ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

H. ROSSI

M. VERGNE

Équations de Cauchy-Riemann tangentielles associées à un domaine de Siegel

Annales scientifiques de l'É.N.S. 4e série, tome 9, nº 1 (1976), p. 31-80

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1976_4_9_1_31_0>

Ann. scient. Éc. Norm. Sup.,
4e série, t. 9, 1976, p. 31 à 80.

ÉQUATIONS DE CAUCHY-RIEMANN TANGENTIELLES ASSOCIÉES A UN DOMAINE DE SIEGEL

PAR H. ROSSI ET M. VERGNE

Soit Ω un cône convexe ouvert de R^n et homogène sous un groupe H_0 de transformations linéaires, qu'on choisit complètement résoluble.

Soit $\mathrm{Q} : \mathrm{C}^m \times \mathrm{C}^m \rightarrow \mathrm{C}^n$ une forme Ω-hermitienne et supposons qu'il existe une représentation de H_0 dans C^m telle que $h_0 . \mathrm{Q}(u, v) = \mathrm{Q}(h_0 u, h_0 v)$.

Le domaine $\mathrm{D}(\Omega; \mathrm{Q}) = \{ (z, u) \in \mathbf{C}^n \times \mathbf{C}^m ; \operatorname{Im} z - \mathrm{Q}(u, u) \in \Omega \}$ est alors un domaine homogène sous le groupe $\mathrm{B} = \mathrm{H}_0 \times \mathrm{C}^m \times \mathbf{R}^n$ où l'action est donnée par (*voir* [6], [14]) :

$$h_0 \in \mathrm{H}_0 : \quad h_0(x+iy, u) = (h_0 . x + i h_0 . y, h_0 . u),$$

$$u_0 \in \mathbf{C}^m : \quad u_0 .(x+iy, u) = (x+iy+2i\,\mathrm{Q}(u, u_0) + i\,\mathrm{Q}(u_0, u_0), u+u_0),$$

$$x_0 \in \mathbf{R}^n : \quad x_0 .(x+iy, u) = (x+x_0+iy, u).$$

Dans [13] (*a*) nous avons étudié des représentations de B dans des espaces de fonctions holomorphes sur $\mathrm{D} = \mathrm{D}(\Omega, \mathrm{Q})$.

Considérons le bord de Shilov $\Sigma = \{ (z, u), \operatorname{Im} z = \mathrm{Q}(u, u) \}$ de D. Le groupe B agit naturellement dans $\mathrm{L}^2(\Sigma)$ et conserve l'espace $\mathrm{H}(\Sigma)$ des fonctions dans $\mathrm{L}^2(\Sigma)$ satisfaisant les équations de Cauchy-Riemann tangentielles. On se propose d'étudier la décomposition en représentations irréductibles de cette représentation de B et d'étudier la relation entre l'espace $\mathrm{H}(\Sigma)$ et l'espace de Hardy H^2 du domaine $\mathrm{D}(\Omega, \mathrm{Q})$ (*voir* [8], [16]) (cette représentation de B dans $\mathrm{H}(\Sigma)$ est la représentation définie par la sous-algèbre $\mathfrak{h} = \mathscr{H}_0^{\mathrm{C}} \oplus \mathscr{H}_{1/2}^{-}$, introduite en [13] (*a*), p. 359, et que nous avions promis d'étudier).

Plus généralement, soient $\mathcal{O}_1 = \{ 0 \}, \ldots, \mathcal{O}_i, \ldots, \mathcal{O}_r$ certaines orbites de H_0 dans $\overline{\Omega} - \Omega$ (par exemple, si Ω est le cône des matrices symétriques définies positives, alors $\mathcal{O}_i$ sera essentiellement la partie du bord de Ω formée par les matrices semi-définies positives et de rang $i-1$). On considère la sous-variété Σ_e du bord $\overline{\mathrm{D}} - \mathrm{D}$ du domaine D, définie par

$$\Sigma_e = \{ (z, u); \operatorname{Im} z - \mathrm{Q}(u, u) \in \Sigma_e \} \qquad (\text{on a } \Sigma = \Sigma_1).$$

On définit une représentation unitaire ρ_e de B dans un espace de Hilbert $\mathrm{H}(\Sigma_e)$ de fonctions sur Σ_e satisfaisant les équations de Cauchy-Riemann tangentielles sur Σ_e, et on étudie la décomposition de ρ_e en représentations irréductibles (paramétrisées par les orbites de B dans le dual $\mathfrak{b}^*$ de son algèbre de Lie $\mathfrak{b}$).

Dans le cas d'un domaine symétrique irréductible (excepté pour $\Sigma = \Sigma_1$, et lorsque D est de type tubulaire) toutes les fonctions de H (Σ_e) s'étendent en des fonctions holomorphes sur D. On identifiera les normes de ces espaces de Hilbert $\mathscr{H}_e$ de fonctions holomorphes obtenus comme des normes du type espaces de Hardy associés à la sous-variété Σ_e.

Cet isomorphisme $\mathscr{H}_e \mapsto \mathrm{H}(\Sigma_e)$ donné par la valeur au bord est essentiel dans l'étude de certaines représentations apparaissant dans la continuation analytique de la série discrète holomorphe et dans la construction de sous-espaces invariants de certaines séries principales unitaires, que nous étudions dans un autre article [13] (*b*).

DÉCRIVONS BRIÈVEMENT LE PLAN DE CET ARTICLE. — Dans la section 1, on considère des sous-variétés réelles D de C^{N} obtenues de la manière suivante :

V est une sous-variété différentiable de R^n, N est une fonction différentiable à valeurs dans R^n définie sur un domaine E de C^m, et on considère

$$\mathrm{D}_0 = \mathrm{D}_0(\mathrm{V}, \mathrm{N}, \mathrm{E}) = \{(y, u) \in \mathrm{R}^n \times \mathrm{E},\ y - \mathrm{N}(u) \in \mathrm{V}\},$$

$$\mathrm{D} = \mathrm{D}(\mathrm{V}, \mathrm{N}, \mathrm{E}) = \{(z, u) \in \mathrm{C}^n \times \mathrm{E},\ \mathrm{Im}\, z - \mathrm{N}(u) \in \mathrm{V}\}.$$

On s'intéresse au système d'équations de Cauchy-Riemann tangentielles définies sur D (qui est une sous-variété réelle plongée dans $\mathrm{C}^n \times \mathrm{C}^m$).

On introduit (*voir* [7], [3], [4] et [18]) le $\bar{\partial}_b$-complexe associé : $(\mathrm{E}^{\cdot}, \bar{\partial}_b)$. D'autre part si on note par d_t la différentielle extérieure sur V et par $\bar{\partial}_u$ le complexe de Cauchy-Riemann sur E, alors on a un complexe naturel sur $\mathrm{D}_0 = \mathrm{V} \times \mathrm{E}$ défini par $d_t + \bar{\partial}_u$; on étend ce complexe sur $(\mathrm{R}^n)^* \times \mathrm{D}_0$, en laissant les coefficients des formes varier en $\xi \in (\mathrm{R}^n)^*$. En d'autres termes, un élément de degré d de ce complexe est une forme ω du type (dans un système de coordonnées) :

$$\omega = \sum_{|\mathrm{I}|+|\mathrm{A}|=d} f_{\mathrm{I},\mathrm{A}}(\xi, t, u)\, dt_{\mathrm{I}} \wedge d\bar{u}_{\mathrm{A}},$$

où $f_{\mathrm{I},\mathrm{A}}(\xi, t, u)$ sont des fonctions C^∞ sur $(\mathrm{R}^n)^* \times \mathrm{V} \times \mathrm{U}$ et la différentiation est donnée par $d_t + \bar{\partial}_u$.

La transformation de Fourier-Laplace partielle par rapport à la variable z, $z \in \mathrm{C}^n$ définit un morphisme du complexe $\bar{\partial}_b$ défini sur D dans le complexe $d_t + \bar{\partial}_u$ défini sur $(\mathrm{R}^n)^* \times \mathrm{D}_0$. Dans cet article nous étudions cette transformation en degré zéro (nous espérons retourner à la considération des espaces de cohomologie de dimension supérieure dans un prochain article) où elle s'écrit si $y = v + \mathrm{N}(u)$:

$$\hat{f}(\xi, v, u) = \int_{\mathrm{R}^n} e^{-2i\pi\langle \xi, x+iy \rangle} f(x+iy, u)\, dx.$$

Dans la section 2, on introduit une forme volume sur D du type

$$dm = dx\, d\mu(t)\, \nu(u)\, du$$

où $d\mu\,(t)$ est une forme volume sur V et $\nu\,(u)$ une fonction C^∞ strictement positive sur E.

On définit :

$$H(D;\, dm) = \{ f \in L^2(dm), \text{ satisfaisant } \bar{\partial}_b f = 0 \text{ au sens distribution} \}.$$

La transformation $f \to \hat{f}$ définit une isométrie entre H (D; dm) et l'espace

$\hat{H}(D) = \Big\{$ classes d'équivalences des fonctions mesurables $\varphi(\xi, u)$ sur $(R^n)^* \times E$, telles que $\varphi(\xi, u)$ est holomorphe sur E, pour presque tout ξ, et où

$$\|\varphi\|^2 = \int |\varphi(\xi, u)|^2 e^{-4\pi \langle \xi, N(u) \rangle} I_\mu(\xi)\, \nu(u)\, d\xi\, du < +\infty \Big\},$$

avec

$$I_\mu(\xi) = \int_V e^{-4\pi \langle \xi, t \rangle}\, d\mu(t).$$

L'intégrale

$$f(z, u) = \int e^{2i\pi \langle \xi, z \rangle} \hat{f}(\xi, u)\, d\xi$$

définissant f en fonction de $\hat{f}$ convergera alors en général pour (z, u) variant dans un ensemble plus grand que la sous-variété D de départ : nous étudions alors la possibilité de la continuation analytique des fonctions dans H (D; dm) pour des cas particuliers : V sera un cône de R^n (par exemple $V = \{0\}$, où bien V sera une partie du bord d'un cône convexe, etc.), $d\mu\,(t)$ une forme volume homogène [i. e. il existe un λ réel tel que $d\mu\,(at) = a^\lambda\, d\mu\,(t)$, $a > 0$]. On se donne une forme hermitienne $Q : C^m \times C^m \to C^n$. On considère la sous-variété

$$D = \{ (z, u),\ z \in C^n,\ u \in C^m, \text{ avec } \operatorname{Im} z - Q(u, u) \in V \}$$

et on définit dm sur D par $dm = dx\, d\mu\,(t)\, du$.

On note C (V; Q) l'enveloppe convexe fermée engendrée par V et $\{ Q(u, u);\, u \in C^m) \}$. Soient C^0 l'intérieur de C (V; Q) dans l'espace vectoriel qu'elle engendre, et

$$\check{D} = \{ (z, u),\ z \in C^n,\ u \in C^m,\ \operatorname{Im} z - Q(u, u) \in C^0 \}.$$

On choisit un système de coordonnées sur $C^n = C^{n_1} \times C^{n_2}$ tel que C^0 soit ouvert dans le sous-espace vectoriel de R^n défini par $y_1 = 0$; on a donc

$$\check{D} = \{ (z_1, z_2, u),\ z_1 \in C^{n_1},\ z_2 \in C^{n_2},\ u \in C^m,\ \operatorname{Im} z_1 = 0,\ \operatorname{Im} z_2 - Q(u, u) \in C^0 \},$$

i. e. $\check{D} = R^{n_1} \times \check{D}_h$, où

$$\check{D}_h = \{(z_2, u);\ \mathrm{Im}\, z_2 - Q(u, u) \in C^0\}$$

est un domaine de $C^{n_2} \times C^m$.

On obtient le théorème suivant :

Soit

$$\mathscr{H}(\check{D}) = \Big\{ \textit{classe de fonctions mesurables } F \textit{ sur } \check{D}, \textit{ telles que :}$$

$$\textit{pour presque tout } x_1,\ F(x_1, z_2, u) \text{ est } \textit{holomorphe en } (z_2, u);$$

$$\sup_{\varepsilon \in C^0} \int_D |F(z+i\varepsilon, u)|^2\, dm = \|F\|^2 < +\infty \Big\}.$$

Alors, quel que soit $\varepsilon \in C^0$, $F_\varepsilon(z, u) = F(z+i\varepsilon, u)$ est une fonction dans H (D), qui tend vers une limite f dans H (D) lorsque ε tend vers zéro, et la correspondance $F \to f$ est un isomorphisme de $\mathscr{H}(\check{D})$ sur H (D).

Ceci est donc, pour les fonctions de carré intégrable, le résultat qu'on peut espérer par le phénomène d'extension d'Hans Lewy.

On étudie aussi le cas où $N(u)$ est une forme quadratique réelle quelconque sur $C^m = R^{2m}$ et qui se ramène sans difficultés au cas précédent.

Dans la section 3. — On considère le cas d'un domaine de Siegel D $(\Omega; Q)$ homogène, et les sous-variétés V seront des orbites $\mathcal{O}_e$ du groupe H_0 défini précédemment dans $\overline{\Omega} - \Omega$. On introduit ρ_e une représentation unitaire de B dans $H(\Sigma_e)$; cette représentation se décompose en somme finie de représentations correspondant à des orbites ouvertes de B dans $\mathfrak{b}^*$. Nous reprenons la méthode de classification des orbites ouvertes due à C. C. Moore dans le cas symétrique, et obtenons une description de toutes les orbites ouvertes de B dans $\mathfrak{b}^*$; ces orbites sont déterminées par les signes de fonctions polynômes réelles semi-invariantes sur $\mathfrak{b}^*$. (Il serait satisfaisant qu'il en soit ainsi pour tout groupe de Lie G connexe ayant des orbites ouvertes dans le dual de son algèbre de Lie.)

Décrivons ici la décomposition de la représentation ρ_1 correspondant au bord de Shilov Σ_1. On considère $U(Q) = \{\xi \in (R^n)^*$, tels que $Q_\xi(u, u) = \langle \xi, Q(u, u) \rangle$ soit définie positive $\}$, alors $\Omega^* \subset U(Q)$. Dans le cas symétrique non tubulaire $\Omega^* = U(Q)$ et la représentation ρ_1 de B dans $H(\Sigma_1)$ est irréductible.

Dans tous les cas, la transformation $f \to \hat{f}$ définit un isomorphisme de $H(\Sigma_1)$ avec l'espace $\hat{H}$ des fonctions mesurables $\varphi(\xi, u)$ holomorphes en u, pour presque tout ξ, à support dans $U(Q) \times C^m$ telles que

$$\|\varphi\|^2 = \int_{U(Q) \times C^m} |\varphi(\xi, u)|^2 e^{-4\pi \langle \xi, Q(u, u) \rangle}\, d\xi\, du < +\infty.$$

D'autre part, U (Q) est réunion à un ensemble de mesure nulle près d'un nombre fini d'orbites ouvertes $\mathcal{O}_\alpha$ de H_0 dans $(R^n)^*$ [les orbites ouvertes de H_0 dans $(R^n)^*$ sont en correspondance bijective avec les orbites ouvertes de B dans $\mathfrak{b}^*$] et on a $\rho_1 = \sum \rho(\mathcal{O}_\alpha)$.

Les représentations ρ_e étudiées correspondent à des représentations » C.R. induites ». i. e. obtenues en complétant pour un produit scalaire approprié un espace de fonctions C^∞ sur B vérifiant des équations, de la forme

$$r(X)\varphi = -i\langle f, X\rangle \varphi,$$

pour $X \in \mathfrak{h}^-$ sous-algèbre de $\mathfrak{b}^{\mathbf{C}}$, telle que

$$f[\mathfrak{h}^-, \mathfrak{h}^-] = 0$$

$$\left[\text{où } (r(X)\,\varphi)(b) = \frac{d}{dt}\varphi(b \exp tX)\Big|\, t = 0 \text{ pour } X \in \mathfrak{b}\right],$$

mais la sous-algèbre $\mathfrak{h}^-$ ne vérifie pas la condition : $\mathfrak{h}^- + \overline{\mathfrak{h}^-}$ sous-algèbre de $\mathfrak{b}^{\mathbf{C}}$. La sous-algèbre de Lewy engendrée par $\mathfrak{h}^-$ et $\overline{\mathfrak{h}^-}$ est essentielle dans l'étude des propriétés d'extensions.

Dans la section 4, nous donnons une fibration π_e de $D = D(\Omega; Q)$ sur un domaine de Siegel D_e de dimension plus petite, dont les fibres sont des domaines de Siegel, et l'union des bords de Shilov des fibres est précisément la variété Σ_e à étudier; on étudie alors le rapport entre l'espace des fonctions sur Σ_e satisfaisant les équations de Cauchy-Riemann sur Σ_e et les espaces de Hardy des fibres. Ce dernier paragraphe est surtout destiné à l'étude faite en [13] (*b*) de certaines représentations réductibles de séries principales.

1. Comparaison de deux complexes

1.1. Définition de l'opérateur $\bar{\partial}_b$. — 1.1.1. Soit V une sous-variété de $\mathbf{R}^n$ et N une fonction C^∞ à valeurs dans $\mathbf{R}^n$ définie sur un domaine E de $\mathbf{C}^n$; on introduit

$$D_0 = D_0(V, N, E) = \{(y, u) \in \mathbf{R}^n \times E;\ y - N(u) \in V\},$$
$$D = D(V, N, E) = \{(z, u) \in \mathbf{C}^n \times E;\ \operatorname{Im} z - N(u) \in V\}.$$

(On omettra les références à V, N, E, lorsque le contexte sera clair.)

Puisque D est une sous-variété différentiable réelle de $\mathbf{C}^{n+m}$, on peut définir le $\bar{\partial}_b$-complexe (*voir* [3], [4] et [7]). Nous allons étudier les fonctions sur D satisfaisant $\bar{\partial}_b f = 0$, à l'aide de la transformation de Fourier par rapport à la variable Re z.

1.1.2. Si $p \in D$, on note $T_p(D)$ l'espace tangent réel à D; comme $D \subset \mathbf{C}^{n+m}$, on identifie $T_p(D)$ à un sous-espace vectoriel réel de $\mathbf{C}^{n+m}$; on note J la structure complexe (donnée par la multiplication par i) de $\mathbf{C}^{n+m}$. On pose $B_p(D) = T_p(D) \cap J(T_p(D))$, c'est-à-dire $B_p(D)$ est le plus grand sous-espace vectoriel complexe de $\mathbf{C}^{n+m}$ contenu dans $T_p(D)$.

Dans notre cas, on va voir que si k est la dimension de V, alors $B_p(D)$ est de dimension complexe $m+k$ et $B = \bigcup_p B_p$ est un sous-fibré du fibré tangent réel $T = \bigcup_p T_p$ (c'est le cas générique de [4]).

On étend J à $B_{p,\mathbf{C}} = B_p \otimes \mathbf{C}$ par linéarité et on note H_p et A_p les sous-espaces propres pour J de valeurs propres $+i$ et $-i$.

On a $B_p \otimes \mathbf{C} = H_p \oplus A_p$ avec $A_p = \overline{H}_p$. On pose $H = \bigcup_p H_p$ et $A = \bigcup_p A_p$. Alors H et A sont deux sous-fibrés complexes de $B \otimes \mathbf{C} = B_{\mathbf{C}}$, lui-même sous-fibré de $T \otimes \mathbf{C} = T_{\mathbf{C}}$.

Étant donné un fibré F, on notera $C^\infty(F)$ [resp. $C_0^\infty(F)$] l'espace des sections C^∞ (resp. C^∞ à support compact) du fibré F.

La distribution $p \to A_p(D)$ est une distribution involutive, i. e. si ξ et $\eta \in C^\infty(A)$, alors le crochet $[\xi, \eta]$ des champs de vecteurs ξ et η est dans $C^\infty(A)$.

Pour chaque entier q, on notera $\Lambda^q(D)$ le fibré des q-formes alternées sur D, i. e. :

$$\Lambda^q(D) = \Lambda^q T_{\mathbf{C}}^*$$

et on considère $d : C^\infty(\Lambda^q(D)) \mapsto C^\infty(\Lambda^{q+1}(D))$ la différentielle extérieure.

On note $E^q = \Lambda^q A^*$ le fibré des q-formes alternées sur A; si w est une q-forme sur D, la restriction de w_p au sous-espace $\Lambda^q A_p$ définit un élément de E^q et ceci donne une application surjective de $C^\infty(\Lambda^q(D))$ sur $C^\infty(E^q)$.

Comme A est une distribution involutive, la différentielle extérieure d passe au quotient [4], et on obtient un opérateur

$$\overline{\partial}_b : \quad C^\infty(E^q) \to C^\infty(E^{q+1}).$$

1.1.3. Si $\omega \in C^\infty(E^q)$ et $\xi_1, \ldots, \xi_{q+1} \in C^\infty(A)$:

$$\begin{aligned}(\overline{\partial}_b \omega)(\xi_1, \ldots, \xi_{q+1}) = {} & \sum_{i=1}^{q+1} (-1)^{i+1} \xi_i . \omega(\xi_1, \ldots, \hat{\xi}_i, \ldots, \xi_{q+1}) \\ & + \sum_{i<j} (-1)^{i+j} \omega([\xi_i, \xi_j], \xi_1, \ldots, \hat{\xi}_i, \ldots, \hat{\xi}_j, \ldots, \xi_{q+1}).\end{aligned}$$

On a évidemment, $\overline{\partial}_b^2 = 0$, $\overline{\partial}_b(C_0^\infty(E^r)) \subset C_0^\infty(E^{r+1})$,

$$\overline{\partial}_b(\omega_1 \wedge \omega_2) = \overline{\partial}_b \omega_1 \wedge \omega_2 + (-1)^r \omega_1 \wedge \overline{\partial}_b \omega_2, \qquad \text{si} \quad \omega_1 \in C^\infty(E^r) \quad \text{et} \quad \omega_2 \in C^\infty(E^q).$$

Par définition le complexe $(C^\infty(E^q), \overline{\partial}_b)$ (*voir* aussi [7] et [3]) sera appelé le $\overline{\partial}_b$-complexe sur D, ou encore le *complexe de Cauchy-Riemann tangentiel.*

Une fonction $f \in C^\infty(D)$ satisfait donc $\overline{\partial}_b f = 0$ si et seulement si $\xi f = 0$, pour tout $\xi \in C^\infty(A)$.

Ces équations sont appellées des équations de *Cauchy-Riemann tangentielles;* si D est ouvert dans $\mathbf{C}^{n+m}$, on a évidemment $\overline{\partial}_b = \overline{\partial}$. Si F est une fonction holomorphe définie dans un voisinage de D, la restriction f de F à D vérifie évidemment $\overline{\partial}_b f = 0$.

