M)$ avec φ'_M , on obtient un morphisme de coalgèbre différentielle graduée sur R :

$$\Psi_M : C_*(\mathcal{L}_M) \rightarrow S_*^{\Omega_M}(\Omega_M \otimes V).$$

Explicitement, le morphisme Ψ_M fait correspondre à $\xi_1 \dots \xi_p \in C_p(\mathcal{L}_M)$ l'homomorphisme de $\Omega_M \otimes S^*(V)$ dans Ω_M (identifié à un élément de $S_*^{\Omega_M}(\Omega_M \otimes V)$) défini par

$$(2) \quad \Psi_M(\xi_1 \dots \xi_p)(h) = \pm \varphi_M(h)(\xi_1, \dots, \xi_p),$$

où h est un élément de $\Omega_M \otimes S^*(V)$, et ξ_i des champs de vecteurs sur M .

D'après la proposition de 4.1, il existe un morphisme $\Psi_M : C_*(\mathcal{L}_M) \rightarrow S_*(\Omega_M \otimes V)$ de coalgèbres différentielles graduées tel que le diagramme suivant soit commutatif

$$\begin{array}{ccc} & C_*(\mathcal{L}_M) & \\ \Psi_M \swarrow & & \searrow \Psi_M \\ S_*(\Omega_M \otimes V) & \rightarrow & S_*^{\Omega_M}(\Omega_M \otimes V) \end{array}$$

Explicitement Ψ_M est donnée par la formule suivante en fonction de $\bar{\Psi}$, le composé de Ψ_M avec la projection j sur $\Omega_M \otimes V$:

$$(3) \quad \Psi_M(\xi_1 \dots \xi_r) = \sum_P \frac{1}{k!} \sum_{0 < r_1 < \dots < r_{k-1} < r} \sum_{\sigma} \pm \bar{\Psi}(\xi_{\sigma(1)} \dots \xi_{\sigma(r_1)}) \dots \bar{\Psi}(\xi_{\sigma(r_{k-1}+1)} \dots \xi_{\sigma(r)})$$

où dans la dernière somme, σ parcourt les permutations telles que

$$\sigma(1) < \dots < \sigma(r_1); \dots; \sigma(r_{k-1}+1) < \dots < \sigma(r).$$

Dans ce qui précède, on peut partout remplacer \mathcal{L}_M et Ω_M par $\mathcal{L}_N(M)$ et Ω_N (où N est une sous-variété de M), et tout se comporte fonctoriellement d'après le théorème 2 de 2.3 et 4.1.

Pour un compact K de M , désignons par \mathcal{L}_M^K et Ω_M^K les champs de vecteurs et les formes différentielles à support dans K . D'après les formules ci-dessus, il est clair que $S_*(\Omega_M^K \otimes V)$ est une sous-algèbre différentielle de $S_*(\Omega_M \otimes V)$ et que Ψ_M applique $C_*(\mathcal{L}_M^K)$ dans $S_*(\Omega_M^K \otimes V)$, donc évidemment aussi $C_*(\mathcal{L}_M^c)$ dans $S_*(\Omega_M \otimes V)$.

Il reste à montrer que Ψ_M est continue pour des topologies convenables, ce que nous examinons au paragraphe suivant. Alors Φ_M sera le dual topologique de Ψ_M .

4.3. CONTINUITÉ DE Ψ_M . — Il est temps maintenant de préciser quelles sont les topologies considérées sur $C_*(\mathcal{L}_M)$ et $S_*(\Omega_M \otimes V)$.

Les éléments de \mathcal{L}_M sont les sections différentiables du fibré tangent τ_M de M . Sur le produit M^k , considérons le produit tensoriel $\tau_M^k = \otimes p_i^* \tau_M$, où p_i est la projection de M^k sur le i -ième facteur. Le groupe des permutations \mathcal{S}_k de k objets opère sur τ_M^k par

$$\sigma(\xi_1(x_1) \otimes \dots \otimes \xi_k(x_k)) = \pm(\xi_{\sigma(1)}(x_{\sigma(1)}) \otimes \dots \otimes \xi_{\sigma(k)}(x_{\sigma(k)}))$$

où le signe \pm est la signature de la permutation σ . Il opère donc aussi sur les sections de ce fibré.

