ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

J. LANNES

Formes quadratiques d'enlacement sur l'anneau des entiers d'un corps de nombres

Annales scientifiques de l'É.N.S. 4e série, tome 8, nº 4 (1975), p. 535-579

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1975_4_8_4_535_0>

Ann. scient. Éc. Norm. Sup.
4^{e} série, t. 8, 1975, p. 535 à 579.

FORMES QUADRATIQUES D'ENLACEMENT SUR L'ANNEAU DES ENTIERS D'UN CORPS DE NOMBRES

PAR J. LANNES

0. Introduction

Soit A un anneau commutatif unitaire, un b-module (resp. q-module) sur A est un A-module projectif de type fini muni d'une forme bilinéaire symétrique (resp. forme quadratique) non dégénérée à valeurs dans A. Supposons maintenant que A est un anneau de Dedekind et soit K son corps des fractions, un e-module (resp. qe-module) sur A est un A-module de torsion de type fini, muni d'une forme bilinéaire symétrique (resp. une forme quadratique) non dégénérée à valeurs dans K/A.

Dans [3] J. Barge, F. Latour, P. Vogel et l'auteur ont introduit des groupes de Witt de e-modules et de qe-modules sur un anneau de Dedekind, notés respectivement W (K, A) et WQ (K, A). *Grosso modo* W (K, A) [resp. WQ (K, A)] est la collection de tous e-modules (resp. qe-modules) sur A modulo la collection de tous les e-modules (resp. qe-modules) neutres. Un e-module (resp. qe-module) est neutre s'il contient un sous-modulequi est son propre orthogonal (resp. qui est son propre orthogonal et qui est en outre isotrope). Il existe deux homomorphismes notés tous deux δ tels que les suites :

$$0 \to \mathrm{W}(\mathrm{A}) \longrightarrow \mathrm{W}(\mathrm{K}) \xrightarrow{\delta} \mathrm{W}(\mathrm{K}, \mathrm{A}), \tag{1}$$

$$0 \to \mathrm{WQ}(\mathrm{A}) \to \mathrm{WQ}(\mathrm{K}) \xrightarrow{\delta} \mathrm{WQ}(\mathrm{K}, \mathrm{A}) \tag{2}$$

sont exactes. Ceci n'est d'ailleurs qu'un cas particulier de la théorie de la localisation des formes quadratiques (en un sens très général) développée par M. Karoubi [6]. Dans le cas bilinéaire le groupe W (K, A) est isomorphe à la somme directe $\bigoplus_{\mathscr{P}} \mathrm{W}(\mathrm{A}/\mathscr{P})$ indexée sur les idéaux premiers non nuls de A et la suite (1) est équivalente à celle, qui est décrite par exemple dans [11], où δ est remplacé par les homomorphismes de résidu et notre motivation dans [3] était géométrique : les variétés fermées de dimension $4k-1$ possèdent une forme d'enlacement. Cependant la théorie des groupes de Witt de e-modules a l'avantage de s'étendre immédiatement au cas quadratique. Dans le présent travail nous utilisons ce formalisme pour l'anneau des entiers d'un corps de nombres. En voici paragraphe après paragraphe le contenu essentiel.

Paragraphe 1 : Ce paragraphe complète l'appendice de [3]. Les notions nouvelles sont celles des produits tensoriels d'un b-module et d'un e-module, d'un b-module et d'un qe-module, d'un q-module et d'un e-module. La fin du paragraphe étudie les valeurs que peut prendre le discriminant d'un q-module.

Paragraphe 2 : Si K est un corps local dont le corps résiduel $\overline{K}$ est de caractéristique $\neq 2$, le second homomorphisme de résidu induit un isomorphisme du carré $I^2(K)$ de l'idéal fondamental de W(K) sur l'idéal fondamental $I(\overline{K})$ de $W(\overline{K})$. Nous étendons ce résultat à un corps K de caractéristique 0 complet par une valuation discrète dont le corps résiduel $\overline{K}$ est de caractéristique 2 et parfait : dans ce cas l'homomorphisme $\delta : WQ(K) \rightarrow WQ(K, A)$ remplace le second homomorphisme de résidu, il induit un isomorphisme de $I^2(K)$ sur $WQ(\overline{K})$; il en résulte $I^3(K) = 0$ ce qui complète l'analogie.

Les deux derniers points du paragraphe généralisent « l'astuce de la classe de Wu ».

Paragraphe 3 : Soient A un anneau de Dedekind de corps des fractions K, L une extension de degré fini de K, B la fermeture intégrale de A dans L. On peut sous certaines conditions définir des homomorphismes de transfert compatibles :

$$W(L) \rightarrow W(K), \qquad WQ(L) \rightarrow WQ(K), \qquad W(L, B) \rightarrow W(K, A),$$
$$WQ(L, B) \rightarrow WQ(K, A), \qquad W(B) \rightarrow W(A), \qquad WQ(B) \rightarrow WQ(A).$$

Ces conditions sont vérifiées en particulier quand l'anneau A est de valuation discrète complet. L'utilisation de transfert « local » est double. Il permet d'abord d'étendre la démonstration de Scharlau [13] d'un théorème de Milnor [10] qui dit que si K est un corps local de caractéristique $\neq 2$ le transfert $I^2(L) \rightarrow I^2(K)$ est un isomorphisme (la démonstration de Scharlau ne s'applique pas quand le corps résiduel est de caractéristique 2). Il sert ensuite à détecter les classes de Witt des qe-modules sur l'anneau de la valuation d'un corps local de caractéristique 0 au moyen de sommes de Gauss.

Paragraphe 4 : Nous développons une théorie « élémentaire » des extensions multiquadratiques non ramifiées d'un corps de nombres K. Il s'agit en définitive de montrer à moindres frais que le groupe de Galois de l'extension maximale multiquadratique non ramifiée de K est canoniquement isomorphe à $\mathscr{C}/\mathscr{C}^2$, $\mathscr{C}$ désignant le groupe des classes d'idéaux de K.

Paragraphe 5 : Nous globalisons.

Nous déterminons tout d'abord le groupe de Witt quadratique WQ (A) de l'anneau des entiers d'un corps de nombres K, les résultats ne sont pas foncièrement nouveaux (*voir* par exemple [17]) et nous sommes surtout attachés à préciser les congruences que vérifient les signatures d'un q-module sur A.

Si la différente de K est un idéal principal il est facile de définir un transfert $WQ(K, A) \rightarrow WQ(\mathbf{Q}, \mathbf{Z})$, nous généralisons cette définition grâce à un théorème dû à Hecke qui assure que la différente est dans le carré d'une classe. Nous donnons une démonstration de ce résultat dans le cadre que nous nous sommes fixés au paragraphe 4.

A l'aide d'un transfert global et de sommes de Gauss nous obtenons une application bilinéaire : $W(A) \times WQ(K, A) \to \mu_8$. D'après la formule de Milgram l'image de $\delta : WQ(K) \to WQ(K, A)$ est orthogonale à la torsion de $W(A)$, nous montrons en fait que la forme bilinéaire met en dualité le conoyau de δ et la torsion de $W(A)$ (qui sont des groupes finis). Ceci est intimement relié au paragraphe 4.

Paragraphe 6 : Le dernier paragraphe donne à titre d'exemples quelques applications des techniques des paragraphes précédents.

Appendice : Il traite du transfert et de l'invariant de Arf en caractéristique 2.

1. **Généralités**

Les notations de ce travail sont celles de [3], à une exception près : soient A un anneau de Dedekind et $\mathscr{P}$ un idéal premier de A, dans [3] on note $A_{\mathscr{P}}$ le localisé de A par rapport à la partie multiplicative $A-\mathscr{P}$, ici nous le noterons $A_{(\mathscr{P})}$ réservant la notation $A_{\mathscr{P}}$ au complété du précédent.

Soient A un anneau de Dedekind, K son corps des fractions.

1.1. Soient P un *b*-module sur A et C un *e*-module sur A.

Nous pouvons considérer le produit tensoriel sur A des deux applications :

$$P \to \mathrm{Hom}_A(P, A) = P^* \qquad \text{et} \qquad C \to \mathrm{Hom}_A(C, K/A) = \hat{C}$$

comme une application de $P \otimes C$ dans $\widehat{P \otimes C}$, en effet comme le module P est projectif de type fini, $P^* \otimes \hat{C}$ est naturellement isomorphe à $\widehat{P \otimes C}$. Cette application fait de $P \otimes C$ un *e*-module. La forme d'enlacement de $P \otimes C$ est caractérisée par la formule :

$$(x_1 \otimes y_1).(x_2 \otimes y_2) = (x_1 . x_2)(y_1 . y_2).$$

Si P ou C est neutre il en est de même de $P \otimes C$. Nous avons donc défini une application bilinéaire :

$$W(A) \times W(K, A) \to W(K, A)$$

qui donne une structure de $W(A)$-module au groupe $W(K, A)$.

PROPOSITION 1.2. — *Soient* P *un b-module sur* A *et* C *un qe-module sur* A. *Il existe sur le produit tensoriel* $P \otimes C$ *une et une seule forme quadratique d'enlacement, associée à la forme d'enlacement définie précédemment, telle que l'on a*

$$q(x \otimes y) = (x . x)\, q(y)$$

pour tout $x \in P$ *et tout* $y \in C$. □

Démonstration. — L'unicité est claire.

Supposons d'abord P libre et soit $\{ e_i \}$ une base de P. Nous posons

$$q(\sum_i e_i \otimes y_i) = \sum_i (e_i . e_i) q(y_i) + \sum_{i<j} (e_i . e_j)(y_i . y_j).$$

Revenons au cas général. Soit S la partie multiplicative de A formée des éléments a tels que la multiplication par a de C dans C est un isomorphisme, l'anneau $S^{-1} A$ est principal et le b-module sur $S^{-1} A$, $S^{-1} P$, est libre. Comme $P \otimes_A C = S^{-1} P \otimes_{S^{-1}A} C$ nous sommes ramenés au premier cas.

La construction précédente définit une application bilinéaire :

$$W(A) \times WQ(K, A) \to WQ(K, A)$$

qui munit le groupe WQ (K, A) d'une structure de W (A)-module.

PROPOSITION 1.3. — *Soient* P *un q-module sur* A *et* C *un e-module sur* A. *Il existe sur le produit tensoriel* $P \otimes C$ *une et une seule forme quadratique d'enlacement, associée à la forme d'enlacement définie en* 1.1 *telle que l'on a*

$$q(x \otimes y) = q(x)(y . y)$$

pour tout $x \in P$ *et tout* $y \in C$. □

Démonstration. — Analogue à celle de 1.2.

Il en résulte une application bilinéaire :

$$WQ(A) \times W(K, A) \to WQ(K, A).$$

1.4. Les groupes de Witt W (K) et WQ (K) sont des W (K)-modules et par restriction des scalaires des W (A)-modules. La proposition suivante ne présente pas de difficultés.

PROPOSITION 1.4. — *Les applications* (*définies dans* [3]) ,

$$\begin{aligned} \delta : &\quad W(K) \to W(K, A), \\ \delta : &\quad WQ(K) \to WQ(K, A), \\ \text{oubli} : &\quad WQ(K, A) \to W(K, A) \end{aligned}$$

sont W (A)-*linéaires.*

L'application

$$WQ(A) \times W(K, A) \to WQ(K, A)$$

est W (A)-*bilinéaire.*

Soient $w \in WQ(A)$ [resp. $x \in WQ(K, A)$] *et* $o(w) \in W(A)$ [resp. $o(x) \in W(K, A)$] *obtenu par oubli, les deux produits tensoriels* $o(w) \otimes x$ *et* $w \otimes o(x)$ *sont égaux dans* WQ (K, A). □

1.5. Nous pouvons énoncer les théorèmes [3], A-1.24 et [3], A-2.3 sous la forme :

THÉORÈME 1.5. — *Pour tout anneau de Dedekind* A *les suites de* W (A)-*modules :*

$$0 \to W(A) \longrightarrow W(K) \xrightarrow{\delta} W(K, A),$$
$$0 \to WQ(A) \to WQ(K) \xrightarrow{\delta} WQ(K, A)$$

sont exactes. □

1.6. Soit C un *qe*-module, la décomposition de C en composantes $\mathscr{P}$-primaires, décrivant des idéaux premiers non nuls de A, est une décomposition orthogonale. Il en résulte un isomorphisme entre WQ (K, A) et la somme directe $\bigoplus_{\mathscr{P}} WQ(K, A_{(\mathscr{P})})$. L'image du produit des applications $\delta : WQ(K) \to WQ(K, A_{(\mathscr{P})})$ est contenue dans $\bigoplus_{\mathscr{P}} WQ(K, A_{(\mathscr{P})})$ et le diagramme ci-dessous est commutatif :

$$\begin{tikzcd} WQ(K) \arrow[r] \arrow[dr, "\Pi_{\mathscr{P}} \delta_{\mathscr{P}}"'] & WQ(K, A) \arrow[d, "\wr"] \\ & \bigoplus_{\mathscr{P}} WQ(K, A_{(\mathscr{P})}) \end{tikzcd}$$

1.7. Il y a identité entre la notion *qe*-module sur $A_{(\mathscr{P})}$ et celle de *qe*-module sur le complété $A_{\mathscr{P}}$. Notons $K_{\mathscr{P}}$ le corps des fractions de $A_{\mathscr{P}}$, l'homomorphisme naturel :

$$WQ(K, A_{(\mathscr{P})}) \to WQ(K_{\mathscr{P}}, A_{\mathscr{P}})$$

est un isomorphisme et le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd} WQ(K) \arrow[r] \arrow[d] & WQ(K, A_{(\mathscr{P})}) \arrow[d, "\wr"] \\ WQ(K_{\mathscr{P}}) \arrow[r] & WQ(K_{\mathscr{P}}, A_{\mathscr{P}}). \end{tikzcd}$$

1.8. Les points 1.6 et 1.7 nous amènent à étudier les *qe*-modules sur les anneaux de valuation discrète, pour ce faire on dispose du théorème suivant ([3], A-2.5) :

THÉORÈME 1.8. — *Si* A est un anneau de *valuation discrète, la suite*

$$0 \to WQ(A) \to WQ(K) \xrightarrow{\delta} WQ(K, A) \to 0$$

est exacte. □

1.9. En utilisant 1.5, 1.6, 1.7, 1.8 (et leurs analogues bilinéaires) nous obtenons

THÉORÈME 1.9. — *Soient* A *un anneau de Dedekind de corps de fractions* K *et w un élément de* WQ (K), *les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *La classe w est dans l'image de l'homomorphisme :* WQ (A) → WQ (K).

(ii) *Pour tout idéal premier non nul de* A, $\mathscr{P}$, *w est dans l'image de l'homomorphisme :* $WQ(A_{(\mathscr{P})}) \to WQ(K)$.

(iii) *Pour tout idéal premier non nul de* A, $\mathscr{P}$, *l'image de* w *dans* WQ $(K_{\mathscr{P}})$ *provient de* WQ $(A_{\mathscr{P}})$.

On a le même énoncé avec le symbole W *à la place de* WQ. □

1.10. COMPARAISON ENTRE FORMES BILINÉAIRES ET FORMES QUADRATIQUES. — Nous notons V (K, A) le noyau de l'homomorphisme d'oubli : WQ (K, A) → W (K, A) (l'oubli est un isomorphisme si 2 est inversible dans A). Le groupe V (K, A) se décompose en la somme directe $\bigoplus_{\mathscr{P} \mid 2A} V(K, A_{(\mathscr{P})}) = \bigoplus_{\mathscr{P} \mid 2A} V(K_{\mathscr{P}}, A_{\mathscr{P}})$ indexée sur les idéaux premiers non nuls de A qui divisent l'idéal 2 A. Cette somme est finie si l'anneau A n'est pas caractéristique 2; sous cette hypothèse l'oubli WQ (K, A) → W (K, A) est surjectif (appliquer [3], A-2.7) composantes) et nous avons une suite exacte de W (A)-modules :

$$0 \to WQ(A) \to W(A) \xrightarrow{\delta} V(K, A)$$

en notant encore δ la composée : $W(A) \to W(K) \simeq WQ(K) \xrightarrow{\delta} WQ(K, A)$.

Le groupe V (K, A) est un sous W (A)-module de WQ (K, A) annulé par l'image de WQ (A) dans W (A) (dernier point de 1.4), c'est un module sur l'anneau, V (A), conoyau de l'oubli : WQ (A) → W (A). L'anneau V (**Z**) est isomorphe à **Z**/8([3], A-2.15), comme l'homomorphisme naturel : V (**Z**) → V (A) est unifère, la caractéristique de V (A) divise 8. Il en résulte que le groupe V (K, A) est annulé par la multiplication par 8.

1.11. DISCRIMINANT D'UN b-MODULE. — Soient A un anneau principal et P un b-module sur A, le discriminant Δ du b-espace vectoriel sur K, $K \otimes_A P$, appartient au sous groupe A^*/A^{*2} de K^*/K^{*2}. Plus généralement si A est un anneau de Dedekind on voit en localisant en chacun des idéaux premiers, non nuls (par la suite nous oublierons cette précision), que Δ appartient au sous-groupe, D (A), de K^*/K^{*2} formé des éléments dont toutes les valuations $\mathscr{P}$-adiques sont paires (ce qui a un sens dans K^*/K^{*2}). L'élément Δ est appelé discriminant du b-module P.

Soient $\mathscr{C}$ (A) le groupe des classes de A et ${}_2\mathscr{C}$ (A) le sous-groupe des classes dont le carré est la classe principale. Représentons un élément de D (A) par $d \in K^*$, la classe de l'idéal fractionnaire $\prod_{\mathscr{P}} \mathscr{P}^{(1/2)\, v_{\mathscr{P}}(d)}$ ne dépend pas du choix de d, on définit ainsi une application : $D(A) \to {}_2\mathscr{C}(A)$ telle que la suite

$$0 \to A^*/A^{*2} \to D(A) \to {}_2\mathscr{C}(A) \to 0$$

est exacte.

1.12. Nous supposons dans la fin de ce paragraphe que 2 n'est pas inversible dans A et que la caractéristique de A est différente de 2.

Le rang d'un q-module sur A est pair : soit $\mathscr{P}$ un idéal premier qui divise 2, $(A/\mathscr{P}) \otimes P$ est un q-espace vectoriel sur un corps de caractéristique 2, sa dimension est paire. L'image de l'oubli : WQ (A) → W (A) est donc contenue dans l'idéal fondamental, I (A), de W (A), ceci permet de définir un homomorphisme, Δ, de WQ (A) dans D (A) en composant : WQ (A) → I (A) → D (A).

Notons $E_2(A)$ le groupe $(A/4A)^*/(A/4A)^{*2}$, si A est principal la réduction modulo 4 induit un homomorphisme : $A^*/A^{*2} = D(A) \to E_2(A)$. Nous pouvons généraliser cette définition en considérant la composition α_2 :

$$D(A) \to D(A_{(2)}) \to E_2(A_{(2)}) = E_2(A)$$

(l'anneau $A_{(2)}$ est le localisé de A par rapport à la partie multiplicative des éléments de A inversibles dans $A/2A$, il est principal).

PROPOSITION 1.12. — *Si* A *est un anneau de Dedekind tel que* 2 *n'est pas inversible dans* A *et que sa caractéristique est différente de* 2, *la suite*

$$WQ(A) \xrightarrow{\Delta} D(A) \xrightarrow{\alpha_2} E_2(A)$$

est exacte.