1.1.4. Explicitons dans notre exemple le sous-espace $A_p(D)$ et les équations $\overline{\partial}_b f = 0$.

Comme $D = \mathbf{R}^n \times D_0$, ceci donne une décomposition de $T_p(D)$ en somme directe, i. e., si $p = (x, p_0)$ alors $T_p(D)^{\mathbf{C}} = (\mathbf{R}^n)^{\mathbf{C}} \oplus T_{p_0}(D_0)^{\mathbf{C}}$;

Comme E est un domaine de $\mathbf{C}^m$, en un point u_0 de E, l'espace tangent (complexe) à E en u_0 est somme de l'espace des vecteurs tangents holomorphes H_{u_0} et de l'espace des vecteurs tangents antiholomorphes A_{u_0}; si $v_0 \in V$ et $u_0 \in E$, on note $M_{v_0, u_0} = T_{u_0}(V)^{\mathbf{C}} \oplus A_{u_0}$.

Dans l'isomorphisme $(v, u) \mapsto (v + N(u), u)$ de $V \times E$ sur $D_0(V, N, E)$, ce sous-espace s'envoie sur un sous-espace $\tilde{M}_{p_0}$ de $T_{p_0}(D)^{\mathbf{C}}$ [où $p_0 = (t_0 + N(u_0), u_0)$] de dimension complexe $m+k$, si $k = \dim V$.

1.1.5. Lemme. — *Soit $p = (x, p_0)$, alors la projection de $T_p(D)^{\mathbf{C}}$ sur $T_{p_0}(D_0)^{\mathbf{C}}$ parrallèlement à $T_x(\mathbf{R}^n)^{\mathbf{C}}$ se restreint en un isomorphisme de A_p sur $\tilde{M}_{p_0}$.*

Démonstration. — Soit $p_0 = (v_0 + N(u_0), u_0)$ et soit T un vecteur tangent réel en v_0 à V. Comme V est une sous-variété de $\mathbf{R}^n$, on identifie T à un vecteur de $\mathbf{R}^n$; et on note $(-i\,T, T)$ le vecteur tangent complexe à

$$\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n = \mathbf{R}^n + J\,\mathbf{R}^n = \mathbf{C}^n,$$

qui agit sur une fonction $f(x, y)$, $x, y \in \mathbf{R}^n$, par

$$-i \frac{d}{dt} f(x + t\,T, y)\Big|_{t=0} + \frac{d}{dt} f(x, y + t\,T)\Big|_{t=0}.$$

C'est un vecteur antiholomorphe.

Comme D est une sous-variété de $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{C}^m$, on identifie $T_{p_0}(D)$ à un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{C}^m$ et $T_{p_0}(D)^{\mathbf{C}}$ à un sous-espace du complexifié; si v est un vecteur de $(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{C}^m)^{\mathbf{C}} = (\mathbf{R}^n)^{\mathbf{C}} \times (\mathbf{R}^n)^{\mathbf{C}} \times (\mathbf{C}^m)^{\mathbf{C}}$, on écrira $v = (v_1, v_2, v_3)$ avec $v_1 \in (\mathbf{R}^n)^{\mathbf{C}}$, $v_2 \in (\mathbf{R}^n)^{\mathbf{C}}$ et $v_3 \in (\mathbf{C}^m)^{\mathbf{C}}$.

Il est clair que le vecteur $(-i\,T, T, 0)$ est d'une part un vecteur tangent complexe à D et d'autre part est un vecteur antiholomorphe, donc $(-i\,T, T, 0) \in A_p$. La projection de ce vecteur sur $T_{p_0}(D_0)^{\mathbf{C}}$ est $(T, 0)$, lorsqu'on écrit $T_p(D)^{\mathbf{C}} = (\mathbf{R}^n)^{\mathbf{C}} \oplus T_{p_0}(D_0)^{\mathbf{C}}$.

De même si U est un vecteur tangent antiholomorphe au point u_0 de E, et si $d\,N_{u_0}(U)$ est l'image de U par l'application tangente à N au point u_0 alors le vecteur

$$(-i\,d\,N_{u_0}(U), d\,N_{u_0}(U), U)$$

est un vecteur de A_p dont la projection $(d\,N_{u_0}(U), U)$ est dans M_{p_0}.

1.1.6. — Si par conséquent, on note $\tau_p : M_{v_0, u_0} \to A_p$ l'isomorphisme déduit du lemme précédent, on a :

$$\tau_p(T) = (-i\,T, T, 0),$$

$$\tau_p(U) = (-i\,dN_{u_0}(U), dN_{u_0}(U), U).$$

1.1.7. *Explicitons en coordonnées locales.* — Soit v_0 un point de V, il existe alors un système de coordonnées $t_1, t_2, \ldots, t_n$ sur $\mathbf{R}^n$, tel que un voisinage U_0 de v_0 dans V est donné par les formules

$$v = (t_1, t_2, \ldots, t_k, \ldots, t_\nu(t_1, t_2, \ldots, t_k), \ldots),$$

où les t_ν, $k < \nu \leqq n$, sont des fonctions C^∞ définies sur un ouvert de $\mathbf{R}^k$. En identifiant U_0 à l'ouvert correspondant de $\mathbf{R}^k$ l'application $(v, u) \mapsto (v + N(u), u)$ s'écrit alors sur $U_0 \times E$:

$$(t_1, t_2, \ldots, t_k, u) \mapsto (y_1, \ldots, y_k, y_{k+1}, \ldots, y_n, u),$$

où

$$y_i = t_i + N_i(u) \qquad \text{si} \quad 1 \leqq i \leqq k$$

et

$$y_\nu = t_\nu(t_1, t_2, \ldots, t_k) + N_\nu(u) \qquad \text{si} \quad \nu > k,$$

avec

$$N(u) = (N_1(u), \ldots, N_i(u), \ldots, N_n(u)).$$

Soit

$$O = \{ (x + iy, u), \text{ avec } y - N(u) \in U_0 \}$$

et

$$O_0 = \{ (y, u), \text{ avec } y - N(u) \in U_0 \}.$$

Alors sur O les vecteurs

$$\tau\left(\frac{\partial}{\partial t_j}\right) = T_j, \qquad 1 \leqq j \leqq k$$

et

$$\tau\left(\frac{\partial}{\partial \bar{u}_\alpha}\right) = V_\alpha$$

forment une base de $A_p(D)$.

On a

$$T_j = -2i\left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} + \sum_{\nu > k}^{n} \frac{\partial t_\nu}{\partial t_j}(y_1 - N_1(u), \ldots, y_k - N_k(u)) \frac{\partial}{\partial \bar{z}_\nu}\right),$$

$$V_\alpha = \frac{\partial}{\partial \bar{u}_\alpha} - 2i \sum_{1}^{n} \frac{\partial N_j}{\partial \bar{u}_\alpha} \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j}.$$

1.1.8. Sur O les restrictions ω_j et ω_α des 1-formes $d\bar{z}_j$, $1 \leqq j \leqq k$ et $d\bar{u}_\alpha$ forment une base de E^1. Il est clair que $\bar{\partial}_b \omega_j = \bar{\partial}_b \omega_\alpha = 0$.

La base duale aux formes ω_j et ω_α est donnée par les vecteurs Z_j ($1 \leqq j \leqq k$) et U_α, où

$$Z_j = \frac{i}{2} T_j = \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} + \sum_{\nu > k} \frac{\partial t_\nu}{\partial t_j} \frac{\partial}{\partial \bar{z}_\nu},$$

$$U_\alpha = V_\alpha - \sum_{1}^{k} \frac{\partial N_j}{\partial \bar{u}_\alpha} T_j = \frac{\partial}{\partial \bar{u}_\alpha} + 2i \sum_{\nu > k} \left(\sum_{1}^{k} \frac{\partial t_\nu}{\partial t_j} \frac{\partial N_j}{\partial \bar{u}_\alpha} - \frac{\partial N_\nu}{\partial \bar{u}_\alpha} \right) \frac{\partial}{\partial \bar{z}_\nu},$$

i. e. : si φ est une fonction C^∞ sur 0, et si on identifie φ en une fonction de

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_k, u)$$

par

$$\varphi(x, y, u) = \varphi(x_1+iy_1, \ldots, x_k+iy_k, x_\nu+iy_\nu, \ldots, u),$$

où

$$y_\nu = t_\nu(y_1-N_1(u), \ldots, y_k-N_k(u))+N_\nu(u) \qquad \text{si} \qquad \nu > k,$$

on a alors dans ce système de coordonnées $(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_k, u)$ l'expression suivante de Z_j et U_α.

1.1.9 :

$$Z_j = \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} + \frac{1}{2}\sum_{\nu>k} \frac{\partial t_\nu}{\partial t_j}(y_1-N_1(u), \ldots, y_k-N_k(u))\frac{\partial}{\partial x_\nu},$$

$$U_\alpha = \frac{\partial}{\partial \bar{u}_\alpha} + i\sum_{\nu>k}\left(\sum_1^k \frac{\partial t_\nu}{\partial t_j}\frac{\partial N_j}{\partial \bar{u}_\alpha} - \frac{\partial N_\nu}{\partial \bar{u}_\alpha}\right)\frac{\partial}{\partial x_\nu}.$$

Comme Z_j et U_α forment la base duale à ω_j et ω_α, on a

$$\bar{\partial}_b \varphi = \sum_{i=1}^k Z_i(\varphi)\,\omega_i + \sum U_\alpha(\varphi)\,\omega_\alpha.$$

Si $J = (j_1, j_2, \ldots, j_r)$ est une suite d'indices entre 1 et k, et si $A = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s)$ est une suite d'indices entre 1 et m, on posera

$$|J| = r, \qquad |A| = s,$$

et

$$\omega_J = \omega_{j_1} \wedge \ldots \wedge \omega_{j_r}, \qquad \omega_A = \omega_{\alpha_1} \wedge \ldots \wedge \omega_{\alpha_s},$$

on a

$$\bar{\partial}_b(\varphi\,\omega_J \wedge \omega_A) = \sum_{J=1}^k Z_j(\varphi)\,\omega_j \wedge \omega_J \wedge \omega_A + \sum_\alpha (-1)^{|J|} U_\alpha(\varphi)\,\omega_J \wedge \omega_\alpha \wedge \omega_A.$$

1.2. Un opérateur $\mathscr{D}$ et un complexe sur D_0. — Sur $V \times E$, on considère le fibré M où $M_{v,u} = T_v(V)^{\mathbf{C}} \oplus A_u$. L'application $(v, u) \mapsto M_{v,u}$ est une distribution involutive de champs de vecteurs. On désigne par $F^q = \Lambda^q M^*$ le fibré des q-formes sur M. De même que précédemment F^q est un fibré quotient du fibré des q-formes sur la variété $V \times E$.

La différentielle extérieure définit par passage au quotient un opérateur $\mathscr{D}$ sur les fonctions C^∞ de F^q. En d'autres termes, localement sur $U_0 \times E$, une section de F^q s'écrit :

$$\omega = \sum_{|I|+|J|=q} a_{I,J}(t, u)\, dt_I \wedge d\bar{u}_J,$$

où

$$a_{I,J}(t, u) = a_{I,J}(t_1, t_2, \ldots, t_k, u)$$

est une fonction C^∞ sur $U_0 \times E$,

$$I = (i_1, i_2, \ldots, i_r) \quad \text{et} \quad dt_I = dt_{i_1} \wedge \ldots \wedge dt_{i_r},$$

$$J = (j_1, j_2, \ldots, j_s) \quad \text{et} \quad d\bar{u}_J = d\bar{u}_{j_1} \wedge \ldots \wedge d\bar{u}_{j_s}.$$

et on a :

1.2.1 :

$$\mathscr{D}\omega = \sum_{|\mathrm{I}|+|\mathrm{J}|=q} \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial a_{\mathrm{I},\mathrm{J}}}{\partial t_j} dt_j \wedge dt_{\mathrm{I}} \wedge d\bar{u}_{\mathrm{J}}$$

$$+ \sum_{|\mathrm{I}|+|\mathrm{J}|=q} \sum_{\alpha} (-1)^{|\mathrm{I}|} \frac{\partial a_{\mathrm{I},\mathrm{J}}}{\partial \bar{u}_\alpha} dt_{\mathrm{I}} \wedge d\bar{u}_\alpha \wedge d\bar{u}_{\mathrm{J}}.$$

Enfin, on considère $(\mathbf{R}^n)^* \times \mathrm{V} \times \mathrm{E}$, et on étend le fibré F^q trivialement sur $(\mathbf{R}^n)^* \times \mathrm{V} \times \mathrm{E}$ par

$$(\mathrm{F}^q)_{\xi, t, u} = (\mathrm{F}^q)_{t, u}.$$

Une section C^∞ de ce fibré est donc localement de la forme

$$\omega = \sum_{|\mathrm{I}|+|\mathrm{J}|=q} a_{\mathrm{I},\mathrm{J}}(\xi, t, u)\, dt_{\mathrm{I}} \wedge d\bar{u}_{\mathrm{J}},$$

où $a_{\mathrm{I},\mathrm{J}}(\xi, t, u)$ est une fonction C^∞ sur $(\mathbf{R}^n)^* \times \mathrm{U}_0 \times \mathrm{E}$.

On notera $\mathscr{A}^q(\mathrm{F})$ l'espace des sections de ce fibré sur $(\mathbf{R}^n \times \mathrm{V} \times \mathrm{E})$, et $\mathscr{A}_0^q(\mathrm{F})$ l'espace des sections C^∞ à support compact.

L'opérateur $\mathscr{D}$ définit évidemment encore un opérateur $\mathscr{D}$:

$$\mathscr{D} : \quad \mathscr{A}^q(\mathrm{F}) \to \mathscr{A}^{q+1}(\mathrm{F})$$

donné par la formule (2.1), ξ étant considéré comme un paramètre. On considère le complexe $(\mathscr{A}^q(\mathrm{F}), \mathscr{D})$; on a $\mathscr{D}^2 = 0$,

$$\mathscr{D}\omega_1 \wedge \omega_2 = \mathscr{D}\omega_1 \wedge \omega_2 + (-1)^q \omega_1 \wedge \mathscr{D}\omega_2, \qquad \text{si} \quad \omega_1 \in \mathscr{A}^q(\mathrm{F}) \quad \text{et} \quad \omega_2 \in \mathscr{A}^p(\mathrm{F}),$$

et $\mathscr{D}$ conserve le support.

1.3. Transformation de Fourier-Laplace pour le complexe $\bar{\partial}_b$. — Soit φ une fonction C^∞ à support compact sur D. On définit si $p = (x, y, u)$ est un point de D :

$$\hat{\varphi}(\xi, y, u) = \int e^{-2i\pi\langle \xi, x+iy \rangle} \varphi(x+iy, u)\, dx,$$

i. e. en identifiant D_0 à $\mathrm{V} \times \mathrm{E}$:

$$\hat{\varphi}(\xi, v, u) = \int e^{-2i\pi\langle \xi, x+i(v+\mathrm{N}(u)) \rangle} \varphi(x, v+\mathrm{N}(u), u)\, dx.$$

Il est clair que $\hat{\varphi}$ est une fonction C^∞ sur $(\mathbf{R}^n)^* \times \mathrm{V} \times \mathrm{E}$. Soit maintenant $\omega \in \mathrm{C}_0^\infty(\mathrm{E}^q)$, et $p = (x+iy, u)$, alors $\omega(x+iy, u)$ est un élément de $\Lambda^q(\mathrm{A}_p)^*$. Via l'isomorphisme τ, on peut l'identifier à un élément de $\Lambda^q(\mathrm{M}_{v,u})^*$ si $(y, u) = (v+\mathrm{N}(u)\,\mu)$. Donc si v et u

sont fixés, et $y = v + \mathrm{N}(u)$, alors $\tau\omega(x+iy, u)$ varie dans l'espace vectoriel fixe $\Lambda^q(\mathrm{M}_{v,u})^*$. On pose alors :

1.3.1 :

$$\hat{\omega}(\xi, v, u) = \int e^{-2i\pi\langle \xi, x+iy\rangle} \tau\omega(x+iy, u)\, dx,$$

c'est un élément de $\Lambda^q(\mathrm{M}_{v,u})^*$.

Il est clair que l'application $(\xi, t, u) \mapsto \hat{\omega}(\xi, t, u)$ définit un élément $\hat{\omega}$ de $\mathscr{A}^q(\mathrm{F})$.

1.3.2 Lemme. — *Si* $\omega \in \mathrm{C}_0^\infty(\mathrm{E}^q)$, *on a* $(\bar{\partial}_b \omega)\hat{} = \mathscr{D}\hat{\omega}$.

Démonstration. — Montrons tout d'abord qu'il suffit de le vérifier pour $q = 0$; supposons ce point démontré; moyennant une partition de l'unité, on pourra écrire toute forme ω comme somme de formes dont le support est contenu dans un ouvert du type O (*voir* 1.1) et il suffira donc dans les notations de 1.1.8 de le démontrer pour une forme

$$\omega = \varphi(x, y, u)\, \omega_{\mathrm{I}} \wedge \omega_{\mathrm{A}},$$

on voit que $\tau(\omega_j)$ est la restriction à $\mathrm{M}_{t,u}$ de la forme $-2i(dt_j + \bar{\partial}\mathrm{N}_j)$, tandis que $\tau(\omega_\alpha)$ est la restriction de $d\bar{u}_\alpha$ donc $\tau(\omega_j)$ et $\tau(\omega_\alpha)$ sont indépendants de x.

Soit $\omega_1 = \omega_{\mathrm{I}} \wedge \omega_{\mathrm{A}}$, on a $\bar{\partial}_b \omega_1 = 0$ et $\mathscr{D}(\tau\omega_1) = 0$; donc

$$\bar{\partial}_b \omega = \bar{\partial}_b \varphi \wedge \omega_1$$

et

$$\widehat{\bar{\partial}_b \omega}(\xi, y, u) = \int e^{-2i\pi\langle \xi, x+iy\rangle} \tau(\bar{\partial}_b \varphi \wedge \omega_1)(x+iy, u)\, dx.$$

Utilisant que :

$$\tau(\bar{\partial}_b \varphi \wedge \omega_1) = \tau(\bar{\partial}_b \varphi) \wedge \tau(\omega_1),$$

on a

$$\begin{aligned}(\bar{\partial}_b \omega)\hat{}(\xi, y, u) &= \left(\int e^{-2i\pi\langle \xi, x+iy\rangle} \tau(\bar{\partial}_b \varphi)(x+iy, u)\, dx\right) \wedge \tau\omega_1(y, u)\\ &= (\bar{\partial}_b \varphi)\hat{} \wedge \tau\omega_1\\ &= \mathscr{D}\hat{\varphi} \wedge \tau\omega_1.\end{aligned}$$

Mais de même on a

$$\hat{\omega} = \hat{\varphi}\,\tau(\omega_1),$$

donc

$$\mathscr{D}\hat{\omega} = \mathscr{D}\hat{\varphi} \wedge \tau\omega_1 = (\bar{\partial}_b \omega)\hat{}\,.$$

Il reste à démontrer la proposition précédente lorsque $q = 0$. Si $y = t + \mathrm{N}(u)$, avec $t \in \mathrm{V}$, on a

$$\hat{\varphi}(\xi, t, u) = \int e^{-2i\pi\langle \xi, x+i(t+\mathrm{N}(u))\rangle} \varphi(x+i(t+\mathrm{N}(u)), u)\, dx.$$

Soit T un vecteur tangent au point t de V, on notera T_y l'élément (0, T, 0) de l'espace tangent à $D \subset \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{C}^m$, et T_x l'élément (T, 0, 0), de sorte que $\tau(T) = -i\, T_x + T_y$.

On a par définition : $\langle \mathscr{D}\,\hat{\varphi}, T \rangle = T.\hat{\varphi}$.

Pour calculer $T.\hat{\varphi}$, on dérive sous le signe somme. Comme

$$T.(\xi \to e^{2\pi \langle \xi, t \rangle}) = 2\pi \langle \xi, T \rangle e^{2\pi \langle \xi, t \rangle},$$

on a

$$(T\hat{\varphi})(\xi, t, u) = \int e^{-2i\pi \langle \xi, x+i(t+N(u)) \rangle}(2\pi \langle \xi, T \rangle \varphi + T_y \varphi)\, dx.$$

Remarquons que

$$2\pi \langle \xi, T \rangle e^{-2i\pi \langle \xi, x+i(t+N(u)) \rangle} = i\, T_x (e^{-2i\pi \langle \xi, x+i(t+N(u)) \rangle}).$$

En intégrant par parties (φ est à support compact) il vient

$$\int e^{-2i\pi \langle \xi, x+i(t+N(u)) \rangle} 2\pi \langle \xi, T \rangle \varphi\, dx = \int e^{-2i\pi \langle \xi, x+i(t+N(u)) \rangle}(-i) T_x \varphi\, dx.$$

Donc

$$\langle \mathscr{D}\hat{\varphi}, T \rangle = \int e^{-2i\pi \langle \xi, x+i(t+N(u)) \rangle}(\tau(T)\varphi)\, dx = \langle (\bar{\partial}_b \varphi)\hat{}, T \rangle.$$

De même, soit U un vecteur tangent au point u_0 de E, donc

$$\tau(U) = (-i\, dN_{u_0}(U), dN_{u_0}(U), U).$$

On a

$$\langle \mathscr{D}\hat{\varphi}, U \rangle = U\hat{\varphi} = \int e^{-2i\pi \langle \xi, x+i(t+N(u)) \rangle}(2\pi \langle \xi, dN_{u_0}(U) \rangle \varphi + dN_{u_0}(U)_y \varphi + U\varphi)\, dx.$$

En écrivant :

$$2\pi \langle \xi, dN_{u_0}(U) \rangle e^{-2i\pi \langle \xi, x+i(t+N(u)) \rangle} = i\, dN_{u_0}(U)_x (e^{-2i\pi \langle \xi, x+i(t+N(u)) \rangle}),$$

et en intégrant par parties, il vient de même

$$\langle \mathscr{D}\hat{\varphi}, U \rangle = \langle (\bar{\partial}_b \varphi)\hat{}, U \rangle.$$

Donc $(\bar{\partial}_b \varphi)\hat{} = \mathscr{D}\hat{\varphi}$.

2. Fonctions C. R.

Le lemme 1.3.2 suggère que si f est une fonction sur D, vérifiant $\bar{\partial}_b f = 0$ et pour laquelle on peut définir $\hat{f}(\xi, t, u)$, alors $\hat{f}$ vérifiera $\mathscr{D}\hat{f} = 0$, c'est-à-dire $\hat{f}(\xi, t, u)$ sera indépendant de t et holomorphe en u. Nous nous emploierons dans ce chapitre à donner un sens précis à cette assertion, pour certains espaces de Hilbert de fonctions C. R.

2.1. Définition des fonctions faiblement C. R. — 2.1.1. Soit $d\mu$ une forme volume C^∞ sur V et ν une fonction C^∞ strictement positive sur E. On considère la mesure dm sur D donnée par $dm = dx\, d\mu(t)\, \nu(u)\, du$ où du est la mesure euclidienne sur $\mathbf{C}^m$.

On note :

$$L^2(D, dm) = \left\{ f \text{ mesurables sur D, telles que } \int |f|^2\, dm = \|f\|^2 < +\infty \right\}.$$

Toute fonction f dans $L^2(D; dm)$ est localement intégrable par rapport à la mesure de surface de D.