On munit l'espace des sections de τ_M^k de la topologie C^∞ (convergence uniforme des dérivées sur les compacts). Le quotient de cet espace par l'action de \mathcal{S}_k (i. e. par le sous-espace engendré par $s - \sigma s$, pour tout $\sigma \in \mathcal{S}_k$) sera désigné par $\hat{C}_k(\mathcal{L}_M)$; il s'identifie au sous-espace des sections de τ_M^k invariantes par \mathcal{S}_k . L'application associant à une suite (ξ_1, \dots, ξ_k) l'image de $\xi_1 \otimes \dots \otimes \xi_k$ dans $\hat{C}_k(\mathcal{L}_M)$ est une application continue de $(\mathcal{L}_M)^k$ dans $\hat{C}_k(\mathcal{L}_M)$; elle induit une injection de $C_k(\mathcal{L}_M)$ sur un sous-espace dense de $\hat{C}_k(\mathcal{L}_M)$.

On munira $C_k(\mathcal{L}_M)$ de la topologie induite par l'inclusion dans $\hat{C}_k(\mathcal{L}_M)$. La topologie sur $C_k(\mathcal{L}_M^c)$ sera la limite inductive des sous-espaces $C_k(\mathcal{L}_M^K)$, K parcourant les compacts de M et \mathcal{L}_M^K désignant les champs de vecteurs à support dans K .

Les formes k -linéaires alternées continues sur \mathcal{L}_M sont les formes linéaires continues sur $C_k(\mathcal{L}_M)$, ou ce qui revient au même sur $\hat{C}_k(\mathcal{L}_M)$, puisque $C_k(\mathcal{L}_M)$ est dense dans cet espace. On définira de même $C^k(\mathcal{L}_M^c)$ comme l'espace des formes linéaires continues sur

$\hat{C}_k(\mathcal{L}_M^c)$; pour tout compact K de M , ce sont des formes k -linéaires alternées continues sur \mathcal{L}_M^K , mais elles ne sont que séparément continues sur \mathcal{L}_M^c .

On vérifie facilement que la différentielle dans $C_*(\mathcal{L}_M)$ ou $C_*(\mathcal{L}_M^c)$ est continue.

La topologie sur $S_*(\Omega_M \otimes V)$ est définie de la même manière. La puissance tensorielle k -ième de $\Omega_M \otimes V$ se plonge naturellement comme sous-espace dense de $\Omega_{M^k} \otimes T_k(V)$ muni de la topologie C^∞ , où $T_k(V)$ est la puissance tensorielle k -ième de V (elle est de dimension finie en chaque degré). Ce plongement est compatible avec des actions naturelles de \mathcal{S}_k de sorte qu'en passant au quotient par la relation d'équivalence linéaire engendrée par cette action, on obtient un plongement de $S_k(\Omega_M \otimes V)$ comme sous-espace dense du quotient $\hat{S}_k(\Omega_M \otimes V)$ de $\Omega_{M^k} \otimes T_k(V)$.

On peut aussi identifier $\hat{S}_k(\Omega_M \otimes V)$ au sous-espace de $\Omega_{M^k} \otimes T_k(V)$ formés des éléments invariants par \mathcal{S}_k .

Comme plus haut, on munira $S_k(\Omega_M \otimes V)$ de la topologie induite par cette injection. Toutes les définitions ci-dessus s'appliquent à ce cas. Remarquons encore que les formes linéaires continues sur $S_k(\Omega_M \otimes V)$ s'identifient par définition aux formes linéaires continues sur $\Omega_{M^k} \otimes T_k(V)$ invariantes par \mathcal{S}_k , c'est-à-dire encore aux courants à support compact sur M^k à valeur dans le dual de $T_k(V)$ et invariants par \mathcal{S}_k .

Il est clair que l'application $j \psi_M : C_*(\mathcal{L}_M) \rightarrow \Omega_M \otimes V$ est continue. Il en résulte que ψ_M est aussi continue.