Démonstration : $\alpha_2 \circ \Delta = 0$. Il suffit d'étudier le cas de $A_{(2)}$ car $\alpha_2 \circ \Delta$ se factorise en

$$WQ(A) \to WQ(A_{(2)}) \to D(A_{(2)}) \to E_2(A_{(2)}) = E_2(A).$$

Soient P un q-module sur $A_{(2)}$ (P est libre de dimension finie), $e \in P$ primitif et $f \in P$ tel que $e.f = 1$. Comme la matrice $\begin{pmatrix} e.e & e.f \\ e.f & f.f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2q(e) & 1 \\ 1 & 2q(f) \end{pmatrix}$ est inversible, le sous-module $\{e, f\}$ engendré par e et f (muni de la forme quadratique induite par celle de P) est un q-module de dimension 2 et le q-module P se décompose en la somme orthogonale de q-modules :

$$P = \{e, f\} \oplus \{e, f\}^{\perp}.$$

On achève par récurrence.

Ker $\alpha_2 \subset$ Im Δ. Le corps K étant de caractéristique différente de 2 on peut regarder WQ (A) comme un sous-groupe de W (K) (1.5). Soit $d \in K^*$ représentant un élément de Ker α_2, considérons l'élément de W (K) (WQ (K)), $\langle 2 \rangle \otimes \langle d, -1 \rangle$. Il existe $a \in K^*$, $b \in A \cap A_{(2)}^*$, $c \in A$ tels que $d = a^2(b^2 + 4c)$. Soit $b' \in A$ tel que $bb' \equiv 1 \pmod 2$:

$$d = \left(\frac{a}{b'}\right)^2 [(bb')^2 + 4b'^2 c],$$

$$d = l^2(1 + 4m) \quad \text{avec} \quad l \in K^* \quad \text{et} \quad m \in A.$$

Dans W (K) :

$$\langle 2 \rangle \otimes \langle d, -1 \rangle = \begin{pmatrix} 2m & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

donc

$$\langle 2 \rangle \otimes \langle d, -1 \rangle \in WQ(A_{(2)}).$$

D'autre part, d'après 1.9, l'élément $\langle d \rangle$ de W (K) est dans W (A), il en résulte :

$$\langle 2 \rangle \otimes \langle d, -1 \rangle \in WQ\left(A\left[\frac{1}{2}\right]\right)$$

Une nouvelle application de 1.9 donne

$$\langle 2 \rangle \otimes \langle d, -1 \rangle \in \mathrm{WQ}(\mathrm{A})$$

et nous avons bien $\Delta(\langle 2 \rangle \otimes \langle d, -1 \rangle) = d$.

Remarque. — Les deux espaces vectoriels sur $\mathbf{F}_2$, D (A) et E_2 (A) sont des W (A)-modules *via* l'homomorphisme de dimension modulo 2 : W (A) $\to \mathbf{F}_2$. La suite exacte de la proposition 1.12 est une suite exacte de W (A)-modules.

Remarque 1.13. — Autre démonstration de la seconde partie de 1.12. Soient $d \in \mathrm{K}^*$ représentant un élément de $\mathrm{Ker}\,\alpha_2$ et B la fermeture intégrale de A dans $\mathrm{K}[\sqrt{d}]$. La norme : B $\to$ A est une forme A-quadratique associée à la forme A-bilinéaire :

$$\begin{aligned} \mathrm{B} \times \mathrm{B} &\longrightarrow \mathrm{A}, \\ (x, y) &\longmapsto \mathrm{tr}(x\bar{y}). \end{aligned}$$

Celle-ci est non dégénérée parce qu'aucun idéal premier de A ne se ramifie dans B. La forme K-bilinéaire sur $\mathrm{K}[\sqrt{d}]$, $\mathrm{tr}(x\bar{y})$, a pour matrice $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2d \end{pmatrix}$ dans la K-base $\{1, \sqrt{d}\}$.

2. Calculs locaux

2.1. L'anneau A est maintenant de valuation discrète, v, $\mathscr{P}$ désigne l'unique idéal premier non nul, π une uniformisante, $\overline{\mathrm{K}}$ le corps résiduel.

L'homomorphisme : $\mathrm{A} \xrightarrow{\times 1/\pi} \overline{\mathrm{K}}$ induit une injection : $\overline{\mathrm{K}} \to \mathrm{K}/\mathrm{A}$ qui permet de définir deux homomorphismes (dépendants du choix de π) :

$$j: \quad \mathrm{W}(\overline{\mathrm{K}}) \longrightarrow \mathrm{W}(\mathrm{K}, \mathrm{A}),$$

$$j: \quad \mathrm{WQ}(\overline{\mathrm{K}}) \to \mathrm{WQ}(\mathrm{K}, \mathrm{A}).$$

Dans le cas bilinéaire j est un isomorphisme ([3], A-1.27) qui fait commuter le diagramme

$$\begin{tikzcd} & \mathrm{W}(\overline{\mathrm{K}}) \arrow[d, "j"] \\ \mathrm{W}(\mathrm{K}) \arrow[ur, "\partial"] \arrow[r, "\delta"'] & \mathrm{W}(\mathrm{K}, \mathrm{A}) \end{tikzcd}$$

où la flèche ∂ est le second homomorphisme de résidu ([11], IV-1.2). Dans le cas quadratique, la version quadratique de [3] (A-1.14) montre que l'homomorphisme j est injectif.

2.2. Soient C un e-module sur un anneau de Dedekind A et ω (C) son contenu ([5], p. 61). Si le e-module C est neutre ω (C) est le carré d'un idéal de A; on obtient un homomorphisme noté encore ω :

$$W(K, A) \to \mathscr{I}(A)/\mathscr{I}^2(A),$$

$\mathscr{I}$ (A) désignant le groupe des idéaux fractionnaires de A. Il est surjectif.

Si A est un anneau de valuation discrète, le diagramme :

$$\begin{tikzcd} W(\overline{K}) \arrow[dd, "j"'] \arrow[dr, "\text{dimension modulo 2}"] & \\ & \mathbf{Z}/2 \\ W(K, A) \arrow[ur, "\omega"'] & \end{tikzcd}$$

est commutatif. Quand le corps résiduel $\overline{K}$ est de caractéristique différente de 2 et que $I^2(\overline{K}) = 0$ (ce qui est réalisé en particulier quand $\overline{K}$ est fini) la restriction de j à $I(\overline{K})$ ne dépend pas du choix de π et on a une suite exacte [$I(\overline{K})$ désigne l'idéal fondamental de $W(\overline{K})$ ([11], III-3.3)] :

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & I(\overline{K}) \arrow[r, "j"] & W(K, A) \arrow[r, "\omega"] \arrow[d, dash, "\wr"] & \mathbf{Z}/2 \arrow[r] & 0 \\ & & WQ(K, A) & & \end{tikzcd}$$

Le discriminant est un isomorphisme de $I(\overline{K})$ sur $\overline{K}^*/\overline{K}^{*2}$.

Nous nous proposons de décrire, dans le cas où K est de caractéristique 0 et $\overline{K}$ de caractéristique 2, une filtration de WQ (K, A) et son gradué qui peuvent être considérés comme l'analogue de la suite exacte ci-dessus quand $\overline{K}$ est parfait (en particulier fini).

Considérons la suite exacte :

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & WQ(A) \arrow[r] & WQ(K) \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, dash, "\wr"] & WQ(K, A) \arrow[r] & 0 \\ & & W(K) & & \end{tikzcd}$$

comme la dimension d'un q-module sur A est paire (1.12) l'homomorphisme de dimension modulo 2 : $W(K) \to \mathbf{Z}/2$ se factorise par un homomorphisme $\tau : WQ(K, A) \to \mathbf{Z}/2$. Soient C un qe-module sur A et [C] sa classe dans WQ (K, A) :

$$\tau([C]) \equiv \dim_{\overline{K}}(\overline{K} \otimes C) \pmod 2.$$

En effet, d'après [3] (A-2.6), il nous suffit d'avoir pour tout $\tilde{q}$-module sur A, P :

$$\dim_K(K \otimes P) \equiv \dim_{\overline{K}}(\overline{K} \otimes \operatorname{coker} P) \pmod 2.$$

Or la forme bilinéaire sur $\overline{\mathrm{K}} \otimes \mathrm{P}$ est alternée; son rang est donc pair ce qui entraîne cette congruence. Notons $\mathrm{V}^1(\mathrm{K}, \mathrm{A})$ le noyau de la restriction de τ à $\mathrm{V}(\mathrm{K}, \mathrm{A})$ qui est toujours surjective.

Considérons le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 \to & \mathrm{WQ}(\mathrm{A}) & \longrightarrow & \mathrm{I}(\mathrm{A}) & \xrightarrow{\delta} & \mathrm{V}^1(\mathrm{K}, \mathrm{A}) & \to 0 \\ & \downarrow{\scriptstyle\Delta} & & \downarrow{\scriptstyle\Delta} & & \downarrow{\scriptstyle\overline{\Delta}} & \\ 0 \to & \ker \alpha_2 & \to & \mathrm{A}^*/\mathrm{A}^{*2} & \longrightarrow & \mathrm{E}_2(\mathrm{A}) & \longrightarrow 0 \end{array}$$

où les lignes sont exactes et notons $\overline{\Delta}$ l'homomorphisme surjectif qui fait commuter le carré de droite, $\mathrm{V}^2(\mathrm{K}, \mathrm{A})$ le noyau de $\overline{\Delta}$.

Comme l'oubli : $\mathrm{WQ}(\overline{\mathrm{K}}) \to \mathrm{W}(\overline{\mathrm{K}})$ est nul $j[\mathrm{WQ}(\overline{\mathrm{K}})]$ est contenu dans $\mathrm{V}(\mathrm{K}, \mathrm{A})$.

L'homomorphisme naturel $h : \mathrm{WQ}(\mathrm{A}) \to \mathrm{WQ}(\overline{\mathrm{K}})$ est surjectif et nous avons la formule :

$$\text{si} \quad w \in \mathrm{WQ}(\mathrm{A}) : \qquad \delta(<\pi> \otimes w) = j[h(w)].$$

Elle montre :

$$\langle \pi \rangle \otimes w \in \mathrm{I}(\mathrm{A})$$

$$\overline{\Delta}[h(w)] = 1,$$

$$j[\mathrm{WQ}(\overline{\mathrm{K}})] \subset \mathrm{V}^2(\mathrm{K}, \mathrm{A}).$$

Si $\overline{\mathrm{K}}$ est parfait, l'idéal fondamental $\mathrm{I}(\overline{\mathrm{K}})$ est nul; il en résulte que $\omega : \mathrm{W}(\mathrm{K}, \mathrm{A}) \to \mathbf{Z}/2$ est un isomorphisme et que l'homomorphisme $j : \mathrm{WQ}(\overline{\mathrm{K}}) \to \mathrm{WQ}(\mathrm{K}, \mathrm{A})$ ne dépend pas du choix de π.

PROPOSITION 2.2. — *Pour un anneau de valuation discrète, de caractéristique* 0 *dont le corps résiduel est de caractéristique* 2 *et parfait, l'homomorphisme* ,

$$j : \quad \mathrm{WQ}(\overline{\mathrm{K}}) \to \mathrm{V}^2(\mathrm{K}, \mathrm{A})$$

est un isomorphisme (*canonique*). □

Remarque. — Notons $\mathfrak{P}$ l'application : $\overline{\mathrm{K}} \to \overline{\mathrm{K}}$, $x \longmapsto x + x^2$. L'invariant de Arf : $\mathrm{WQ}(\overline{\mathrm{K}}) \to \overline{\mathrm{K}}/\mathfrak{P}(\overline{\mathrm{K}})$ est un isomorphisme.

Démonstration de la proposition 2.2. — Posons $e = v(2)$. D'après [3] (A-2.6) un *qe*-module sur A, C, est une somme orthogonale de *qe*-modules : $\mathrm{C} = \bigoplus_{k<e} \mathrm{C}_k$ (l'indice k est un entier rationnel mais il n'y a qu'un nombre fini de C_k non nuls).

Chacun des C_k est libre sur $\mathrm{A}/\mathscr{P}^{e-k}$ et il existe un *b*-module sur A, P_k, tel que

$$\mathrm{C}_k = \operatorname{coker}\left(\left\langle \frac{e}{\pi^k} \right\rangle \otimes \mathrm{P}_k\right).$$

De plus si $k > 0$:

$$\forall x \in \mathrm{P}_k, \qquad x . x \equiv 0 (\operatorname{mod} \mathscr{P}^k).$$

Nous avons : $C_k \simeq P_k/\mathscr{P}^{e-k}P_k$ avec $q(\bar{x}) \equiv (\pi^k/4)\, x.x \pmod{A}$ ($x \in P_k$, $\bar{x}$ est sa classe modulo $\mathscr{P}^{e-k}P_k$).

Puisqu'une classe de WQ (K,A) peut être représentée par un *qe*-module anisotrope nous supposons désormais que C est anisotrope. Il en est alors de même de chacun des C_k or

$$q\left(\frac{2}{\pi^{k+1}}\bar{x}\right) \equiv \frac{x.x}{\pi^{k+2}} \pmod{A},$$

nous en déduisons :

Pas 1. — Tout x primitif de P_k vérifie : $v(x.x) \leqq k+1$.

En particulier :

Pas 2. — Si $k < -1$, $P_k = 0$.

Pour $k > 0$ le b-espace vectoriel $\bar{K} \otimes P_k$ est neutre et donc P_k est de dimension paire. En notant [C] la classe de C dans WQ (K, A) nous avons :

$$\omega([C]) \equiv (e+1) \dim P_{-1} + e \dim P_0 \pmod{2}$$
$$\tau([C]) \equiv \dim P_{-1} + \dim P_0 \pmod{2}.$$

Donc si $[C] \in V^1(K, A)$: $\dim P_{-1} \equiv 0 \pmod 2$ $\dim P_0 \equiv 0 \pmod 2$.

Comme $\bar{K}$ est parfait, $\bar{K} \otimes P_{-1}$ est neutre et P_{-1} est nul (pas 1). Nous obtenons :

Pas 3. — Si $[C] \in V^1(K, A)$, C s'écrit coker P avec

$$P = \bigoplus_{k=0}^{e-1} < 2/\pi^k > \otimes P_k, \ \dim P_k \equiv 0 \pmod{2}.$$

Pas 4. — Si P_k est non nul, il existe x primitif dans P_k tel que $x.x \equiv 0 \pmod{\mathscr{P}^{k+1}}$.

Démonstration. — Soient x_1 et $x_2 \in P_k$ engendrant un facteur direct de dimension 2 de P_k a_1 et $a_2 \in A$:

$$(a_1 x_1 + a_2 x_2).(a_1 x_1 + a_2 x_2) \equiv a_1^2 (x_1.x_1) + a_2^2 (x_2.x_2) \pmod{\mathscr{P}^{k+1}}$$

Puisque $\bar{K}$ est parfait il existe (a_1, a_2) primitif dans A^2 tel que

$$(a_1 x_1 + a_2 x_2).(a_1 x_1 + a_2 x_2) \equiv 0 \pmod{\mathscr{P}^{k+1}}.$$

Soit $y \in P_k$ tel que $x.y = 1$, puisque la matrice $\begin{pmatrix} x.x & 1 \\ 1 & y.y \end{pmatrix}$ est inversible, nous avons une décomposition orthogonale :

$$P_k = \begin{pmatrix} x.x & 1 \\ 1 & y.y \end{pmatrix} \oplus Q.$$

Pas 5. — $Q = 0$.

Démonstration par l'absurde. — Si $Q \neq 0$ il existe z primitif dans Q tel que $z.z \equiv 0 \pmod{\mathscr{P}^{k+1}}$ et un élément primitif de P_k, t, dans le facteur direct engendré par x et z tel que $t.t \equiv 0 \pmod{\mathscr{P}^{k+2}}$.

Supposons enfin que $[C] \in V^2(K, A)$, $\Delta(P)$ est un carré modulo 4. Or $\Delta(P_k)$ est un carré modulo $\mathscr{P}^{2k+1}$, donc si k_0 est le plus petit indice tel que $P_{k_0} \neq 0$ le discriminant $\Delta(P_{k_0})$ est un carré modulo $\mathscr{P}^{2k_0+2}$, ce qui s'écrit avec les notations des pas 4 et 5 :

$$1-(x.x)(y.y) \equiv a^2 (\operatorname{mod} \mathscr{P}^{2k_0+2}) \qquad \text{avec} \quad a \in A.$$

Il vient

$$(a-1)(a+1) \equiv 0 (\operatorname{mod} \mathscr{P}^{2k_0+1}).$$

Puisque $2k_0+1 < 2e$ nous avons nécessairement $v(a-1) = v(a+1)$ donc

$$(x.x)(y.y) \equiv 0 (\operatorname{mod} \mathscr{P}^{2k_0+2}).$$

Le pas 1 montre :

Pas 6. — $v(x.x) = v(y.y) = k_0+1$.

Pas 7. — $k_0 = e-1$;

Trivial si $e = 1$. Démonstration par l'absurde si $e > 1$. Si $k_0 < e-1$, soient b et $c \in A$:

$$(bx+cy).(bx+cy) \equiv b^2(x.x)+c^2(y.y)(\operatorname{mod} \mathscr{P}^{k_0+2})$$

il existe (b, c) primitif dans A^2 tel que

$$(bx+cy).(bx+cy) \equiv 0 (\operatorname{mod} \mathscr{P}^{k_0+2}).$$

Ce pas est le dernier de la démonstration, en effet nous sommes arrivés à :

$$C = \operatorname{coker}\left[\left\langle \frac{2}{\pi^{e-1}} \right\rangle \otimes \begin{pmatrix} x.x & 1 \\ 1 & y.y \end{pmatrix}\right] \qquad \text{avec} \quad x.x \equiv y.y \equiv 0 (\operatorname{mod} 2).$$

2.3. Les points précédents traitaient de qe-modules sur un anneau de valuation discrète, d'après 1.7 l'hypothèse que l'anneau est complet ne peut rien amener de nouveau dans ce domaine. Il n'en est bien sur pas de même pour les formes bilinéaires et quadratiques sur A et K.

LEMME 2.3 (Hensel). — *Soient* A *un anneau de valuation discrète complet et* P *un* q-module *sur* A, *les deux propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) *Il existe un élément primitif* e_0 *de* P *tel que* $q(e_0) \in \mathscr{P}$.

(ii) *Il existe un élément primitif* e *de* P *tel que* $q(e) = 0$.

Démonstration de (i) $\Rightarrow$ (ii). — Il existe $f_0 \in P$ tel que $e_0.f_0 = 1$, posons $e_1 = e_0 - q(e_0) f_0$; nous avons $q(e_1) = q(e_0)^2 q(f_0)$ et $v[q(e_1)] \geqq 2$ [avec la convention $v(0) = +\infty$]. En itérant le procédé nous construisons deux suites $\{ e_n \}$ et $\{ f_n \}$ d'éléments de P tels que :

$$v[q(e_n)] \geqq 2^n,$$

$$e_n.f_n = 1,$$

$$e_{n+1} = e_n - q(e_n) f_n.$$

La suite $\{ e_n \}$ converge vers un élément primitif e tel que $q(e) = 0$.