2.1.2. — Une fonction f de classe C^1 est dite une fonction C. R. si $\bar\partial_b f = 0$.

Comme D est de dimension réelle $2m+k+n$, on peut intégrer sur D toute $2m+k+n$ forme continue à support compact; on peut donc formuler la définition suivante.

2.1.3. *Définition.* — Soit f une fonction localement intégrable. On dit que f est une solution au sens faible de $\bar\partial_b f = 0$, ou encore une fonction faiblement C. R. si $\int f \bar\partial\theta = 0$ pour toute forme θ définie sur $\mathbf{C}^{n+m}$, de type $(m+n, m+k-1)$ dont le support intersecte D suivant un compact.

2.1.4. Lemme. — *Si f est de classe C^1, les deux définitions précédentes coïncident.*

Démonstration. — Soit f de classe C^1, prolongeons f en une fonction $\tilde f$ définie sur l'espace ambiant $\mathbf{C}^{n+m}$. On a $\int_D d(\tilde f \theta) = 0$ puisque le support de θ intersecte D suivant un compact.

D'autre part, on a $d\theta = \bar\partial\theta$ puisque θ est de type $(m+n, m+k-1)$, de même $d\tilde f \wedge \theta = \bar\partial \tilde f \wedge \theta$, donc on en déduit que

$$\int_D \bar\partial \tilde f \wedge \theta + \int_D \tilde f \bar\partial\theta = 0,$$

mais sur D, puisque θ est de type $(m+n, m+k-1)$ on a

$$\bar\partial \tilde f \wedge \theta = \bar\partial_b f \wedge \theta,$$

où $\bar\partial_b f$ désigne encore une 1-forme sur D, prolongeant $\bar\partial_b f$ (définie seulement sur A); on en déduit le lemme en remarquant que l'équation :

$$\int \bar\partial_b f \wedge \theta = 0$$

pour tout θ, entraîne $\bar\partial_b f = 0$ (*voir* [5] et [18]).

2.1.5. Remarquons qu'on a $\bar{\partial}_b f = 0$ au sens faible, si pour tout ouvert du type O et pour toute fonction $\varphi \in C_0^\infty(O)$, on a

$$\int f(x, y_1, \ldots, y_k, u)(Z_i\varphi)(x, y_1, \ldots, y_k, u)\,dx_1\ldots dx_n\,dy_1\ldots dy_k\,du = 0,$$

$$\int f(x, y_1, \ldots, y_k, u)(U_\alpha\varphi)(x, y_1, \ldots, y_k, u)\,dx_1\ldots dx_n\,dy_1\ldots dy_k\,du = 0,$$

comme on le voit en écrivant toute forme de type $(n+m, m+k-1)$ sous la forme d'une combinaison linéaire de formes

$$\alpha_i = \varphi(x, y, u)\,d\bar{z}_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{d\bar{z}_i} \wedge \ldots \wedge d\bar{z}_k \wedge dZ \wedge dU \wedge d\bar{U},$$

$$\beta_\alpha = \varphi(x, y, u)\,d\bar{Z} \wedge dZ \wedge du \wedge d\bar{u}_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{d\bar{u}_\alpha} \wedge \ldots \wedge d\bar{u}_m,$$

avec $\varphi \in C_0^\infty(O)$, ou encore, en utilisant les champs de vecteurs T_j et V_α, combinaisons linéaires à coefficients fonctions de u de Z_i et U_α (1.1.7) si pour tout $\varphi \in C_0^\infty(O)$, alors :

$$\int f T_j\varphi = 0 \qquad \text{et} \qquad \int f V_\alpha\varphi = 0.$$

2.1.6. On introduit l'espace de Hilbert :

$$H(D; dm) = \{f \in L^2(D; dm), \text{ vérifiant } \bar{\partial}_b f = 0 \text{ au sens faible}\}.$$

On se propose d'étudier H par transformation de Fourier.

2.1.7. Rappelons enfin que si D est ouvert dans $\mathbf{C}^{n+m}$, alors une fonction faiblement solution de $\bar{\partial}$ est automatiquement holomorphe d'après le critère de régularité de L. Schwartz.

2.2. Théorème de Paley-Wiener pour les fonctions C. R. — Soit f une fonction de $L^2(D, dm)$, alors pour presque tout (t, u) on a $f(x, t, u) \in L^2(dx)$. On pose, au sens de la transformation de Fourier partielle :

$$\begin{aligned}\hat{f}(\xi, t, u) &= \int e^{-2\pi i\langle \xi, x+i(t+N(u))\rangle} f(x+i(t+N(u)), u)\,dx \\ &= e^{2\pi\langle \xi, t+N(u)\rangle}\mathcal{F}_x f.\end{aligned}$$

On a donc d'après Plancherel :

$$\|f\|^2 = \int |\hat{f}(\xi, t, u)|^2 e^{-4\pi\langle \xi, t+N(u)\rangle}\,dx\,d\mu(t)\,\nu(u)\,du.$$

2.2.1 Théorème. — *Soient :*

$$D = \{(z, u) \quad \textit{avec} \quad \operatorname{Im} z - N(u) \in V\},$$

$$dm = dx\,d\mu(t)\,\nu(u)\,du$$

et

$$H(D; dm) = \{f \in L^2(D; dm), \textit{ satisfaisant } \bar{\partial}_b f = 0 \textit{ au sens faible}\}.$$

Posons :

$$I_\mu(\xi) = \int_V e^{-4\pi\langle \xi, t\rangle} d\mu(t).$$

Alors la correspondance $f \to \hat{f}$ *définit un isomorphisme entre* H (D) *et*

$$\hat{H}(D) = \Big\{ \textit{ensemble des classes de fonctions mesurables } \varphi(\xi, u), \textit{ telles que } \varphi(\xi, u) \textit{ soit holomorphe en } u \textit{ pour presque tout } \xi \textit{ et}$$

$$\|\varphi\|^2 = \int |\varphi(\xi, u)|^2 e^{-4\pi\langle \xi, N(u)\rangle} I_\mu(\xi) \nu(u)\, d\xi\, du < +\infty \Big\}.$$

Soit $U(\mu) = \{ \xi, I_\mu(\xi) < +\infty \}$. Il est facile de voir par l'inégalité de Hölder que I_μ est une fonction logarithmiquement convexe; par conséquent $U(\mu)$ est un ensemble convexe. Comme il est bien connu, $U(\mu)$ ne diffère de son intérieur que par un ensemble de mesure nulle, et I_μ est continue sur l'intérieur de $U(\mu)$.

On déduit donc de cela que pour que $H(D, dm) \neq \{ 0 \}$ il est nécessaire que $U(\mu)$ ait un intérieur; dans ce cas les fonctions $\hat{f}(\xi, u)$ seront supportées en ξ sur l'intérieur de $U(\mu)$; on notera désormais par $U(\mu)$ l'intérieur de $\{ \xi, I_\mu(\xi) < +\infty \}$.

Démontrons maintenant le théorème: tout d'abord, montrons que si $f \in H(D; dm)$, alors $\hat{f}(\xi, t, u)$ vérifie $d_t \hat{f} = \bar{\partial}_u \hat{f} = 0$ au sens faible, i. e. montrons que si λ est une fonction C^∞ à support compact contenu dans $(\mathbf{R}^n)^* \times O_0 \times E$, alors :

$$\int \hat{f}(\xi, t, u) \frac{\partial\lambda}{\partial t_j}(\xi, t, u)\, d\xi\, dt_1 \ldots dt_k\, du = 0$$
$$= \int \hat{f}(\xi, t, u) \frac{\partial\lambda}{\partial \bar{u}_\alpha}(\xi, t, u)\, d\xi\, dt_1 \ldots dt_k\, du.$$

Or, la première expression vaut :

$$\int \mathscr{F}_x(f)\, e^{2\pi\langle \xi, y(t, u)\rangle} \frac{\partial\lambda}{\partial t_j}(\xi, t, u)\, d\xi\, dt\, du.$$

Si donc on pose

$$g(x, t, u) = \int e^{+2\pi i\langle \xi, x + iy(t, u)\rangle} \frac{\partial\lambda}{\partial t_j}(\xi, t, u)\, d\xi,$$

ceci revient à montrer d'après Plancherel, que

$$\int f(x, t, u)\, g(x, t, u)\, dx\, dt\, du = 0$$

ou encore que

$$\int f(x, y_1, \ldots, y_k, u)\, g(x, y_1, \ldots, y_k, u)\, dx\, dy_1 \ldots dy_k\, du = 0.$$

Posons

$$\theta(x, t, u) = \int e^{-2\pi i \langle \xi, x+iy(t,u) \rangle} \lambda(\xi, t, u)\, d\xi.$$

Un calcul analogue à celui de la démonstration de 1.3.2 montre que $g = \mathrm{T}_j\, \theta$.

L'expression à calculer est donc $\int f\, \mathrm{T}_j\, \theta$. On ne peut conclure de suite, car $\theta(x, y, u)$ n'est pas à support compact en x; mais remarquons que $\theta(x, y, u)$ est à support compact en (y, u) puisque λ l'est.

Soit alors h une fonction C^∞ sur $\mathbf{R}$ telle que :

(a) $0 \leqq h(t) \leqq 1$ pour tout t;

(b) $h(t) = 1$ si $|t| \leqq 1/2$;

(c) $h(t) = 0$ si $|t| \geqq 1$

et posons

$$h_\nu(x) = h\left(\frac{|x_1|}{\nu}\right), \ldots, h\left(\frac{|x_n|}{\nu}\right) \quad \text{et} \quad \theta_\nu(x, y, u) = h_\nu(x)\, \theta(x, y, u),$$

alors θ_ν est à support compact en (x, y, u).

On a

$$\mathrm{T}_i\, \theta_\nu = \mathrm{T}_i(h_\nu)\, \theta + h_\nu\, \mathrm{T}_i\, \theta.$$

Montrons que $\mathrm{T}_i(h_\nu)\, \theta \to 0$ dans $\mathrm{L}^2(dx\, dy\, du)$, si $\nu \to \infty$.

En effet sur le support compact fixe en (y, u) de θ les coefficients de l'opérateur différentiel T_i qui sont des fonctions de (y, u) sont bornés; comme

$$\left\| \frac{\partial h_\nu}{\partial x_j} \right\| < \frac{\mathrm{M}}{\nu}, \quad \text{si} \quad \| h' \|_\infty < \mathrm{M},$$

on voit que

$$|\mathrm{T}_i(h_\nu)\, \theta| < \frac{\mathrm{C}\, |\theta|}{\nu},$$

d'où le résultat puisque $\theta \in \mathrm{L}^2(dx\, dy\, du)$.

D'autre part, il est clair que $h_\nu\, \mathrm{T}_i\, \theta$ tend vers $\mathrm{T}_i\, \theta$ dans $\mathrm{L}^2(dx\, dy\, du)$; Donc puisque f vérifie $\bar{\partial}_b f = 0$ au sens faible, on a

$$\int f\, \mathrm{T}_i\, \theta_\nu = 0$$

et par conséquent

$$\int f(\mathrm{T}_i \cdot (h_\nu)\, \theta) = -\int f h_\nu(\mathrm{T}_i\, \theta).$$

Les lignes précédentes montrent que

$$\int f\, \mathrm{T}_i\, \theta = \lim_{\nu \to \infty} \int f h_\nu(\mathrm{T}_i\, \theta) = 0.$$

On calcule de même pour λ une fonction C^∞ à support compact contenu dans $(\mathbf{R}^n)^* \times U_0 \times E$:

$$\int \hat{f}(\xi, t, u) \frac{\partial \lambda}{\partial \bar{u}_\alpha}(\xi, t, u)\, d\xi\, dt\, du = \int f(x, y, u)\, g(x, y, u)\, dx\, dy\, du,$$

où

$$g(x, y_1, \ldots, y_k, u) = \int e^{-2i\pi \langle \xi, x+i\mathrm{Y}(y, u)\rangle} \left(\frac{\partial \lambda}{\partial \bar{u}_\alpha}\right)(\xi, \mathrm{T}(y, u), u)\, d\xi.$$

On pose

$$\theta(x, y_1, \ldots, y_k, u) = \int e^{-2i\pi \langle \xi, x+i\mathrm{Y}(y, u)\rangle} (\lambda(\xi, \mathrm{T}(y, u), u))\, d\xi.$$

Il vient : $g = \mathrm{V}_\alpha\, \theta$ et on termine le raisonnement comme précédemment.

Appliquons alors le lemme de régularité suivant dont la démonstration qui suit est standard :

2.2.2. Lemme de Weyl [19]. — *Soient* D_1, D_2, D_3 *des ouverts de* $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^k \times \mathbf{C}^m$ *et*

$$\mathrm{D} = \{(\xi, t, u),\ \xi \in \mathrm{D}_1,\ t \in \mathrm{D}_2,\ u \in \mathrm{D}_3\}.$$

Soit $f \in \mathrm{L}^1(\mathrm{D})$ *vérifiant* $d_t f = \bar{\partial}_u f = 0$ *au sens faible. Alors il existe une fonction mesurable* $\varphi(\xi, u)$ *sur* $\mathrm{D}_1 \times \mathrm{D}_3$, *holomorphe en u pour presque tout* ξ, *telle que*

$$f(\xi, t, u) = \varphi(\xi, u) \qquad \textit{presque partout sur} \quad \mathrm{D}_1 \times \mathrm{D}_2 \times \mathrm{D}_3.$$

Démonstration. — Le problème étant local, on peut supposer que D_1, D_2, D_3 sont des boules relativement compactes.

Notons

$$\Phi = \{f \in \mathrm{L}^1(\mathrm{D}) \text{ telles que } d_t f = \partial_u f = 0 \text{ au sens faible}\}$$

et

$$\Phi' = \{f \in \mathrm{L}^1(\mathrm{D}) \text{ telles que } f = \varphi(\xi, u) \text{ presque partout sur D, où } \varphi(\xi, u) \text{ est mesurable sur } \mathrm{D}_1 \times \mathrm{D}_3 \text{ et holomorphe en } u \text{ pour presque tout } \xi\}.$$

Il est clair que $\Phi' \subset \Phi$. Montrons que Φ' est fermé dans L^1; en effet si $\varphi_n \to \alpha$ dans L^1, i. e. si :

$$\int |\alpha(\xi, y, u) - \varphi_n(\xi, u)|\, d\xi\, dy\, du \to 0,$$

on voit que α ne dépend pas de y (intégrer α en y). Posons :

$$l_n(\xi) = \int |\alpha(\xi, u) - \varphi_n(\xi, u)|\, du;$$

l_n est une suite de fonctions de $\mathrm{L}^1(d\xi)$ qui tend vers zéro. On peut donc trouver une sous-suite n_k et un ensemble S de ξ dont le complémentaire est de mesure nulle, tels que S C $\in$ S,

$$\alpha(\xi, u) = \lim \varphi_{n_k}(\xi, u)$$

dans L^1 (du). Les fonctions $\varphi_n(\xi, u)$ étant holomorphes, la convergence dans L^1 entraîne la convergence uniforme sur les compacts; on peut donc poser

$$\varphi(\xi, u) = \text{lim simple}\, \varphi_{n_k}(\xi, u) \qquad \text{si} \quad \xi \in S;$$

et comme $\alpha = \varphi$ dans L^1, on a $\alpha \in \Phi'$. D'autre part Φ' contient certainement l'ensemble des fonctions C^∞ appartenant à Φ (intégrer par parties). On voit par convolution que ces fonctions sont denses dans Φ, donc $\Phi = \Phi'$.

Dans la suite on confondra souvent la fonction φ et sa classe.

On en conclut donc que l'application $f \to \hat{f}$ envoie isométriquement $H(D, dm)$ dans $\hat{H}(D)$, puisque si $\hat{f}(\xi, t, u)$ ne dépend pas de t, on a

$$\|f\|^2 = \int |\hat{f}(\xi, u)|^2 e^{-4\pi \langle \xi, N(u) \rangle} I_\mu(\xi) \nu(u) \, d\xi \, du.$$

Il s'agit de montrer que ceci est surjectif.

L'espace $\hat{H}(D)$ étant complet (il est caractérisé comme sous-espace de $L^2(\ldots d\xi\, du)$ par les équations $\bar{\partial}_u f = 0$ au sens faible), il suffit de montrer que l'image est dense.

Or on peut approcher toute fonction $\varphi(\xi, u)$ dans $\hat{H}(D)$ par une fonction $\varphi_\Delta(\xi, u)$ à support compact en ξ en posant $\varphi_\Delta(\xi, u) = X_\Delta(\xi)\, \varphi(\xi(u))$ où X_Δ est la fonction caractéristique d'un compact Δ.

Posons alors pour un tel φ à support compact en ξ :

$$\check{\varphi}(z, u) = \int e^{2i\pi \langle \xi, z \rangle} \varphi(\xi, u)\, d\xi,$$

alors $\check{\varphi}(z, u)$ est une fonction holomorphe en (z, u).

On voit immédiatement que la restriction de $\check{\varphi}$ à D (qui est une fonction C. R.) est dans $H(D)$, et est telle que $\hat{\check{\varphi}} = \varphi$.

2.2.3. Remarquons enfin que la formule d'inversion :

$$\check{\varphi}(x + i(t + N(u)), u) = \int e^{2i\pi \langle \xi, x + i(t + N(u)) \rangle} \varphi(\xi, u)\, d\xi$$

peut être définie quel que soit $\varphi \in \hat{H}(D)$, au sens de la transformation de Fourier partielle; en effet par définition même de $I_\mu(\xi)$, la fonction

$$(\xi, t, u) \mapsto e^{-2\pi \langle \xi, t + N(u) \rangle} \varphi(\xi, u)$$

est dans $L^2(d\xi\, d\mu(t)\, \nu(u)\, du)$, quelque soit $\varphi \in \hat{H}(D)$ et donc dans $L^2(d\xi)$ pour presque tout t, u.

2.2.4. D'autre part puisque l'espace des fonctions $\varphi(\xi, u)$ à support compact en ξ est dense dans $H(D)$, on voit que l'espace des fonctions C^∞ qui sont dans $H(D; dm)$

est dense dans H (D; dm). En fait l'espace des fonctions holomorphes sur C^{n+m} dont la restriction est dans H (D; dm) est dense dans H (D; dm).

2.3. Propriétés d'extensions des fonctions C. R. — Nous allons maintenant étudier la classe de surfaces donnée par

$$D = \{(x+iy, u),\ u \in C^m,\ y - Q(u, u) \in V\},$$

où Q est une forme hermitienne sur C^m à valeurs dans C^n et V est un cône de R^n (par exemple $V = \{0\}$).

Cette classe de surfaces apparaît dans l'étude des différentes parties du bord d'un domaine de Siegel D (Ω, Q), (V sera une sous-variété du bord $\bar{\Omega}-\Omega$ de Ω, pour Ω un cône convexe ouvert dans R^n).

On précise d'autre part la mesure dm de la manière suivante : on suppose la mesure $d\mu(t)$ homogène par rapport aux homothéties $t \to at$ ($a > 0$) du cône V (i. e. il existe un nombre réel λ tel que $d\mu(at) = a^\lambda d\mu(t)$) et on considère $dm = dx\, d\mu(t)\, du$.

On considère comme précédemment :

$$H(D) = \left\{ F \text{ mesurables sur D telles que : } 1^\circ \int |F(z, u)|^2 dx\, d\mu(t)\, du < +\infty;\ 2^\circ\ \bar{\partial}_b F = 0 \text{ au sens faible} \right\}.$$

On note

$$\hat{V} = \{\xi \in (R^n)^*, \text{ tels que } \langle \xi, y \rangle \geqq 0 \text{ pour tout } y \in V\}.$$

Alors $\hat{V}$ est un cône convexe fermé dans $(R^n)^*$ et $\hat{\hat{V}}$ est l'enveloppe convexe fermée de V.

Si $\hat{V}$ a un intérieur, on note V^* l'intérieur de $\hat{V}$.

Si $\xi \in V^*$ et $y \in \bar{V} - \{0\}$ alors $\langle \xi, y \rangle > 0$. On a $\overline{V^*} = \hat{V}$ si $V^* \neq \emptyset$.

Soient S la sphère unité de R^n et $S_V = S \cap V$. Si $V \neq \{0\}$ on paramètre $V - \{0\}$ par $S_V \times R^+$, et par suite de l'unicité de la mesure invariante par homothéties sur R^+, on voit que $d\mu(t)$ s'écrit $d\mu(t) = r^\alpha\, dr\, d\sigma(\theta)$, $d\sigma(\theta)$ étant absolument continue par rapport à la mesure de surface.

On établit alors l'analogue du théorème 2.12 [13] (a).

2.3.1. Lemme. — (a) $I_\mu(\xi) = +\infty$ *hors de* $\hat{V}$.

(b) *Si* $I_\mu(\xi_0) < +\infty$ *en un point* ξ_0 *de* V^* *alors* $I_\mu(\xi_0) < +\infty$ *sur* V^* *et définit une fonction continue sur* V^*.

(c) *Soit* $d\mu(t) = r^\alpha\, dr\, d\sigma(\theta)$, *alors* $I_\mu(\xi_0) < +\infty$ *en un point* $\xi_0 \in V$ *si et seulement si* $\alpha + 1 > 0$ *et* $\int_{S_V} d\sigma(\theta) < +\infty$.

(*d*) *Si* $I_\mu(\xi_0) < +\infty$ *en un point* $\xi_0 \in V^*$ *alors il existe* $m > 0$ *tel que* $I_\mu(\xi) > m > 0$ *quel que soit* $\xi \in \hat{V} \cap S$.

Démonstration. — Le lemme est trivial si $V = \{0\}$ car alors I_μ est une fonction constante. Sinon, on reprend la démonstration de [13] (*a*), p. 340. On a

$$I_\mu(\xi) = \int_{S_V \times R^+} e^{-4\pi\langle \xi, r\theta \rangle} r^\alpha \, dr \, d\sigma(\theta).$$

Si ξ n'est pas dans $\hat{V}$, il existe un $\theta \in S \cap V$ tel que $\langle \xi, \theta \rangle < 0$ et donc un ensemble de mesure positive pour $d\sigma(\theta)$ tel que $\langle \xi, \theta \rangle < 0$ sur cet ensemble. On voit donc que l'intégrale $I_\mu(\xi)$ est infinie.

D'autre part, si $\xi_0 \in V^*$, on a :

2.3.2 :

$$I_\mu(\xi_0) = (4\pi)^{-(\alpha+1)} \int_0^{+\infty} e^{-r} r^\alpha \, dr \int_{S_V} \langle \xi_0, \theta \rangle^{-(\alpha+1)} d\sigma(\theta).$$

Donc pour que $I_\mu(\xi_0) < +\infty$, il faut que $(\alpha+1) > 0$.

Dans ce cas si $\xi_0 \in V^*$ est un point fixé de V^*, la fonction $\langle \xi_0, \theta \rangle$ lorsque θ varie dans le compact $\bar{V} \cap S \subset \bar{V} - \{0\}$ est borné supérieurement et inférieurement par un nombre strictement positif.