L'application de $C_*(\mathcal{L}_M^c)$ dans $S_*(\Omega_M^c \otimes V)$ obtenue par restriction de ψ_M est aussi continue, puisque c'est la limite inductive sur les compacts K des $C(\mathcal{L}_M^K) \rightarrow S_*(\Omega_M^K \otimes V)$.

Donc par dualité Φ_M applique le dual continu $S^*(\Omega_M \otimes V)$ de $S_*(\Omega_M \otimes V)$ dans le dual continu $C^*(\mathcal{L}_M)$ de $C_*(\mathcal{L}_M)$.

4.4. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME B

Rappelons que pour construire la différentielle sur $\Omega_M \otimes S^*(V) = \Omega_M \otimes C^*(L)$, on a d'abord construit (cf. 2.3) une différentielle sur $P_n \otimes S^*(V)$ qui en fait une algèbre différentielle sur P_n .

Choisissons des représentants pour les classes de Pontrjagin de M qui sont les images par α de cocycles $a_i \in A$. L'homomorphisme de P_n (cf. 2.3) dans A (resp. dans Ω_M) appliquant p_i sur a_i [resp. $\alpha(a_i)$] définit sur A (resp. Ω_M) une structure de P_n -module différentiel.

Rappelons que la différentielle sur $\Omega_M \otimes S^*(V) = \Omega_M \otimes C^*(L(n))$ a été définie dans 2.3 par le changement de base $P_n \rightarrow \Omega_M$ à partir d'une différentielle sur $P_n \otimes S^*(V)$.

Le morphisme $P_n \rightarrow A$ permet de définir une différentielle sur $A \otimes S^*(V)$ (cf. 1.4) et l'application

$$\alpha \otimes 1 : A \otimes S^*(V) \rightarrow \Omega_M \otimes S^*(V)$$

est un morphisme de A -algèbres différentielles graduées.

Par dualité et naturalité (cf. 1.3), on obtient un diagramme commutatif de coalgèbres différentielles

$$\begin{array}{ccc} A \otimes S_*(V) & \rightarrow & \Omega_M \otimes S_*(V) \\ \uparrow & & \uparrow \\ S_*(A \otimes V) & \rightarrow & S_*(\Omega_M \otimes V) \end{array}$$

Notons que si les classes de Pontrjagin sont nulles et que si l'on choisit les $a_i = 0$, alors $A \otimes S_*(V) = A \otimes C_*(L(n))$ est obtenu à partir de $C_*(L(n))$ par extension des scalaires à A . Donc $S_*(A \otimes V)$ est l'algèbre $C_*(A \otimes L(n))$ des chaînes sur l'algèbre de Lie différentielle graduée $A \otimes L(n)$.

En passant aux formes linéaires continues, on obtient le morphisme

$$\Lambda : S^*(\Omega_M \otimes V) \rightarrow S^*(A \otimes V)$$

d'algèbres différentielles graduées induit par $\alpha \otimes 1$. Il s'agit de démontrer qu'il induit un isomorphisme sur la cohomologie.

Filtrons $S^*(\Omega_M \otimes V)$ en posant

$$F^k = \otimes_{i \geq k} S^i(\Omega_M \otimes V).$$

C'est le dual de la filtration sur $S_*(\Omega_M \otimes V)$ considérée dans la démonstration du théorème de comparaison de 3.1.

On a une filtration analogue sur $S^*(P_n \otimes V)$ et $S^*(A \otimes V)$.

Cette filtration est convergente. Dans la suite spectrale correspondante, la différentielle d_0 sur le terme $E_0^k = S^k(\Omega_M \otimes V)$ est la duale de la différentielle d^0 sur $S_k(\Omega_M \otimes V)$ décrite à la fin de 3.1.