COROLLAIRE 2.4. — *Si* A *est un anneau de valuation discrète complet de corps résiduel* $\overline{\mathrm{K}}$ *l'homomorphisme naturel :*

$$\mathrm{WQ}(\mathrm{A}) \to \mathrm{WQ}(\overline{\mathrm{K}})$$

est un isomorphisme. □

La surjectivité est claire, l'injectivité résulte de 2.3.

2.5. Soit A un anneau de valuation discrète tel que $\overline{\mathrm{K}}$ est de caractéristique différente de 2 et que $\mathrm{I}^2(\overline{\mathrm{K}}) = 0$, $\mathrm{I}(\overline{\mathrm{K}})$ peut être regardé comme un sous-groupe de WQ (K, A) (2.2).

PROPOSITION 2.5. — *Soient* A *un anneau de valuation discrète complet,* K *son corps des fractions,* $\overline{\mathrm{K}}$ *son corps résiduel. On suppose que* $\overline{\mathrm{K}}$ *est de caractéristique différente de* 2 *et que* $\mathrm{I}^2(\overline{\mathrm{K}})$ *est nul. L'homomorphisme*

$$\delta: \quad \mathrm{WQ}(\mathrm{K})(\simeq \mathrm{W}(\mathrm{K})) \to \mathrm{WQ}(\mathrm{K}, \mathrm{A})(\simeq \mathrm{W}(\mathrm{K}, \mathrm{A}))$$

induit un isomorphisme de $\mathrm{I}^2(\mathrm{K})$ *sur* $\mathrm{I}(\overline{\mathrm{K}})$. *L'idéal* $\mathrm{I}^3(\mathrm{K})$ *est nul.* □

La démonstration est classique.

Les deux formules

$$\mathrm{I}(\mathrm{K}) = \mathrm{I}(\mathrm{A}) + \langle \pi, -1 \rangle \otimes \mathrm{W}(\mathrm{A}),$$

$$\langle \pi, -1 \rangle \otimes \langle \pi, -1 \rangle = -\langle 1, 1 \rangle \otimes \langle \pi, -1 \rangle$$

entraînent par récurrence :

$$\mathrm{I}^n(\mathrm{K}) = \mathrm{I}^n(\mathrm{A}) + \langle \pi, -1 \rangle \otimes \mathrm{I}^{n-1}(\mathrm{A}) \qquad (n \geqq 1).$$

D'après 2.4 $\mathrm{I}^n(\mathrm{A})$ est isomorphe à $\mathrm{I}^n(\overline{\mathrm{K}})$, d'où dans ce cas-ci :

$$\mathrm{I}^2(\mathrm{K}) = \langle \pi, -1 \rangle \otimes \mathrm{I}(\mathrm{A}) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{I}^3(\mathrm{K}) = 0.$$

L'homomorphisme surjectif μ :

$$\mathrm{I}(\mathrm{A}) \longrightarrow \mathrm{I}^2(\mathrm{K}),$$
$$w \longmapsto \langle \pi, -1 \rangle \otimes w$$

ne dépend pas du choix de π puisque $\mathrm{I}^2(\mathrm{A})$ est nul; il fait commuter le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{I}(\mathrm{A}) & \xrightarrow{\mu} & \mathrm{I}^2(\mathrm{K}) \\ \downarrow \wr & & \downarrow \delta \\ \mathrm{I}(\overline{\mathrm{K}}) & \subsetneq & \mathrm{W}(\mathrm{K}, \mathrm{A}) \end{array}$$

On en déduit que μ est un isomorphisme et que δ induit un isomorphisme de $\mathrm{I}^2(\mathrm{K})$ sur $\mathrm{I}(\overline{\mathrm{K}})$.

LEMME 2.6. — *Soient* A *un anneau de valuation discrète complet de caractéristique* 0 *dont le corps résiduel* $\overline{K}$ *est de caractéristique* 2, m *un élément de* A, $\overline{m}$ *sa classe dans* $\overline{K}$, *les deux conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) $1+4m$ *est un carré.*

(ii) $\overline{m} \in \mathfrak{P}(\overline{K})$.

Une unité de A *est un carré dès qu'elle est un carré modulo* $4\mathscr{P}$. □

Démonstration. — La deuxième partie du lemme est une conséquence de la première. Procédons par équivalences : $1+4m$ est un carré $\Leftrightarrow$ la forme quadratique sur A^2, mx^2+xy-y^2, représente $0 \Leftrightarrow \overline{m} \in \mathfrak{P}(\overline{K})$.

2.7 L'anneau A vérifie les hypothèses de 2.6. L'application

$$A \longrightarrow K^*/K^{*2},$$
$$m \longmapsto 1+4m$$

est un homomorphisme (2.6) qui induit un homomorphisme surjectif : $\overline{K} \to \operatorname{Ker} \alpha_2$ dont le noyau est $\mathfrak{P}(\overline{K})$, il en résulte un isomorphisme : $\operatorname{Ker} \alpha_2 \simeq \overline{K}/\mathfrak{P}(\overline{K})$ tel que :

LEMME 2.7. — *Le diagramme*

$$\begin{array}{ccc} WQ(A) & \xrightarrow{\sim} & WQ(\overline{K}) \\ {\scriptstyle\Delta}\downarrow & & \downarrow \\ \operatorname{Ker} \alpha_2 & \xrightarrow{\sim} & \overline{K}/\mathscr{P}(\overline{K}) \end{array}$$

où la flèche verticale de droite est l'invariant de Arf, *est commutatif.*

Démonstration. — L'application : $A^2 \to A$, $(x, y) \longmapsto ax^2+xy+by^2$ est une forme quadratique non dégénérée qui fait de A^2 un q-module, P. Nous avons $\Delta(P) = 1-4ab$ et l'invariant de Arf de $\overline{K} \otimes P$ est bien la classe de ab dans $\overline{K}/\mathfrak{P}(\overline{K})$. Comme tout q-module sur A est une somme orthogonale de q-modules du type précédent (*voir* 1.12) le lemme est démontré.

2.8. Soit A un anneau de valuation discrète tel que $\overline{K}$ est de caractéristique 2 et parfait, $WQ(\overline{K})$ peut être regardé comme un sous-groupe de $WQ(K, A)$ (2.2).

PROPOSITION 2.8. — *Soient* A *un anneau de valuation discrète complet de caractéristique* 0, K *son corps des fractions,* $\overline{K}$ *son corps résiduel qu'on suppose de caractéristique* 2 *et parfait. L'homomorphisme* $\delta : WQ(K)\ (\simeq W(K)) \to WQ(K, A)$ *induit un isomorphisme de* $I^2(K)$ *sur* $WQ(\overline{K})$. *L'idéal* $I^3(K)$ *est nul.* □

Démonstration. — Si $\overline{K}$ est parfait, l'invariant de Arf : $WQ(\overline{K}) \to \overline{K}/\mathfrak{P}(\overline{K})$ est un isomorphisme, le lemme 2.7 montre que $WQ(A) \cap I^2(K) = 0$. D'après 1.5 la restriction de $\delta : I^2(K) \to WQ(K, A)$ est injective.

Le carré

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{I}(\mathrm{K}) & \xrightarrow{\delta} & \mathrm{W}(\mathrm{K}, \mathrm{A}) \\ {\scriptstyle\Delta}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\omega}\,\wr \\ \mathrm{K}^*/\mathrm{K}^{*2} & \xrightarrow{v} & \mathbf{Z}/2 \end{array}$$

est commutatif. Il en résulte $\mathrm{I}^2(\mathrm{K}) \subset \mathrm{I}(\mathrm{A})$, d'après 2.2 nous avons alors $\delta[\mathrm{I}^2(\mathrm{K})] \subset \mathrm{WQ}(\overline{\mathrm{K}})$. L'homomorphisme :

$$\mathrm{WQ}(\mathrm{A}) \to \mathrm{I}^2(\mathrm{K}),$$
$$w \longrightarrow \langle \pi, -1 \rangle \otimes w$$

ne dépend pas du choix de π puisque $\mathrm{I}(\mathrm{A})\,\mathrm{WQ}(\mathrm{A})$ est isomorphe à $\mathrm{I}(\overline{\mathrm{K}})\,\mathrm{WQ}(\overline{\mathrm{K}})$ qui est nul; il fait commuter le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} & & \mathrm{I}^2(\mathrm{K}) \\ & \nearrow & \downarrow{\scriptstyle\delta} \\ \mathrm{WQ}(\mathrm{A}) & \longrightarrow & \mathrm{WQ}(\overline{\mathrm{K}}). \end{array}$$

Nous en déduisons que δ est un isomorphisme et que $\mathrm{I}^2(\mathrm{K}) = \langle \pi, -1 \rangle \otimes \mathrm{WQ}(\mathrm{A})$.

Les deux formules :

$$\mathrm{I}(\mathrm{K}) = \mathrm{I}(\mathrm{A}) + \langle \pi, 1 \rangle \otimes \mathrm{W}(\mathrm{A}),$$
$$\mathrm{I}^2(\mathrm{K}) = \langle \pi, -1 \rangle \otimes \mathrm{WQ}(\mathrm{A})$$

entraînent $\mathrm{I}^3(\mathrm{K}) = 0$.

2.9. Le produit tensoriel des b-espaces vectoriels sur un corps K fournit une application bilinéaire :

$$\mathrm{I}(\mathrm{K})/\mathrm{I}^2(\mathrm{K}) \times \mathrm{I}(\mathrm{K})/\mathrm{I}^2(\mathrm{K}) \to \mathrm{I}^2(\mathrm{K})/\mathrm{I}^3(\mathrm{K})$$

ou encore

$$\mathrm{K}^*/\mathrm{K}^{*2} \times \mathrm{K}^*/\mathrm{K}^{*2} \longrightarrow \mathrm{I}^2(\mathrm{K})/\mathrm{I}^3(\mathrm{K}),$$
$$a, b \longmapsto (a, b) \equiv \{a, b\} \pmod{\mathrm{I}^3}$$

avec $\{a, b\} = (\langle a \rangle - \langle 1 \rangle) \otimes (\langle b \rangle - \langle 1 \rangle)$ (cette application est le symbole universel sur K à valeurs dans un groupe abélien annulé par 2 [11], III-5.8).

Avec les notations de 2.5 et 2.6 nous avons pour tout x dans K^* :

$$\begin{aligned} \{x, 1+4m\} &= \langle x, -1 \rangle \otimes \langle 1+4m, -1 \rangle \\ &= \langle x, -1 \rangle \otimes \langle 2 \rangle \otimes \begin{pmatrix} 2m & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \\ &\equiv \langle x, -1 \rangle \otimes \begin{pmatrix} 2m & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \pmod{\mathrm{I}^3}. \end{aligned}$$

Écrivons $x=u\,\pi^{v(x)}$ avec $u\in A^*$; il vient

$$\{x,\, 1+4m\} \equiv \langle u,\, -1\rangle \otimes \begin{pmatrix} 2m & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} + v(x)\langle \pi,\, -1\rangle \otimes \begin{pmatrix} 2m & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} (\operatorname{mod} I^3).$$

Comme l'élément $\begin{pmatrix} 2m & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ de W (K) provient de WQ (A) le résultat précédent se simplifie avec les hypothèses de 2.8 :

$$(x,\, 1+4m) = \{x,\, 1+4m\} = v(x)\langle \pi,\, -1\rangle \otimes \begin{pmatrix} 2m & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

En notant φ la composition des isomorphismes :

$$I^3(K) \xrightarrow{\delta} WQ(\overline{K}) \xrightarrow{\text{Arf}} \overline{K}/\mathfrak{P}(\overline{K})$$

nous obtenons la formule :

$$\varphi\,[(x,\, 1+4m)] = v(x)\,[\text{classe de } m \text{ dans } \overline{K}/\mathfrak{P}(\overline{K})].$$

Le sous-espace, Ker α_2, de A^*/A^{*2} (*voir* 1.12) est aussi un sous-espace de K^*/K^{*2}, la formule ci-dessus montre que son orthogonal par rapport au symbole universel est A^*/A^{*2}. Le symbole universel induit donc sur E_2 (A) une forme bilinéaire symétrique à valeurs dans $\overline{K}/\mathfrak{P}(\overline{K})$. Dans le cas où $\overline{K}$ est fini, $\overline{K}/\mathfrak{P}(\overline{K})$ est isomorphe à μ_2 et le symbole universel est le symbole de Hilbert. Comme il est non dégénéré, il en est de même de la forme bilinéaire induite sur E_2 (A).

Vecteurs de Wu. — Les deux derniers points de ce paragraphe étendent les points ([3], A-2.6, A-2.7) qui sont classiques.

2.10. Soit A un anneau qui vérifie les hypothèses de la proposition 2.2 avec en outre $v(2)=1$; notons s la surjection canonique : $A \to A/2A=\overline{K}$ et φ l'automorphisme de $\overline{K} : \xi \longmapsto \xi^2$.

Considérons un b-module sur A, P. comme l'application :

$$\overline{K}\otimes P \to \overline{K},$$
$$\overline{x} \longmapsto \varphi^{-1}(\overline{x}.\overline{x})$$

est $\overline{K}$-linéaire, il existe un élément w de P, défini modulo 2 P, tel que

$$\forall x\in P, \quad x.x \equiv (w.x)^2 (\operatorname{mod} 2\,A).$$

En particulier : $w.w \equiv (w.w)^2 (\operatorname{mod} 2\,A)$, $w.w$ appartient au sous-anneau de A, $B=s^{-1}(\mathbf{F}_2)$. Posons $T=s^{-1}[\mathfrak{P}(\overline{K})]$, T est un sous-B-module de A, 4 T est un idéal de B. La valeur de $w.w$ modulo 4 T est indépendante du choix de w.

En effet

$$(w+2t).(w+2t) = w.w+4(w.t+t.t) \quad \text{et} \quad w.t+t.t \equiv w.t+(w.t)^2 (\operatorname{mod} 2\,A).$$

D'autre part si P possède un facteur direct I qui est son propre orthogonal, on peut choisir w dans I.

En associant à la classe de Witt du b-module P la valeur de $w.w$ modulo 4 T on définit un homomorphisme d'anneau ν :

$$\mathrm{W}(\mathrm{A}) \to \mathrm{B}/4\,\mathrm{T}$$

Il est surjectif : $\nu(\langle 1+2h \rangle) \equiv 1+2h \pmod{4\,\mathrm{T}}$ $(h \in \mathrm{A})$.

PROPOSITION 2.10. — *Le noyau de l'homomorphisme* ν *est* WQ (A). □

Démonstration. — La restriction de ν à WQ (A) est nulle. Représentons une classe du noyau de ν par un b-module P. Si $x.x \in 2\,\mathrm{A}$ pour tout x de P, P est sous-jacent à un q-module. Plaçons-nous en dehors de ce cas. Il existe $c \in \mathrm{A}$ tel que $w.w \equiv 4(c+c^2) \pmod{8\,\mathrm{A}}$. Comme $w \notin 2\,\mathrm{P}$, il existe t dans P tel que $w.t \equiv c \pmod{2\,\mathrm{A}}$. Puisque

$$(w+2t).(w+2t) \equiv 0 \pmod{8\,\mathrm{A}}$$

nous pouvons, sans perdre de généralité, supposer $w.w \equiv 0 \pmod{8\,\mathrm{A}}$. Soit Q le réseau sur $\mathrm{K} \otimes \mathrm{P}$ engendré par $w/2$ et les éléments x de P tels que $x.x \equiv 0 \pmod{2\,\mathrm{A}}$, on vérifie $\mathrm{Q}^{\#} = \mathrm{Q}$ et $y.y \equiv 0 \pmod{2\,\mathrm{A}}$ pour tout y de Q. L'homomorphisme naturel : $\mathrm{W}(\mathrm{A}) \to \mathrm{W}(\mathrm{K})$ étant injectif, les deux b-modules P et Q ont la même classe de Witt.

2.11. D'après 1.5. il existe un isomorphisme ρ de V (K, A) sur B/4 T qui fait commuter le diagramme :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{W(A)} \arrow[rr, "\delta"] \arrow[dr, "\nu"'] & & \mathrm{V(K,A)} \arrow[dl, "\rho", "\sim"'] \\
& \mathrm{B}/4\mathrm{T} &
\end{tikzcd}$$

[Nous avons encore noté δ la restriction de l'homomorphisme : $\mathrm{WQ}(\mathrm{K}) \to \mathrm{WQ}(\mathrm{K}, \mathrm{A})$.] Voici une description directe de l'isomorphisme ρ. Soit C un qe-module sur A tel que le e-module sous-jacent soit stablement neutre, d'après [3], A-1.14 il est neutre et contient un sous-module I tel que $\mathrm{I} = \mathrm{I}^{\perp}$. Soit $x \in \mathrm{I}$, $2\,q(x) = x.x = 0$, $q(x)$ est dans l'image de l'injection $i : \overline{\mathrm{K}} \to \mathrm{K}/\mathrm{A}$ induite par la multiplication par $1/2 : \mathrm{A} \to \mathrm{K}$. Il existe un élément u de C défini modulo I tel que

$$\mathrm{V}\, x \in \mathrm{I}, \qquad [i \circ \varphi^{-1} \circ i^{-1}]\,[q(x)] = u.x.$$

Puisque $2\,u \in \mathrm{I}$, $8\,q(u) = 0$ et il existe b dans A tel que $q(u) \equiv b/8 \pmod{\mathrm{A}}$. On vérifie que b appartient à B et que la valeur de b modulo 4 T est indépendante du choix de u. Elle est aussi indépendante du sous-module I tel que I=I , en effet par la même méthode qu'en [3] on montre : $\rho([\mathrm{C}]) \equiv b \pmod{4\,\mathrm{T}}$.