On voit donc que $I_\mu(\xi_0) < +\infty$ si et seulement si $\alpha+1 > 0$ et $\int_{S_V} d\sigma(\theta) < +\infty$.

Ces conditions sont indépendantes de ξ_0 et on voit sur la formule 2.3.2 que $I_\mu(\xi)$ est continue en ξ lorsque ξ varie dans V^*.

Enfin supposons, $I_\mu(\xi_0) < +\infty$, on a nécessairement alors $\alpha+1 > 0$. Donc lorsque ξ_0 varie dans $\hat{V} \cap S$ et θ dans $S \cap V$ on aura toujours

$$\langle \xi_0, \theta \rangle \geqq 0 \qquad \text{et} \qquad \langle \xi_0, \theta \rangle^{\alpha+1} \leqq M < +\infty,$$

par conséquent

$$\langle \xi_0, \theta \rangle^{-(\alpha+1)} \geqq m > 0$$

et finalement $I_\mu(\xi) \geqq c > 0$ pour tout ξ dans $\hat{V} \cap S$.

2.3.3 Soit H une forme hermitienne sur C^m à valeurs dans C.

On note :

$$\mathscr{H}(H) = \left\{ F \text{ holomorphes sur } C^m \text{ telles que } \int |F(u)|^2 e^{-4\pi H(u,u)} du < +\infty \right\}.$$

En écrivant $H(u, u) = \sum_i \varepsilon_i u_i^2$ dans une base appropriée, on voit que $\mathscr{H}(H) \neq \{0\}$ si et seulement si H est une forme hermitienne définie positive.

On introduit le noyau reproduisant $R_H(u, v)$ de l'espace $\mathscr{H}(H)$, i. e. $R_H(u, v)$ est une fonction holomorphe en u, antiholomorphe en v, telle que, pour tout v, $R_H(\,.\,, v) \in \mathscr{H}(H)$ et telle que pour tout $F \in \mathscr{H}(H)$, $\langle F, R_H(\,.\,, v) \rangle_{\mathscr{H}(H)} = F(v)$.

On note d'autre part det (H) la valeur du déterminant de la matrice $H(e_i, e_j)$ par rapport à la base naturelle complexe de $\mathbf{C}^m$.

2.3.4. Lemme ([1] *bis*). — *On a* $R_H(u, v) = (\det 4H)\, e^{4\pi H(u,v)}$.

Démonstration. — Tout d'abord pour v fixé, on voit que $R_H(u, v) \in \mathcal{H}(H)$; calculons pour $F \in \mathcal{H}(H)$:

$$\int F(u)\overline{R_H(u, v)}\, e^{-4\pi H(u,u)}\, du = \det 4H \int F(u)\, e^{4\pi H(v,u)}\, e^{-4\pi H(u,u)}\, du.$$

Changeons u en $v-u$, l'intégrale devient :

$$\det 4H \int F(v-u)\, e^{4\pi H(u,v)}\, e^{-4\pi H(u,u)}\, du.$$

La fonction $\alpha(u) = F(v-u)\, e^{4\pi H(u,v)}$ est alors holomorphe en u et dans $L^1(e^{-4\pi H(u,u)}\, du)$; en écrivant :

$$u = (r_1 e^{i\theta_1}, \ldots, r_m e^{i\theta_m}) \qquad \text{si} \quad H(u; u) = \sum |r_i|^2$$

et en intégrant en coordonnées polaires, on voit que

$$\int \alpha(u)\, e^{-4\pi H(u,u)}\, du = \alpha(0) \int e^{-4\pi H(u,u)}\, du = (\det 4H)^{-1} F(v).$$

C. Q. F. D.

On a alors :

$$\begin{aligned} |F(u)|^2 &= |\langle F, R_H(., u)\rangle|^2 \leqq \|F\|^2 \|R_H(., u)\|^2 \\ &\leqq \|F\|^2 (\det(4H))\, e^{4\pi H(u,u)}. \end{aligned}$$

D'où :

2.3.5. Si $F \in \mathcal{H}(H)$,

$$(\det(4H))^{-1}\, e^{-4\pi H(u,u)}\, |F(u)|^2 \leqq \|F\|^2_{\mathcal{H}(H)}.$$

Soit alors $Q : \mathbf{C}^m \times \mathbf{C}^m \to \mathbf{C}^n$ notre forme quadratique.

On notera :

2.3.6 :

$$\begin{aligned} U(Q) = \{\xi \in (\mathbf{R}^n)^*; \text{ tels que } Q_\xi(u, v) = \langle \xi, Q(u, v)\rangle \\ \text{soit une forme hermitienne définie positive}\}. \end{aligned}$$

On a $\xi \in U(Q)$ si et seulement si $\langle \xi, Q(u, u)\rangle > 0$ pour tout $u \in \mathbf{C}^m - \{0\}$. On voit donc que $U(Q)$ est un cône convexe ouvert de $(\mathbf{R}^n)^*$.

2.3.7. Revenons à l'étude de l'espace $H(D; dm)$.

Le théorème 2.2.1 montre que l'application $\varphi \mapsto \hat{\varphi}$ établit un isomorphisme entre l'espace $H(D; dm)$ et l'espace des fonctions $\hat{\varphi}(\xi, u)$ holomorphes en u pour presque tout ξ et telles que

$$\int_{(\mathbf{R}^n)^* \times \mathbf{C}^m} |\hat{\varphi}(\xi, u)|^2\, I_\mu(\xi)\, e^{-4\pi\langle \xi, Q(u,u)\rangle}\, d\xi\, du < +\infty.$$

Pour que H (D, dm) soit non nul, il faut donc tout d'abord que U (μ) ait un intérieur, en particulier que $V^* \neq \emptyset$ (2.3.1). De plus 2.3.1 et 2.3.2 montrent que $\hat{\varphi}(\xi, u)$ a son support dans $V^* \cap U(Q) \times C^m$.

Le théorème 2.2.1 s'énonce alors que V, N, E, dm fixés comme dans ce paragraphe.

2.3.8. THÉORÈME. — (*a*) H (D, dm) $\neq \{0\}$ *si et seulement si* $I_\mu(\xi)$ *est fini en un point* $\xi \in V^*$ *et* $U(Q) \cap V^* \neq \emptyset$.

(*b*) *Dans ce cas*, $I_\mu(\xi)$ *est finie et continue sur* V^* *et*

$$\hat{H}(D) = \left\{ \begin{array}{l} \textit{classes de fonctions } \hat{\varphi}(\xi, u) \textit{ mesurables définies sur } (V^* \cap U(Q)) \times C^m \\ \qquad \textit{qui pour presque tout } \xi \textit{ sont holomorphes en } u, \textit{ et telles que} \\ \qquad\qquad \| \hat{\varphi} \|^2 = \int_{(V^* \cap U(Q)) \times C^m} | \hat{\varphi}(\xi, u) |^2 I_\mu(\xi) e^{-4\pi \langle \xi, Q(u, u) \rangle} d\xi \, du < +\infty \end{array} \right\}.$$

Démonstration. — Si $I_\mu(\xi) < +\infty$ et si $V^* \cap U(Q) \neq \emptyset$ alors les fonctions de la forme $l(\xi) P(u)$ avec $l(\xi) \in C_0(V^* \cap U(Q))$ et $P \in C[u]$ sont dans $\hat{H}(D)$.

Tout le reste a déjà été démontré.

Maintenant la formule d'inversion,

$$\varphi(z, u) = \int e^{2i\pi \langle \xi, z \rangle} \hat{\varphi}(\xi, u) \, d\xi$$

va en général définir une fonction sur un ensemble $\check{D}$ plus grand que la variété D de départ.

2.3.9. Supposons $U(Q) \cap V^* \neq \emptyset$.

Soit C (V; Q) l'enveloppe convexe fermée engendrée par V et $\{ Q(u, u);\ u \in C^m \}$.

On a alors :

$$C(V, Q) = \{ x \in R^n, \text{ tels que } \langle x, \xi \rangle \geqq 0 \text{ pour tout } \xi \in V^* \cap U(Q) \}.$$

2.3.10. Soit L (V; Q) l'espace vectoriel engendré par C (V; Q).

Comme C = C (V; Q) est un cône convexe fermé, il a un intérieur dans l'espace vectoriel qu'il engendre.

2.3.11. On note C^0 cet intérieur relatif à L (V; Q).

On introduit :

2.3.12 :

$$\check{D} = \{ (z, u);\ \operatorname{Im} z - Q(u, u) \in C^0 \}.$$

Il existe un système de coordonnées $z = (z_1, z_2)$ sur $C^n = C^{n_1} \times C^{n_2}$ tel que C^0 soit ouvert dans le sous-espace vectoriel de R^n défini par $y_1 = 0$. On a donc, puisque $Q(u, u) \in L(V, Q)$:

$$\check{D} = \{ (z_1, z_2, u);\ \text{avec } \operatorname{Im} z_1 = 0 \text{ et } (z_2, u) \in \check{D}_h \},$$

où

$$\check{D}_h = \{ (z_2, u);\ \operatorname{Im} z_2 - Q(u, u) \in C^0 \}.$$

Remarquons que $\check{D}_h$ est un domaine dans $C^{n_2} \times C^m$ et que D en tant que C.R. variété est le produit $R^{n_1} \times \check{D}_h$, i. e. les équations de Cauchy-Riemann tangentielles sur

$$\check{D} = \{(x_1, z_2, u);\ x_1 \in R^{n_1} \text{ et } (z_2, u) \in \check{D}_h\}$$

sont simplement les équations de Cauchy-Riemann pour les variables (z_2, u) du domaine $\check{D}_h$, et on en déduit, du théorème de régularité de L. Schwartz la :

2.3.13. Proposition. — *Soit f une fonction localement intégrable sur $\check{D}$, alors $\bar{\partial}_b f = 0$ au sens faible si et seulement si $f(x_1, z_2, u)$ est holomorphe par rapport à (z_2, u) pour presque tout $x_1 \in R^{n_1}$.*

Maintenant, soit $\varepsilon \in C^0$ et on considère la variété

$$D_\varepsilon = D + i\varepsilon = \{(z, u);\ \operatorname{Im} z - Q(u, u) \in V + i\varepsilon\}.$$

Il est clair que $D_\varepsilon \subset \check{D}$ et que $\check{D} = \bigcup_{\varepsilon \in C^0} D_\varepsilon$ (l'union n'est pas en sous-ensembles disjoints).

Si F est une fonction sur $\check{D}$, alors on considère la fonction F_ε sur D définie par $F_\varepsilon(z, u) = F(z + i\varepsilon, u)$, et on définit :

2.3.14 :

$$\mathscr{H}(\check{D}) = \left\{ F \text{ mesurables sur } \check{D} \text{ telles que :} \right.$$

$$\left. 1^\circ\ \|F\|^2 = \sup_{\varepsilon \in C^0} \int |F_\varepsilon|^2 \, dm < +\infty;\ 2^\circ\ \bar{\partial}_b F = 0 \text{ au sens faible} \right\};$$

i. e. une fonction F dans $\mathscr{H}(\check{D})$ est une fonction $F(x_1, z_2, u)$ qui est pour presque tout x_1 holomorphe en (z_2, u) et qui vérifie une condition sur la norme du type espace de Hardy.

On a alors le théorème suivant :

2.3.15. Théorème. — (*a*) *Soit $\varphi \in \hat{H}(D)$, alors on peut définir*

$$\check{\varphi}(z, u) = \int e^{2i\pi\langle \xi, z\rangle} \varphi(\xi, u) \, d\xi$$

au sens de la transformation de Fourier, pour tout $(z, u) \in \check{D}$ et $\check{\varphi} \in \mathscr{H}(\check{D})$.

(*b*) *Si $F \in \mathscr{H}(\check{D})$, alors $F_\varepsilon \in H(D)$ quel que soit ε et $\lim_{\varepsilon \to 0} F_\varepsilon = f$ existe dans $H(D)$.*

(*c*) *Les applications $\varphi \mapsto \check{\varphi}$, $F \mapsto f$ et $f \mapsto \hat{f}$ définissent des isomorphismes unitaires : $\hat{H}(D) \to \mathscr{H}(\check{D}) \to H(D) \to \hat{H}(D)$ dont le composé est l'identité.*

(*d*) *Si C^0 est ouvert dans R^n, alors l'intégrale définissant $\check{\varphi}(z, u)$ converge absolument pour tout $(z, u) \in \check{D}$ lorsque $\varphi(\xi, u)$ est une fonction mesurable représentant φ qui est holomorphe en u pour presque tout ξ.*

Démonstration. — Soit Δ un ouvert relativement compact dans C^0 et soit $\check{D}_\Delta = \{(z, u);\ \mathrm{Im}\, z - Q(u, u) \in \Delta\}$. C'est un domaine du genre étudié au paragraphe 2.2.

Soient $d\varepsilon$ la mesure euclidienne sur Δ et $dm_\Delta = dx\, d\varepsilon\, du$. Montrons alors que $\hat{H}(D, dm) \subset \hat{H}(\check{D}_\Delta, dm_\Delta)$. Il suffit de montrer que pour tout $\xi \in V^* \cap U(Q)$

$$\int_\Delta e^{-4\pi\langle \xi, \varepsilon \rangle} d\varepsilon \leqq c(\Delta)\, I_\mu(\xi).$$

En effet, il existe un petit voisinage U_Δ relativement compact dans V tel que $\Delta - U_\Delta \subset C^0$, donc pour tout $\varepsilon \in \Delta$ et $t \in U_\Delta$ et $\xi \in V^* \cap U(Q)$, $\langle \xi, \varepsilon \rangle \geqq \langle \xi, t \rangle$. Par conséquent $e^{-4\pi\langle \xi, \varepsilon\rangle} \leqq e^{-4\langle \xi, t\rangle}$. En intégrant cette inégalité en $d\varepsilon\, d\mu(t)$, il vient l'inégalité voulue. Il s'ensuit donc que quelque soit $(z, u) \in \check{D}_\Delta$ et $\varphi \in \hat{H}(D)$, on peut former au sens de la transformation de Fourier partielle (2.2.3) :

$$\check{\varphi}(z, u) = \int e^{2i\pi\langle \xi, x+iy \rangle} \varphi(\xi, u)\, d\xi$$

et $\check{\varphi} \in H(\check{D}_\Delta, dm_\Delta)$. En particulier $\check{\varphi}$ vérifie les équations $\bar{\partial}_b \check{\varphi} = 0$ au sens faible sur $\check{D}_\Delta$; en recouvrant $\check{D}$ par des $\check{D}_\Delta$, on en déduit que $\check{\varphi}$ est localement intégrable et vérifie $\bar{\partial}_b \check{\varphi} = 0$ au sens faible.

Mais on voit aussi immédiatement que :

$$\int_D |\check{\varphi}_\varepsilon|^2\, dm \leqq \int_{V^* \cap U(Q) \times C^m} e^{-4\pi\langle \xi, \varepsilon \rangle} |\varphi(\xi, u)|^2 e^{-4\pi\langle \xi, Q(u, u) \rangle} I_\mu(\xi)\, d\xi\, du.$$

Par conséquent, puisque $\langle \xi, \varepsilon \rangle \geqq 0$ si $\varepsilon \in C^0$ et si $\xi \in V^* \cap U(Q)$, il vient d'après le lemme de Fatou,

$$\sup_{\varepsilon \in C^0} \int |\check{\varphi}_\varepsilon|^2\, dm = \|\varphi\|^2_{\hat{H}(D)} \qquad \text{donc} \quad \check{\varphi} \in \mathscr{H}(\check{D}).$$

(*b*) De la même façon, on voit que, si Δ est un ensemble relativement compact de C^0, tout élément de $\mathscr{H}(\check{D})$ est dans $H(\check{D}_\Delta, dm_\Delta)$; on en déduit en appliquant le théorème 2.2.1 que F est de la forme $\check{\varphi}(\xi, u)$ et on doit avoir :

$$\sup_{\varepsilon \in C^0} \int e^{-4\pi\langle \xi, \varepsilon \rangle} |\varphi(\xi, u)|^2 e^{-4\pi\langle \xi, Q(u, u) \rangle} I_\mu(\xi)\, d\xi\, du < +\infty.$$

Ceci implique tout d'abord que φ est à support dans $U(Q) \cap V^* \times \mathbf{C}^m$. Comme $\langle \xi, \varepsilon \rangle \geqq 0$ pour tout $\varepsilon \in C^0$ et $y \in U(Q) \cap V^*$, il s'ensuit que (Beppo-Levi) :

$$\int |\varphi(\xi, u)|^2 e^{-4\pi\langle \xi, Q(u, u) \rangle} I_\mu(\xi)\, d\xi\, du < +\infty$$

et est égal à $\|F\|^2_{\mathscr{H}(\check{D})}$.

Donc $\varphi \in \hat{\mathrm{H}}(\mathrm{D})$ ainsi que $e^{-4\pi\langle \xi, \varepsilon \rangle} \varphi$, et F_ε tend vers f où

$$f(x+iy, u) = \int e^{2i\pi\langle \xi, x+iy \rangle} \varphi(\xi, u)\, d\xi \quad \text{dans } \mathrm{H}(\mathrm{D}).$$

Pour démontrer (d) démontrons tout d'abord le :

2.3.16. LEMME. — *Si* C^0 *est ouvert dans* $(\mathbf{R}^n)^*$, *alors :*

$$\mathrm{G}(\varepsilon) = \int_{\mathrm{V}^* \cap \mathrm{U}(\mathrm{Q})} e^{-4\pi\langle \xi, \varepsilon \rangle} \mathrm{I}_\mu(\xi)^{-1} \det \mathrm{Q}_\xi \, d\xi$$

converge pour tout $\varepsilon \in \mathrm{C}^0$.

Démonstration. — Si C^0 est ouvert dans $(\mathbf{R}^n)^*$, on a $\mathrm{C}^0 = (\mathrm{V}^* \cap \mathrm{U}(\mathrm{Q}))^*$ et on peut appliquer le critère 2.3.1 (c).

On a $d\mu(t) = r^\alpha \, dr \, d\sigma(\theta)$ avec $\alpha+1 > 0$ et donc $\mathrm{I}_\mu(a\xi) = a^{-(\alpha+1)} \mathrm{I}_\mu(\xi)$. Écrivons alors $\mathrm{I}_\mu(\xi)^{-1} \det \mathrm{Q}_\xi \, d\xi$ en coordonnées polaires, ce qui donne $t^{(\alpha+m+n)} dt \, \mathrm{I}_\mu(\theta)^{-1} \det \mathrm{Q}_\theta \, d\theta$ si $d\theta$ désigne la mesure de surface de la sphère unité de $(\mathbf{R}^n)^*$. D'après 2.3.1 (d) on a $\mathrm{I}_\mu(\theta)^{-1} \leqq \mathrm{M} < +\infty$ lorsque $\theta \in \overline{\mathrm{V}^*} \cap \mathrm{S}$. Donc puisque $\det \mathrm{Q}_\theta$ est continue, on voit que les conditions 2.3.1 (c) sont vérifiées pour assurer la convergence de $\mathrm{G}(\varepsilon)$.

C. Q. F. D.

Considérons alors une fonction $\varphi(\xi, u)$ sur $\mathrm{V}^* \cap \mathrm{U}(\mathrm{Q}) \times \mathbf{C}^m$ mesurable en ξ et u et telle que

$$\int |\varphi(\xi, u)|^2 \mathrm{I}_\mu(\xi) e^{-4\pi\langle \xi, \mathrm{Q}(u, u) \rangle} d\xi \, du < +\infty.$$

Montrons que si $(z, u) \in \check{\mathrm{D}}$:

$$\check{\varphi}(z, u) = \int_{\mathrm{V}^* \cap \mathrm{U}(\mathrm{Q})} e^{2i\pi\langle \xi, z \rangle} \varphi(\xi, u)\, d\xi$$

est définie par une intégrale absolument convergente.

En effet, on a $\operatorname{Im} z = \varepsilon + \mathrm{Q}(u, u)$ avec $\varepsilon \in \mathrm{C}^0$ d'où

$$\begin{aligned}
&\int |e^{2i\pi\langle \xi, z \rangle} \varphi(\xi, u)|\, d\xi \\
&= \int e^{-2\pi\langle \xi, \varepsilon \rangle} \mathrm{I}_\mu(\xi)^{-1/2} \det \mathrm{Q}_\xi^{1/2} |\varphi(\xi, u)| e^{-2\pi\langle \xi, \mathrm{Q}(u, u) \rangle} \det \mathrm{Q}_\xi^{-1/2} \mathrm{I}_\mu(\xi)^{1/2} d\xi \\
&\leqq \left(\int e^{-4\pi\langle \xi, \varepsilon \rangle} \mathrm{I}_\mu(\xi)^{-1} \det \mathrm{Q}_\xi \, d\xi \right)^{1/2} \left(\int |\varphi(\xi, u)|^2 e^{-4\pi\langle \xi, \mathrm{Q}(u, u) \rangle} \det \mathrm{Q}_\xi^{-1} \mathrm{I}_\mu(\xi)\, d\xi \right)^{1/2}.
\end{aligned}$$

Le premier facteur est fini et égal à $G(\varepsilon)^{1/2}$ (2.3.12). D'autre part pour presque tout ξ, $\varphi(\xi, .) \in \mathscr{H}(Q_\xi)$. Par conséquent d'après 3.2.5, pour presque tout ξ :

$$(\det Q_\xi)^{-1} e^{-4\pi\langle \xi, Q(u,u)\rangle} |\varphi(\xi, u)|^2 \leqq c \int_{C^m} |\varphi(\xi, v)|^2 e^{-4\pi\langle \xi, Q(v,v)\rangle} dv.$$

En intégrant en ξ, on voit que le deuxième facteur est fini et majoré par $\|\varphi\|_{\hat{H}(D)}$, d'où

$$|\check{\varphi}(z, u)| \leqq G(\varepsilon)^{1/2} \|\varphi\|_{\hat{H}(D)}.$$

On voit alors, en appliquant par exemple le critère de Morera que la fonction $\check{\varphi}(z, u)$ ainsi définie par sa représentation intégrale est une fonction holomorphe sur D (qui est un domaine dans $C^n \times C^m$, puisque C^0 est ouvert).

2.4. Surfaces définies par une forme quadratique réelle. — Considérons S une forme quadratique réelle sur R^{2m} à valeurs dans R^n et la surface donnée par

$$D = \{(z, u), z \in C^n, u \in C^m = R^{2m}; \operatorname{Im} z - S(u) \in V\},$$

où V est un cône dans R^n.

Comme $x^2 = 1/2 (\operatorname{Re}(x+iy)^2 + |x+iy|^2)$, on voit que toute forme quadratique réelle S sur R^{2m} à valeurs dans R^n peut s'écrire sous la forme

$$S(u) = \operatorname{Re} L(u, u) \quad \text{où} \quad L : C^m \times C^m \to C^n$$

est une forme semi-hermitienne c'est-à-dire L peut être écrite $L = Q+B$, où Q et B sont des fonctions sur $C^m \times C^m$ à valeurs dans C^n et satisfaisant :

1° $Q(u, v)$ et $B(u, v)$ sont linéaires complexes en u;

2° $Q(u, v) = \overline{Q(v, u)}$, $B(u, v) = B(v, u)$;

c'est-à-dire Q est hermitienne, et B est symétrique complexe. On vérifie immédiatement que Q et B sont entièrement déterminées par S.