Examinons d'abord d^0 sur $S_1(\Omega_M \otimes V) = \Omega_M \otimes V$. Par définition, $d^0 = jdi$, où i est l'inclusion de $\Omega_M \otimes V$ dans $\Omega_M \otimes S_*(V)$ et j la projection dans l'autre sens. Sur $P_n \otimes V$, on a la différentielle d^0 définie d'une manière analogue. Comme $S^*(V)$ est un modèle minimal, la différentielle de tout élément de $S^1(V)$ est décomposable. Il en résulte que sur $P_n \otimes V$, d^0 est de la forme

$$d^0(p \otimes v) = \sum q_r \otimes v_r \quad \text{avec} \quad \deg q_r \geq \deg p + 4.$$

Comme d^0 sur $\Omega_M \otimes V$ est obtenue par produit tensoriel sur P_n de Ω_M et $P_n \otimes V$, on a

$$d^0(\omega \otimes v) = d\omega \otimes v + \sum \omega_r \otimes v_r, \quad \text{avec} \quad \deg \omega_r \geq \deg \omega + 4.$$

Enfin sur $S_k(\Omega_M \otimes V)$, on a

$$d^0(w_1 \dots w_k) = \sum_i \pm w_1 \dots d^0 w_i \dots w_k.$$

Nous voulons montrer que l'application $\Lambda : S^*(\Omega_M \otimes V) \rightarrow S^*(A \otimes V)$ induit un isomorphisme sur les termes E^1 des suites spectrales. Pour le voir, nous introduisons une nouvelle filtration sur les termes $E_0^k = S^k(\Omega_M \otimes V)$ en posant qu'un élément g est de filtration r si $g(\omega_1 \otimes v_1, \dots, \omega_k \otimes v_k) = 0$ pour $\sum \deg \omega_i \geq r$.

Comme

$$d_0 g(\omega_1 \otimes v_1, \dots, \omega_k \otimes v_k) = \sum_i \pm g(\omega_1 \otimes v_1, \dots, d^0(\omega_i \otimes v_i), \dots, \omega_k \otimes v_k)$$

le premier terme \bar{E}_1 de la suite spectrale associée à cette filtration est isomorphe à $S^k(\Omega_M \otimes V)$ muni de la différentielle

$$d_1 g(\omega_1 \otimes v_1, \dots, \omega_k \otimes v_k) = \sum \pm g(\omega_1 \otimes v_1, \dots, d\omega_i \otimes v_i, \dots, \omega_k \otimes v_k).$$

Donc si l'on prenait pour $S^k(\Omega_M \otimes V)$ toutes les formes multilinéaires symétriques sans condition de continuité, on aurait évidemment par la formule de Künneth que le deuxième terme \bar{E}_2 de la suite spectrale, c'est-à-dire la cohomologie de $S^k(\Omega_M \otimes V)$ avec la différentielle d_1 , serait isomorphe à :

$$\bar{E}_2 = S^k(H^*(\Omega_M) \otimes V).$$

Nous devons vérifier que ceci est encore vrai en se limitant aux formes multilinéaires continues. On a vu (cf. 4.3) que $S^k(\Omega_M \otimes V)$ s'identifie aux courants à support compact sur M^k à valeur dans la puissance tensorielle k -ième du dual de V , invariants par l'action naturelle du groupe des permutations \mathcal{S}_k . D'après le théorème de De Rham [14], l'homologie des courants à support compact sur M^k est isomorphe à l'homologie réelle de M^k . Comme par hypothèse la cohomologie réelle de M est de dimension finie, par la formule de Künneth, l'homologie de M^k est le dual de la puissance tensorielle k -ième de la cohomologie réelle de M . La formule ci-dessus est donc bien vérifiée.

On vérifie également que le terme \bar{E}_2 de la filtration analogue de $S^k(A \otimes V)$ est aussi isomorphe à $S^k(H^*(A) \otimes V)$. Dans ce cas, on n'a pas de problèmes de continuité puisque $A \otimes V$ est de dimension finie en chaque degré.

Comme tout se comporte fonctoriellement, l'homomorphisme induit par Λ sur ces termes \bar{E}_2 est l'homomorphisme

$$S^k(H^*(M) \otimes V) \rightarrow S^k(H^*(A) \otimes V)$$

induit par $H^*(\alpha) \otimes 1$.

C'est donc un isomorphisme. Il en résulte que Λ induit un isomorphisme sur la cohomologie des termes E_0^k des premières suites spectrales, c'est-à-dire sur les termes E_1^k . Ceci implique que Λ induit un isomorphisme sur la cohomologie.