A la filtration : $V(K, A) \supset V^1(K, A) \supset WQ(\bar{K})$ correspond la filtration : $B/4T \supset 2A/4T \supset 4A/4T$ dont le gradué est : $B/2A$, $A/2A$, A/T. Les diagrammes suivant commutent :

$$\begin{tikzcd}
V(K,A)/V^1(K,A) \arrow[rr, dash, "\sim"] \arrow[dr, "\tau"', "\sim"] & & B/2A \arrow[dl, "s", "\sim"'] \\
& \mathbf{F}_2 &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
WQ(\bar{K}) \arrow[rr, dash, "\sim"] \arrow[dr, "\mathrm{Arf}"', "\sim"] & & A/T \arrow[dl, "s", "\sim"'] \\
& \bar{K}/\wp(\bar{K}) &
\end{tikzcd}$$

L'application : $A \to A^*$, $h \mapsto 1+2h$ induit un isomorphisme de $A/2A$ sur $E_2(A)$ qui fait commuter le diagramme :

$$\begin{tikzcd}
V^1(K,A)/WQ(\bar{K}) \arrow[rr, dash, "\sim"] \arrow[dr, "\bar{\Delta}"', "\sim"] & & A/2A \arrow[dl, "\sim"'] \\
& E_2(A) &
\end{tikzcd}$$

3. Transfert local

3.1. Soient, L une extension de degré fini d'un corps K, s une forme K-linéaire non nulle : $L \to K$, et E un b-espace vectoriel sur L, l'application :

$$E \times E \longrightarrow K,$$
$$(x, y) \longmapsto s(x.y)$$

est une forme K-bilinéaire symétrique non dégénérée. On a ainsi un transfert : $E \to s^* E$ qui a un b-espace vectoriel sur L fait correspondre un b-espace vectoriel sur K, cette notion est due à Scharlau ([14], [15], [7]), elle s'étend aussitôt aux formes quadratiques. Le transfert induit un homomorphisme :

$$s^*: \quad W(L) \to W(K)$$

ou

$$s^*: \quad WQ(L) \to WQ(K)$$

3.2. Pour $l \in \mathrm{L}$ on a la formule

$$\det(s^*\langle l\rangle) = \det(s^*\langle 1\rangle)\mathrm{N}_{\mathrm{L/K}}(l).$$

On en déduit en général ([10], 2.2) :

$$\det(s^*\mathrm{E}) = [\det(s^*\langle 1\rangle)]^{\dim \mathrm{E}}\,\mathrm{N}_{\mathrm{L/K}}[\det(\mathrm{E})]$$

et

LEMME 3.2. — *Le diagramme*

$$\begin{tikzcd} \mathrm{I(L)} \arrow[r, "s^*"] \arrow[d, "\Delta"'] & \mathrm{I(K)} \arrow[d, "\Delta"'] \\ \mathrm{L}^*/\mathrm{L}^{*2} \arrow[r, "\mathrm{N}_{\mathrm{L/K}}"] & \mathrm{K}^*/\mathrm{K}^{*2} \end{tikzcd}$$

est commutatif. □

3.3. De même en caractéristique 2 :

LEMME 3.3. — *Le diagramme*

$$\begin{tikzcd} \mathrm{WQ(L)} \arrow[r, "s^*"] \arrow[d, "\mathrm{Arf}"'] & \mathrm{WQ(K)} \arrow[d, "\mathrm{Arf}"'] \\ \mathrm{L}/\mathfrak{P}(\mathrm{L}) \arrow[r, "\mathrm{tr}_{\mathrm{L/K}}"] & \mathrm{K}/\mathfrak{P}(\mathrm{K}) \end{tikzcd}$$

est commutatif. □

Par la suite nous n'aurons besoin de ce lemme que dans le cas où K et L sont parfaits, la démonstration dans ce cas particulier sera donnée en 3.11, la démonstration générale est rejetée en appendice.

3.4. Soient A un anneau de Dedekind de corps des fractions K, L une extension de degré fini de K, B la fermeture intégrale de A dans L. Nous notons $\mathrm{B}^{s\#}$ l'ensemble des éléments l de L tels que

$$\forall\, b \in \mathrm{B},\quad s(lb) \in \mathrm{A}.$$

DÉFINITION 3.4. — *Nous dirons qu'une forme linéaire non nulle* $s : \mathrm{L} \to \mathrm{K}$, *telle que* $\mathrm{B}^{s\#} = \mathrm{B}$, *est équilibrée par rapport à* A (*ou simplement équilibrée s'il n'y a pas de doute sur le choix de* A). □

Si s et s' sont deux formes linéaires équilibrées, il existe une unité u de B telle que $s'(l) = s(ul)$.

Pour qu'il existe une forme linéaire équilibrée, il faut d'abord :

(E_1) Il existe une forme linéaire non nulle, t, telle que $t(\mathrm{B}) \subset \mathrm{A}$.

Cette condition équivaut à la suivante [16] (I.4) :

(F) L'anneau B est un A-module de type fini.

Quand (E_1) est réalisée, la classe $\mathfrak{D}$ de l'idéal de B, $(\mathrm{B}^{t\#})^{-1}$, ne dépend pas du choix de t.

Il faut ensuite :

(E_2) La classe $\mathfrak{D}$ est la classe principale.

Soit alors g un générateur de l'idéal $(B^{t\#})^{-1}$, la forme linéaire : $l \longmapsto t\,(l/g)$ est équilibrée. Ceci établit une bijection entre les générateurs de $(B^{t\#})^{-1}$ et les formes linéaires équilibrées.

Quand l'extension L/K est séparable, il faut et il suffit que la différente $\mathscr{D}_{B/A}$ soit principale pour qu'il existe une forme linéaire équilibrée.

Quand A est un anneau de valuation discrète complet il en existe toujours.

3.5. Soit s une forme linéaire équilibrée. Elle induit deux applications A-linéaires notées encore s :

$$B \longrightarrow A$$

$$L/B \to K/A.$$

Lemme 3.5. — *Soient* C *un e-module sur* B *et* I *un sous*-B-*module de* C. *Soit* $x \in C$, *les deux propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) *Pour tout* $y \in I$, $s(x.y)=0$.

(ii) *Pour tout* $y \in I$, $x.y=0$. □

Démonstration. — Montrons (i) ⇒ (ii). Soient $y \in I$ et $l \in L$ un représentant de $x.y$. Pour tout $b \in B$:

$$l\,b \equiv x.(by) \pmod{B}.$$

Donc $s\,(lb) \in A$. Puisque s est équilibrée $l \in B$.

Corollaire 3.6. — *Soit* C *un e-module sur* B, *l'application*

$$C \times C \longrightarrow K/A,$$

$$(x, y) \longmapsto s(x.y)$$

est une forme A-*bilinéaire symétrique non dégénérée.* □

Démonstration. — Par restriction des scalaires, C est un A-module de torsion de type fini, il suffit d'appliquer le lemme 3.5 avec $I=0$.

3.7. La forme d'enlacement de 3.6 fait de C un e-module sur A que nous notons $s^*\,C$, De même, soient C un qe-module sur B et $q : C \to L/B$ sa forme quadratique d'enlacement. nous notons $s^*\,C$ le qe-module sur A, $(C, s \circ q)$. Le lemme 3.5 montre que le transfert : $C \to s^*\,C$ induit des homomorphismes notés s^* :

$$W(L, B) \longrightarrow W(K, A)$$

$$WQ(L, B) \to WQ(K, A).$$

LEMME 3.8. — *Soient* E *un b-espace vectoriel sur* L *et* P *un* B-*réseau sur* E, $P^{\#}$ *le* B-*réseau dual de* P. *Le* A-*réseau sous-jacent à* $P^{\#}$ *est le dual dans* s^* C *du* A-*réseau sous-jacent à* P. □

Démonstration. — Analogue à celle de 3.5.

COROLLAIRE 3.9. — *Soit* P *un b-module sur* B, *l'application*

$$P \times P \longrightarrow A,$$
$$(x, y) \longmapsto s(x.y)$$

est une forme A-*bilinéaire symétrique non dégénérée.* □

3.10. Finalement la donnée d'une forme linéaire équilibrée s (quand il en existe) permet de définir les transferts :

b-espaces vectoriels sur L → b-espaces vectoriels sur K;

q-espaces vectoriels sur L → q-espaces vectoriels sur K;

e-modules sur B → e-modules sur A;

qe-modules sur B → qe-modules sur A;

b-modules sur B → b-modules sur A;

q-modules sur B → q-modules sur A;

et les homomorphismes de transfert entre les groupes de Witt correspondants; le diagramme ci-dessous, où les flèches obliques sont les homomorphismes d'oubli et les flèches verticales les homomorphismes de transfert, est commutatif (essentiellement 3.8) :

$$\begin{tikzcd}
WQ(B) \arrow[rr] \arrow[dr] \arrow[dd, "s^*"'] & & WQ(L) \arrow[rr] \arrow[dr] \arrow[dd, "s^*"'] & & WQ(L,B) \arrow[dr] \arrow[dd, "s^*"'] & \\
& W(B) \arrow[rr] \arrow[dd, "s^*"'] & & W(L) \arrow[rr, "\delta"] \arrow[dd, "s^*"'] & & W(L,B) \arrow[dd, "s^*"'] \\
WQ(A) \arrow[rr] \arrow[dr] & & WQ(K) \arrow[rr, "\delta"] \arrow[dr] & & WQ(K,A) \arrow[dr] & \\
& W(A) \arrow[rr] & & W(K) \arrow[rr, "\delta"] & & W(K,A)
\end{tikzcd}$$

3.11. Démonstration de 3.3 dans le cas où K et L sont parfaits (si l'un des deux corps est parfait il en est de même de l'autre). Remarquons d'abord qu'il suffit de vérifier le lemme 3.3 pour une seule forme linéaire non nulle, en particulier pour $tr_{L/K}$ qui dans notre cas est non nulle. Il existe ([16], II-5) deux anneaux A et B de valuation discrète complets qui sont absolument non ramifiés et admettent K et L pour corps résiduels. De plus : $A \subset B$; si $\tilde{K}$ et $\tilde{L}$ sont les corps de fractions de A et B, $\tilde{L}$ est une extension séparable de $\tilde{K}$ de degré $[L : K]$; l'anneau B est la fermeture intégrale de A dans $\tilde{L}$; la forme linéaire $tr_{\tilde{L}/\tilde{K}}$ est équilibrée par rapport à A.

Le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{WQ}(\mathrm{B}) & \xrightarrow{\mathrm{tr}^*_{\tilde{\mathrm{L}}/\tilde{\mathrm{K}}}} & \mathrm{WQ}(\mathrm{A}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{WQ}(\mathrm{L}) & \xrightarrow{\mathrm{tr}^*_{\mathrm{L}/\mathrm{K}}} & \mathrm{WQ}(\mathrm{K}) \end{array}$$

est commutatif et nous avons la congruence :

$$\text{pour } m \in \mathrm{B} : \qquad \mathrm{N}_{\tilde{\mathrm{L}}/\tilde{\mathrm{K}}}(1+4\,m) \equiv 1+4\,\mathrm{tr}_{\tilde{\mathrm{L}}/\tilde{\mathrm{K}}}(m) \qquad (\mathrm{mod}\ 16\ \mathrm{A}).$$

La démonstration s'achève en appliquant 2.7, 3.2 et 3.10.

3.12. En sus des hypothèses de 3.5 nous supposons que B est de valuation discrète, il en est de même de A. Soient, π_{A} une uniformisante de A, π_{B} une uniformisante de B, $\overline{\mathrm{K}}$ le corps résiduel de A, $\overline{\mathrm{L}}$ le corps résiduel de B, et t la forme $\overline{\mathrm{K}}$-linéaire (non nulle) qui fait commuter le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} \overline{\mathrm{L}} & \xrightarrow{t} & \overline{\mathrm{K}} \\ {\scriptstyle \times 1/\pi_{\mathrm{B}}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \times 1/\pi_{\mathrm{A}}} \\ \mathrm{L}/\mathrm{B} & \xrightarrow{s} & \mathrm{K}/\mathrm{A}. \end{array}$$

Le diagramme ci-dessous où les flèches verticales sont celles de 2.1 est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{WQ}(\overline{\mathrm{L}}) & \xrightarrow{t^*} & \mathrm{WQ}(\overline{\mathrm{K}}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{WQ}(\mathrm{L}, \mathrm{B}) & \xrightarrow{s^*} & \mathrm{WQ}(\mathrm{K}, \mathrm{A}). \end{array}$$

3.13. Supposons maintenant que K est un corps local dont le corps résiduel est de caractéristique différente de 2. Nous avons, d'après 2.5, 3.2 et 3.12, un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{I}^2(\mathrm{L}) & \xrightarrow{s^*} & \mathrm{I}^2(\mathrm{K}) \\ {\scriptstyle \delta}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \delta} \\ \mathrm{I}(\overline{\mathrm{L}}) & \xrightarrow{t^*} & \mathrm{I}(\overline{\mathrm{K}}) \end{array}$$

dans lequel les flèches horizontales ne dépendent pas du choix des formes linéaires non nulles s et t puisque $\mathrm{I}^3(\mathrm{L})$ et $\mathrm{I}^2(\overline{\mathrm{L}})$ sont nuls. D'autre part d'après 3.2 nous avons un autre diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{I}(\overline{\mathrm{L}}) & \xrightarrow{t^*} & \mathrm{I}(\overline{\mathrm{K}}) \\ {\scriptstyle \Delta}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \Delta} \\ \overline{\mathrm{L}}^*/\overline{\mathrm{L}}^{*2} & \xrightarrow{\mathrm{N}_{\overline{\mathrm{L}}/\overline{\mathrm{K}}}} & \overline{\mathrm{K}}^*/\overline{\mathrm{K}}^{*2}. \end{array}$$

Les homomorphismes t^* et s^* sont donc des isomorphismes [la méthode de démonstration de ce dernier résultat est essentiellement la même que celle employée par Scharlau ([13], 3.3)]. Supposons que K est un corps de caractéristique 0, complet pour une valuation discrète de corps résiduel $\overline{\mathrm{K}}$, de caractéristique 2 et parfait. Nous avons comme précédemment un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{I}^2(\mathrm{L}) & \xrightarrow{s^*} & \mathrm{I}^2(\mathrm{K}) \\ {\scriptstyle\delta}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\delta} \\ \mathrm{WQ}(\overline{\mathrm{L}}) & \xrightarrow{\bar{t}^*} & \mathrm{WQ}(\overline{\mathrm{K}}) \end{array}$$

dans lequel les flèches horizontales ne dépendent pas du choix de s et t (nous pouvons prendre en particulier $\mathrm{tr}_{\mathrm{L/K}}$ et $\mathrm{tr}_{\overline{\mathrm{L}}/\overline{\mathrm{K}}}$). D'autre part d'après 3.3 nous avons un autre diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{WQ}(\overline{\mathrm{L}}) & \xrightarrow{\bar{t}^*} & \mathrm{WQ}(\overline{\mathrm{K}}) \\ {\scriptstyle\mathrm{Arf}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\mathrm{Arf}} \\ \overline{\mathrm{L}}/\mathfrak{P}(\overline{\mathrm{L}}) & \xrightarrow{\mathrm{tr}_{\overline{\mathrm{L}}/\overline{\mathrm{K}}}} & \overline{\mathrm{K}}/\mathfrak{P}(\overline{\mathrm{K}}). \end{array}$$

Dans le cas où $\overline{\mathrm{K}}$ est fini, les homomorphismes t^* et s^* sont donc des isomorphismes. Nous avons démontré :

THÉORÈME 3.13 (Milnor [10], 2.3). — *Soient* K *un corps local de caractéristique différente de* 2, L *une extension de degré fini de* K, *et* $s : \mathrm{L} \to \mathrm{K}$ *une forme* K-*linéaire non nulle. L'homomorphisme :*

$$s^* : \quad \mathrm{I}^2(\mathrm{L}) \to \mathrm{I}^2(\mathrm{K})$$

est un isomorphisme. □

3.14. La fin de ce paragraphe est consacrée aux corps locaux de caractéristique 0. Soient K un tel corps et p la caractéristique de son corps résiduel; K est une extension de degré fini de $\mathbf{Q}_p$, choisissons une forme linéaire équilibrée $s : \mathrm{K} \to \mathbf{Q}_p$. Nous notons γ_s, la composée

$$\mathrm{WQ}(\mathrm{K}, \mathrm{A}) \xrightarrow{s^*} \mathrm{WQ}(\mathbf{Q}_p, \mathbf{Z}_p) \hookrightarrow \mathrm{WQ}(\mathbf{Q}, \mathbf{Z}) \xrightarrow{\gamma} \mu_8.$$

la flèche γ étant celle définie en [3] (A-2.12).

PROPOSITION 3.14. — *La composition*

$$\mathrm{I}^2(\mathrm{K}) \xrightarrow{\delta} \mathrm{WQ}(\mathrm{K}, \mathrm{A}) \xrightarrow{\gamma_s} \mu_8$$

est injective. □

Démonstration. — D'après 3.10 et 3.13 il suffit de démontrer la proposition dans le cas où $\mathrm{K} = \mathbf{Q}_p$. Elle résulte alors de 2.8 et du

LEMME 3.15 (Gauss). — *Soient* E *un* q-*espace vectoriel sur* $\mathbf{F}_p$ *de dimension* 2, *anisotrope. On a*

$$\sum_{x \in \mathrm{E}} e^{(2i\pi/p)\, q(x)} = -p. \quad \square$$

Démonstration. — Soit $t \in \mathbf{F}_p$, appelons $\mathrm{N}(t)$ le nombre des éléments x de E tels que $q(x)=t$. Nous avons

$$\Gamma = \sum_{x \in \mathrm{E}} e^{(2i\pi/p)\,q(x)} = \sum_{t \in \mathbf{F}_p} \mathrm{N}(t)\, e^{(2i\pi/p)\,t}.$$

Or $\mathrm{N}(t)=\mathrm{N}(1)$, si $t \neq 0$, puisque le q-espace vectoriel $\langle 1/t \rangle \otimes \mathrm{E}$ est isomorphe à E. D'où

$$\begin{aligned}\Gamma = \mathrm{N}(1) \sum_{t \in \mathbf{F}_p} e^{(2i\pi/p)\,t} - \mathrm{N}(1) + \mathrm{N}(0) &= \mathrm{N}(0) - \mathrm{N}(1)\\ &= \mathrm{N}(0) - \frac{p^2 - \mathrm{N}(0)}{p-1}\\ &= \frac{p\,\mathrm{N}(0) - p^2}{p-1}.\end{aligned}$$

Comme q est anisotrope, $\mathrm{N}(0)=1$.

3.16. Ce point utilise essentiellement la non-dégénérescence du symbole de Hilbert qui peut être facilement déduite de 3.13 pour les extensions quadratiques [7] (VII-3.2).

En 1.2 nous avons vu que WQ (K, A) est un W (A)-module, la composition :

$$\mathrm{W}(\mathrm{A}) \times \mathrm{WQ}(\mathrm{K}, \mathrm{A}) \to \mathrm{WQ}(\mathrm{K}, \mathrm{A}) \xrightarrow{\gamma_s} \mu_8$$

définit une application bilinéaire G_s.

Proposition 3.16. — *L'application bilinéaire* G_s :

$$\mathrm{W}(\mathrm{A}) \times \mathrm{WQ}(\mathrm{K}, \mathrm{A}) \to \mu_8$$

est non dégénérée. □

Démonstration. — Les suites exactes

$$0 \to \mathrm{W}(\mathrm{A}) \longrightarrow \mathrm{W}(\mathrm{K}) \xrightarrow{\delta} \mathrm{W}(\mathrm{K}, \mathrm{A}) \to 0$$

$$0 \to \mathrm{WQ}(\mathrm{A}) \to \mathrm{WQ}(\mathrm{K}) \xrightarrow{\delta} \mathrm{WQ}(\mathrm{K}, \mathrm{A}) \to 0$$

montre que les groupes W (A) et WQ (K, A) sont finis de même cardinal.

Il nous suffit donc de montrer qu'un élément w de W (A) tel que $\mathrm{G}_s(w, \delta w')=1$ pour tout élément w' de WQ (K) ($\simeq$ W (K)) est nul. Soit w un tel élément, d'après 1.4 et 3.14 si $w \otimes w' \in \mathrm{I}^2(\mathrm{K})$:

$$\mathrm{G}_s(w, \delta w') = 1 \iff w \otimes w' = 0.$$

Si $w' \in \mathrm{I}^2(\mathrm{K})$, $w \otimes w' = (\dim w)\, w'$, donc $w \in \mathrm{I}(\mathrm{K})$.

Comme $w \otimes w'=0$ pour tout $w' \in \mathrm{I}(\mathrm{K})$, d'après la non-dégénérescence du symbole de Hilbert $w \in \mathrm{I}^2(\mathrm{K})$.

En prenant alors $w'=1$ nous obtenons $w=0$.