On a le lemme :

2.4.1. Lemme. — *Soit* S *une forme quadratique sur* R^{2m} *à valeurs réelles. Écrivons* $S(u) = \operatorname{Re} L(u, u)$, *avec* $L = Q+B$ *forme semi-hermitienne sur* C^m *à valeurs dans* C. *Alors l'espace*

$$\mathscr{H}(S) = \left\{ F \textit{ holomorphes sur } C^m \textit{ telles que} \int |F(u)|^2 e^{-4\pi S(u)} du < +\infty \right\}$$

est non nul si et seulement si Q *est une forme hermitienne définie positive.*

Démonstration. — Il est clair que l'application $(IF)(u) = e^{-2\pi B(u,u)} F(u)$ est un isomorphisme unitaire entre l'espace $\mathscr{H}(S)$ et l'espace

$$\mathscr{H}(Q) = \left\{ F \text{ holomorphes sur } C^m, \text{ telles que} \int |F(u)|^2 e^{-4\pi Q(u,u)} du < +\infty \right\}$$

et le résultat est alors immédiat.

Soit donc $L = Q+B$ une forme semi-hermitienne à valeurs dans C^n telle que $S(u) = \operatorname{Re} L(u, u)$.

Alors la surface

$$D_S = \{(z, u),\ z \in C^n,\ u \in C^m = R^{2m},\ \operatorname{Im} z - S(u) \in V\}$$

est isomorphe en tant que C.R. variété à

$$D_Q = \{(z, u),\ z \in C^n,\ u \in C^m,\ \operatorname{Im} z - Q(u) \in V\},$$

car l'application $\alpha : C^n \times C^m \to C^n \times C^m$ définie par $\alpha(z, u) = (z - i B(u, u), u)$ est biholomorphe et applique D_S sur D_Q.

Par conséquent tous les résultats démontrés au paragraphe précédent pour la surface D_Q vont se traduire immédiatement pour D_S.

Soit $C(V, Q)$ et C^0 définies comme en 2.3.9 et 2.3.10 et soit

$$\check{D}_S = \{(z, u),\ \operatorname{Im} z - S(u) \in C^0\}.$$

Choisissons une décomposition $C^n = C^{n_1} \times C^{n_2}$ telle que C^0 soit ouvert dans le sous-espace vectoriel de R^n défini par $y_1 = 0$.

Soient $S(u) = (S_1(u), S_2(u))$ les coordonnées de $S(u)$ dans

$$R^n = R^{n_1} \times R^{n_2} \qquad \text{et} \qquad B(u, u) = (B_1(u, u), B_2(u, u))$$

celles de B dans $C^n = C^{n_1} \times C^{n_2}$ tandis que $Q(u, u) = (O, (Q_2(u, u))$. On a donc

$$\check{D}_S = \{(z, u),\ \text{avec } \operatorname{Im} z_1 = S_1(u),\ \operatorname{Im} z_2 - S_2(u) \in C^0\}.$$

On introduit

$$\check{D}_h = \{(z_2, u),\ \operatorname{Im} z_2 - S_2(u) \in C^0\},$$

$\check{D}_h$ est un domaine dans $C^{n_2} \times C^m$.

Alors une fonction F localement intégrable sur $\check{D}_S$ vérifie $\bar{\partial}_b F = 0$ au sens faible si et seulement si $F(x_1 + iy_1, z_2, u)$ est presque partout égale à

$$f(x_1 + \operatorname{Im} B_1(u, u), z_2, u) \qquad \text{où} \quad f(x_1, z_2, u)$$

est une fonction mesurable sur $R^{n_1} \times \check{D}_h$, qui pour presque tout x_1 est holomorphe en (z_2, u).

On considère de même qu'au paragraphe 3, V^*, $U(Q)$, $dm = dx\, d\mu(t)\, du$ avec les mêmes hypothèses et

$$I_\mu(\xi) = \int_V e^{-4\pi\langle \xi, t\rangle} d\mu(t).$$

2.4.2. THÉORÈME. — *Soient* S *une forme quadratique réelle sur* R^{2m} *à valeurs dans* R^n, $L = Q+B$ *la forme semi-hermitienne déterminée par* S *et* $D = \{(z, u);\ \operatorname{Im} z - S(u) \in V\}$.

(*a*) $\mathrm{H}(\mathrm{D}; dm) \neq \{0\}$ *si et seulement si* $\mathrm{I}_\mu(\xi)$ *est fini en un point* $\xi_0 \in \mathrm{V}$ *et si* $\mathrm{U}(\mathrm{Q}) \cap \mathrm{V}^* \neq \emptyset$.

(*b*) *Dans ce cas* $\mathrm{I}_\mu(\xi)$ *est finie et continue sur* V^* *et l'application*

$$\varphi \mapsto \hat{\varphi}(\xi, u) = \int e^{-2i\pi \langle \xi, x+iy \rangle} \varphi(x+iy, u)\, dx$$

est un isomorphisme unitaire de $\mathrm{H}(\mathrm{D}; dm)$ *avec l'espace*

$$\hat{\mathrm{H}}(\mathrm{D}) = \Big\{ \text{classe de fonctions } \hat{\varphi}(\xi, u) \text{ mesurables definies sur } \mathrm{V}^* \cap \mathrm{U}(\mathrm{Q}) \times \mathrm{C}^m$$
$$\text{qui pour presque tout } \xi \text{ sont holomorphes en } u \text{ et telles que}$$
$$\int_{(\mathrm{V}^* \cap \mathrm{U}(\mathrm{Q})) \times \mathbf{C}^m} |\hat{\varphi}(\xi, u)|^2 \mathrm{I}_\mu(\xi)\, e^{-4\pi \langle \xi, \mathrm{S}(u) \rangle} d\xi\, du = \|\hat{\varphi}\|^2 < +\infty \Big\}.$$

(*c*) *Soient* $\check{\mathrm{D}} = \{(z, u);\ \mathrm{Im}\, z - \mathrm{S}(u) \in \mathrm{C}^0\}$:

$$\mathscr{H}(\check{\mathrm{D}}) = \Big\{ \mathrm{F} \text{ mesurables sur } \check{\mathrm{D}}, \text{ telles que}$$
$$\|\mathrm{F}\|^2 = \sup_{\varepsilon \in \mathrm{C}^0} \int \|\mathrm{F}_\varepsilon\|^2 dm < +\infty$$
$$\text{et telles que } \bar{\partial}_b \mathrm{F} = 0 \text{ au sens faible} \Big\},$$

alors on peut définir si $\varphi \in \hat{\mathrm{H}}(\mathrm{D})$:

$$\check{\varphi}(z, u) = \int_{\mathrm{V}^* \cap \mathrm{U}(\mathrm{Q})} e^{2i\pi \langle \xi, z \rangle} \varphi(\xi, u)\, d\xi$$

au sens de la transformation de Fourier, pour $(z, u) \in \check{\mathrm{D}}$ *et* $\check{\varphi} \in \mathscr{H}(\check{\mathrm{D}})$.

(*d*) *Si* $\mathrm{F} \in \mathscr{H}(\check{\mathrm{D}})$, *alors* $\mathrm{F}_\varepsilon \in \mathrm{H}(\mathrm{D})$ *quel que soit* $\varepsilon \in \mathrm{C}^0$ *et* $\lim_{\varepsilon \to 0} \mathrm{F}_\varepsilon = f$ *existe dans* $\mathrm{H}(\mathrm{D})$.

(*e*) *Les applications* $\varphi \to \check{\varphi}$, $\mathrm{F} \to f$, *et* $f \to \hat{f}$ *définissent des isomorphismes unitaires de* $\hat{\mathrm{H}}(\mathrm{D}) \to \mathscr{H}(\check{\mathrm{D}}) \to \mathrm{H}(\mathrm{D}) \to \hat{\mathrm{H}}(\mathrm{D})$ *dont le composé est l'identité.*

(*f*) *Si* C^0 *est ouvert dans* R^n, *alors l'intégrale définissant* $\check{\varphi}(z, u)$ *converge absolument quel que soit* $(z, u) \in \check{\mathrm{D}}$, *lorsque* $\varphi(\xi, u)$ *est une fonction mesurable représentant* φ *qui pour presque tout* ξ *est holomorphe en* u.

3. Étude du bord d'un domaine de Siegel Homogène

3.1. Quelques définitions. — On reprend les notations de [13] (*a*), p. 361 ou [14].

Soit $\mathfrak{b} = \mathscr{H}_0 \oplus \mathscr{H}_{1/2} \oplus \mathscr{H}_1$ une J-algèbre et soient $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ les racines fondamentales associées, et soient $\mathrm{U}_1, \mathrm{U}_2, \ldots, \mathrm{U}_r$ les éléments de η^{α_i} tels que $[\mathrm{JU}_i, \mathrm{U}_j] = \delta_i^j$. On a $\alpha_j(\mathrm{JU}_i) = \delta_i^j$.

Le groupe H_0 agit par l'action adjointe dans $\mathscr{H}_1$.

On rappelle que si $s = \sum_{i=1}^{r} U_i$ alors $\Omega = H_0\, s$ est un cône convexe propre dans $\mathscr{H}_1$, et on construit le domaine de Siegel $D = D(\Omega; Q)$ associé à $\mathfrak{b}$, i. e.

$$D = D(\Omega, Q) = \{(x+iy, u);\ x, y \in \mathscr{H}_1,\ u \in \mathscr{H}_{1/2},\ y - Q(u, u) \in \Omega\}.$$

On introduit les éléments $s_e = \sum_{i=1}^{e-1} U_i$, $s_1 = 0$ et $\mathcal{O}_e = H_0\, s_e$; on a

$$\mathcal{O}_1 = \{0\}.$$

3.1.1. Puisque $\lim_{t \to -\infty} \exp t\, JU_e\, s_{e+1} = s_e$, on voit que $\mathcal{O}_e \subset \overline{\mathcal{O}}_{e+1} \subseteq \overline{\Omega}$.

On pose alors :

$$B.(is_e, 0) = \Sigma_e.$$

Si $b = h \exp U \exp X$, on a :

3.1.2 :

$$b.(is_e, 0) = (h.X + i(h.s_e + h.Q(U, U)), h.U).$$

Donc

$$\Sigma_e = \{(x+iy, u),\ y - Q(u, u) \in \mathcal{O}_e\}.$$

C'est une variété du type étudié en 2.3.

(Comme H_0 contient les dilatations, $\mathcal{O}_e$ est un cône dans $\mathscr{H}_1$.)

On se propose d'étudier l'espace des fonctions C.R. sur Σ_e et de décomposer l'action de B dans les espaces de Hilbert associés.

3.1.3. On définit si $1 \leqq e \leqq r$:

$$C_e = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{e-1}\} \qquad \text{et} \qquad C'_e = \{\alpha_e, \ldots, \alpha_r\},$$

$$s_e = \sum_{i=1}^{e-1} U_i, \qquad s'_e = \sum_{e}^{r} U_i, \qquad \xi_e = \sum_{i=1}^{e-1} U_i^*, \qquad \xi'_e = \sum_{e}^{r} U_i^*,$$

$$\mathscr{H}_0(e) = \sum_{i=1}^{e-1} RJU_i + \sum_{\substack{i, j \in C_e \\ i > j}} \mathscr{N}^{(1/2)(\alpha_i - \alpha_j)},$$

$$H_0(e) = \exp \mathscr{H}_0(e),$$

$$\mathscr{H}_0(e') = \sum_{e}^{r} RJU_i + \sum_{\substack{i, j \in C'_e \\ i > j}} \mathscr{N}^{(1/2)(\alpha_i - \alpha_j)},$$

$$H_0(e') = \exp \mathscr{H}_0(e'),$$

$$\mathscr{H}'_0 = \sum_{\substack{i \in C'_e \\ j \in C_e}} \mathscr{N}^{(1/2)(\alpha_i - \alpha_j)},$$

$$\mathscr{H}_1(e) = \sum_{i, j \in C_e} \mathscr{N}^{(1/2)(\alpha_i + \alpha_j)},$$

$$\mathcal{H}_1(e') = \sum_{i,\, j \in C'_e} \mathcal{N}^{(1/2)(\alpha_i+\alpha_j)},$$

$$\mathcal{H}'_1 = \sum_{\substack{i \in C'_e \\ j \in C_e}} \mathcal{N}^{(1/2)(\alpha_i+\alpha_j)},$$

$$\mathcal{H}_{1/2}(e) = \sum_{i \in C_e} \mathcal{N}^{\alpha_i/2},$$

$$\mathcal{H}_{1/2}(e') = \sum_{i \in C'_e} \mathcal{N}^{\alpha_i/2},$$

$$\Omega_e = H_0(e).s_e \quad \text{et} \quad \Omega'_e = H_0(e').s'_e,$$

$$\Omega^*_e = H_0(e).\xi_e \quad \text{et} \quad \Omega'^*_e = H_0(e').\xi'_e.$$

Enfin, soit $\tau_e = \mathcal{H}_0(e) \oplus \mathcal{H}'_0$ et $T_e = \exp \tau_e$.

Remarquons que τ_e est une sous-algèbre.

3.1.4. Lemme. — *Le stabilisateur de s_e dans H_0 a comme algèbre de Lie $\mathcal{H}_0(e')$ et si $t \in T_e$ l'application $t \mapsto ts_e$ est un difféomorphisme de T_e sur θ_e.*

Démonstration. — Il est clair que $H_0(e')$ stabilise s_e. Sur le complémentaire τ_e de $\mathcal{H}_0(e')$ dans $\mathcal{H}_0$, l'application $X \mapsto [X, s_e]$ coïncide avec J et est donc une injection. D'autre part le groupe H_0 est un groupe exponentiel.

Ce qui démontre le lemme.

3.1.5. On introduit

$$\mathfrak{b}_e = \mathcal{H}_0(e) \oplus \mathcal{H}_{1/2}(e) \oplus \mathcal{H}_1(e)$$

et

$$\mathfrak{b}'_e = \mathcal{H}_0(e') \oplus \mathcal{H}'_0 \oplus \mathcal{H}_{1/2}(e') \oplus \mathcal{H}'_1 \oplus \mathcal{H}_1(e').$$

On a donc :

$$\mathfrak{b} = \mathfrak{b}_e \oplus \mathfrak{b}'_e.$$

On pose

$$\mathcal{H}'_{1/2} = \mathcal{H}'_0 \oplus \mathcal{H}_{1/2}(e') \oplus \mathcal{H}'_1$$

de sorte que

$$\mathfrak{b}'_e = \mathcal{H}_0(e') \oplus \mathcal{H}'_{1/2} \oplus \mathcal{H}_1(e').$$

Remarquons que cette décomposition est la décomposition de $\mathfrak{b}'_e$ en sous-espaces propres par rapport à $J\, s'_e$.

Les sous-espaces $\mathcal{H}'_{1/2}$ et $\mathfrak{b}_e$ sont stables par J.

On introduit :

$$\mathcal{H}'^{-}_{1/2} = \mathfrak{b}^- \cap (\mathcal{H}'_{1/2})^{\mathbf{C}},$$

$$\mathfrak{b}^-_e = \mathfrak{b}^- \cap \mathfrak{b}^{\mathbf{C}}_e,$$

$$\mathfrak{h}^-_e = \mathcal{H}_0(e')^{\mathbf{C}} \oplus \mathcal{H}'^{-}_{1/2} \oplus \mathfrak{b}^-_e.$$

On peut voir que $\mathfrak{h}^-_e$ est une sous-algèbre de $\mathfrak{b}^{\mathbf{C}}$ (par exemple, en utilisant que $[\mathfrak{b}^-, \mathfrak{b}^-] \subset \mathfrak{b}^-$ et en regardant les valeurs propres de $J_{s'_e}$, on voit que $[\mathfrak{b}^-_e, \mathcal{H}'^{-}_{1/2}] \subset \mathcal{H}'^{-}_{1/2}$).

D'autre part sur $\mathscr{H}'_0$, J est donnée par $JX = [s_e, X]$. On voit donc que si $Y \in \mathscr{H}_0(e')$ et $X \in \mathscr{H}'_0$ on a $[Y, JX] = J([Y, X])$ et donc $[\mathscr{H}_0(e'), \mathscr{H}'^{-}_{1/2}] \subset \mathscr{H}'^{-}_{1/2}$.

Si $X \in \mathfrak{b}$ et si ψ est une fonction C^∞ sur B, on définit :

$$(r(X).\psi)(b) = \frac{d}{dt}\psi(b\exp tX)\big|_{t=0}$$

et si $X \in \mathfrak{b}^C$ on définit $r(X)$ par linéarité.

3.1.6. Proposition. — *Soit f une fonction de classe* C^1 *sur* Σ_e, *alors f vérifie les équations C. R. sur* Σ_e *si et seulement si* $\varphi(b) = f(b.s_e)$ *est annulée par tous les champs* $r(X)$ *pour* $X \in \mathfrak{h}_e^-$.

Démonstration. — Soit $k = \dim \mathscr{H}_0(e') \oplus \mathscr{H}'_0 = \dim \tau_e = \dim \mathcal{O}_e$, alors l'image de $\mathfrak{h}_e^-$ dans l'application $b \mapsto b.s_e$ est isomorphe à $\mathfrak{b}_e^- \oplus \mathscr{H}'^{-}_{1/2}$ qui est de dimension complexe $m+k$, où $m = \dim_C \mathscr{H}_{1/2}$, ce qui est la dimension de l'espace $A_p(\Sigma_e)$ (1.1). Il suffit donc de vérifier que si

$$b = h\exp U\exp X$$

et

$$b.s_e = (h.X + i(h.s_e + h.Q(U, U)), h.U),$$

alors $\mathfrak{h}_e^-$ annule les fonctions coordonnées complexes

$$Z_e(b) = h.X + i(h.s_e + h.Q(U, U)),\ U_e(b) = h.U = U(b).$$

Comme toute fonction $\varphi(b) = f(b.s_e)$ est certainement annulée par les champs de vecteurs $r(X)$, $X \in \mathscr{H}_0(e')$, il suffit de vérifier que $\mathscr{H}'^{-}_{1/2} \oplus \mathfrak{b}_e^-$ annule $U(b)$ et $Z_e(b)$.

Rappelons que l'application

$$b \mapsto bs = (h.X + i(h.s + h.Q(U, U)), h.U)$$

est un isomorphisme complexe entre $D(\Omega, Q)$ et la structure complexe définie par $\mathfrak{b}^-$ sur B, donc en particulier $U(b)$ est annulée par tous les champs $r(X)$, $X \in \mathfrak{b}^-$; D'autre part si

$$Z(b) = hX + i(hs + hQ(U, U)),$$

on a

$$Z(b) = Z_e(b) + ihs'_e.$$

Mais la fonction qui à b associe $h.s'_e$ est clairement annulée par

$$\mathscr{H}^C_{1/2} \oplus \mathscr{H}^C_1 \oplus \mathscr{H}_0(e)^C \oplus \mathscr{H}'^C_0 \qquad (\text{car } [\mathscr{H}_0(e) \oplus \mathscr{H}'_0, s'_e] = 0)$$

qui contient $\mathfrak{b}_e^- \oplus \mathscr{H}'^{-}_{1/2}$. Donc comme $Z(b)$ est annulée par $\mathfrak{b}_e^- \oplus \mathscr{H}'^{-}_{1/2}$, $Z_e(b)$ l'est aussi et on en déduit le résultat voulu.

Nous allons maintenant étudier les fonctions C. R. sur Σ_e et expliciter les théorèmes d'extension obtenus au chapitre 2.

3.1.7. Lemme. — (*a*) *L'espace vectoriel engendré par les* $Q(u, u)$ est $[\mathscr{H}_{1/2}, \mathscr{H}_{1/2}]$.

(*b*) *L'espace vectoriel engendré par* $\mathcal{O}_e$ *est*

$$L_e = \mathcal{H}_1(e) \oplus \mathcal{H}'_1 \oplus [\mathcal{H}'_0, \mathcal{H}'_1].$$

(*c*) *l'espace vectoriel engendré par* $\mathcal{O}_e$ *et les* $Q(u, u)$ *est* $L_e + [\mathcal{H}_{1/2}, \mathcal{H}_{1/2}]$.

Démonstration. — (*a*) est évident par polarisation de la forme hermitienne $Q(u, u)$.

(*b*) Comme $H_0(e).s_e$ est ouvert dans $\mathcal{H}_1(e)$ on voit que $\mathcal{H}_1(e)$ est contenu dans l'espace L_e.

D'autre part si $X \in \mathcal{H}'_0$, on a expt $X.s_e = s_e - tJX - (t^2/2\,[X, JX]$.

On en déduit que $\mathcal{H}'_1 = J\mathcal{H}'_0$ et $[\mathcal{H}'_0\, \mathcal{H}'_1]$ sont aussi contenues dans L_e; Comme $\mathcal{H}_1(e) \oplus \mathcal{H}'_1 \oplus [\mathcal{H}'_0, \mathcal{H}'_1]$ est stable par H_0 et contient s_e, on en déduit l'assertion (*b*).

3.1.8. Lemme. — (*a*) *Si* α_i *et* α_j *sont telles que* $\mathcal{N}^{\alpha_i/2}$ *et* $\mathcal{N}^{\alpha_j/2}$ *sont* $\neq \{0\}$, *alors :*

$$\mathcal{N}^{(\alpha_i+\alpha_j)/2} = [\mathcal{N}^{\alpha_i/2}, \mathcal{N}^{\alpha_j/2}].$$

(*b*) *Si* $\alpha_i, \alpha_j, \alpha_k$ $(k < i, j)$ *sont telles que* $\mathcal{N}^{(\alpha_i+\alpha_k)/2}$ *et* $\mathcal{N}^{(\alpha_j+\alpha_k)/2} \neq \{0\}$ *alors :*

$$\mathcal{N}^{(\alpha_i+\alpha_j)/2} = [\mathcal{N}^{(\alpha_i-\alpha_k)/2}, \mathcal{N}^{(\alpha_j+\alpha_k)/2}] + [\mathcal{N}^{(\alpha_i+\alpha_k)/2}, \mathcal{N}^{(\alpha_j-\alpha_k)/2}].$$

Démonstration. — (*a*) *Soit* $X \in \mathcal{N}^{\alpha_j/2}$, $X \neq 0$, alors $[JX, X] = \alpha U_j$ avec $\alpha \neq 0$; soit $V \in \mathcal{N}^{(\alpha_i+\alpha_j)/2}$, alors $JV \in \mathcal{N}^{(\alpha_i-\alpha_j)/2}$ et

$$\begin{aligned} V = [JV, U_j] &= \alpha^{-1}[JV, [JX, X]] \\ &= \alpha^{-1}([[JV, JX], X] + [JX, [JV, X]]) \in [\mathcal{N}^{\alpha_i/2}, \mathcal{N}^{\alpha_j/2}]. \end{aligned}$$

(*b*) Se démontre de même.