5. Démonstration du théorème A

Le but de ce paragraphe est de démontrer que le morphisme

$$\Phi_M : S^*(\Omega_M \otimes V) \rightarrow C^*(\Omega_M)$$

construit en 4.2 et 4.3 induit un isomorphisme en cohomologie et qu'il en est de même du morphisme analogue pour \mathcal{L}_M^c .

5.1. L'ESPACE DES CONFIGURATIONS DE M . — Pour tout entier $k \geq 0$, soit $F^k(M)$ l'espace des sous-ensembles de M contenant au plus k points. Sa topologie est définie de la manière suivante : soit M_+^k l'union disjointe de M^k et d'un point base : on a une projection cano-

nique de M^k_+ sur $F^k(M)$ qui applique le point (x_1, \dots, x_k) sur le sous-ensemble union des x_i , et le point base sur l'ensemble vide. On munit alors $F^k(M)$ de la topologie quotient.

On a les inclusions évidentes

$$F^0(M) \subset F^1(M) \subset \dots \subset F^k(M) \subset \dots$$

et par définition l'espace des configurations $F(M)$ est la limite directe des $F^k(M)$.

Si U est un sous-ensemble de $F(M)$, on désignera par U_k le sous-ensemble de M^k image inverse de U par l'application de M^k dans $F(M)$. Ainsi U est ouvert si et seulement si chacun des U_k est ouvert.

Une fonction f sur un ouvert U de $F^k(M)$ est dite différentiable si son image réciproque sur U_k est différentiable. Il en résulte que son image réciproque sur tout U_l , avec $l \leq k$, est aussi différentiable. Inversement, une fonction différentiable sur U_k invariante par le groupe \mathcal{S}_k des permutations des facteurs donne une fonction différentiable sur U .

Étant donné un recouvrement U^i de $F^k(M)$, on peut toujours trouver une partition de l'unité différentiable subordonnée à ce recouvrement. Il suffit en effet de prendre n'importe quelle partition de l'unité sur le recouvrement U^i_k de M^k et d'en faire la moyenne sur le groupe \mathcal{S}_k .

Le faisceau des germes de fonctions différentiables sur $F^k(M)$ est donc un faisceau fin.

5.2. INTERPRÉTATION DE $C^*(\mathcal{L}_M)$ ET $S^*(\Omega_M \otimes V)$ COMME SECTIONS D'UN FAISCEAU SUR L'ESPACE DES CONFIGURATIONS. — On a vu en 3.4 que $C^k(\mathcal{L}_M)$ peut s'interpréter comme l'espace des formes linéaires continues sur l'espace $\hat{C}_k(\mathcal{L}_M)$ des sections différentiables du fibré vectoriel τ^k_M sur M^k invariantes par le groupe des permutations \mathcal{S}_k .

Par définition, le support d'un élément de $\hat{C}_k(\mathcal{L}_M)$ sera le sous-espace de $F(M)$ image par l'application canonique de M^k dans $F(M)$ du support de la section correspondante de τ^k_M .

Rappelons que la topologie sur $\hat{C}_k(\mathcal{L}_M)$ est celle de la convergence uniforme des dérivées sur tout compact. Sur le sous-espace des éléments à support dans un compact K de $F(M)$, on prendra la topologie induite. Enfin sur le sous-espace des éléments à support compact dans un ouvert U de $F(M)$, on prend la topologie limite inductive sur les compacts K contenus dans U des sous-espaces précédents.

Remarquons que la différentielle $d : \hat{C}_k(\mathcal{L}_M) \rightarrow \hat{C}_{k-1}(\mathcal{L}_M)$ est continue et n'augmente pas les supports.

On va définir maintenant un faisceau différentiel \underline{C} sur $F(M)$ en posant, pour tout ouvert U de $F(M)$:

$\underline{C}^k(U)$ = espace des formes linéaires continues sur l'espace des éléments de $C_k(\mathcal{L}_M)$ à support compact dans U .

La différentielle $\underline{C}^k(U) \rightarrow \underline{C}^{k+1}(U)$ est obtenue par dualité à partir de la différentielle de $\hat{C}_*(\mathcal{L}_M)$.