3.17. Il existe une application bilinéaire dont la définition est analogue à celle de 3.16 :

$$\mathrm{WQ}(\mathrm{A}) \times \mathrm{W}(\mathrm{K}, \mathrm{A}) \to \mu_8.$$

Elle ne diffère de la précédente que dans le cas où K est de caractéristique 2. Plaçons-nous dans ce cas. Elle est non dégénérée (essentiellement 2.9). Elle ne dépend bien sur pas du choix de la forme linéaire équilibrée.

L'application G_s induit donc une application bilinéaire non dégénérée toujours notée G_s :

$$V(A) \times V(K, A) \to \mu_8$$

ou

$$V(A) \times V(A) \longrightarrow \mu_8.$$

[On peut aussi la définir à l'aide de la structure d'anneau de V (A) et de l'homomorphisme : $V(A) \to \mu_8$ induit par γ_s] ou encore

$$V(K, A) \times V(K, A) \to \mu_8.$$

4. Théorie naïve des extensions multiquadratiques non ramifiées d'un corps de nombres

Soit A l'anneau des entiers d'un corps de nombres K.

4.1. Une forme linéaire non nulle, $s : K \to \mathbf{Q}$, induit une forme linéaire non nulle, $s_{\mathscr{P}} : K_{\mathscr{P}} \to \mathbf{Q}_p$, pour tout idéal premier $\mathscr{P}$ de A qui divise le nombre premier p (on utilise l'isomorphisme canonique : $\mathbf{Q}_p \otimes K \simeq \prod_{\mathscr{P} \mid p} K_{\mathscr{P}}$).

LEMME 4.1. (Scharlau [13], 5.3). — *Soit* E *un b-espace vectoriel sur* K, *le b-espace vectoriel sur* $\mathbf{Q}_p$, $\mathbf{Q}_p \otimes s^* E$, *est canoniquement isomorphe à la somme orthogonale des b-espaces vectoriels,* $s_{\mathscr{P}}^* (K_{\mathscr{P}} \otimes E)$, $\mathscr{P}$ *divisant p :*

$$\mathbf{Q}_p \otimes s^* E \simeq \bigoplus_{\mathscr{P} \mid p} s_{\mathscr{P}}^* (K_{\mathscr{P}} \otimes E). \quad \square$$

4.2. La loi de réciprocité quadratique pour les corps de nombres se déduisent simplement de 4.1, 3.13, et de la loi de réciprocité quadratique pour $\mathbf{Q}$ (Scharlau [13]). Celle-ci est une conséquence immédiate de la formule de Milgram [8] (appendice) et [13] (appendice 4) et de 3.15.

4.3. Soient V_∞ l'ensemble des places réelles de K et K_v le complété de K à une place réelle v. Nous notons, $E_\infty(A)$ la somme directe $\bigoplus_{v \in V_\infty} K_v^*/K_v^{*2}$, α_∞ l'homomorphisme naturel : $D(A) \to E_\infty(A)$, $E(A)$ la somme directe $E_2(A) \oplus E_\infty(A)$, et $\alpha : D(A) \to E(A)$ le produit des homomorphismes α_2 et α_∞. Les groupes $E_2(A)$, $E_\infty(A)$, et $E(A)$, sont naturellement des b-espaces vectoriels sur $\mathbf{F}_2$; en effet $E_2(A)$ est la somme directe $\bigoplus_{\mathscr{P} \mid 2} E_2(A_{\mathscr{P}})$ où chacun des termes est un b-espace vectoriel sur $\mathbf{F}_2$ (*voir* 2.9), de même le symbole de Hilbert fait de chacun des K_v^*/K_v^{*2} sur b-espace vectoriel sur $\mathbf{F}_2$, la somme orthogonale donne une structure de b-espace vectoriel sur $\mathbf{F}_2$ à $E_2(A)$, $E_\infty(A)$, et $E(A)$.

LEMME 4.3. — *L'image de l'application* α *est un sous-espace de* E (A) *contenu dans son orthogonal.* □

Démonstration. — Soient $d, d' \in \mathrm{D}(\mathrm{A})$ et $\mathscr{P}$ un idéal premier non dyadique, le symbole de Hilbert $(d, d')_{\mathscr{P}}$ vaut 1 car d et d' sont dans le sous-groupe $\mathrm{A}_{\mathscr{P}}^{*}/\mathrm{A}_{\mathscr{P}}^{2*}$ de $\mathrm{K}_{\mathscr{P}}^{*}/\mathrm{K}_{\mathscr{P}}^{*2}$, nous avons donc $[\prod_{\mathscr{P}\mid 2}(d, d')_{\mathscr{P}}][\prod_{v\in \mathrm{V}_\infty}(d, d')_v]=1$.

COROLLAIRE 4.4. — *On a l'inégalité*

$$\dim_{\mathbf{F}_2}\operatorname{Ker}\alpha \geqq \dim_{\mathbf{F}_2}[\mathscr{C}(\mathrm{A})/\mathscr{C}^2(\mathrm{A})]. \quad \square$$

Démonstration. — La dimension de $\mathrm{E}_2(\mathrm{A})$ est le degré n de K sur **Q**; en effet la suite

$$\begin{array}{l} 0 \to \mathrm{A}/2\,\mathrm{A} \longrightarrow (\mathrm{A}/4\,\mathrm{A})^{*} \to (\mathrm{A}/4\,\mathrm{A})^{*} \\ \qquad x \longmapsto 1+2x \\ \qquad\qquad\qquad\qquad y \longmapsto y^2 \end{array}$$

est exacte. Soient r le nombre de plongements réels de K, c le nombre de plongements complexes, la dimension de E (A) est $2(r+c)$. D'après 4.3 nous avons rang (α) $\leqq r+c$. D'autre part : $\dim \mathrm{A}^{*}/\mathrm{A}^{*2}=r+c$ d'où

$$\dim \mathrm{D}(\mathrm{A}) = r+c+\dim[{}_2\mathscr{C}(\mathrm{A})] = r+c+\dim[\mathscr{C}(\mathrm{A})/\mathscr{C}^2(\mathrm{A})].$$

4.5. Soient $d\in \operatorname{Ker}\alpha_2$ et $\mathscr{P}$ un idéal premier de A, posons

$$\psi(d, \mathscr{P}) = \begin{cases} 1 & \text{si } d \text{ est un carré dans } \mathrm{K}_{\mathscr{P}}^{*} \\ -1 & \text{si } d \text{ n'est pas un carré dans } \mathrm{K}_{\mathscr{P}}^{*}. \end{cases}$$

LEMME 4.5. — *Pour tout* x *de* $\mathrm{K}_{\mathscr{P}}^{*}/\mathrm{K}_{\mathscr{P}}^{*2}$:

$$(d, x)_{\mathscr{P}} = [\psi(d, \mathscr{P})]^{v_{\mathscr{P}}(x)}. \quad \square$$

Démonstration. — Si d est un carré dans $\mathrm{K}_{\mathscr{P}}^{*}$ il n'y a rien à démontrer. Dans le cas contraire les deux membres sont des formes linéaires en x, non nulles sur $\mathrm{K}_{\mathscr{P}}^{*}/\mathrm{K}_{\mathscr{P}}^{*2}$ et nulles sur $\mathrm{A}_{\mathscr{P}}^{*}/\mathrm{A}_{\mathscr{P}}^{*2}$ qui est de codimension 1 (*voir* 2.9).

4.6. Comme l'image de $\operatorname{Ker}\alpha_2$ dans $\mathrm{K}_{\mathscr{P}}^{*}/\mathrm{K}_{\mathscr{P}}^{*2}$ est au plus d'ordre 2 l'application :

$$\begin{array}{c} \operatorname{Ker}\alpha_2 \longrightarrow \mu_2, \\ d \longmapsto \psi(d, \mathscr{P}) \end{array}$$

est un homomorphisme. On définit par linéarité $\psi(d, \mathrm{I})$ pour tout idéal fractionnaire, I, de A [$\psi(d, \mathrm{I})$ est le symbole d'Artin ($\mathrm{K}[\sqrt{d}]/\mathrm{I}$)]. Soient β_∞ l'extension naturelle de α_∞ à $\mathrm{K}^{*}/\mathrm{K}^{*2}$ et $(\ ,\ )_\infty$ la forme bilinéaire de $\mathrm{E}_\infty(\mathrm{A})$ à valeurs dans μ_2, nous pouvons énoncer :

LEMME 4.6. — *Pour tout* $d \in \operatorname{Ker} \alpha_2$ *et tout* $x \in K^*$:

$$\psi(d, xA) = (\alpha_\infty(d), \beta_\infty(x))_\infty$$

(*première partie de la loi de réciprocité d'Artin pour l'extension* $K[\sqrt{d}]/K$). □

Démonstration. — D'après 4.5 : $\psi(d, xA) = \prod_{\mathscr{P}} (d, x)_{\mathscr{P}}$. On applique alors la loi de réciprocité de Hilbert.

4.7. Soit $\hat{\mathscr{C}}(A)$ le groupe des classes au sens strict de A (deux idéaux I et J de A sont strictement équivalents s'il existe un élément k totalement positif de K tel que $J = kI$), nous avons défini une application bilinéaire ψ :

$$\operatorname{Ker} \alpha_2 \times \hat{\mathscr{C}}(A)/\hat{\mathscr{C}}(A)^2 \to \mu_2.$$

Elle induit une application bilinéaire φ :

$$\operatorname{Ker} \alpha \times \mathscr{C}(A)/\mathscr{C}^2(A) \to \mu_2.$$

LEMME 4.7. — *Les deux homomorphismes induits par* φ et ψ :

$$\operatorname{Ker} \alpha \to \operatorname{Hom}(\mathscr{C}(A)/\mathscr{C}^2(A), \mu_2),$$

$$\operatorname{Ker} \alpha_2 \to \operatorname{Hom}(\hat{\mathscr{C}}(A)/\hat{\mathscr{C}}(A)^2, \mu_2)$$

sont injectifs (*seconde partie de la loi de réciprocité d'Artin*). □

Démonstration. — Théorème du carré global ([12], 65-15).

La démonstration la plus « élémentaire » nous semble la démonstration analytique classique : si d n'était pas un carré dans K^* et était un carré dans tous les $K^*_{\mathscr{P}}$ on aurait $\zeta_{K[\sqrt{d}]}(s) = \zeta^2_K(s)$, égalité incompatible avec le comportement des fonctions zéta au voisinage de $s=1$.

4.8. La proposition suivante est une conséquence de 4.4 et 4.7.

PROPOSITION 4.8. — *L'application bilinéaire* φ :

$$\operatorname{Ker} \alpha \times \mathscr{C}(A)/\mathscr{C}^2(A) \to \mu_2$$

est non dégénérée. □

COROLLAIRE 4.9. — *Le rang de l'application* α *est* $r+c$, *le sous-espace image de* α *dans* $E(A)$ *est son propre orthogonal.* □

COROLLAIRE 4.10. — *L'orthogonal de l'image de* α_2 *dans* $E_2(A)$ *est le sous-espace* $\alpha_2(\operatorname{Ker} \alpha_\infty)$, *on a*

$$\operatorname{rang}(\alpha_2) \geqq \frac{n}{2} \quad \textit{et} \quad \dim \operatorname{Ker} \alpha_\infty = \dim \operatorname{coker} \alpha_2 + \dim [\mathscr{C}(A)/\mathscr{C}^2(A)]. \quad □$$

Corollaire 4.11. — *L'orthogonal de l'image de* α_∞ *dans* $E_\infty(A)$ *est le sous-espace* $\alpha_\infty(\operatorname{Ker}\alpha_2)$, *on a*

$$\operatorname{rang}(\alpha_\infty) \geqq \frac{r}{2} \quad \textit{et} \quad \dim \operatorname{Ker}\alpha_2 = \dim \operatorname{coker}\alpha_\infty + \dim[\mathscr{C}(A)/\mathscr{C}^2(A)]. \quad \square$$

4.12. Soit i l'homomorphisme : $\operatorname{coker}\alpha_\infty \to \hat{\mathscr{C}}(A)/\hat{\mathscr{C}}(A)^2$ qui fait commuter le diagramme :

$$\begin{array}{ccccccc} K^* & \longrightarrow & K^*/K^{*2} \xrightarrow{\beta_\infty} E_\infty(A) & \longrightarrow & \operatorname{coker}\alpha_\infty \\ \downarrow & & & & \downarrow i \\ \hat{\mathscr{C}}(A) & & \longrightarrow & & \hat{\mathscr{C}}(A)/\hat{\mathscr{C}}(A)^2. \end{array}$$

La suite

$$0 \to \operatorname{coker}\alpha_\infty \xrightarrow{i} \hat{\mathscr{C}}(A)/\hat{\mathscr{C}}(A)^2 \to \mathscr{C}(A)/\mathscr{C}(A)^2 \to 0$$

est exacte et nous avons un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \operatorname{Ker}\alpha & \longrightarrow & \operatorname{Ker}\alpha_2 & \xrightarrow{\alpha_\infty} & \alpha_\infty(\operatorname{Ker}\alpha_2) & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \to & \operatorname{Hom}(\mathscr{C}/\mathscr{C}^2, \mu_2) & \to & \operatorname{Hom}(\hat{\mathscr{C}}/\hat{\mathscr{C}}, \mu_2) & \to & \operatorname{Hom}(\operatorname{coker}\alpha_\infty, \mu_2) & \to & 0 \end{array}$$

où les lignes sont exactes et où les flèches verticales sont induites par ψ. D'après 4.8, 4.11 et le lemme des cinq :

Proposition 4.12. — *L'application bilinéaire* ψ :

$$\operatorname{Ker}\alpha_2 \times \hat{\mathscr{C}}(A)/\hat{\mathscr{C}}(A)^2 \to \mu_2$$

est non dégénérée. $\square$

4.13. On appelle extension multiquadratique de K une extension de la forme $K[\sqrt{d_1}, \sqrt{d_2}, \ldots, \sqrt{d_m}]$. Soit D le sous-espace de dimension fini de K^*/K^{*2} engendré par $d_1, d_2, \ldots, d_m$, nous noterons également cette extension $K[\sqrt{D}]$. Soient d un élément de D et σ un élément du groupe de Galois de $K[\sqrt{D}]/K$, en posant : $\sigma(\sqrt{d}) = \varepsilon(d, \sigma)\sqrt{d}$ on définit une application bilinéaire non dégénérée :

$$\varepsilon : \quad D \times G(K[\sqrt{D}]/K) \to \mu_2.$$

L'extension quadratique $K[\sqrt{d}]/K$ est non ramifiée ssi $d \in \operatorname{Ker}\alpha$, plus généralement l'extension multiquadratique $K[\sqrt{D}]$ est non ramifiée ssi $D \subset \operatorname{Ker}\alpha$. L'extension $K[\sqrt{\operatorname{Ker}\alpha}]/K$ est l'unique extension maximale multiquadratique non ramifiée i. e. l'unique extension maximale parmi les extensions de K, abélienne non ramifiée, dont le groupe de Galois est annulé par 2. La théorie du corps de classes de Hilbert montre que son groupe de Galois est canoniquement isomorphe à $\mathscr{C}(A)/\mathscr{C}^2(A)$, on retrouve 4.8.

De même $K[\sqrt{\operatorname{Ker}\alpha_2}]$ est la plus grande extension multiquadratique de K qui ne se ramifie en aucun idéal premier, son groupe de Galois est canoniquement isomorphe à $\hat{\mathscr{C}}(A)/\hat{\mathscr{C}}(A)^2$.

On aura intérêt à composer ce paragraphe 4 avec [2].

5. Globalisations

FORMES QUADRATIQUES SUR L'ANNEAU DES ENTIERS D'UN CORPS DE NOMBRES.

5.1. Soient A l'anneau des entiers d'un corps de nombres K, $\widetilde{WQ}(A)$ le noyau du discriminant $\Delta : WQ(A) \to D(A)$ et σ l'homomorphisme de signature totale : $W(K) \to (\mathbf{Z})^{V_\infty}$.

THÉORÈME 5.1. — *Soit* A *l'anneau des entiers d'un corps de nombres* K. *La signature totale :*

$$\sigma : \quad \widetilde{WQ}(A) \to (\mathbf{Z})^{V_\infty}$$

est injective (en particulier quand K *est totalement imaginaire, le groupe* $\widetilde{WQ}(A)$ *est nul). Son image est le sous-groupe de* $(\mathbf{Z})^{V_\infty}$ *formé des éléments* $(n_v)_{v\in V_\infty}$ *tels que :*

(i) *Pour tout* $n_v \equiv 0 \pmod 4$

(ii) $\sum_{v\in V_\infty} n_v \equiv 0 \pmod 8$.

Démonstration. — La suite exacte donnée par 1.5 :

$$0 \to \widetilde{WQ}(A) \to I^2(K) \xrightarrow{\delta} WQ(K, A)$$

peut être remplacée en utilisant 1.6, 1.7, 2.5 et 2.8, par la suivante :

$$0 \to \widetilde{WQ}(A) \to I^2(K) \to \bigoplus_{\mathscr{P}} I^2(K_{\mathscr{P}}).$$

Or, soient $\varepsilon_v : I^2(K_v) \to \mu_2$, $\varepsilon_{\mathscr{P}} : I^2(K_{\mathscr{P}}) \to \mu_2$ les invariants de Hasse-Minkowski, on a une suite exacte :

$$0 \to I^2(K) \to (\bigoplus_{v\in V_\infty} I^2(K_v)) \oplus (\bigoplus_{\mathscr{P}} I^2(K_{\mathscr{P}})) \to \mu_2 \to 0$$

la dernière flèche étant la somme des homomorphismes ε_v et $\varepsilon_{\mathscr{P}}$.

Le théorème est une conséquence de ces deux suites exactes (comparer avec [11], IV-4.5).

5.2. A partir de la suite exacte courte (*voir* 1.12) :

$$0 \to \widetilde{WQ}(A) \to WQ(A) \xrightarrow{\Delta} \operatorname{Ker}\alpha_2 \to 0,$$

nous obtenons la suite exacte :

$$0 \to \mathrm{Tors}\,[\mathrm{WQ}(A)] \xrightarrow{\Delta} \mathrm{Ker}\,\alpha_2 \xrightarrow{\theta} \mathbf{Q}/\mathbf{Z} \otimes \widetilde{\mathrm{WQ}}(A) \to \mathbf{Q}/\mathbf{Z} \otimes \mathrm{WQ}(A) \to 0$$

(Tors [WQ (A)] est la torsion du groupe WQ (A)).

Nous nous proposons d'étudier l'homomorphisme de connection θ.