Soit $d\mu_e$ une forme volume C^∞ sur $\mathcal{O}_e$, homogène par rapport à la dilatation $y \mapsto \lambda y$ $(\lambda > 0)$ du cône θ_e et soit $dm = dx\, d\mu_e(t)\, du$.

Soit

$$H_2^e = \Big\{ f \text{ mesurables sur } \Sigma_e \text{ telles que}$$
$$\|f\|^2 = \int_{\Sigma_e} |f|^2\, dm < +\infty;$$
$$\text{vérifiant } \bar{\partial}_b f = 0 \text{ au sens faible} \Big\}.$$

Les théorèmes d'extension obtenus au chapitre 2 permettent d'étendre ces fonctions à :

$$\check{D} = \{(x+iy, u),\ y - Q(u, u) \in C^0(\theta_e, Q)$$
où $C(\mathcal{O}_e, Q)$ est l'enveloppe convexe engendrée par θ_e et $\{Q(u, u)\}\}$.

La dimension de $C^0(\mathcal{O}_e; Q)$ est la dimension de l'espace vectoriel engendré par $C(\mathcal{O}_e; Q)$. On a donc :

$$\dim \check{D} - \dim \Sigma_e = \text{dimension de } [\mathcal{H}'_0, \mathcal{H}'_1] + [\mathcal{H}_{1/2}(e'), \mathcal{H}_{1/2}(e')]$$

comme on le voit facilement, en comparant,

$$\dim \mathcal{O}_e = \dim \mathrm{T}_e = \dim \mathcal{H}_0(e) + \dim \mathcal{H}'_0 = \dim \mathcal{H}_1(e) + \dim \mathcal{H}'_1$$

et

$$\begin{aligned}&\dim(\mathrm{L}_e + [\mathcal{H}_{1/2}, \mathcal{H}_{1/2}])\\ &\quad = \dim \mathcal{H}_1(e) + \dim \mathcal{H}'_1 + \dim([\mathcal{H}'_0, \mathcal{H}'_1] + [\mathcal{H}_{1/2}(e'), \mathcal{H}_{1/2}(e')]).\end{aligned}$$

Considérons la sous-algèbre de Lewy $\mathcal{L}_e$ (*cf.* [4]), $\mathcal{L}_e$ est la sous-algèbre engendrée par

$$(\mathfrak{h}_e^- + \overline{\mathfrak{h}_e^-}) \cap \mathfrak{b} = \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_{1/2} \oplus \mathcal{H}_1(e) \oplus \mathcal{H}'_1;$$

en écrivant

$$\mathcal{H}_0 = \mathcal{H}_0(e) \oplus \mathcal{H}_0(e') \oplus \mathcal{H}'_0$$

et en regardant les valeurs propres de $\mathrm{J}s_e$ et $\mathrm{J}s'_e$ on voit que $\mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_{1/2} \oplus \mathrm{L}_e + [\mathcal{H}_{1/2}, \mathcal{H}_{1/2}]$ est une sous-algèbre. On en déduit le :

3.1.9. LEMME :

$$\mathcal{L}_e = \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_{1/2} \oplus (\mathrm{L}_e + [\mathcal{H}_{1/2}, \mathcal{H}_{1/2}]).$$

On voit donc que la dimension d'excès des équations C. R. qui est par définition $\dim \mathcal{L}_e^{\mathrm{C}} - \dim(\mathfrak{h}_e^- + \overline{\mathfrak{h}_e^-})$ est égale à la dimension de $\check{\mathrm{D}}$ − dimension de Σ_e.

Nos théorèmes d'extension sont donc en accord avec ce qu'on pouvait espérer. [4], [5] et [18].

3.2. CAS D'UN DOMAINE SYMÉTRIQUE. — Supposons le domaine $\mathrm{D}(\Omega, \mathrm{Q})$ symétrique irréductible, c'est-à-dire, regardons le cas d'une J-algèbre obtenue de la manière suivante : $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie simple, telle que si $\mathfrak{g} = k \oplus \mathfrak{p}$ est la décomposition de Cartan de $\mathfrak{g}$, le centre de k soit non nul. Soit $\mathfrak{g} = k \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{N}$ la décomposition d'Iwasawa de $\mathfrak{g}$. Alors l'algèbre $\mathfrak{b} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{N}$ est munie d'une structure de J-algèbre, et le domaine $\mathrm{D}(\Omega; \mathrm{Q})$ correspondant est isomorphe à G/K et estun domaine symétrique [voir appendice de 13 (*a*)].

Il résulte alors du théorème de C. C. Moore [11] sur le système de racines réduit que si $\mathcal{N}^{\alpha_i/2} \neq \{0\}$ pour un i, alors $\mathcal{N}^{\alpha_i/2} \neq 0$ pour tout i, et que $\mathcal{N}^{(\alpha_i+\alpha_j/2)} \neq 0$ pour tout i, j.

Donc si $\mathrm{D}(\Omega; \mathrm{Q})$ est un domaine symétrique irréductible, alors si $e \neq 1$, on a $\mathrm{L}_e = \mathcal{H}_1$ (3.1.8 (*b*)), et si $\mathcal{H}_{1/2} \neq \{0\}$, on a $[\mathcal{H}_{1/2}, \mathcal{H}_{1/2}] = \mathcal{H}_1$.

3.2.1. LEMME. — *Supposons* $\mathrm{D}(\Omega; \mathrm{Q})$ *un domaine symétrique irréductible, alors :*

(*a*) *Si* $e \neq 1$, *l'enveloppe convexe fermée* $\mathrm{C}(\mathcal{O}_e)$ *engendrée par* $\mathcal{O}_e$ *est* $\overline{\Omega}$. (*Si* $e = 1$, $\mathrm{C}(\theta_e) = \{0\}$.)

(*b*) *Si* $\mathcal{H}_{1/2} \neq \{0\}$, *l'enveloppe convexe fermée* $\mathrm{C}(\mathrm{Q})$ *engendrée par les* $Q(u, u)$ *est* $\overline{\Omega}$.

Démonstration. — En effet $\mathrm{C}(\mathcal{O}_e)$ est contenue dans $\overline{\Omega}$, et si $e \neq 1$, a un point intérieur puisque $\mathrm{C}(\theta_e)$ engendre $\mathcal{H}_1$ comme espace vectoriel. dont il existe $t \in \Omega \cap \mathrm{C}(\mathcal{O}_e)$. Mais $\mathrm{C}(\mathcal{O}_e)$ étant stable sous l'action de H_0, on voit que $\mathrm{C}(\mathcal{O}_e)$ contient $\Omega = \mathrm{H}_0\, t$.

De même pour (*b*). (*cf.* [16].

On obtient donc le théorème suivant.

3.2.2. THÉORÈME. — *Soient* $D(\Omega; Q)$ *un domaine symétrique irréductible,* $d\mu_e$ *une forme volume* C^∞ *sur* $\mathcal{O}_e$ *homogène sous les dilatations, et soit* $dm = dx\, d\mu_e(t)$ *du la mesure obtenue sur*

$$\Sigma_e = \{(x+i(t+Q(u,u)),u);\ t\in\mathcal{O}_e\}.$$

Soit

$$H_e^2 = \Big\{ f \text{ fonctions mesurables sur } \Sigma_e, \text{ telles que : } \\ \|f\|^2 = \int_{\Sigma_e} |f(\sigma)|^2\, dm(\sigma) < +\infty ; \\ \text{vérifiant } \bar{\partial}_b f = 0 \text{ au sens faible} \Big\}.$$

Alors si $e \neq 1$, *ou si* $e = 1$ *et* $\mathcal{H}_{1/2} \neq \{0\}$, *toute fonction* $f \in H_e^2$ *s'étend en une fonction* F *holomorphe sur* $D(\Omega, Q)$ *telle que si* $\varepsilon \in \Omega$ *et* $F_\varepsilon(\sigma) = F(\sigma + i\varepsilon)$ *on ait*

$$\|F\|^2 = \sup_{\varepsilon\in\Omega} \int |F_\varepsilon(\sigma)|^2\, dm(\sigma) = \|f\|^2$$

et $F_\varepsilon \to f$, dans H_e^2 *lorsque* $\varepsilon \to 0$.

3.3. ORBITES OUVERTES DE H_0 DANS $\mathcal{H}_1^*$ ET SEMI-INVARIANTS. — Pour expliciter les théorèmes d'extension dans le cas d'un domaine de Siegel homogène non nécessairement symétrique, nous devons calculer les objets géométriques associés, en particulier nous calculerons dans le paragraphe suivant :

$$\hat{\mathcal{O}}_e = \{\xi\in\mathcal{H}_1^*, \text{ tels que } \langle \xi, y\rangle \geqq 0, \text{ pour tout } y\in\mathcal{O}_e\},$$

$$U(Q) = \{\xi\in\mathcal{H}_1^* \text{ tels que } Q_\xi(u,u) = \langle \xi, Q(u,u)\rangle \text{ soit définie positive}\}.$$

Ces deux ensembles sont d'intérieur non vide, car puisque $\mathcal{O}_e \cup \{Q(u,u)\} \subset \bar{\Omega}$, on a $\Omega^* \subset \hat{\mathcal{O}}_e \cap U(Q)$. On sait que Ω^* est une orbite (ouverte) sous le groupe H_0; comme $\hat{\mathcal{O}}_e$ et $U(Q)$ sont stables sous l'action de H_0, on les écrira à un ensemble de mesure nulle près comme réunion d'orbites ouvertes sous le groupe H_0.

Nous allons donc classifier les orbites ouvertes de H_0 dans $\mathcal{H}_1^*$, avec peut-être plus de détails qu'il serait nécessaire pour les buts précis de cet article.

Nous nous inspirerons très fortement pour cela de la classification de C. C. Moore, obtenue lorsque $\mathfrak{b}$ est associée à un domaine symétrique.

Soient $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ les racines fondamentales, et soit $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_r)$ un ensemble de nombres égaux à ± 1.

D'autre part si χ est un caractère réel positif de H_0 on notera :

$$\mathcal{S}^\chi = \{P, \text{ polynômes réels sur } \mathcal{H}_1^*, \text{ tels que } h.P = \chi(h)P\},$$

où $(h.P)(\xi) = P(h^{-1}\xi)$ si $h \in H_0$ et $\xi \in \mathcal{H}_1^*$ et on dit s'il existe un χ tel que $P \in \mathcal{S}^\chi$ que P est un polynôme semi-invariant.

Remarquons que puisque H_0 possède une orbite ouverte dans $\mathcal{H}_1^*$, l'espace $\mathcal{S}^\chi$ est au plus de dimension 1.

(En particulier si $G(\Omega) = \{ g \in GL(\mathcal{H}_1), g(\Omega) = \Omega \}$ et si C est le centralisateur de A dans $G(\Omega)$, on voit que C conserve l'espace $\mathcal{S}^\chi$ et donc que chacun des $P \in \mathcal{S}^\chi$ est aussi semi-invariant sous le groupe C).

Il est clair que le signe d'un polynôme semi-invariant est constant sur une orbite $H_0 . \xi$. Nous allons montrer que les signes des polynômes semi-invariants séparent les orbites ouvertes.

3.3.1. *Proposition.* — *Soient* $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_r)$ *avec* $\varepsilon_i = \pm 1$ *alors les éléments* $f_\varepsilon = \sum_{i=1}^{r} \varepsilon_i U_i^*$ *forment un système de représentants des orbites ouvertes de* H_0 *dans* $\mathcal{H}_1^*$; *il existe* $(P_1, P_2, \ldots, P_r)$ *des polynômes semi-invariants de degré* 2^{i-r} *tels que*

$$H_0 . f_\varepsilon = \{ \alpha \in \mathcal{H}_1^* ; \textit{ signe de } P_i(\alpha) = \textit{signe de } P_i(\varepsilon) \textit{ pour } i = 1, 2, \ldots, r \}.$$

Démonstration. — On procèdera par récurrence. On considère

$$\mathcal{H}_0(r) = \sum_{i=1}^{r-1} \mathrm{RJU}_i \oplus \sum_{i,\, j \leqq r-1} \mathcal{N}^{(\alpha_i - \alpha_j)/2},$$

$$\mathcal{H}'_0 = \sum_{i \neq r} \mathcal{N}^{(\alpha_r - \alpha_i)/2},$$

$$\mathcal{H}'_1 = \sum_{i \neq r} \mathcal{N}^{(\alpha_r + \alpha_i)/2},$$

$$\mathcal{H}_1(r) = \sum_{i=1}^{r-1} \mathrm{RU}_i \oplus \sum_{i,\, j \leqq r-1} \mathcal{N}^{(\alpha_i + \alpha_j)/2}.$$

3.3.2. LEMME. — *Soit* $f \in \mathcal{H}_1'^*$, *alors il existe* $X(f) \in \mathcal{H}'_0$ *unique et dépendant linéairement de* f, *tel que*

$$U_r^* [X(f), Y] = f(Y) \qquad \textit{pour} \quad Y \in \mathcal{H}'_1.$$

Démonstration. — En effet la forme $(X, Y) = U_r^*([X, Y])$ définit une dualité entre $\mathcal{H}'_0$ et $\mathcal{H}'_1$.

3.3.3. LEMME. — *Soit* $f \in \mathcal{H}_1^*$, *alors si* $f(U_r) \neq 0$, *on a*

$$\exp \frac{X(f)}{\langle f, U_r \rangle} f = f_r U_r^* + f' \qquad \textit{où} \quad f' \in \mathcal{H}_1(r)^*$$

et $f_r f'$ *est une fonction polynôme homogène de degré* 2 *de* f. (*On a calculé* $X(f)$ *pour* $f \mid \mathcal{H}'_1$.)

Démonstration. — Il est clair que si $X(f)$ est choisi comme dans le lemme précédent, $\exp(X(f)/f_r) f$ a la forme indiquée par le lemme. D'autre part si $X \in \mathcal{H}'_0$ on a $[X, [X, \mathcal{H}_1]] \subset \mathcal{N}^{\alpha_r}$ et donc $X^3 f = 0$ si $f \in \mathcal{H}_1^*$. De plus si $f = f_r U_r^* + \varphi$ avec $\varphi \in \mathcal{H}_1(r)^* \oplus \mathcal{H}_1'^*$, on a $X^2 f = f_r X^2 U_r^*$ d'où

$$f' = f + \frac{X(f) f}{f_r} + \frac{1}{2} f_r \frac{X(f) X(f)}{f_r^2} U_r^* - f_r U_r^*,$$

d'où le lemme.

3.3.4. LEMME. — *Soit* $f \in \mathscr{H}_1^*$ *ayant une orbite ouverte sous le groupe* H_0, *alors* $f_r \neq 0$ et $f' \in \mathscr{H}_1(r)^*$ *a une orbite ouverte sous* $H_0(r)$. *Réciproquement si* f' *a une orbite ouverte sous* $H_0(r)$, *alors* $f' + f_r U_r^*$, *avec* $f_r \neq 0$ *a une orbite ouverte sous le groupe* H_0.

Démonstration. — Il est clair que si $f \in \mathscr{H}_1^*$ a une orbite ouverte, alors $f_r \neq 0$, sinon l'orbite serait contenue dans l'hyperplan $f_r = 0$. Calculons d'autre part le stabilisateur dans $\mathscr{H}_0$ d'un élément de la forme $f_r U_r^* + f'$ avec $f_r \neq 0$ et $f' \in \mathscr{H}_1(r)^*$.

En écrivant tout élément de $\mathscr{H}_0$ sous la forme

$$X_1 + X' + \alpha J U_r, \qquad X_1 \in \mathscr{H}_0(r), \quad X' \in \mathscr{H}'_0, \quad \alpha \in \mathbf{R},$$

on voit que $\mathscr{H}_0(f_r U_r^* + f') = \mathscr{H}_0(r)(f')$, d'où le lemme.

3.3.5. Soient alors $P'_1, P'_2, \ldots, P'_{r-1}$ des semi-invariants pour l'action de $H_0(r)$ dans $\mathscr{H}_1(r)^*$ vérifiant les conditions du lemme, et posons $P_i(f) = P'_i(f_r f')$ pour $i = 1, 2, \ldots, r-1$. Montrons que les P_i (qui sont donc des polynômes homogènes de degré 2^{r-i}) vérifient les conditions de la proposition.

Tout d'abord vérifions qu'ils sont semi-invariants. Soit

$$h = \exp X' . \exp \alpha J U_r . h_1,$$

un élément de H_0, avec $X' \in \mathscr{H}'_0$ et $h_1 \in H_0(r)$ et vérifions que

$$P_i(\exp -X' . \exp -\alpha J U_r . h_1^{-1}(U_r^* + f')) = \chi(h) P_i(U_r^* + f').$$

On a

$$h_1^{-1} . (U_r^* + f') = U_r^* + h_1^{-1} . f'.$$

On voit donc que l'élément f'_1 correspondant à

$$\exp -X' . \exp -\alpha J U_r . h_1^{-1} . (U_r^* + f')$$

est $h_1^{-1} . f'$ tandis que $f_r = e^{\alpha}$ et le premier membre vaut

$$P'_i(e^{\alpha} h_1^{-1} f') = e^{2(r-1-i)\alpha} \chi_i(h_1) P'_i(f')$$

C. Q. F. D.

Maintenant supposons qu'on ait établi la proposition 3.3.1 pour les dimensions plus petites; alors d'après le lemme 3.3.4 chacune des orbites f_ε a une orbite ouverte dans $\mathscr{H}_1^*$.

D'autre part, supposons que signe de $P_i(f_\varepsilon)$ = signe de $P_i(f_{\varepsilon'})$ pour deux ensembles d'indices ε et ε', on a d'abord puisque $P_r = U_r$, $\varepsilon_r = \varepsilon'_r$, et par définition des P_i on a $P_i(f_\varepsilon) = P'_i(\varepsilon_r f_{\tau(\varepsilon)})$ si $\tau(\varepsilon) = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{r-1})$. On en conclut que $\varepsilon_r \varepsilon_i = \varepsilon_r \varepsilon'_i$, donc les orbites des f_ε sont distinctes et séparées par les signes des polynômes P_i. Enfin soit α un élément de $\mathscr{H}_1^*$ ayant une orbite ouverte, il suit du lemme 3.3.4, que α a un élément de la forme $\alpha_r U_r^* + \alpha'$ avec $\alpha' \in \mathscr{H}_1(r)^*$ dans son orbite. En modifiant par un élément de la forme $\exp t J U_r$, avec t convenablement choisi puis par un élément de $H_0(r)$, on voit que α rencontre une des orbites $O(f_\varepsilon)$.

C. Q. F. D.

3.4. CALCUL DE CERTAINS OBJETS GÉOMÉTRIQUES. — On considère :

3.4.1 :

$$U(Q) = \{\xi \in \mathscr{H}_1^*, \text{ où } Q_\xi \text{ est définie positive}\}.$$

Comme U (Q) est stable sous l'action du groupe H_0 et que $\Omega^* = H_0.\xi_0$ est une orbite ouverte contenue dans U (Q), la réunion des orbites ouvertes qui sont contenues dans U (Q) est dense dans U (Q).

On a donc $\overline{U(Q)} = \cup \overline{H_0.f_\varepsilon}$ pour les $f_\varepsilon \in U(Q)$.

Or si $\varepsilon = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_r)$, on voit que $f_\varepsilon \in U(Q)$ si et seulement si $\epsilon_i > 0$ pour tout α_i tel que $\mathscr{N}^{\alpha_i/2} \neq \{0\}$, i.e. pour les α_i tels que $\mathscr{N}^{\alpha_i} \subset [\mathscr{H}_{1/2}, \mathscr{H}_{1/2}]$.

3.4.2. On considère :

$$\hat{\mathscr{O}}_e = \{\xi; \langle \xi, hs_e \rangle \geqq 0 \text{ pour tout } h \in H_0\}.$$

De la même façon, on a $\hat{\mathscr{O}}_e = \cup \overline{H_0.f_\varepsilon}$ pour les $f_\varepsilon \in \hat{\mathscr{O}}_e$.

Si $t = h_1.\exp Y \in T_e$ avec $h_1 \in H_0(e)$ et $Y \in \mathscr{H}_0$, on a

$$t.s_e = h_1.s_e - h_1.JY + \frac{1}{2}[JY, Y].$$

On voit donc que $f_\varepsilon \in \hat{\mathscr{O}}_e$ si et seulement si $\varepsilon_i > 0$ pour $i \leqq e-1$, et $\varepsilon_i > 0$ pour tous les i tels que $\mathscr{N}^{\alpha_i} \subset [\mathscr{H}'_0, \mathscr{H}'_1]$.

3.4.3. PROPOSITION. — *(a) L'espace vectoriel engendré par l'ensemble des* $Q(u, u)$ est $[\mathscr{H}_{1/2}, \mathscr{H}_{1/2}]$ *et l'enveloppe convexe fermée engendrée par les* $Q(u, u)$ *est*

$$C(Q) = \overline{\Omega} \cap [\mathscr{H}_{1/2}, \mathscr{H}_{1/2}].$$

(b) L'espace vectoriel engendré par $\mathscr{O}_e$ est $L_e = \mathscr{H}_1(e) \oplus \mathscr{H}'_1 \oplus [\mathscr{H}'_0, \mathscr{H}'_1]$ et *l'enveloppe convexe fermée engendrée par* $\mathscr{O}_e$ est $C(\mathscr{O}_e) = \overline{\Omega} \cap L_e$.

(c) L'espace vectoriel engendré par $\mathscr{O}_e$ *et* $\{Q(u, u)\}$ *est* $L_e + [\mathscr{H}_{1/2}, \mathscr{H}_{1/2}]$ *et l'enveloppe convexe fermée est* $C(\mathscr{O}_e; Q) = \overline{\Omega} \cap (L_e + [\mathscr{H}_{1/2}, \mathscr{H}_{1/2}])$.

Démonstration. — Les affirmations sur les espaces vectoriels engendrés ont été prouvées en 3.1.7. Démontrons l'autre point, on a évidemment

$$C(Q) \subset \overline{\Omega} \cap [\mathscr{H}_{1/2}, \mathscr{H}_{1/2}].$$

Pour montrer l'égalité, il suffit de comparer les cônes duaux dans $\mathscr{H}_1^*$. Ces deux ensembles étant stables par H_0, il suffit de montrer que toute forme f_ε positive sur C (Q) est aussi positive sur $\overline{\Omega} \cap [\mathscr{H}_{1/2}, \mathscr{H}_{1/2}]$. Mais si $f_\varepsilon \in \hat{C}(Q)$ on voit d'après 3.4.1 que f_ε coïncide avec $\xi_0 = \sum_{i=1}^{r} U_i^*$ sur $[\mathscr{H}_{1/2}, \mathscr{H}_{1/2}]$.

On démontre (b) et (c) de la même façon.