On vérifie facilement qu'on obtient bien ainsi un faisceau différentiel sur $F(M)$. De plus il est fin, car chaque C^k est l'image directe par l'inclusion de $F^k(M)$ dans $F(M)$ d'un faisceau de modules sur le faisceau fin des germes de fonctions différentiables sur $F^k(M)$.

On voit de plus, comme dans la théorie élémentaire des distributions, que les éléments de $C^*(\mathcal{L}_M)$ s'identifient aux sections à support compact de \underline{C} et les éléments de $C^*(\mathcal{L}_M^c)$ aux sections à support quelconque de \underline{C} .

D'une manière tout à fait analogue, on peut définir un faisceau différentiel fin \underline{S} sur F_M dont les sections à support compact s'identifient aux éléments de $S^*(\Omega_M \otimes V)$ et les sections quelconques à $S^*(\Omega_M^c \otimes V)$.

En effet, on a interprété dans 4.3 les éléments de $S^k(\Omega_M \otimes V)$ comme formes linéaires continues sur l'espace $\hat{S}^k(\Omega_M \otimes V)$ des sections différentiables d'un fibré vectoriel sur M^k invariantes par \mathcal{L}_k . On définit comme plus haut le support d'une telle section et on vérifie que la différentielle dans $S^*(\Omega_M \otimes V)$ n'augmente pas les supports d'après la formule 3 de 3.3.

Le faisceau différentiel \underline{S} sur $F(M)$ est défini, en posant, pour tout ouvert U de $F(M)$:

$\underline{S}(U) =$ espace des formes linéaires continues sur l'espace des éléments de $S^*(\Omega_M \otimes V)$ de degré k à support compact dans U .

Enfin l'homomorphisme $\psi_M : C_*(\mathcal{L}_M) \rightarrow S_*(\Omega_M \otimes V)$ construit dans 3.3 n'augmente pas les supports d'après la formule 2 de 3.3; il permet donc de définir par dualité un morphisme de faisceaux différentiels

$$\underline{\Phi}_M : \underline{S} \rightarrow \underline{C}$$

qui redonne l'homomorphisme Φ_M du théorème A par passage aux sections à support compact.

5.3. UN LEMME DE THÉORIE DES FAISCEAUX. — Soit $\Phi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}'$ un homomorphisme de faisceaux différentiels fins sur un espace localement compact X . On suppose donnée une base \mathcal{U} d'ouverts de X telle que l'intersection de deux d'entre eux appartienne encore à \mathcal{U} .

Pour tout ouvert U de M , soit $\mathcal{F}_c(U)$ et $\mathcal{F}'_c(U)$ les sections à support compact dans U de \mathcal{F} et \mathcal{F}' , et soit $\Phi_U : \mathcal{F}_c(U) \rightarrow \mathcal{F}'_c(U)$ l'homomorphisme induit par Φ . Alors :

- 1° si Φ_U induit un isomorphisme pour $U \in \mathcal{U}$, c'est aussi vrai pour tout ouvert de X ;
- 2° Φ induit un isomorphisme du faisceau de cohomologie de \mathcal{F}' .

Démonstration. — Supposons le théorème démontré pour un ouvert U réunion de r ouverts de \mathcal{U} et montrons qu'il est encore vrai pour la réunion de $r+1$ ouverts de \mathcal{U} .

Soient donc U_1, \dots, U_{r+1} des ouverts de \mathcal{U} et posons $U_r =$ réunion de U_1, \dots, U_r .

On a la suite exacte

$$0 \rightarrow \mathcal{F}_c(U^r \cap U_{r+1}) \rightarrow \mathcal{F}_c(U^r) \otimes \mathcal{F}_c(U_{r+1}) \rightarrow \mathcal{F}_c(U^r \cup U_{r+1}) \rightarrow 0.$$

Le premier homomorphisme est obtenu en faisant la différence des homomorphismes induits par les inclusions de $U^r \cap U_{r+1}$ dans U^r et U_{r+1} ; le second est la somme des homomorphismes induits par les inclusions de U^r et U_{r+1} dans $U^r \cup U_{r+1}$. Comme \mathcal{F} est fin, cet homomorphisme est surjectif.