5.3. L'application s (*voir* 1.12) :

$$\begin{aligned} \mathrm{Ker}\,\alpha_2 &\to \mathrm{WQ}(A), \\ d &\mapsto \langle 2 \rangle \otimes \langle d, -1 \rangle \end{aligned}$$

est une section (ensembliste) de Δ. Pour qu'un élément d de Ker α_2 soit dans le noyau de θ il faut et il suffit qu'il existe un élément de w de $\widetilde{\mathrm{WQ}}(A)$ tel que l'on ait dans $\widetilde{\mathrm{WQ}}(A)$: $2\,s(d) = 2\,w$. D'après 5.1, Ker θ = Ker α. En outre la restriction de s à Ker α est un homomorphisme, en effet si d et d' sont deux éléments de Ker α :

$$s(dd') - s(d) - s(d') = \langle 2 \rangle \otimes \{ d, d' \} \quad \text{(notations de 2.9)}$$

or le symbole $\{ d, d' \}$ est nul dans $W(K_v)$ [resp. $W(K_{\mathscr{P}})$] pour toute place réelle v (resp. pour tout idéal premier $\mathscr{P}$). Nous avons démontré :

THÉORÈME 5.3. — *Soit* A *l'anneau des entiers d'un corps de nombres, le discriminant :*

$$\mathrm{Tors}\,[\mathrm{WQ}(A)] \xrightarrow{\Delta} \mathrm{Ker}\,\alpha$$

est un isomorphisme dont l'inverse est l'application :

$$\begin{aligned} \mathrm{Ker}\,\alpha &\to \mathrm{Tors}\,[\mathrm{WQ}(A)] \\ d &\mapsto \langle 2 \rangle \otimes \langle d, -1 \rangle. \quad \square \end{aligned}$$

5.4. D'après 5.3 et 4.11 le connectant se factorise à travers $(\mathrm{Im}\,\alpha_\infty)^\perp$:

$$\mathrm{Ker}\,\alpha_2 \xrightarrow{\alpha_\infty} (\mathrm{Im}\,\alpha_\infty)^\perp \xrightarrow{\bar{\theta}} \mathbf{Q}/\mathbf{Z} \otimes \widetilde{\mathrm{WQ}}(A).$$

Nous avons donc une suite exacte courte :

$$0 \to (\mathrm{Im}\,\alpha_\infty)^\perp \xrightarrow{\theta} \mathbf{Q}/\mathbf{Z} \otimes \widetilde{\mathrm{WQ}}(A) \to \mathbf{Q}/\mathbf{Z} \otimes \mathrm{WQ}(A) \to 0$$

ou encore

$$0 \to (\mathrm{Im}\,\alpha_\infty)^\perp \xrightarrow{\bar{\theta}} \mathbf{Q}/\mathbf{Z} \otimes \mathrm{WQ}(A) \to \mathbf{Q}/\mathbf{Z} \otimes (\mathrm{WQ}(A)/\mathrm{Tors}\,[\mathrm{WQ}(A)]) \to 0.$$

Il en résulte une identification entre le groupe $(\mathrm{Im}\,\alpha_\infty)^\perp$ et le conoyau de l'injection : $\widetilde{\mathrm{WQ}}(A) \hookrightarrow \mathrm{WQ}(A)/\mathrm{Tors}\,[\mathrm{WQ}(A)]$.

En explicitant cette identification et en utilisant 5.1 :

THÉORÈME 5.4. — *Soit* A *l'anneau des entiers d'un corps de nombres, la signature totale induit un isomorphisme de la partie libre de* WQ (A) *sur le sous-groupe de* $(\mathbf{Z})^{V_\infty}$ *formé des éléments* $(n_v)_{v \in V_\infty}$ *tels que :*

(i) *Pour tout* v, $n_v \equiv 0 \pmod 2$.

(ii) *L'élément* $((-1)^{n_v/2})_{v \in V_\infty}$ *de* E_∞ (A) *est orthogonal à l'image de* α_∞.

(iii) $\sum_{v \in V_\infty} [n_v/4] \equiv 0 \pmod 2$ ($[n_v/4]$ *désigne la partie entière de* $n_v/4$).

5.5. Soit Γ le sous-groupe de $(\mathbf{Z})^{V_\infty}$ déterminé par (i) et (ii). Il n'est pas évident *a priori* que la partie de Γ définie par (iii) est un sous-groupe, en voici une explication. L'application : $\mathbf{R}^*/\mathbf{R}^{*2} \to \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$ définie par $1 \mapsto 0$ et $-1 \mapsto 1/4$ est une forme quadratique d'enlacement associée au symbole de Hilbert. En en faisant la somme orthogonale r fois, nous obtenons sur E_∞ (A) une forme quadratique d'enlacement, q_∞, telle que pour tous x et y dans E_∞ (A) :

$$e^{2i\pi[q_\infty(v+y) - q_\infty(x) - q_\infty(y)]} = (x, y)_\infty.$$

Soit $(n_v)_{v \in V_\infty}$ un élément de $(\mathbf{Z})^{V_\infty}$ qui vérifie (i) et x l'élément $((-1)^{n_v/2})_{v \in V_\infty}$ de E_∞ (A), nous avons

$$q_\infty(x) \equiv \frac{1}{8} \sum_{v \in V_\infty} \quad - \frac{1}{2} \sum_{v \in V_\infty} \left[\frac{n_v}{4} \right] (\mathrm{mod}\, \mathbf{Z}).$$

Or la restriction de q_∞ à $(\mathrm{Im}\, \alpha_\infty)^\perp$ est linéaire d'après 4.11, voilà l'explication promise. Précisons. Soit $\eta \in E_\infty$ (A) tel que

$$\forall x \in (\mathrm{Im}\, \alpha_\infty)^\perp \quad e^{2i\pi q_\infty(x)} = (\eta, x)_\infty$$

nous pouvons écrire $\eta = (\eta_v)_{v \in V_\infty}$ avec $\eta_v = \pm 1$ et la condition (iii) peut être remplacée par

(iii *bis*) $$\sum_{v \in V_\infty} \eta_v n_v \equiv 0 \pmod 8.$$

La classe de η dans coker α_∞ est bien définie, le point suivant montre que son image dans le groupe $\hat{\mathscr{C}}$ (A)/$\hat{\mathscr{C}}$ (A)^2 (*voir* 4.12) est la classe de la différence $\mathscr{D}$ de l'extension $\mathrm{K}/\mathbf{Q}$ (comparer avec [1]).

GLOBALISATION DU TRANSFERT.

LEMME 5.6. — *Soient* K *un corps de nombres et* $\mathscr{D}$ *la différente de l'extension* $\mathrm{K}/\mathbf{Q}$, *on a pour tout* $d \in \mathrm{Ker}\, \alpha_2$ *:*

$$\psi(d, \mathscr{P}) = e^{2i\pi q_\infty[\alpha_\infty(d)]}. \quad \square$$

Démonstration. — Notons P et b-espace vectoriel sur K, $\langle 2 \rangle \otimes \langle d, -1 \rangle$, d étant un élément de Ker α_2. Nous avons un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} D(A) & \xrightarrow{N_{K/Q}} & D(Z) \\ \downarrow{\scriptstyle \alpha_2} & & \wr\downarrow{\scriptstyle \alpha_2} \\ E_2(A) & \xrightarrow{N_{K/Q}} & E_2(Z) \end{array}$$

nous en déduisons que $N_{K/Q}(d)$ est un carré dans $\mathbf{Q}^*$; d'après 3.2 la classe de Witt du b-espace vectoriel sur $\mathbf{Q}$, $\text{tr}^* \text{P}$, est dans $\text{I}^2(\mathbf{Q})$.

Pour tout nombre premier p posons $\mathcal{D}_p = \prod_{\mathcal{P} \mid p} \mathcal{P}^{v_{\mathcal{P}}(\mathcal{D})}$, nous avons donc $\mathcal{D} = \prod_{p} \mathcal{D}_p$

Nous nous proposons de montrer :

$$\psi(d, \mathcal{D}_p) = \varepsilon_p(\text{tr}^* \text{P}).$$

La loi de réciprocité pour $\mathbf{Q}$ donnera alors $\psi(d, \mathcal{D}) = \varepsilon_\infty(\text{tr}^* \text{P})$ et on vérifie $\varepsilon_\infty(\text{tr}^* \text{P}) = e^{2i\pi q_\infty[\alpha_\infty^-(d)]}$.

Le localisé $\mathbf{Z}_{(p)} \otimes \text{A}$ est principal, soit g un générateur de $\mathbf{Z}_{(p)} \otimes \mathcal{D}$. D'après 4.5 :

$$\psi(d, \mathcal{D}_p) = \prod_{\mathcal{P} \mid p} (d, g)_{\mathcal{P}} = \prod_{\mathcal{P} \mid p} \varepsilon_{\mathcal{P}}(\text{P} \otimes \langle g, -1 \rangle).$$

En utilisant 4.1 et 3.13 :

$$\psi(d, \mathcal{D}_p) = \varepsilon_p[\text{tr}^*(\text{P} \otimes \langle g, -1 \rangle)] = \varepsilon_p[\text{tr}^*(\langle g \rangle \otimes \text{P})]\,\varepsilon_p(\text{tr}^* \text{P}).$$

La forme linéaire : $\text{K} \to \mathbf{Q}$, $x \longmapsto \text{tr}(x/g)$ est équilibrée par rapport à $\mathbf{Z}_{(p)}$. Or nous avons vu en 1.12 que la classe de Witt de P est dans WQ (A), il en résulte en appliquant 3.10 que la classe de Witt de $\text{tr}^*(\langle g \rangle \otimes \text{P})$ est dans $\text{WQ}(\mathbf{Z}_{(p)})$, d'après 2.5 et 2.8 la classe de Witt de $\mathbf{Q}_p \otimes \text{tr}^*(\langle g \rangle \otimes \text{P})$ est nulle.

COROLLAIRE 5.7 (Hecke). — *La différente est dans le carré d'une classe.*

Démonstration. — Conséquence de 4.8 et 5.6.

5.8. Il existe donc un élément a de K* et un idéal fractionnaire $\mathcal{E}$ tel que

$$\mathcal{D} = a\,\mathcal{E}^2.$$

Nous dirons qu'un tel élément a est un coefficient de transfert (la suite justifiera cette terminologie), si a et a' sont deux coefficients de transfert, il existe d dans D (A) tel que $a' = da$.

Si k est un élément de K nous notons s_k la forme linéaire :

$$\text{K} \to \mathbf{Q}, \qquad x \longmapsto \text{tr}\left(\frac{x}{k}\right).$$

Pour tout nombre premier p, il existe b_p dans K* tel que

$$\mathbf{Z}_{(p)} \otimes \mathcal{D} = a b_p^2 \text{A}_{(p)}$$

(en notant $A_{(p)}$ le localisé $\mathbf{Z}_{(p)} \otimes A$), la forme linéaire $s_{ab_p^2}$ est équilibrée par rapport à $\mathbf{Z}_{(p)}$; si t est une forme linéaire équilibrée par rapport à $Z_{(p)}$ obtenue en modifiant le choix de b_p, il existe u dans $A^*_{(p)}$ tel que pour tout $x \in K$:

$$t(x) = s_{ab_p^2}(u^2 x)$$

l'homomorphisme de transfert $s^*_{ab_p^2} : \mathrm{WQ}(K, A_{(p)}) \to \mathrm{W\,Q}(\mathbf{Q}, \mathbf{Z}_{(p)})$ ne dépend pas du choix de b_p. Comme les groupes WQ (K, A) et WQ (**Q**, **Z**) sont respectivement les sommes directes $\bigoplus_p \mathrm{WQ}(K, A_{(p)})$ et $\bigoplus_p \mathrm{WQ}(\mathbf{Q}, \mathbf{Z}_{(p)})$, la collection de ces homomorphismes définit un homomorphisme $T_a : \mathrm{WQ}(K, A) \to \mathrm{WQ}(\mathbf{Q}, \mathbf{Z})$.

PROPOSITION 5.8. — *Le diagramme*

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{WQ}(K) & \xrightarrow{s_a^*} & \mathrm{WQ}(\mathbf{Q}) \\ {\scriptstyle\delta}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\delta} \\ \mathrm{WQ}(K, A) & \xrightarrow{T_a} & \mathrm{WQ}(\mathbf{Q}, \mathbf{Z}) \end{array}$$

est commutatif. Si la différence $\mathcal{D}$ est un idéal principal engendré par a, l'homomorphisme T_a *coïncide avec l'homomorphisme de transfert* s_a^* *défini en* 3.7. □

La seconde partie de la proposition est claire, démontrons la première. Pour éviter des confusions notons $\delta_{(p)}$ (resp. $\delta'_{(p)}$) l'homomorphisme de « conoyau » (*voir* [3], A-2) :

$$\mathrm{WQ}(\mathbf{Q}) \to \mathrm{WQ}(\mathbf{Q}, \mathbf{Z}_{(p)}) \qquad [\text{resp.}\, \mathrm{WQ}(K) \to \mathrm{WQ}(K, A_{(p)})].$$

Soit $w \in \mathrm{WQ}(K)$:

$$\delta[s_a^*(w)] = \sum_p \delta_{(p)}[s_a^*(w)].$$

Or les deux homomorphismes de transfert de WQ(K) dans WQ (**Q**), s_a^* et $s^*_{ab_p^2}$ coïncident :

$$\begin{aligned} \delta[s_a^*(w)] &= \sum_p \delta_{(p)}[s^*_{ab_p^2}(w)] \\ &= \sum_p s^*_{ab_p^2}[\delta'_{(p)}(w)] \quad \text{d'après 3.10} \\ &= T_a[\sum_p \delta'_{(p)}(w)] \\ &= T_a[\delta(w)]. \end{aligned}$$

LE CONOYAU DE L'HOMOMORPHISME δ : WQ (K) → WQ (K, A).

5.8. *bis*. Notons $t_{a,\mathcal{P}}$ la forme linéaire : $K \to \mathbf{Q}_p$, $x \longmapsto \mathrm{tr}_{K_{\mathcal{P}}/\mathbf{Q}_p}(x/ab_p^2)$. Elle est équilibrée (par rapport à $\mathbf{Z}_p$) et le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{WQ}(K, A_{(p)}) & \xrightarrow{s^*_{ab_p^2}} & \mathrm{WQ}(\mathbf{Q}, \mathbf{Z}_{(p)}) \\ \cup\!\!\uparrow & & \\ \mathrm{WQ}(K, A_{(\mathcal{P})}) & & \downarrow\wr \\ \downarrow\wr & & \\ \mathrm{WQ}(K_{\mathcal{P}}, A_{\mathcal{P}}) & \xrightarrow{t^*_{a,\mathcal{P}}} & \mathrm{WQ}(\mathbf{Q}_p, \mathbf{Z}_p). \end{array}$$

Si i_p désigne l'injection : $WQ(\mathbf{Q}_p, \mathbf{Z}_p) \hookrightarrow WQ(\mathbf{Q}, \mathbf{Z})$ et $x_{\mathscr{P}}$ la composante dans $WQ(K_{\mathscr{P}}, A_{\mathscr{P}})$ d'un élément x de $WQ(K, A)$, nous avons

$$T_a(x) = \sum_{\mathscr{P}} i_p [t^*_{a,\mathscr{P}}(x_{\mathscr{P}})].$$

5.9. Notons respectivement, γ_a et $\gamma_{a,\mathscr{P}}$, les composées

$$WQ(K, A) \xrightarrow{T_a} WQ(\mathbf{Q}, \mathbf{Z}) \xrightarrow{\gamma} \mu_8$$

$$WQ(K_{\mathscr{P}}, A_{\mathscr{P}}) \xrightarrow{t^*_{a,\mathscr{P}}} WQ(\mathbf{Q}_p, \mathbf{Z}_p) \hookrightarrow WQ(\mathbf{Q}, \mathbf{Z}) \xrightarrow{\gamma} \mu_8.$$

Soient x, $x_{\mathscr{P}}$, comme précédemment; nous avons d'après 5.8 *bis* :

$$\gamma_a(x) = \prod_{\mathscr{P}} \gamma_{a,\mathscr{P}}(x_{\mathscr{P}}). \tag{5.9.1}$$

Les compositions

$$W(A) \times WQ(K, A) \longrightarrow WQ(K, A) \xrightarrow{\gamma_a} \mu_8,$$

$$W(A_{\mathscr{P}}) \times WQ(K_{\mathscr{P}}, A_{\mathscr{P}}) \to WQ(K_{\mathscr{P}}, A_{\mathscr{P}}) \xrightarrow{\gamma_{a,\mathscr{P}}} \mu_8$$

définissent des applications bilinéaires G_a et $G_{a,\mathscr{P}}$. Soient w un élément de $W(A)$ et $w_{\mathscr{P}}$ son image dans $W(A_{\mathscr{P}})$, nous avons (essentiellement 5.8 *bis*) :

$$G_a(w, x) = \prod_{\mathscr{P}} G_{a,\mathscr{P}}(w_{\mathscr{P}}, x_{\mathscr{P}}). \tag{5.9.2}$$

Les applications « locales » $\gamma_{a,\mathscr{P}}$ et $G_{a,\mathscr{P}}$ ont été étudiées à la fin du paragraphe 3.

5.10. Les compositions

$$WQ(A) \times W(K, A) \longrightarrow WQ(K, A) \xrightarrow{\gamma_a} \mu_8$$

$$WQ(A_{\mathscr{P}}) \times W(K_{\mathscr{P}}, A_{\mathscr{P}}) \to WQ(K_{\mathscr{P}}, A_{\mathscr{P}}) \xrightarrow{\gamma_{a,\mathscr{P}}} \mu_8 \quad \mathscr{P} \text{ dyadique},$$

définissent des applications bilinéaires G et $G_{\mathscr{P}}$. La notation ω de l'énoncé ci-dessous a été introduite en 2.2.

LEMME 5.10. — *Pour tout w dans* $WQ(A)$ *et tout x dans* $W(K, A)$ *:*

$$G(w, x) = \psi(\Delta(w), \omega(x)).$$

(*L'application G est à valeurs dans μ_2 et ne dépend pas du choix du coefficient de transfert a.*) $\square$

Démonstration. — Adoptons des notations analogues à celles de 5.9, nous avons

$$G(w, x) = \prod_{\mathscr{P}|2} G_{\mathscr{P}}(w_{\mathscr{P}}, x_{\mathscr{P}}) \times \prod_{\mathscr{P}\nmid 2} G_{a,\mathscr{P}}(w_{\mathscr{P}}, x_{\mathscr{P}}).$$

D'après 3.17, si $\mathscr{P} \mid 2$:

$$G_{\mathscr{P}}(w_{\mathscr{P}}, x_{\mathscr{P}}) = [\psi(\Delta(w), \mathscr{P})]^{v(x_{\mathscr{P}})}.$$

Si $\mathscr{P} \not| 2$, $w_{\mathscr{P}}$ est dans I $(A_{\mathscr{P}})$ et il existe $w'_{\mathscr{P}}$ dans I $(K_{\mathscr{P}})$ tel que $x_{\mathscr{P}} = \delta w'_{\mathscr{P}}$, d'où d'après 3.14 :

$$G_{a, \mathscr{P}}(w_{\mathscr{P}}, x_{\mathscr{P}}) = (\Delta(w), \Delta(w'_{\mathscr{P}}))_{\mathscr{P}} = [\psi(\Delta(w), \mathscr{P})]^{v(x_{\mathscr{P}})}.$$

Donc d'après la définition même de ψ : $G(w, x) = \psi(\Delta(w), \omega(x))$.

5.11. Soit χ la composée

$$W(K, A) \xrightarrow{\omega} \mathscr{I}(A)/\mathscr{I}(A)^2 \to \mathscr{C}(A)/\mathscr{C}(A)^2.$$

(Cet homomorphisme est le même que celui défini dans [3], A-1.33).