3.5. REPRÉSENTATIONS C. R. INDUITES DU GROUPE B. — 3.5.1. Soit $K(\Sigma_e; \mathfrak{h}_e^-)$ l'espace des fonctions C^∞ sur Σ_e et vérifiant $\bar{\partial}_b f = 0$. Soient χ un caractère de B dans C^* et ω_χ la représentation de B dans $K(\Sigma_e; \mathfrak{h}_e^-)$ définie par

$$(\omega_\chi(b_0)\varphi)(\sigma) = \chi(b_0)\varphi(b_0^{-1}\sigma).$$

Notons $d\mu_e(v)$ la mesure sur $\mathcal{O}_e$ transportée de la mesure de Haar à gauche dt sur T_e par l'isomorphisme $t \mapsto t.s_e$; on note si $v \in \mathcal{O}_e$, $t(v)$ l'unique élément de T_e tel que $t(v).s_e = v$. Si α est un caractère de T_e à valeurs dans R^+, la mesure $d\mu_\alpha(v) = \alpha(t(v))\, d\mu_e(v)$ est une mesure homogène par rapport aux dilatations du cône $\mathcal{O}_e$ et se transformant par le caractère $(\tilde{\alpha})^{-1}$ du groupe H_0, où

$$\tilde{\alpha}(t) = \alpha(t) \quad \text{si} \quad t \in T_e, \qquad \tilde{\alpha}(h_0) = \det_{\mathscr{H}_0'} h_0 \quad \text{si} \quad h_0 \in H_0(e'),$$

comme on le voit en écrivant, si $h_0 \in H_0(e')$:

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{O}_e} \varphi(h_0^{-1} v)\, d\mu_\alpha(v) &= \int_{T_e} \varphi(h_0^{-1} t s_e)\, \alpha(t)\, dt \\ &= \int_{T_e} \varphi(h_0^{-1} t h_0 s_e)\, \alpha(t)\, dt \qquad \text{puisque} \quad h_0.s_e = s_e.\end{aligned}$$

Considérons alors la mesure dm_α sur Σ_e définie par

$$dm(x + i(v + Q(u, u)), u) = dx\, d\mu_\alpha(v)\, du.$$

Alors la représentation ω_χ du groupe B est unitaire dans $L^2(\Sigma_e, dm_\alpha)$ si et seulement si :

3.5.2 :

$$|\chi(h_0)| = |\det{}_{\mathfrak{b}/\mathscr{H}_0(e')} \operatorname{ad} h_0|^{-1/2} \qquad \text{si} \quad h_0 \in H_0(e')$$

et

3.5.3 :

$$\alpha(t) = |\chi(t)|^{-2} (\det_{\mathscr{H}_1} t)^{-1} (\det_{\mathscr{H}_{1/2}} t)^{-1} \qquad \text{si} \quad t \in T_e.$$

Elle admet l'espace $H(\Sigma_e, dm_\alpha)$ comme sous-espace invariant.

Remarquons que d'après 2.2.4, $H(\Sigma_e, dm_\alpha)$ est le complété de

$$K(\Sigma_e, \mathfrak{h}_e^-) \cap L^2(\Sigma_e, dm_\alpha) \quad \text{dans} \quad L^2(\Sigma_e, dm_\alpha).$$

3.5.4. Supposons χ vérifiant 3.5.2 et le caractère α déterminé par 3.5.3. On dira alors que la représentation unitaire ω_χ dans l'espace $H(\Sigma_e, dm_\alpha)$ est une représentation C. R. induite du groupe B.

3.5.5. Cette appellation est justifiée par les remarques suivantes : Soit f une forme linéaire sur $\mathfrak{b}$ à valeurs complexes et telles que $f([\mathfrak{h}_e^-, \mathfrak{h}_e^-]) = 0$ et soit

$$\begin{aligned}K(f; \mathfrak{h}_e^-, B) = \{\varphi \text{ fonctions } C^\infty \text{ sur } B,\\ \text{telles que } r(X)\varphi = -i\langle f, X\rangle \varphi \text{ pour tout } X \in \mathfrak{h}_e^-\}.\end{aligned}$$

Définissons le caractère χ_f sur B à valeurs dans C* par :

3.5.5 :

$$\chi_f(\exp X) = e^{if(X)} \quad \text{si} \quad X \in \mathscr{H}_0(e'),$$
$$\chi_f(\exp X) = e^{if(X+iJX)} \quad \text{si} \quad X \in \mathscr{H}_0(e).$$

3.5.6. On a alors :

$$r(X)\chi_f = i\langle f, X\rangle \chi_f \quad \text{si} \quad X \in \mathfrak{h}_e^-.$$

En effet, on a

$$\mathfrak{h}_e^- = \mathscr{H}_0(e')^C \oplus \mathscr{H}'^-_{1/2} \oplus \mathfrak{b}_e^- \quad \text{et} \quad \mathscr{H}'^-_{1/2} + \mathscr{H}^-_{1/2}(e) \subset [\mathfrak{h}_e^-, \mathfrak{h}_e^-].$$

L'assertion 3.4.8 est donc évidente si $X \in \mathscr{H}'^-_{1/2} + \mathscr{H}^-_{1/2}(e)$ et si $X \in \mathscr{H}_0(e')$. Enfin si $X \in \mathscr{H}_0(e)$ alors $X + iJX \in \mathfrak{b}_e^-$ et on a $[X+iJX, Y+iJY] = [X, Y] + iJ[X, Y]$. Il s'ensuit que χ_f est bien un caractère et que sa différentielle que $\mathfrak{b}_e^-$ coïncide avec if.

On en déduit que l'application $(P\varphi)(b) = \chi_f(b)^{-1}\varphi(b.s_e)$ réalise un isomorphisme entre $K(\Sigma_e, \mathfrak{h}_e^-)$ et $K(f, \mathfrak{h}_e^-, B)$ entrelaçant la représentation ω_{χ_f} avec la représentation de B translations à gauche dans $K(f, \mathfrak{h}_e^-, B)$.

Supposons la condition 3.5.2 réalisé pour χ_f, i. e :

3.5.7 :

$$(\operatorname{Im} f)(X) = \frac{1}{2}\operatorname{Tr}_{\mathfrak{b}/\mathscr{H}_0(e')} \operatorname{ad} X \quad \text{pour} \quad X \in \mathscr{H}_0(e')$$

alors toute fonction $\varphi \in K(f, \mathfrak{h}_e^-, B)$ vérifie

$$|\varphi(bh)|^2 = (\det_{\mathfrak{b}/\mathscr{H}_0(e')} h)\,|\varphi(b)|^2, \qquad h \in H_0(e').$$

Par conséquent, on peut former la représentation unitaire de B par translations à gauche dans l'espace $H(f, \mathfrak{h}_e^-, B)$ complété des fonctions C^∞ sur B vérifiant (*voir* [2], chap. 5) :

$$r(X).\varphi = -i\langle f, X\rangle \varphi,$$
$$\oint_{B/H_0(e')} |\varphi|^2\, db = \|\varphi\|^2 < +\infty$$

et P réalise un isomorphisme unitaire de $H(\Sigma_e, dm_\chi)$ sur $H(f, \mathfrak{h}_e^-, B)$.

Comme $\mathscr{H}_0(e') = \mathfrak{h}_e^- \cap \mathfrak{b}$, on voit que cette représentation est une sous-représentation de la représentation induite par un caractère unitaire du groupe $\operatorname{Exp}(\mathfrak{h}_e^- \cap \mathfrak{b})$. On dira en analogie avec la définition des représentations induites holomorphes (chap. 5, p. 108, [2]), i. e. les sous-représentations d'une représentation induite par un caractère d'un groupe d'algèbre de Lie $\mathfrak{h}^- \cap \mathfrak{b}$ en imposant les équations 3.5.6 mais aussi en imposant que $\mathfrak{h}^- + \overline{\mathfrak{h}^-}$ soit une sous-algèbre de $\mathfrak{b}^C$, i. e. en imposant des conditions d'holomorphie partielle) que la représentation de B dans $H(f, \mathfrak{h}_e^-, B)$ est une représentation C. R. induite.

Le sous-espace correspondant de la représentation induite est défini par les équations 3.4.6 qui correspondent à des équations de Cauchy-Riemann tangentielles et $\mathfrak{h}_e^- + \overline{\mathfrak{h}_e^-}$ n'est pas une sous-algèbre.

Cherchons à quelle condition ce sous-espace

$$\mathrm{H}(f, \mathfrak{h}_e^-, \mathrm{B}) \neq \{0\}, \qquad \text{i. e.} \quad \mathrm{H}(\Sigma_e, dm_\alpha) \neq \{0\}$$

pour α déterminé par 3.5.3 et $\chi = \chi_f$ défini par 3.5.5.

Comme $\mathrm{U}(\mathrm{Q}) \cap \mathcal{O}_e^* \supset \Omega^* \ni \xi_0$, la condition nécessaire et suffisante donnée par le théorème 2.3.8 (*a*) s'écrit :

$$\mathrm{I}_\alpha(\xi_0) = \int_{\mathrm{T}_e} e^{-4\pi\langle \xi_0, ts_e \rangle} \alpha(t)\, dt < +\infty.$$

On peut calculer explicitement cette intégrale en reprenant la méthode de [13] (*a*), p. 368.

En effet si $t \in \mathrm{T}_e$, alors t s'écrit :

$$t = \prod_{i=1}^{e-1} \exp a_i \mathrm{JU}_i . \exp \mathrm{L}_1 \ldots \exp \mathrm{L}_{e-1},$$

avec

$$\mathrm{L}_i \in \sum_{j>i} \mathcal{N}^{(\alpha_j - \alpha_i)/2}.$$

Il existe une base $\mathrm{E}^{\alpha_i, j}$ de $\mathcal{N}^{(\alpha_j - \alpha_i)/2}$ telle que si

$$\mathrm{L}_i = \sum_{\alpha, j} x_{i,j}^\alpha \mathrm{E}^{\alpha_i, j},$$

alors

$$\langle \xi_0, t . s_e \rangle = \sum_{i=1}^{e-1} e^{a_i} (1 + \sum_{j<i} (x_{i,j}^\alpha)^2) + \sum_{j \geqq e} (x_{i,j}^\alpha)^2.$$

Donc si

$$p_i = \dim \mathcal{L}_i' = \dim \sum_{j<i} \mathcal{N}^{(\alpha_i - \alpha_j)/2}$$

et si $\alpha_i = d\alpha(\mathrm{JU}_i)$, on a

$$\mathrm{I}_\alpha(\xi_0) = \int e^{-4\pi \sum_{i=1}^{e-1} e^{a_i} (1 + \sum_{j<i} (x_{i,j}^\alpha)^2)} e^{\sum_{i=1}^{e-1} a_i \alpha_i} da_1\, da_2 \ldots da_{e-1}$$

(e signifie dans cette formule tantôt un indice compris entre 1 et r, tantôt : 2,71828182 ...).

On a donc en changeant $x_{i,j}^\alpha$ en $e^{-ai/2} x_{i,j}^\alpha$:

3.5.8 :

$$\mathrm{I}_\alpha(\xi_0) = \prod_{i=1}^{e-1} \int e^{-4\pi e^{a_i} [\alpha_i - (pi/2)]} da_i$$

et donc :

3.5.9. $\mathrm{I}_\alpha(\xi_0) < +\infty$, si et seulement si $\alpha_i > p_i/2$ pour $i = 1, 2, \ldots, e-1$.

Ceci peut évidemment se traduire en une condition analogue sur f à celle donnée par le théorème 4.2.6 de [13] (a), mais où les conditions ne porteront que sur $i = 1, 2 \ldots, e-1$.

Supposons cette condition réalisée. Nous chercherons à décomposer la représentation de B dans $H(\Sigma_e, dm_\alpha)$. Considérons la transformation

$$\hat{f}(\xi, u) = \int e^{-2i\pi\langle \xi, z\rangle} f(z, u)\, dx.$$

Elle réalise un isomorphisme unitaire de l'espace $H(\Sigma_e, dm_\alpha)$ avec l'espace $\hat{H}$ des fonctions $\varphi(\xi, u)$ à support dans $\mathcal{O}_e^* \cap U(Q)$ qui pour presque tout ξ sont holomorphes en u et telles que

$$\int |\varphi(\xi, u)|^2 e^{-4\pi\langle \xi, Q(u, u)\rangle} I_\alpha(\xi)\, d\xi\, du < +\infty.$$

Elle entrelace la représentation ω_χ avec la représentation :

$$(\hat{\omega}_\chi(h_0)\varphi)(\xi, u) = \det_{\mathscr{H}_1} h_0\, \chi(h_0)\, \varphi(h_0^{-1}\xi, h_0^{-1}u),$$

$$(\hat{\omega}_\chi(\exp U_0)\varphi)(\xi, u) = e^{-2\pi\langle \xi, Q(U_0, U_0)\rangle} e^{4\pi\langle \xi, Q(u, U_0)\rangle} \varphi(\xi, u - U_0),$$

$$(\hat{\omega}_\chi(\exp X)\varphi)(\xi, u) = e^{-2i\pi\langle \xi, X\rangle} \varphi(\xi, u).$$

Écrivons alors $\mathcal{O}_e^* \cap U(Q) = \cup H_0 . f_\varepsilon$ à un ensemble de mesure nulle près, où $f_\varepsilon = \Sigma\, \varepsilon_i U_i^*$ et $\varepsilon_i = +1$ si $U_i \in L_e + [\mathscr{H}_{1/2}, \mathscr{H}_{1/2}]$.

Alors on voit que chacun des sous-espaces des fonctions $\varphi(\xi, u)$ à support dans $H_0 . f_\varepsilon \times \mathscr{H}_{1/2}$ est stable par la représentation du groupe B. Comme en [13] (a), lemme 3.18, on voit que $\mathfrak{h}^- = \mathscr{H}_{1/2}^- + \mathscr{H}_1^C$ est une polarisation positive fortement admissible pour chacune des formes $-f_\varepsilon$ (f_ε prolongée par 0 sur $\mathscr{H}_0 \oplus \mathscr{H}_{1/2}$) et que :

3.5.10 :

$$\omega_\chi = \oplus\, \rho(-f_\varepsilon).$$

D'autre part on voit facilement (lemme 3.5 de [13] (a) que si α est un point de $\mathfrak{b}^*$ ayant une orbite ouverte on a

$$B . \alpha = \mathscr{H}_0^* \oplus \mathscr{H}_{1/2}^* \oplus H_0 . \alpha_0$$

où α_0 est un point de $\mathscr{H}_1^*$ ayant une orbite ouverte sous le groupe H_0. Réciproquement si α_0 est un point de $\mathscr{H}_1^*$ ayant une orbite ouverte sous H_0 et si $\alpha = (0, 0, \alpha_0)$, alors $B\alpha = \mathscr{H}_0^* \oplus \mathscr{H}_{1/2}^* \oplus H_0\, \alpha_0$.

On en conclut donc que les orbites Bf_ε sont ouvertes et distinctes. En analogie avec le résultat de [17] on démontre facilement le :

3.5.11 THÉORÈME. — (a) ω_χ *est somme directe des représentations* $\rho(\mathcal{O})$ *pour* $\mathcal{O}$ *orbites ouvertes de* B *dans* $\mathfrak{b}^*$ *intersectant* $-\xi_0 + \mathscr{L}_e^{-L}$ *suivant un ouvert* (*et les intersections sont connexes*).

(b) ω_χ *est irréductible si et seulement si* $\mathscr{L}_e = \mathfrak{b}$.

Un cas particulier de notre étude est celui où $e = 1$, c'est-à-dire où $\Sigma_e = \Sigma$, le bord de Shilov de B.

On en déduit donc que la représentation naturelle de B dans l'espace H (Σ) des fonctions de carré intégrable en $dx\,du$ sur $\Sigma = \{(x+i\,\mathrm{Q}(u, u), u)\}$ et vérifiant $\bar{\partial}_b f = 0$ au sens faible est toujours une somme finie de représentations irréductibles disjointes. Elle est irréductible si et seulement si $[\mathscr{H}_{1/2}, \mathscr{H}_{1/2}] = \mathscr{H}_1$.

3.5.12. Remarquons que la représentation $\rho(-\xi_0)$ qui intervient toujours dans la décomposition de ω_χ correspond au sous-espace de H (Σ_e, dm_α) obtenu par valeurs au bord sur Σ_e de l'espace de Hardy $\mathscr{H}_e^2$ des fonctions holomorphes sur D (Ω, Q) vérifiant $\sup_{\varepsilon \in \Omega} \int |\mathrm{F}(\sigma+i\,\varepsilon)|^2\, dm_\alpha(\sigma) < +\infty$.

En effet, il suffit de démontrer que pour une telle fonction $\hat{\mathrm{F}}(\xi, u)$ a son support dans $\Omega^* \times \mathbf{C}^m = \mathrm{H}_0\,\xi_0 \times \mathbf{C}^m$.

On doit avoir :

$$\sup_{\varepsilon \in \Omega} \int e^{-4\pi\langle \xi, \varepsilon\rangle} |\hat{\mathrm{F}}(\xi, u)|^2\, \mathrm{I}_\alpha(\xi)\, e^{-4\pi\langle \xi, \mathrm{Q}(u, u)\rangle}\, d\xi\, du < +\infty.$$

S'il existait une boule B dans le complémentaire de $\bar{\Omega}^*$ où $\hat{\mathrm{F}}(\xi, u) \neq 0$, on aurait

$$\int_{\mathrm{B} \times \mathscr{H}_{1/2}} e^{-4\pi\langle \xi, \mathrm{Q}(u, u)\rangle} |\hat{\mathrm{F}}(\xi, u)|^2\, \mathrm{I}_\mu(\xi)\, d\xi\, du = \mathrm{M} > 0.$$

En choisissant au besoin B plus petite, et un $\xi \in \Omega$ tel que $\langle \xi, \varepsilon\rangle \leqq -m < 0$ pour tout $\xi \in \mathrm{B}$, on aurait alors, pour le point $t\,\varepsilon$ de Ω :

$$\int e^{-4\pi t\langle \xi, \varepsilon\rangle} |\hat{\mathrm{F}}(\xi, u)|^2\, \mathrm{I}_\alpha(\xi)\, e^{-4\pi\langle \xi, \mathrm{Q}(u, u)\rangle}\, d\xi\, du \geqq e^{4\pi t m}\mathrm{M}.$$

D'où une contradiction en faisant tendre t vers l'infini.

4. Étude du bord d'un domaine de Siegel de type III

On analyse dans ce domaine une classe de surfaces apparaissant dans l'étude du bord d'un domaine de Siegel D de type III.

Cette étude est surtout faite en vue de l'application au cas d'un domaine symétrique D = G/K et à la construction de certains sous-espaces de séries principales de groupes semi-simples (*voir* [13] (*b*).

On commencera cependant par des résultats de nature générale.

4.1. EXTENSIONS DES FONCTIONS C. R. DÉFINIES SUR LE BORD D'UN DOMAINE DE SIEGEL DE TYPE III. — Soit E un domaine de $\mathbf{C}^k$ (variable w) et $w \to \mathrm{L}_w$ une fonction différentiable sur E à valeurs dans l'espace vectoriel des formes semi-hermitiennes sur $\mathbf{C}^m$ à valeurs dans $\mathbf{C}^n$ (2.4). Soit $z = x+iy$ la variable de $\mathbf{C}^n$.

On considère alors la variété de Siegel de type III :

$$D = \{ (z, u, w) \in \mathbf{C}^n \times \mathbf{C}^m \times E \text{ avec } y = \operatorname{Re} L_w(u, u) \}$$

et on note $S_w = \operatorname{Re} L_w$.

Soit ψ une fonction continue strictement positive sur E; la surface D est paramétrée naturellement par $\mathbf{R}^n \times \mathbf{C}^m \times E$. On définit :

4.1.1. DÉFINITION :

$$H(D, \psi) = \Big\{ \text{espace des fonctions mesurables } f \text{ sur } D, \text{ telles que : } \|f\|^2 = \int |f|^2 \psi(w)\, dx\, du\, dw < +\infty \,;\ \text{satisfaisant } \bar{\partial}_b f = 0 \text{ au sens faible} \Big\}.$$

Pour $f \in H(D, \psi)$, on considère :

$$\hat{f}(\xi, u, w) = \int e^{-2i\pi \langle \xi, z \rangle} f(z, u, w)\, dx$$

pour $\xi \in (\mathbf{R}^n)^*$, $u \in \mathbf{C}^m$, $w \in E$.

D'après les résultats de 2.2, pour $V = \{0\}$ et $E' = \mathbf{C}^m \times E$, l'application $f \mapsto \hat{f}$ établit un isomorphisme unitaire entre $H(D, \psi)$ et $\hat{H}(D, \psi)$ où :

4.1.2 :

$$\hat{H}(D, \psi) = \Big\{ \text{classe de fonctions mesurables } \varphi \text{ sur } (\mathbf{R}^n)^* \times \mathbf{C}^m \times E, \text{ telles que } \int |\varphi(\xi, u, w)|^2 e^{-4\pi \langle \xi, S_w(u, u) \rangle} \psi(w)\, d\xi\, du\, dw < +\infty \Big\}.$$

On note Q_w et B_w les formes sur $\mathbf{C}^m$ telles que $L_w = Q_w + B_w$ 2.4.1. On introduit les ensembles suivants :

4.1.3 :

$$U = \{ \xi \in (\mathbf{R}^n)^* \text{ tel que } Q_{w, \xi}(u, u) = \langle \xi, Q_w(u, u) \rangle \text{ soit une forme hermitienne définie positive pour presque tout } w \}.$$

U est un cône convexe dans $(\mathbf{R}^n)^*$:

4.1.4 :

$$V = \{ y \in \mathbf{R}^n \text{ tels que } \langle \xi, y \rangle \geqq 0 \text{ pour tout } \xi \in U \}.$$

4.1.5. LEMME. — *Si* $\varphi \in \hat{H}(D, \psi)$, *alors* $\varphi(\xi, u, w)$ *est nulle presque partout en dehors de* $U \times \mathbf{C}^m \times E$.

(De sorte que si U est de mesure nulle, i. e. si U n'a pas d'intérieur, $\hat{H}(D, \psi) = 0$).

Démonstration. — Si $\varphi \in \hat{H}(D, \psi)$ alors il existe un ensemble S dont le complémentaire est de mesure nulle (pour $d\xi$) tel que si $\xi \in S$, $\varphi(\xi, u, w)$ soit holomorphe sur $C^m \times E$ et vérifie

$$\int |\varphi(\xi, u, w)|^2 e^{-4\pi \langle \xi, S_w(u, u) \rangle} \psi(w)\, du\, dw < +\infty.$$

Si $\xi_0 \in S \in U$, alors il existe un ensemble A de w de mesure positive tel que la forme Q_{w, ξ_0} ne soit pas définie positive pour les $w \in A$. La finitude de $\varphi(\xi_0, u, w)$ pour la norme précédente montre que si $w \in A$, sauf un ensemble de mesure nulle, $\varphi(\xi_0, u, w) = 0$ d'après le lemme 2.4.1. Mais comme $\varphi(\xi_0, u, w)$ est une fonction holomorphe de w il s'ensuit que $\varphi(\xi_0, u, w) = 0$ si $\xi_0 \in S - U$.