Cette suite exacte s'envoie dans la suite exacte analogue pour \mathcal{F}' . L'hypothèse de récurrence s'applique à $U^r \cap U_{r+1}$ et à U_r . Donc d'après le lemme des cinq, le théorème est démontré pour la réunion de $r+1$ ouverts U_i .

Le théorème est ainsi démontré pour toute réunion d'un nombre fini de $U_i \in \mathcal{U}$. On voit facilement qu'il est encore vrai pour tout ouvert U puisqu'on ne considère que des sections à support compact.

Vérifions 2°. Soit $x \in X$ un point de X et \mathcal{F}_x la fibre de \mathcal{F} au point x .

On a la suite

$$0 \rightarrow \mathcal{F}_c(X-x) \rightarrow \mathcal{F}_c(X) \rightarrow \mathcal{F}_x \rightarrow 0$$

où le dernier homomorphisme associe à une section son germe en x .

Cette suite est exacte, car le dernier homomorphisme est surjectif puisque \mathcal{F} est fin et X localement compact.

Cette suite s'envoie dans la suite exacte analogue pour \mathcal{F}' . D'après l'isomorphisme démontré dans 1°, on voit bien en passant aux suites exactes longues de cohomologie que Φ induit un isomorphisme de $H^*(\mathcal{F}_x)$ sur $H^*(\mathcal{F}'_x)$.

5.4. FIN DE LA DÉMONSTRATION DU THÉORÈME A

LEMME LOCAL. — *Supposons que M soit l'union disjointe de r variétés M_i difféomorphes à \mathbb{R}^n . Soit O_i un point dans M_i et soit O la réunion des O_i . Alors dans le diagramme commutatif :*

$$\begin{array}{ccc} S^*(\Omega_0 \otimes V) & \xrightarrow{\Phi_0} & C^*(\mathcal{L}_0(M)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ S^*(\Omega_M \otimes V) & \xrightarrow{\Phi_M} & C^*(\mathcal{L}_M) \end{array}$$

tous les homomorphismes induisent un isomorphisme en cohomologie. (Les homomorphismes verticaux sont induits par l'homomorphisme d'inclusion de O dans M .)

Démonstration. — Le fait que $S^*(\Omega_0 \otimes V) \rightarrow S^*(\Omega_M \otimes V)$ induise un isomorphisme en cohomologie est un cas particulier du théorème B. Naturellement la démonstration dans ce cas est beaucoup plus simple que dans le cas général.

Le fait que $C^*(\mathcal{L}_0) \rightarrow C^*(\mathcal{L}_M)$ induise un isomorphisme en cohomologie a été démontré par Bott (cf. [1]). C'est aussi une conséquence de Gelfand-Fuchs [4].

Enfin le fait que Φ_0 induise un isomorphisme en cohomologie est le cas particulier du théorème 2 de 2.3 avec la sous-variété N réduite à O_i . En effet dans ce cas,

$$S^*(\Omega_0 \otimes V) = \otimes_i S^*(\Omega_{O_i} \otimes V) \quad \text{et} \quad C^*(\mathcal{L}_0) = \otimes_i C^*(\mathcal{L}_{O_i}) \quad \text{et} \quad \Phi_0 = \otimes_i \Phi_{O_i}.$$

Comme Φ_{O_i} induit un isomorphisme en cohomologie d'après 2.3, il en est de même pour Φ_0 en appliquant la formule de Künneth.

Ce qui précède entraîne évidemment que Φ_M induit un isomorphisme en cohomologie.

Nous pouvons maintenant appliquer le lemme 4.3 au morphisme $\Phi_M : S^* \rightarrow C^*$ de faisceaux différentiels sur $F(M)$. Bien que $F(M)$ ne soit pas localement compact, le lemme s'applique tout de même car, pour un degré donné, ces faisceaux sont des images directes de faisceaux sur $F^k(M)$ par l'inclusion de $F^k(M)$ dans $F(M)$.

On prend comme base \mathcal{U} des ouverts de $F(M)$ les composantes connexes des ouverts de la forme $F(W)$, où W est réunion disjointe de petits ouverts géodésiquement convexes dans M (relativement à une métrique riemannienne sur M).