COROLLAIRE 5.11. — *Pour tout w dans Tors* [WQ (A)] *et tout x dans* W (K, A) *:*

$$G(w, x) = \varphi(\Delta(w), \chi(x)). \quad \square$$

5.12. Notons σ_v l'homomorphisme de signature : $W(K) \to W(K_v) \approx \mathbf{Z}$, en appliquant 5.8 et la formule de Milgram on obtient une formule qui généralise cette dernière :

(5.12.1) Pour tout $w \in WQ(K)$: $\gamma_a(\delta w) = e^{(2i\pi/8)\sum_{v \in V_\infty} \sigma_v(\langle a \rangle)\sigma_v(w)}$

Pour $w \in W(A)$, $w' \in WQ(K)$:

$$G_a(w, \delta w') = e^{(2i\pi/8)\sum_{v \in V_\infty} \sigma_v(\langle a \rangle)\sigma_v(w)\sigma_v(w')}. \tag{5.12.2}$$

En effet $G_a(w, \delta w') = \gamma_a(w \otimes \delta w') = \gamma_a[\delta(w \otimes w')]$.

De même, pour $w \in WQ(A)$, $w' \in W(K)$:

$$G(w, \delta w') = e^{(2i\pi/8)\sum_{v \in V_\infty} \sigma_v(\langle a \rangle)\sigma_v(w)\sigma_v(w')}. \tag{5.12.3}$$

Remarques. — Quand dans 5.12.1 on prend w dans $I^2(K)$ on retrouve à l'aide de 5.9.1 et 3.14 la loi de réciprocité de Hilbert.

En faisant $w' = \langle 1 \rangle$ dans 5.12.3 nous obtenons

$$\sum_{v \in V_\infty} \sigma_v(\langle a \rangle)\sigma_v(w) = 0 \pmod 8,$$

ce qui est la condition (iii *bis*) de 5.5 Comme $\delta < 1 >$ est nul nous pouvons sans perdre d'information remplacer 5.12.3 par

(5.12.3. *bis*) Pour $w \in WQ(A)$, $w' \in I(K)$: $G(w, \delta w') = (-1)^{(1/4)\sum_{v \in V_\infty} \sigma_v(w)\sigma_v(w')}$.

En prenant w' dans I (A) on retrouve la condition (ii) de 5.4. En faisant $w = \langle d, -1 \rangle$ (avec $d \in \operatorname{Ker} \alpha_2$) et $w' = \langle x, -1 \rangle$ (avec $x \in K^*$) on retrouve 4.6. De la même façon, en faisant parcourir le groupe W (A) par l'élément w dans la formule 5.12.2, on obtient l'énoncé suivant : soient P un $\tilde{q}$-module sur A et C son conoyau (*voir* [3], A-2.1), on peut, à l'aide de sommes de Gauss relatives à C, déterminer les signatures de P modulo les signatures des éléments de WQ (A).

5.13. La formule 5.12.2 montre que l'image de δ est orthogonale par rapport à G_a à la torsion de W (A), Tors [W (A)]; l'application G_a induit donc une application $\chi_a : WQ(K, A) \to \operatorname{Hom}(\operatorname{Tors}[W(A)], \mu_8)$ telle que $\chi_a \circ \delta = 0$.

THÉORÈME 5.13. *Soient* A *l'anneau des entiers d'un corps de nombres K et a appartenant à* K^* *un coefficient de transfert, la suite :*

$$WQ(K) \xrightarrow{\delta} WQ(K, A) \xrightarrow{\chi_a} \mathrm{Hom}(\mathrm{Tors}[W(A)], \mu_8) \to 0$$

est exacte. □

Exactitude en WQ (K, A). — Considérons la filtration de Tors [W (A)] :

$$\mathrm{Tors}[W(A)] \cap I^2(K) \subset \mathrm{Tors}[W(A)] \cap I(K) \subset \mathrm{Tors}[W(A)]$$

la même méthode que celle utilisée au début de ce paragraphe permet le calcul du groupe gradué associé.

• L'homomorphisme naturel : $\mathrm{Tors}[W(A)] \cap I^2(K) \to \bigoplus_{\mathscr{P} \mid 2} I^2(K_{\mathscr{P}})$ est un isomorphisme sur le sous-groupe formé des éléments $(w_{\mathscr{P}})_{\mathscr{P} \mid 2}$ tels que $\prod_{\mathscr{P} \mid 2} \varepsilon_{\mathscr{P}}(w_{\mathscr{P}}) = 1$.

• L'image par le discriminant Δ de $\mathrm{Tors}[W(A)] \cap I(K)$ est le sous-groupe $\mathrm{Ker}\,\alpha_\infty$ de D (A).

• Si K est totalement imaginaire la « dimension modulo 2 » :

$$\mathrm{Tors}[W(A)] = W(A) \to \mathbf{Z}/2$$

est surjective. Si K n'est pas totalement imaginaire

$$\mathrm{Tors}[W(A)] \cap I(K) = \mathrm{Tors}[W(A)].$$

Si $\mathscr{P}$ est un idéal premier dyadique, notons $\tau_{\mathscr{P}}$ la composée

$$WQ(K, A) \to WQ(K_{\mathscr{P}}, A_{\mathscr{P}}) \xrightarrow{\tau} \mathbf{Z}/2,$$

τ étant l'homomorphisme défini en 2.2.

Soient $w \in W(A) \cap I^2(K)$ et $x \in WQ(K, A)$:

$$G_a(w, x) = \prod_{\mathscr{P} \mid 2} G_a, (w_{\mathscr{P}}, x_{\mathscr{P}}) \qquad \text{puisque} \quad w_{\mathscr{P}} = 0 \quad \text{si} \ \mathscr{P} \nmid 2 \quad (2.5).$$

La composante $x_{\mathscr{P}}$ s'écrit $\delta w'_{\mathscr{P}}$ avec $w'_{\mathscr{P}}$ dans WQ $(K_{\mathscr{P}})$.

$$\begin{aligned} G_a(w, x) &= \prod_{\mathscr{P} \mid 2} \gamma_{a, \mathscr{P}}[\delta(w_{\mathscr{P}} \otimes w'_{\mathscr{P}})] \\ &= \prod_{\mathscr{P} \mid 2} [\varepsilon_{\mathscr{P}}(w_{\mathscr{P}})]^{\dim w'_{\mathscr{P}}} \quad \text{d'après 3.14} \\ &= \prod_{\mathscr{P} \mid 2} [\varepsilon_{\mathscr{P}}(w_{\mathscr{P}})]^{\tau_{\mathscr{P}}(x)}. \end{aligned}$$

Donc si x est orthogonal à $\mathrm{Tors}[W(A)] \cap I^2(K)$ tous les $\tau_{\mathscr{P}}(x)$ ont la même valeur. Si cette valeur est 1, $\tau_{\mathscr{P}}(x - \delta\langle 1 \rangle) = 0$ pour tout $\mathscr{P}$ dyadique. Dans tous les cas il existe w_1 dans WQ (K) tel que :

Pour tout $\mathscr{P}$ dyadique $\tau_{\mathscr{P}}(x - \delta w_1) = 0$.

Posons $x_1 = x - \delta w_1$. D'après 5.11 le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} W(K, A) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}(\mathrm{Tors}[WQ(A)], \mu_2) \\ \chi \big\downarrow & & \big\downarrow \mathrm{Hom}(\Delta, \mu_2) \\ \mathscr{C}(A)/\mathscr{C}^2(A) & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{Hom}(\mathrm{Ker}\,\alpha, \mu_2) \end{array}$$

où la flèche horizontale du haut correspond à l'application bilinéaire G et celle du bas à l'application bilinéaire φ, est commutatif. La fin de la proposition 1.4 et [3], A-1.34 montre alors que si x est orthogonal à Tors [WQ (A)] il existe w_2 dans WQ (K), que l'on peut supposer de dimension paire, tel que

$$x_1 - \delta w_2 \in V^1(K, A) = \bigoplus_{\mathscr{P}|2} V^1(K_{\mathscr{P}}, A_{\mathscr{P}}).$$

Posons $x_2 = x_1 - \delta w_2$. Notons $\bar{\Delta} : V^1(K, A) \to E_2(A)$ la somme directe, indexée sur les idéaux premiers dyadiques, des homomorphismes : $V^1(K_{\mathscr{P}}, A_{\mathscr{P}}) \to E_2(A_{\mathscr{P}})$ définis en 2.2.

Soient $w \in I(A)$ et $y \in V^1(K, A)$:

$$G_a(w, y) = \prod_{\mathscr{P}|2} G_{a, \mathscr{P}}(w_{\mathscr{P}}, y_{\mathscr{P}}).$$

Par définition de $V^1(K_{\mathscr{P}}, A_{\mathscr{P}})$ il existe $w'_{\mathscr{P}}$ dans $I(A_{\mathscr{P}})$ tel que $y_{\mathscr{P}} = \delta w'_{\mathscr{P}}$

$$\begin{aligned} G_a(w, y) &= \prod_{\mathscr{P}|2} \varepsilon_{\mathscr{P}}(w_{\mathscr{P}} \otimes w'_{\mathscr{P}}) \quad \text{d après 3.14} \\ &= \prod_{\mathscr{P}|2} (\Delta(w_{\mathscr{P}}), \Delta(w'_{\mathscr{P}}))_{\mathscr{P}} \\ &= (\alpha_2[\Delta(w)], \bar{\Delta}(y))_2 \end{aligned}$$

en notant $(\ ,\ )_2$ la forme bilinéaire de $E_2(A)$ à valeurs dans μ_2.

Si x est orthogonal à Tors $[W(A)] \cap I(K)$, $\bar{\Delta}(x_2)$ est orthogonal dans $E_2(A)$ à $\alpha_2(\mathrm{Ker}\,\alpha_\infty)$. D'après 4.10, il existe w_3 dans I (A) tel que

$$\bar{\Delta}(x_2 - \delta w_3) = 0.$$

Posons $x_3 = x_2 - \delta w_3$, $x_3 \in V^2(K, A) = \oplus V^2(K_{\mathscr{P}}, A_{\mathscr{P}})$.

Si K n'est pas totalement imaginaire, l'homomorphisme naturel :

$$W(A) \cap I^2(K) \to \bigoplus_{\mathscr{P}|2} I^2(K)$$

est surjectif (même méthode qu'en 5.1), il en résulte (2.2 et 2.8) que x_3 est dans l'image de δ ce qui achève la démonstration dans ce cas.

Si K est totalement imaginaire et que x est orthogonal à Tors [W (A)] nous avons en particulier : $G_a(\langle 1 \rangle, x_3) = 1$, c'est-à-dire :

$$\gamma_a(x_3) = 1.$$

soit encore

$$\prod_{\mathscr{P}\mid 2} \gamma_{a,\mathscr{P}}(x_3) = 1$$

nous en déduisons comme précédemment que x_3 est dans l'image de δ.

Exactitude en Hom (Tors [W (A)], μ_8). — La collection des isomorphismes induits par les applications bilinéaires $G_{a,\mathscr{P}}$ (3.16) définit un isomorphisme :

$$WQ(K, A) = \bigoplus_{\mathscr{P}} WQ(K_{\mathscr{P}}, A_{\mathscr{P}}) \to \bigoplus_{\mathscr{P}} \operatorname{Hom}(W(A_{\mathscr{P}}), \mu_8)$$

qui fait commuter le diagramme :

$$\begin{tikzcd}
WQ(K, A) \arrow[r, "\chi_a"] \arrow[d, "\sim"] & \operatorname{Hom}(\operatorname{Tors}[W(A)], \mu_8) \\
\bigotimes_{\mathscr{P}} \operatorname{Hom}(W(A_{\mathscr{P}}), \mu_8) \arrow[ur, "f"'] &
\end{tikzcd}$$

dans lequel la flèche f est la composition :

$$\bigoplus_{\mathscr{P}} \operatorname{Hom}(W(A_{\mathscr{P}}), \mu_8) \to \operatorname{Hom}\Big(\prod_{\mathscr{P}} W(A_{\mathscr{P}}), \mu_8\Big) \xrightarrow{\operatorname{Hom}(h, \mu_8)} \operatorname{Hom}(\operatorname{Tors}[W(A)], \mu_8)$$

où nous avons noté h l'homomorphisme naturel :

$$\operatorname{Tors}[W(A)] \to \prod_{\mathscr{P}} W(A_{\mathscr{P}}).$$

D'après le théorème de Hasse-Minkowski (faible) h est injectif et comme le groupe Tors [W (A)] est fini, l'homomorphisme f est surjectif.

Remarque. — La démonstration ci-dessus consiste à prouver que l'application bilinéaire induite par G_a :

$$\operatorname{Tors}[W(A)] \times \operatorname{coker} \delta \to \mu_8$$

est non dégénérée. On peut éviter l'une des deux parties de cette démonstration en montrant que les groupes finis Tors [W (A)] et coker δ ont même cardinal 2^k avec

$$k = m - l + c + \dim [{}_2\hat{\mathscr{C}}(A)],$$

m est le nombre des idéaux premiers dyadiques, $l = 0$ si K est totalement imaginaire et $l = 1$ dans le cas contraire. Les propositions 4.8, 4.10, 4.11 et 4.12 permettent de transformer l'expression de k. Comparer avec [11], IV-4.1.

5.14. En rassemblant les résultats, 1.5, 5.13 et [3], A-1.34 nous obtenons :

THÉORÈME 5.14. — *Soient* A *l'anneau des entiers d'un corps de nombres* K *et a un coefficient de transfert. Dans le diagramme commutatif de* W (A) *modules :*

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & WQ(A) \arrow[r] \arrow[d] & WQ(K) \arrow[r, "\delta"] \arrow[d] & WQ(K, A) \arrow[r, "\chi_a"] \arrow[d] & \operatorname{Hom}(\operatorname{Tors}[W(A)], \mu_8) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & W(A) \arrow[r] & W(K) \arrow[r, "\delta"] & W(K, A) \arrow[r, "\chi"] & \mathscr{C}(A)/\mathscr{C}^2(A) \simeq \operatorname{Hom}(\operatorname{Tors}[WQ(A)], \mu_8) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

les lignes sont exactes.

La suite de W (A)-*modules*

$$0 \to \mathrm{WQ}(\mathrm{A}) \to \mathrm{W}(\mathrm{A}) \xrightarrow{\delta} \mathrm{V}(\mathrm{K}, \mathrm{A}) \xrightarrow{\chi_a} \mathrm{Hom}(\mathrm{Tors}[\mathrm{W}(\mathrm{A})], \mu_8) \to \mathscr{C}(\mathrm{A})/\mathscr{C}^2(\mathrm{A}) \to 0$$

est exacte. □

Remarques. — L'isomorphisme canonique : $\mathscr{C}(\mathrm{A})/\mathscr{C}^2(\mathrm{A}) \simeq \mathrm{Hom}(\mathrm{Tors}[\mathrm{WQ}(\mathrm{A})], \mu_8)$ munit le $\mathbf{F}_2$-espace vectoriel $\mathscr{C}(\mathrm{A})/\mathscr{C}^2(\mathrm{A})$ d'une structure de W (A)-module qui coïncide avec celle définie *via* l'homomorphisme : $\mathrm{W}(\mathrm{A}) \xrightarrow{\text{dimension modulo } 2} \mathbf{F}_2$.

6. Exemples

Ce dernier paragraphe décrit quelques exemples illustrant les paragraphes précédents. Les six points du paragraphe sont pratiquement indépendants.

6.1. Un exemple géométrique du produit tensoriel d'un *b*-module et d'un *e*-module.

Soient M et N des variétés (ou des complexes de Poincaré) orientées, compactes, sans bord, de dimensions respectives $4m$ et $4n-1$. La forme d'intersection fait de la partie libre, $\mathrm{L}_{2m}(\mathrm{M})$, du groupe $\mathrm{H}_{2m}(\mathrm{M}; \mathbf{Z})$ un *b*-module sur **Z**, la torsion, $\mathrm{T}_{2n-1}(\mathrm{N})$, du groupe $\mathrm{H}_{2n-1}(\mathrm{N}; \mathbf{Z})$ munie de sa forme d'enlacement est un *e*-module et il en est de même du groupe $\mathrm{T}_{2m+2n-1}(\mathrm{M}\times\mathrm{N})$. On vérifie :

PROPOSITION 6.1.1. — *La classe dans* W (**Q**, **Z**) *du produit tensoriel du b-module* $\mathrm{L}_{2m}(\mathrm{M})$ *et du e-module* $\mathrm{T}_{2n-1}(\mathrm{N})$ *est celle du e-module* $\mathrm{T}_{2m+2n-1}(\mathrm{M}\times\mathrm{N})$. □

Quand N est le bord d'une variété orientée compacte P la classe de Witt du *b*-espace vectoriel $\mathrm{E}(\mathrm{M}\times\mathrm{P})$ obtenu en régularisant la forme d'intersection rationnelle définie sur $\mathrm{H}_{2m+2n}(\mathrm{M}\times\mathrm{P}; \mathbf{Q})$ (*voir* [8], 6.1) est le produit tensoriel des classes du *b*-module L_{2m} (M) et du *b*-espace vectoriel E (N) (ceci se généralise au produit de deux variétés à bord [9]; on en déduit le lemme dans ce cas à l'aide de 1.4 et [8], 6.3.

Comme l'anneau unitaire W (**Z**) est isomorphe à **Z** on a en notant [ ] la classe de Witt d'un *e*-module et I (M) la signature de M.

COROLLAIRE 6.1.2. — *Dans* W (**Q**, **Z**) :

$$[\mathrm{T}_{2m+2n-1}(\mathrm{M}\times\mathrm{N})] = \mathrm{I}(\mathrm{M})[\mathrm{T}_{2n-1}(\mathrm{N})]. \quad \square$$

6.2. CALCULS DE SYMBOLES DE HILBERT. — Soient K une extension de $\mathbf{Q}_2$ de degré *n*, A l'anneau de la valuation discrète v de K, et $\overline{\mathrm{K}}$ le corps résiduel, nous nous proposons d'appliquer 2.9 et 2.10 au calcul de quelques symboles de Hilbert (*voir* par exemple [16], p. 237, exercice 3).

FORMULE 6.2.1. — *Pour* $h, k \in \mathrm{A}$:

$$(1+2h, 1+2k) = (-1)^{v(2)\,\mathrm{tr}_{\overline{\mathrm{K}}/\mathbf{F}_2}(hk)}. \quad \square$$

Démonstration :

$$\begin{aligned}(1+2h,\ 1+2k) &= (1+2h,\ -2h(1+2k))\\ &= ((1+2h)(1+2h(1+2k)),\ -2h(1+2k))\\ &= (1+4(hk+h+h^2+2h^2k),\ -2h(1+2k))\\ &= (1+4hk,\ 2h) \quad \text{d'après 2.6 et 2.9}\\ &= (-1)^{[v(2)+v(h)]\,\mathrm{tr}_{\overline{K}/F_2}(hk)} \quad \text{d'après 2.9}\\ &= (-1)^{v(2)\,\mathrm{tr}_{\overline{K}/F_2}(hk)}.\end{aligned}$$

Cette formule suffit à déterminer le symbole de Hilbert lorsque l'extension $K/\mathbf{Q}_2$ est non ramifiée.

FORMULE 6.2.2. — *On suppose que l'extension* $K/\mathbf{Q}_2$ *est non ramifiée. Pour* $a, b \in A^{**}$ *:*

$$(a, b) = (-1)^{\mathrm{tr}_{K/\mathbf{Q}_2}[(a^{2^n-1}-1)(b^{2^n-1}-1)/4]}. \quad \square$$

Démonstration :

$$(a, b) = (a^{2^n-1}, b^{2^n-1}) \quad \text{et} \quad a^{2^n-1} \equiv 1 \,(\mathrm{mod}\, 2A), \quad b^{2^n-1} \equiv 1 \,(\mathrm{mod}\, 2A).$$

Redémontrons cette formule à l'aide de 2.10 :

$$\nu(\langle a \rangle) = \nu(\langle a^{2^n-1} \rangle) \equiv a^{2^n-1} (\mathrm{mod}\, T),$$

d'où $\nu(\{a, b\})\, W\, (a^{2^n-1}-1)(b^{2^n-1}-1)$ (mod T); nous utilisons alors la fin du point 2.10 et 2.8.