4.1.6. LEMME. — *Si* $U \neq \emptyset$, *alors* V *est l'enveloppe convexe fermée engendrée par* $\{ Q_w(u, u), u \in C^m, w \in E \}$.

En effet si $\xi_0 \in U$ il existe un ensemble de w dont le complémentaire est de mesure nulle tel que $\langle \xi, Q_w(u, u) \rangle > 0$ pour $u \neq 0$; il en résulte par continuité que $Q_w(u, u) \in V$ pour tout w; d'autre part si ξ est positif sur les $Q_w(u, u)$, en considérant $\xi + t\,\xi_0$, on voit que $\xi \in \overline{U}$ et que $V = \hat{\overline{U}}$ est l'enveloppe convexe des $Q_w(u, u)$.

Puisque V est un cône convexe fermé, il a un intérieur non vide dans l'espace vectoriel qu'il engendre. On désignera par V^0 cet intérieur relatif. On définit :

4.1.7 :

$$\check{D} = \{ (z, u, w), \operatorname{Im} z - \operatorname{Re} L_w(u, u) \in V^0 \}.$$

On peut trouver des coordonnées (z_1, z_2) sur $C^n = C^{n_1} \times C^{n_2}$ telles que V^0 soit ouvert dans le sous-espace de R^n défini par $y_1 = 0$.

On écrit par rapport à ce partage $z = (z_1, z_2)$ des coordonnées

$$L_w(u, u) = (L_w^1(u, u), L_w^2(u, u)).$$

On a donc

$$\check{D} = \{ (z_1, z_2, u, w) \text{ tels que } \operatorname{Im} z_1 = \operatorname{Re} L_w^1(u, u) \text{ et } (z_2, u, w) \in D_h \},$$

où

$$D_h = \{ (z_2, u, w);\ \operatorname{Im} z_2 - \operatorname{Re} L_w^2(u, u) \in V^0 \}$$

est un domaine dans $C^{n_2} \times C^m \times E$.

On introduit de la même façon qu'au paragraphe 3, si F est une fonction sur $\check{D}$ et $\varepsilon \in V^0$, $F_\varepsilon(z, u, w) = F(z + i\varepsilon, u, w)$ comme fonction sur D. On définit :

4.1.8 :

$$\mathscr{H}(\check{D}) = \left\{ \begin{array}{l} \text{F fonctions mesurables F sur } \check{D}, \text{ telles que :} \\ \qquad \sup\limits_{\varepsilon \in V^0} \displaystyle\int |F_\varepsilon(z, u, w)|^2\, dx\, du\, \psi(w)\, d\omega < +\infty; \\ \qquad\qquad \text{vérifiant } \bar{\partial}_b F = 0 \text{ au sens faible} \end{array} \right\}.$$

Remarquons que si V^0 est ouvert dans R^n, alors $\check{D}$ est un domaine et $\mathscr{H}(\check{D})$ est un espace de fonctions holomorphes.

Par contre si V^0 est quelconque, on ne peut sous ces hypothèses générales déterminer exactement la forme des solutions de $\bar{\partial}_b F = 0$, mais on établit de la même façon qu'en 2.3 le :

4.1.9. Théorème. — (*a*) *Si* $\varphi \in \hat{H}(D)$, *alors* $\check{\varphi}(z, u, w) = \int e^{2i\pi\langle \xi, z\rangle} \varphi(\xi, u, w)\, d\xi$ *est défini au sens de la transformation de Fourier partielle, et définit un élément de* $\mathscr{H}(\check{D})$.

(*b*) *Si* $F \in \mathscr{H}(\check{D})$, *alors pour tout* $\varepsilon \in V^0$, $F_\varepsilon \in H(D)$ *et* $F_\varepsilon \to f$ *dans* $H(D)$ *lorsque* $\epsilon \to 0$.

(*c*) *Les transformations* $\varphi \mapsto \check{\varphi}$, $F \mapsto f$ *et* $f \mapsto \hat{f}$ *définissent des isomorphismes unitaires de* $\hat{H}(D) \to \mathscr{H}(\check{D}) \to H(D) \to \hat{H}(D)$ *dont le composé est l'identité.*

4.2. Fibrations des domaines de Siegel. — On reprend les notations du précédent paragraphe. Dans le cas homogène qu'on étudiera plus en détail par la suite, on aura la propriété suivante :

4.2.1. $U_{w_0} = \{ \xi \in (R^n)^*$ où $Q_{w_0, \xi}$ est définie positive $\}$ est indépendant de w_0 et non vide. On le notera U.

4.2.2.
$$V = V_{w_0} = \{\text{enveloppe convexe fermée engendrée par les } Q_{w_0}(u, u)\}.$$

Fixons w_0 dans E et considérons :
$$D_{w_0} = \{(z, u);\ \operatorname{Im} z - \operatorname{Re} L_{w_0}(u, u) = 0\},$$
$$\check{D}_{w_0} = \{(z, u);\ \operatorname{Im} z - \operatorname{Re} L_{w_0}(u, u) \in V^0\}.$$
$$\mathscr{H}(\check{D}_{w_0}) = \left\{ \begin{array}{l} \text{F fonctions sur } \check{D}_{w_0} \text{ telles que :} \\ \qquad \|F\|^2 = \sup\limits_{\varepsilon \in V^0} \int |F_\varepsilon|^2\, dx\, du < +\infty; \\ \qquad \text{vérifiant } \bar{\partial}_b F = 0 \text{ au sens faible} \end{array} \right\}.$$

On a donc d'après 2.4 : $F = f(x_1 + \operatorname{Im} B_1,\ w_0(u, u),\ z_2, u)$ où $f(x_1, z_2, u)$ est holomorphe en (z_2, u).

Toute fonction de $\mathscr{H}(\check{D}_{w_0})$ a une représentation intégrale unique de la forme
$$F(z, u) = \int e^{2i\pi\langle \xi, z\rangle} \varphi(\xi, u)\, d\xi,$$
avec
$$\|F\|^2 = \int e^{-4\pi\langle \xi, S_{w_0}(u, u)\rangle} |\varphi(\xi, u)|^2 d\xi\, du.$$

On démontre alors de la manière standard la proposition.

4.2.3. PROPOSITION. — *Soit* $F \in \mathcal{H}(\check{D})$ *alors pour presque tout* $w \in E$, $F_w(p) = F(p, w)$ *est une fonction dans* $\mathcal{H}(\check{D}_w)$ *et on a*

$$\| F \|^2_{\mathcal{H}(\check{D})} = \int \| F_w(p) \|^2_{\mathcal{H}(\check{D}_w)} \psi(w)\, dw.$$

4.3. RÉALISATION D'UN DOMAINE DE SIEGEL HOMOGÈNE SOUS LA FORME D'UN DOMAINE DE TYPE III. — On reprend dans ce paragraphe un certain nombre de résultats classiques [9] et [14].

Soit D (Ω, Q) un domaine de Siegel de type II homogène, et soit b la J-algèbre associée. On considère un indice e compris entre 1 et r; on reprend les notations de 3.1.

Soit donc $(z, u) \in D(\Omega; Q)$ et écrivons :

$$z = z_1 + z_2 + z' \qquad \text{et} \qquad u = u_1 + u_2,$$

où

$$z_1 \in \mathcal{H}_1(e)^C, \quad z_2 \in \mathcal{H}_1(e')^C, \quad z' \in \mathcal{H}'^C_1, \quad u_1 \in \mathcal{H}_{1/2}(e), \quad u_2 \in \mathcal{H}_{1/2}(e').$$

On a le :

4.3.1. LEMME. — *Soit* $y_1 \in \mathcal{H}_1(e)$, $y_2 \in \mathcal{H}_1(e')$ *et* $y' \in \mathcal{H}'_1$.
Si $y_1 + y' + y_2 \in \Omega$ *alors* $y_1 \in \Omega_e$ *et* $y_2 \in \Omega'_e$.
Si $y_1 \in \Omega_e$ *et* $y_2 \in \Omega'_e$ *alors* $y_1 + y_2 \in \Omega$.

Démonstration. — Il est clair que si $y_1 = h_1 . s_e \in \Omega_e$ et $y_2 = h_2 . s'_e \in \Omega'_e$ *avec* $h_1 \in H_0(e)$ et $h_2 \in H_0(e')$, alors :

$$y_1 + y_2 = h_1 . h_2 . (s_e + s'_e) = h_1 . h_2 . s \in \Omega.$$

Maintenant si $y_1 + y' + y_2 \in \Omega$, montrons que $y_1 \in \Omega_e$ et $y_2 \in \Omega'_e$; il suffit de vérifier que quels que soient $\xi_1 \in \Omega^*_c$ et $\xi_2 \in \Omega'^*_e$, alors $\langle \xi_1, y_1 \rangle$ et $\langle \xi_2, y_2 \rangle$ sont positifs.

Ceci prouvera que $y_1 \in \overline{\Omega}_e$ et $y_2 \in \overline{\Omega}_e$, mais comme si $y_1 + y_2 \in \Omega$ il en est de même pour $y'_1 + y'_2$ lorsque y'_1 et y'_2 sont suffisamment proches de y_1 et y_2, on en déduira que $y_1 \in \mathring{\overline{\Omega}}_e = \Omega_e$ et $y_2 \in \mathring{\overline{\Omega}}_e = \Omega'_e$.

Soit donc $\xi_1 = h_1 . \xi_e$ et considérons

$$\xi'_t = h_1 . \operatorname{expt} J s'_e . (\xi_e + \xi'_e).$$

On a

$$\xi'_t = \xi_1 + e^{-t} \xi'_e \qquad \text{et} \qquad \xi'_t \in \Omega^*.$$

On a donc

$$\langle \xi'_t, y_1 + y' + y_2 \rangle = \langle \xi_1, y_1 \rangle + e^{-t} \langle \xi'_e, y_2 \rangle \geqq 0$$

puisque $y_1 + y' + y_2 \in \Omega$. En faisant tendre t vers $+\infty$, on obtient $\langle \xi_1, y_1 \rangle \geqq 0$.

4.3.2. Soit $(z, u) \in D(\Omega; Q)$. Dans les coordonnées $z = z_1 + z_2 + z'$, $u = u_1 + u_2$ on a

$$\operatorname{Im} z - Q(u, u) = y_1 - Q(u_1, u_1) + y' - 2 \operatorname{Re} Q(u_2, u_1) + y_2 - Q(u_2, u_2).$$

Écrivons :

$$y_1 - Q(u_1, u_1) = h_1 . s_e$$

et

$$y'' = h_1^{-1} . (y' - 2 \operatorname{Re} Q(u_2, u_1)) \in \mathscr{H}'_1,$$

de sorte que

$$\operatorname{Im} z - Q(u, u) = h_1 . (s_e + y'' + y_2 - Q(u_2, u_2)).$$

Calculons :

$$\begin{aligned} \operatorname{Exp} - J y'' . (s_e + y'' + y_2 - Q(u_2, u_2)) &= \operatorname{Exp} - J y'' . h_1^{-1} (\operatorname{Im} z - Q(u, u)) \\ &= s_e - y'' + \frac{1}{2}[J y'', y''] + y'' - [J y'', y''] + y_2 - Q(u_2, u_2) \\ &= s_e + y_2 - Q(u_2, u_2) - \frac{1}{2}[J y'', y'']. \end{aligned}$$

On a donc d'après le lemme précédent $\operatorname{Im} z - Q(u, u) \in \Omega$ si et seulement si

$$y_1 - Q(u_1, u_1) \in \Omega_e \quad \text{et} \quad y_2 - Q(u_2, u_2) - \frac{1}{2}[J y'', y''] \in \Omega'_e,$$

avec

$$y'' = h_1^{-1}(y' - 2 \operatorname{Re} Q(u_2, u_1)).$$

Posons

$$z'' = h_1^{-1}(z' - 2 i Q(u_2, u_1)).$$

Considérons l'espace vectoriel $W = \mathscr{H}'^{C}_1 \oplus \mathscr{H}_{1/2}(e')$ et la forme quadratique sur W définie par

$$S_0(z' + u_2, z' + u_2) = Q(u_2, u_2) + \frac{1}{2}[J y', y'].$$

Posons

$$B(z', z') = -\frac{1}{4}[J z', z'],$$

$$Q'(z', z') = \frac{1}{4}[J x', x'] + \frac{1}{4}[J y', y'].$$

On voit que B est bilinéaire complexe sur $\mathscr{H}'^{C}_1$ et que Q' est une forme hermitienne sur $\mathscr{H}'^{C}_1$.

On a donc si

$$L_0(u_2, z') = Q(u_2, u_2) + Q'(z', z') + B(z', z'),$$

$$\operatorname{Re} L_0 = S_0.$$

On posera

$$Q_0(z' + u_2, z' + u_2) = Q(u_2, u_2) + Q'(z', z').$$

Pour chaque $p_1 = (z_1, u_1) \in D(\Omega_e, Q_e) = D_1$, on considère l'isomorphisme d'espaces vectoriels complexes

$$A_{p_1}(z'+u_2) = (z''+u_2) \qquad \text{et} \qquad S_{p_1}(z'+u_2, z'+u_2) = S_0(z''+u_2, z''+u_2).$$

On a alors :

$$D(\Omega; Q) = \{(z_1+z_2+z', u_1+u_2); (z_1, u) \in D_1 = D(\Omega_e, Q_e)$$
$$\text{et } \operatorname{Im} z_2 - S_{p_1}(z'+u_2, z'+u_2) \in \Omega'_e\}.$$

Cette réalisation de D (Ω; Q) est la réalisation en domaine de type III; on peut évidemment écrire S_{p_1} sous la forme Re L_{p_1} où L_{p_1} est une forme semi-hermitienne dépendant différentiablement de p_1 i. e. :

$$L_{p_1}(z'+u_2, z'+u_2) = L_0(z''+u_2, z''+u_2).$$

Considérons la surface $\Sigma_e = B.(is_e, 0)$ étudiée au chapitre précédent.

4.3.3. LEMME :

$$\Sigma_e = \{(z_1+z_2+z', u_1+u_2); (z_1, u_1) \in D_1 = D(\Omega_e, Q_e)$$
$$\textit{et } \operatorname{Im} z_2 - S_{p_1}(z'+u_2, z'+u_2) = 0\}.$$

Démonstration. — Soit $h_1.\exp X'$, avec $X' \in \mathscr{H}'_0$ et $h_1 \in H_0(e)$ un élément du groupe T_e qui agit simplement transitivement sur $\mathcal{O}_e$. On a

$$h_1.\exp X' s_e = h_1.s_e - h_1.JX' + \frac{1}{2}[X', JX'].$$

On voit donc que si $y_1+y'+y_2 \in \mathcal{O}_e$ (notations de 4.3.1), alors $y_1 \in \Omega_e$ et que si la composante y' d'un élément $y_1+y'+y_2$ de $\mathcal{O}_e$ est nulle alors y_2 l'est aussi; le reste suit alors comme en 4.3.2. Remarquons enfin que :

$$U_{p_1} = \{\xi \in \mathscr{H}_1(e')^* \text{ tels que si } L_{p_1} = Q_{p_1} + B_{p_1},$$
$$Q_{p_1, \xi} \text{ soit définie positive sur } \mathscr{H}_{1/2}(e') \otimes \mathscr{H}'^{\mathrm{C}}_1\}$$

ne dépend pas de p_1 puisque les L_{p_1} se déduisent de L_0 par l'isomorphisme A_{p_1}. On a donc :

$$U_{p_1} = U = \{\xi \in \mathscr{H}_1(e')^*, \text{ où } Q_\xi(u_2, u_2) = \langle \xi, Q(u_2, u_2) \rangle \text{ est définie positive}$$
$$\text{sur } \mathscr{H}_{1/2}(e') \text{ et } S_\xi(y, y) = \langle \xi, [Jy, y] \rangle \text{ est définie positive sur } \mathscr{H}'_1\}.$$

De même :

$$V_{p_1} = V = \{\text{enveloppe convexe engendrée par les } [Jy, y]$$
$$\text{et les } Q(u_2, u_2),\ y \in \mathscr{H}'_1,\ u_2 \in \mathscr{H}_{1/2}(e')\}.$$

On voit que $\overline{U} = \overline{\cup H_0(e').f'_\varepsilon}$ avec $f'_\varepsilon = \sum_{i=e}^{r} \varepsilon_i U_i^*$ pour les $f'_\varepsilon \in U$; i. e. $\varepsilon_i > 0$ si $\mathscr{N}^{\alpha_i/2} \neq 0$ ou si $\mathscr{N}^{\alpha_i} \subset [\mathscr{H}'_0, \mathscr{H}'_1]$. On démontre comme en 3.4 que l'espace vectoriel engendré par V est $E = [\mathscr{H}_{1/2}(e'), \mathscr{H}_{1/2}(e')] + [\mathscr{H}'_0, \mathscr{H}'_1]$ et que $V = E \cap \overline{\Omega}_{e'}$ et donc que si $\check{D}$ est défini comme en (3.1) par

$$\check{D} = \{(z, u);\ \operatorname{Im} z - Q(u, u) \in C^0(\mathcal{O}_e, Q_e)\}$$

on a aussi

$$\check{D} = \{(z_1+z_2+z',\ u_1+u_2) \text{ avec } (z_1, u_1) \in D_e \text{ et } \operatorname{Im} z_2 - S_{p_1}(z'+u_2,\ z'+u_2) \in V^0\}.$$

Dans le cas d'un domaine $D(\Omega, Q)$ symétrique, on a donc $V^0 = \Omega'_e$ et $\check{D} = D(\Omega; Q)$ si $e \neq 1$, i. e. si la fibration n'est pas triviale, la fibration $\pi_e : D(\Omega; Q) \to D_e$ définie par

$$\pi_e(z_1+z_2+z',\ u_1+u_2) = (z_1, u_1) = w$$

fournit une fibration $\check{D} = \bigcup_w \check{D}_w$ où

$$D_w = \{(z_2, z', u_2) \text{ avec } \operatorname{Im} z_2 - \operatorname{Re} L_w(z'+u_2,\ z'+u_2) \in \Omega'_e\}.$$

Chacune des fibres $\check{D}_w$ est donc un domaine de Siegel de type II dont le bord de Shilov est donné par

$$D_w = \{(z_2, z', u_2) \text{ avec } \operatorname{Im} z_2 = \operatorname{Re} L_w(z'+u_2,\ z'+u_2)\}.$$

Soit F une fonction holomorphe sur $\check{D}$, alors $F_w(z) = F(z, w)$ est une fonction holomorphe sur $\check{D}$, et on a la :

4.3.4. PROPOSITION. — *Soit* F *une fonction holomorphe sur* $\check{D}$, *alors* $F \in \mathscr{H}(\check{D})$ *si et seulement si pour presque tout* w, $F_w(z)$ *appartient à* $\mathscr{H}(\check{D}_w)$, *espace de Hardy de la fibre* $\check{D}$ *et si*

$$\|F\|^2_{\mathscr{H}(\check{D}_w)}\, \psi(w)\, dw < +\infty.$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] L. AUSLANDER and B. KOSTANT, *Polarizations and Unitary Representations of Solvable Lie Groups*, *Invent. Math.*, vol. 14, 1971), p. 255-344).

[1 *bis*] V. BARGMANN, *On a Hilbert Space of Analytic Functions and on Associated Integral Transform* (*Comm. in Pure and Appl. Math.*, vol. 14, 1961, p. 187-214).

[2] P. BERNAT et co-auteurs, *Représentations des groupes de Lie résolubles*, Dunod, Paris, 1972.

[3] G. FOLLAND and J. J. KOHN, *The Neumann Problem for the Cauchy-Riemann Complex* (*Ann. of Math. Studies*, n° 75, Princeton University Press, Princeton, 1972).

[4] S. GREENFIELD, *Cauchy-Riemann Equations in Several Variables* (*Ann. S.N.S.*, Pisa, (3), vol. 22, 1968, p. 275-314).

[5] L. R. HUNT and R. O. WELLS, *Extensions of C. R. Functions*, Preprint, 1974,

[6] S. KANEYUKI, *Homogeneous Bounded Domains and Siegel Domains* (*Lecture Notes in Math.*, n° 241, Springer-Verlag, Berlin, 1971).

[7] J. J. KOHN, *Boundaries of Complex Manifolds* (*Proc. Conf. Complex Analysis*, University of Minnesota Press, 1964).

[8] A. KORANYI and E. STEIN, H^2 *Spaces of Generalized Half-Planes* (*Studia Mathematica*, vol. 44, 1972, p. 379-388).

[9] A. KORANYI and J. WOLF, *Realization of Hermition symmetric Spaces as Generalized Half-Planes* (*Ann. of Math.*, vol. 81, 1965, p. 265-288).

[10] H. LEWY, *On the Local Caracter of the Solution of an Atypical Linear Differential in Three Variables* (*Ann. of Math.*, (2), vol. 64, 1956, p. 514-522).

[11] C. C. MOORE, *Compactification of Symmetric Spaces II* (*Amer. J. Math.*, vol. 86, 1964, p. 358-378).

[12] OGDEN and S. VAGI, *Harmonic Analysis and* H^2 *functions on Siegel Domains of type II* (*Proc. Nat.* Acad. Sci., U.S.A., 69, 1972, p. 11-14).

[13] H. ROSSI and M. VERGNE, (*a*) *Representations of Certain Solvable Lie Groups on Hilbert Spaces of Holomorphic Functions and...* (*J. of Funct. Anal.*, vol. 13, 1973, p. 324-389); (*b*) *Analytic Continuation of the Holomorphic Discrete Series of a Semi-Simple Lie Group* (à paraître à *Acta. Math.*).

[14] I. I. PIATECKII-SAPIRO, *Geometry of Classical Domains and the Theory of Automorphic Functions*, Fitzmatgiz, Moscou, 1961, Dunod, Paris, 1966, Gordon and Breach, New York, 1969.

[15] E. STEIN, *Boundary Behavior of Holomorphic Functions of Several Complex Variables* (*Mathematical Notes*, Princeton University Press, 1972).

[16] S. VAGI, *On the Boundary Values of Holomorphic Functions* (*Rev. Un. Mat. Argentina*, vol. 25, 1970, p. 123-136).

[17] M. VERGNE, *Étude de certaines représentations induites d'un groupe de Lie résoluble exponentiel* (*Annn. scient. Éc. Norm. Sup.*, vol. 3, 1970, p. 353-384).

[18] R. O. WELLS, *Function Theory and Differentiable Submanifolds*, Contributions to Analysis (ed. AHLFORS et coll.) Academic Press, Inc. 1974, p. 407-441.

[19] H. WEYL, *Orthogonal Projection in Potential Theory* (*Duke Math. J.* vol. 7, 1970, p. 411-444).

(Manuscrit reçu le 2 mai 1975.)

Hugo ROSSI,
University of Utah,
U.S.A.;
Michèle VERGNE,
11, rue Quatre-Fages,
75005 Paris.