Comme W est réunion disjointe de variétés difféomorphes à \mathbb{R}^n , d'après le lemme précédent, Φ_M induit un isomorphisme en cohomologie. Or $S^*(\Omega_W \otimes V)$ et $C^*(\mathcal{L}_W)$ s'identifient aux sections à supports compacts dans $F(W)$ de \underline{S}^* et \underline{C}^* . Il en résulte que, pour chaque composante connexe U de $F(W)$, $\Phi_M(U)$ induit un isomorphisme en cohomologie.

Les hypothèses du lemme sont donc bien vérifiées. La première partie du lemme, appliquée à $U = F(M)$, signifie que $\Phi_M : S^*(\Omega_M \otimes V) \rightarrow C^*(\mathcal{L}_M)$ induit un isomorphisme en cohomologie.

D'après un théorème classique (*cf.* Godement [7], th. 4.6.2) le fait que Φ_M induise un isomorphisme des faisceaux de cohomologie de \underline{S}^* et \underline{C}^* et que les faisceaux \underline{S}^* et \underline{C}^* soient fins, implique que Φ_M induit un isomorphisme sur la cohomologie des espaces de sections. Cela signifie que Φ_M induit un isomorphisme de la cohomologie de $S^*(\Omega_M^c \otimes V)$ sur celle de $C^*(\mathcal{L}_M^c)$.

L'énoncé concernant une sous-variété N de M se démontre de la même manière en vérifiant qu'il est vrai pour un sous-espace linéaire de \mathbb{R}^n .

BIBLIOGRAPHIE

- [1] R. BOTT, *On the Gelfand-Fuchs Cohomology*. *Differential Geometry (Proceedings of Symposium A.M.S., vol. 27, Part I, p. 357-364)*.
- [2] N. BOURBAKI, *Groupes et algèbres de Lie*, chap. II, *Actualités scientifiques et industrielles*, Hermann, Paris, 1972.
- [3] H. CARTAN, *Notions d'algèbre différentielle; application aux groupes de Lie et aux variétés où opère un groupe de Lie*, Colloque de Bruxelles, 1950.
- [4] I. M. GELFAND and D. B. FUCHS, *The Cohomology of the Lie Algebra of Tangent Vector Fields on a Smooth Manifold I and II* (*Funct. Anal.*, vol. 3, 1969, p. 32-52 et vol. 4, n° 2, 1970, p. 23-32).
- [5] I. M. GELFAND and D. B. FUCHS, *The Cohomology of the Lie Algebra of Formal Vector Fields* (*Izvestia An. C.C.C.R.*, vol. 34, 1970, p. 322-337).
- [6] G. GODBILLON, *Cohomologie d'algèbres de Lie de champs de vecteurs formels* (*Séminaire Bourbaki*, n° 421, 1972-1973).
- [7] R. GODEMENT, *Théorie des faisceaux* (*Actualités scientifiques et industrielles*, Hermann, Paris, 1964).
- [8] V. GUILLEMIN, *Cohomology of Vector fields on a Manifold* (*Ad. in Math.*, vol. 10, 1973, p. 192-220).
- [9] A. HAEFLIGER, *Sur la cohomologie de Gelfand-Fuchs*, Journées différentielles de Dijon (*Lecture notes*), Springer-Verlag).
- [10] P. J. HILTON, *On the Homotopy Groups of the Union of Spheres*, *J. London Math. Soc.*, vol. 30, 1955, p. 154-171).
- [11] M. V. LOSIK, *Cohomologies of the Lie algebra of Vector Fields with Coefficients in a Trivial Unitary Representation* (*Funct. Anal.*, vol. 6, n° 1, 1972, p. 24-36).
- [12] D. QUILLEN, *Rational Homotopy Theory* (*Annals of Math.*, 90, 1969, App. B, p. 279-295).
- [13] DE RHAM, *Variétés différentiables. Formes, courants, formes harmoniques*, Paris, Hermann et Cie, 1955.
- [14] D. SULLIVAN, *Infinitesimal Computations in Topology* (to appear).

(Manuscrit reçu le 8 mars 1976.)

André HAEFLIGER,
 Université de Genève,
 Faculté des Sciences,
 Section de Mathématiques,
 2-4, rue du Lièvre,
 1211, Genève 24,
 C. H.