FORMULE 6.2.3. — *On suppose l'extension* $K/\mathbf{Q}_2$ *non ramifiée. Pour* $a \in A$ *;*

$$(a, 2) = (-1)^{\mathrm{tr}_{K/\mathbf{Q}_2}[(h+h^{2^n})/2]}$$

avec $h = (1/2)(a^{2^n-1}-1)$. $\square$

Démonstration. — Si $h = 2h'$ ($h' \in A$) :

$$\begin{aligned}(a, 2) &= (1+2h,\ 2)\\ &= (1+4h',\ 2)\\ &= (-1)^{\mathrm{tr}_{K/\mathbf{Q}_2}(h')}.\end{aligned}$$

Si $h \in A^*$:

$$\begin{aligned}(a, 2) &= (1+2h,\ 2)\\ &= (1+2h,\ -4h)\\ &= (1+2h,\ -h) \quad \text{et nous appliquons 6.2.2.}\end{aligned}$$

Cas particulier de 6.2.1. *:*

FORMULE 6.2.4 : $(-1, -1) = (-1)^n$. $\square$

Application. — Soient $s : K \to \mathbf{Q}_2$ une forme linéaire équilibrée et C un *qe*-module sur A :

$$\begin{aligned}\gamma_s^4(C) &= \gamma_s(\{-1, -1\} \otimes C)\\ &= (-1, -1)^{\tau(C)} \quad (3.14).\end{aligned}$$

Il en résulte :

FORMULE 6.2.5 : $\gamma_s^4(\mathrm{C}) = (-1)^{n \dim_{\overline{\mathrm{K}}}(\overline{\mathrm{K}} \otimes \mathrm{C})}$. □

Remarque. — Nous avons aussi

$$\gamma_s^4(\mathrm{C}) = \gamma^4(s^*\mathrm{C}) = (-1)^{\dim_{\mathbf{F}_2}(\mathrm{C}/2\,\mathrm{C})}.$$

Pour vérifier la congruence : $\dim_{\mathbf{F}_2}(\mathrm{C}/2\,\mathrm{C}) \equiv n \dim_{\overline{\mathrm{K}}}(\overline{\mathrm{K}} \otimes \mathrm{C}) \pmod 2$ on peut utiliser le début de la démonstration de la proposition 2.2.

6.3. DÉTERMINATION DE $\mathrm{V}(\mathbf{Q}[i], \mathbf{Z}[i])$. — La « partie réelle » : $\mathbf{Q}[i] \xrightarrow{\mathscr{R}e} \mathbf{Q}$ est une forme linéaire équilibrée; nous définissons un homomorphisme

$$g : \mathrm{W}(\mathbf{Q}[i], \mathbf{Z}[i]) \to \mu_2(\mathrm{WQ}(\mathbf{Q}[i], \mathbf{Z}[i])$$

est annulé par 2 puisque -1 est un carré dans $\mathbf{Z}[i]$) en posant, pour tout *qe* module-C sur $\mathbf{Z}[i]$, $g(\mathrm{C})\, g(\mathrm{C}) = \gamma(\mathscr{R}e^*\,\mathrm{C})$.

Les isomorphismes : $\mathrm{V}(\mathbf{Z}_2[i]) \simeq \mathrm{V}(\mathbf{Q}_2[i], \mathbf{Z}_2[i]) \simeq \mathrm{V}(\mathbf{Q}[i], \mathbf{Z}[i])$ et l'homomorphisme g induisent un homomorphisme h de $\mathrm{V}(\mathbf{Z}_2[i])$ dans μ_2 tel que, pour $a+ib \in (\mathbf{Z}_2[i])^*$ $(a+b \equiv 0 \pmod 2)$:

$$h(\langle a+ib \rangle) = \frac{1}{2}(1+(-1)^a+i^b+i^{-b}).$$

En sachant que $\mathrm{V}(\mathbf{Z}_2[i])$ est de dimension 4 sur $\mathbf{F}_2$ (*voir* le début de la démonstration de 4.4) on en déduit d'après 3.17 que les classes des b-modules, $\langle 1 \rangle, \langle i \rangle, \langle 1+2i \rangle, \langle i+2 \rangle$, forment une base sur $\mathbf{F}_2$ de $\mathrm{V}(\mathbf{Z}_2[i])$ et que l'application

$$\begin{gathered} \mathrm{V}(\mathbf{Q}_2[i], \mathbf{Z}_2[i]) \to \mu_2^4 \\ [\mathrm{C}] \longmapsto (g(\mathrm{C}), g(\langle i \rangle \otimes \mathrm{C}), g(\langle 1+2i \rangle \otimes \mathrm{C}), g(\langle i+2 \rangle \otimes \mathrm{C})) \end{gathered}$$

est un isomorphisme.

6.4. Soient K un corps de nombres, $\mathrm{L} = \mathrm{K}[\sqrt{\mathrm{Ker}\,\alpha}]$ l'extension maximale multiquadratique non ramifiée de K, A l'anneau des entiers de K, B celui de L, il est facile de montrer, dans le cadre que nous nous sommes fixés au paragraphe 4, la

PROPOSITION 6.4. — *La norme*

$$\mathscr{C}(\mathrm{B})/\mathscr{C}^2(\mathrm{B}) \to \mathscr{C}(\mathrm{A})/\mathscr{C}^2(\mathrm{A})$$

est nulle. □

Soit $\mathscr{Q}$ un idéal premier de B. Si le groupe d'isotropie de $\mathscr{Q}$ est non trivial il est clair que $\mathrm{N}_{\mathrm{L}/\mathrm{K}}(\mathscr{Q})$ est le carré d'un idéal de A. Dans le cas contraire $\mathrm{N}_{\mathrm{L}/\mathrm{K}}(\mathscr{Q})$ est un idéal premier $\mathscr{P}$ de A complément décomposé et tout élément de Ker α est un carré dans $\mathrm{K}_{\mathscr{P}}$ d'où le résultat d'après 4.8.

6.5. UTILISATION DES SIGNES D'UN COEFFICIENT DE TRANSFERT. — Soient K un corps de nombres et a un coefficient de transfert, la forme quadratique d'enlacement, q, définie sur $E_\infty(A)$ par

$$e^{2i\pi q(x)} = e^{2i\pi q_\infty(x)} (\beta_\infty(a), x)_\infty$$

(notations de 4.6 et 5.5) est toujours associée à $(\ ,\ )_\infty$ et de plus $q[(\mathrm{Im}\,\alpha_\infty)^\perp] = 0$ ce qui montre que la classe de Witt de $(E_\infty(A), q)$ est la même que celle de $(\mathrm{Im}\,\alpha_\infty/(\mathrm{Im}\,\alpha_\infty), q^\perp)$. Soit $\|\ \|$ l'application : $\mathbf{Z} \to \{0, 1, 2, 3\}$ de période 8 qui vérifie : $\|n\| = |n|$ si $|n| \leqq 3$ et $\|4\| = 2$.

PROPOSITION 6.5.1. — $2 \operatorname{rang}(\alpha_\infty) - r \geqq \left\| \sum_{v \in V_\infty} \sigma_v(\langle a \rangle) \right\|$. $\square$

Démonstration. — Puisque $\gamma(E_\infty(A), q) = e^{2i\pi/8 \sum_v \sigma_v(\langle a \rangle)}$ la proposition est une conséquence du

LEMME 6.5.2. — *Soit* E *un qe-module sur* **Z** *annulé par* 2 *tel que* $\gamma(E) = e^{(2i\pi/8)n}$ *alors* $\dim_{\mathbf{F}_2}(E) \geqq \|n\|$. $\square$

Démonstration. — Soit F le *qe*-module anisotrope représentant la classe de Witt de E, nous avons par inspection $\dim_{\mathbf{F}_2} F = \|n\|$ d'où $\dim_{\mathbf{F}_2}(E) \geqq \|n\|$.

Remarque. — La légère amélioration apportée à 4.11 par 6.5.1 est souvent illusoire, c'est le cas en particulier lorsque l'anneau des entiers de K est de la forme $\mathbf{Z}[\theta]$ et que l'on prend pour coefficient de transfert $F'(\theta)$ (F polynôme minimal unitaire de θ) :

$$\sum_{v \in V_\infty} \sigma_v(\langle F'(\theta) \rangle) = \frac{1+(-1)^r}{2}.$$

6.6. EXEMPLES NUMÉRIQUES. — Nous terminons par quelques applications numériques des résultats du paragraphe 5.

• $A = \mathbf{Z}$. L'homomorphisme $\sigma/8 : WQ(\mathbf{Z}) \to \mathbf{Z}$ est un isomorphisme et $\delta : WQ(\mathbf{Q}) \to WQ(\mathbf{Q}, \mathbf{Z})$ est surjectif.

• $A = \mathbf{Z}[i]$. Le groupe $WQ(\mathbf{Z}[i])$ est nul. Soient g_1 et g_2 les homomorphismes de $WQ(\mathbf{Q}[i], \mathbf{Z}[i])$ dans μ_2 qui associent à la classe d'un *qe*-module C les sommes de Gauss :

$$g_1(C) = (\# C)^{-1/2} \sum_{x \in C} e^{2i\pi \mathscr{R}e[q(x)]},$$

$$g_2(C) = (\# C)^{-1/2} \sum_{x \in C} e^{2i\pi \mathscr{I}m[q(x)]}.$$

La suite

$$WQ(\mathbf{Q}[i]) \to WQ(\mathbf{Q}[i], \mathbf{Z}[i]) \xrightarrow{g_1 \times g_2} \mu_2 \times \mu_2 \to 1$$

est exacte.

• $A = \mathbf{Z}[\theta]$ avec $\theta^3 = 2$. Cet anneau est principal et $\theta - 1$ est une unité fondamentale L'homomorphisme naturel $WQ(\mathbf{Z}) \to WQ(\mathbf{Z}[\theta])$ est un isomorphisme. La forme linéaire :

$$\mathbf{Q}[\theta] \xrightarrow{s} \mathbf{Q}$$
$$a + b\theta + c\theta^2 \longmapsto c$$

est équilibrée et la torsion de $W(\mathbf{Z}[\theta])$ est cyclique d'ordre 2 engendrée par $\langle \theta - 1, -1 \rangle$ ce qui nous donne la suite exacte :

$$WQ(\mathbf{Q}[\theta]) \xrightarrow{\delta} WQ(\mathbf{Q}[\theta]), \mathbf{Z}[\theta]) \xrightarrow{g} \mu_2 \to 1$$

où la flèche g est définie par

$$g(C) = \frac{\sum_{x \in C} e^{2i\pi s[(\theta-1)q(x)]}}{\sum_{x \in C} e^{2i\pi s[q(x)]}}.$$

• $A = \mathbf{Z}[\omega]$ avec $\omega^2 = 39$. La dimension de $\mathscr{C}/\mathscr{C}^2$ est 1 ([4], p. 275, th. 8) et $25 + 4\omega$ est une unité fondamentale; $\{-1, 25+4\omega, 2\}$, $\{25+4\omega, 2\}$, $\{-1, 25+4\omega\}$, et $\{25+4\omega\}$ respectivement sont des bases de $D(\mathbf{Z}[\omega])$, $\operatorname{Ker}\alpha_\infty$, $\operatorname{Ker}\alpha_2$, et $\operatorname{Ker}\alpha$. La torsion de $WQ(\mathbf{Z}[\omega])$ est cyclique d'ordre 2 engendrée par $\begin{pmatrix} 2(6+\omega) & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$. Soient σ_+ et σ_- les signatures correspondant aux plongements réels « $\omega = \sqrt{39}$ » et « $\omega = -\sqrt{39}$ », l'homomorphisme

$$WQ(\mathbf{Z}[\omega])/\operatorname{Tors}[WQ(\mathbf{Z}[\omega])] \xrightarrow{(\sigma_+/2,\ (\sigma_+ - \sigma_-)/8)} \mathbf{Z} \otimes \mathbf{Z}$$

est bijectif; Comme 2 est ramifié le discriminant : $\operatorname{Tors}[W(\mathbf{Z}[\omega])] \xrightarrow{\Delta} \operatorname{Ker}\alpha_\infty$ est un isomorphisme et le conoyau de δ est isomorphe à $\mathbf{Z}/2 \oplus \mathbf{Z}/2$.

• A est l'anneau des entiers d'un corps cubique cyclique, K, de discriminant < 20 000. Le nombre de classes est impair ([4], tables). Comme K est une extension galoisienne de degré impair de $\mathbf{Q}$ la différente $\mathscr{D}_{K/\mathbf{Q}}$ est un carré et 1 est un coefficient de transfert. D'après 6.5.1 α_∞ est bijective [on peut aussi utiliser 4.11 et remarquer que $\operatorname{Im}\alpha_\infty$ est stable par l'action évidente du groupe de Galois sur $E_\infty(A)$] et il en est de même de α_∞. Les trois signatures identifient $WQ(A)$ au sous-groupe de $\mathbf{Z}^3$ formé des triples (n_1, n_2, n_3) tels que

$$n_1 \equiv n_2 \equiv n_3 \pmod 4 \qquad \text{et} \qquad n_1 + n_2 + n_3 \equiv 0 \pmod 8.$$

Si 2 est inerte ou ramifié δ est surjectif; dans le cas où 2 est complètement décomposé, $2A = \mathscr{P}_1 \mathscr{P}_2 \mathscr{P}_3$, le conoyau de δ est isomorphe à $\mathbf{Z}/2 \oplus \mathbf{Z}/2$, plus précisément l'image de δ est constituée des classes des qe-modules C tels que

$$\dim_{\mathbf{F}_2}(C/\mathscr{P}_1 C) \equiv \dim_{\mathbf{F}_2}(C/\mathscr{P}_2 C) \equiv \dim_{\mathbf{F}_2}(C/\mathscr{P}_3 C) \pmod 2.$$

APPENDICE

Cet appendice démontre en toute généralité le lemme 3.3.

A.1. Soient L une extension, de degré fini n, séparable, d'un corps K de caractéristique 2 et E un q-espace vectoriel sur L. En notant, Arf ( ), l'invariant de Arf :

FORMULE A.1 : $\mathrm{Arf}(\mathrm{tr}^*_{L/K}\,E) = \mathrm{tr}_{L/K}[\mathrm{Arf}(E)]$. □

Démonstration. — L'application

$$\begin{aligned} L \oplus L &\longrightarrow L \\ (x, y) &\longmapsto hx^2 + xy + ky^2 \end{aligned}$$

est une forme quadratique non dégénérée qui fait de L ⊗ L un q-espace vectoriel que nous notons $E_{h,k}$. Puisque tout q-espace vectoriel sur L est isomorphe à une somme orthogonale de $E_{h,k}$ il suffit de montrer la formule pour $E_{h,k}$.

Soient $\{x_i\}_{1 \leq i \leq n}$ une base de L sur K et $\{y_j\}$ sa base duale par rapport à la forme bilinéaire non dégénérée, $\mathrm{tr}_{L/K}(xy)$:

$$\mathrm{tr}(x_i y_j) = \delta_{i,j},$$

$$\mathrm{Arf}(\mathrm{tr}^* E_{h,k}) \equiv \sum_{i=1}^{n} \mathrm{tr}(hx_i^2)\,\mathrm{tr}(ky_i^2) \pmod{\mathfrak{P}(K)}.$$

Or $\mathrm{tr}(x_i^2 y_j^2) = (\mathrm{tr}(x_i y_j))^2 = \delta_{i,j}$ d'où $\sum_i \mathrm{tr}(hx_i^2)\,\mathrm{tr}(ky_i^2) = \mathrm{tr}(hk)$ et le résultat.

A.2. Supposons à présent qu'il existe un élément de d de K qui n'est pas un carré et considérons l'extension (non séparable) $K[\sqrt{d}]/K$. Soit s la forme K-linéaire: $K[\sqrt{d}] \to K$ définie par $s(1) = 1$, $s(\sqrt{d}) = 0$, on vérifie par inspection :

FORMULE A.2 : $s^* E_{h,k} = \langle 1, d \rangle \otimes E_{s(h), s(k)}$. □

A.3. *Démonstration du lemme* 3.3. — Remarquons d'abord que si l'énoncé du lemme est vérifié par une forme linéaire non nulle il est vérifié pour tout autre forme linéaire non nulle. D'après A.1 le lemme est vrai pour les extensions séparables et d'après A.2 il est encore vrai pour les extensions du type $K[\sqrt{d}]/K$, en décomposant une extension en une extension séparable et une extension purement inséparable on voit que le lemme est vrai en toute généralité.

BIBLIOGRAPHIE

[1] J. V. ARMITAGE, *On a Theorem of Hecke in Number Fields and Functions Fields* (*Invent. Math.*, vol. 2, 1967, p. 238-246).

[2] J. V. ARMITAGE and A. FRÖLICH, *Class Numbers and Unit Signatures* (*Mathematika*, vol. 14, 1967, p. 94-98).

[3] J. BARGE, J. LANNES, F. LATOUR et P. VOGEL, Λ-*sphères* (*Ann. scient. Éc. Norm. Sup.*, fasc. 4, 1974, p. 403 à 506).

[4] Z. I. Borevitch et I. R. Chafarevitch, *Théorie des nombres*, Gauthier-Villars, Paris, 1967.
[5] N. Bourbaki, *Éléments* 34, *Algèbre commutative*, chap. VII, Diviseurs, Hermann, Paris.
[6] M. Karoubi, *Comptes rendus*, 278, série A, 1974, p. 215 et p. 311.
[7] T. Y. Lam, *The Algebraic Theory of Quadratic Forms*, Benjamin, 1973.
[8] J. Lannes et F. Latour, *Forme quadratique d'enlacement et applications* (à paraître dans *Astérisque*).
[9] F. Latour, *Résolutions et variétés géométriques.* (I) *Classes caractéristiques* (à paraître).
[10] J. Milnor, *On Isometries of Inner Product Spaces* (*Invent. Math.*, vol. 8, 1969, p. 83-97).
[11] J. Milnor and D. Husemoller, *Symmetric Bilinear Forms*, Springer, 1973.
[12] O. T. O'Meara, *Introduction to Quadratic Forms*, Springer, 1963.
[13] W. Scharlau, *Quadratic Reciprocity Laws* (*J. Number Theory*, vol. 4, 1972, p. 78-97).
[14] W. Scharlau, « *Quadratic Forms* » (*Queen's Papers on Pure and Applied Mathematics*, n° 22, 1969).
[15] W. Scharlau, *Induction Theorems and the Structure of the Witt Group* (*Invent. Math.*, vol. 11, 1970, p. 37-44).
[16] J. P. Serre, *Corps locaux*, Hermann, Paris, 1962.
[17] C. T. C. Wall, *On the Classification of Hermitian Forms.* (I) *Rings of the Algebraic Integers* (*Compos. Math.*, vol. 22, fasc. 4, 1970, p. 425-451).

(Manuscrit reçu le 29 mai 1975.)

Jean Lannes,
Département de mathématiques,
Université de Paris XI,
Bât. 425,
91405 Orsay.