Annales scientifiques de l'É.N.S.

G. Royer

Unicité de certaines mesures quasi-invariantes sur $\mathcal{C}(R)$

Annales scientifiques de l'É.N.S. 4e série, tome 8, nº 3 (1975), p. 319-338
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1975_4_8_3_319_0>

Ann. Scient. Éc. Norm. Sup.,
4e série, t. 8, 1975, p. 319 à 338.

UNICITÉ DE CERTAINES MESURES QUASI-INVARIANTES SUR $\mathscr{C}$ (R)

PAR G. ROYER (1)

RÉSUMÉ. — On étudie la détermination d'une probabilité quasi-invariante μ sur $\mathscr{C}$ (R) au moyen de la donnée explicite des densités relatives des translatées de μ (ce problème a été proposé par Ph. Courrège et P. Renouard dans [2]).

Présentons tout d'abord le vocabulaire employé. Soient W un groupe topologique commutatif (qui sera toujours par la suite sous-jacent à un espace vectoriel topologique réel), V un sous-groupe de W, μ une mesure sur W (c'est-à-dire une mesure positive sur la tribu borélienne de W; dans les cas concrets examinés plus loin μ sera bornée et W sous-linien et donc μ sera une mesure de Radon, *cf.* [1], n° 3.3); on dira que $\mu(d\omega)$ est V-quasi-invariante si les mesures $\mu(f+d\omega)$ sont équivalentes lorsque f parcourt V (2). D'autre part on appellera cocycle toute fonction réelle sur $V \times W$ telle que pour tout $f \in V$ la fonction $\Lambda(f, .)$ est borélienne et qui vérifie :

$$\text{(C)} \qquad \forall f, g \in V, \quad \forall \omega \in W, \quad \Lambda(f+g, \omega) = \Lambda(f, \omega) + \Lambda(g, \omega + f),$$

et on dira que μ est $V-\Lambda$-quasi-invariante et que Λ est un cocycle de quasi-invariance pour μ si la relation suivante a lieu :

$$\text{(Q)} \qquad \forall f \in V, \quad \mu(f+d\omega) = \exp \Lambda(f, \omega)\, \mu(d\omega).$$

Il est utile d'affaiblir la notion de cocycle de la manière suivante : ν étant une mesure donnée sur W, on obtiendra la notion de ν-pseudo-cocycle en demandant que la relation (C) ait lieu seulement pour ν-presque tout ω, f et g étant fixés; il est alors clair qu'à toute mesure μ σ-finie quasi-invariante est associée un μ-pseudo-cocycle Λ (essentiellement unique) qui vérifie avec μ la relation Q, et on dira que Λ est un pseudo-cocycle de quasi-invariance pour μ. Enfin on rappelle (*cf.* [4], p. 352) que si $W = V = \mathbf{R}^n$, toute mesure μ σ-finie V-quasi invariante est équivalente à la mesure de Lebesgue, admet un cocycle de quasi-invariance Λ et que les seules mesures σ-finies admettant Λ pour cocycle de quasi-invariance sont les multiples de μ.

(1) Équipe de recherche associée au C. N. R. S. n° 294.

(2) $\mu(f+d\omega)$ désigne l'image de la mesure $\mu(d\omega)$ par la translation $-f$.

Introduction

Passons au cas particulier qui est l'objet principal de ce travail. $\mathscr{C}(\mathbf{R})$ [resp. : $\mathscr{D}(\mathbf{R})$] désignant l'espace des fonctions continues réelles sur $\mathbf{R}$ (resp. : indéfiniment dérivables à support compact réelles), P un polynôme réel non constant borné inférieurement sur $\mathbf{R}$ (c'est-à-dire de degré pair non nul et à coefficient dominant positif), on considère le cocycle Λ sur $\mathscr{D}(\mathbf{R})\times\mathscr{C}(\mathbf{R})$ donné par

$$\text{(F)}\qquad \Lambda(f,\omega)=\int_{\mathbf{R}}\left[\left(\omega(t)+\frac{1}{2}f(t)\right)f''(t)+\mathrm{P}(\omega(t))-\mathrm{P}(\omega(t)+f(t))\right]dt.$$

Soient d'autre part θ_a et σ les opérateurs de translation et de symétrie de $\mathscr{C}(\mathbf{R})$ définis par

$$[\theta_a(\omega)](t)=\omega(t+a),\qquad [\sigma(\omega)](t)=\omega(-t)$$

et posons $X_t(\omega)=\omega(t)$; on dira qu'une mesure de probabilité μ sur $\mathscr{C}(\mathbf{R})$ est invariante par les translations de $\mathbf{R}$ si $\theta_a(\mu)=\mu$ pour tout a et qu'elle est euclidienne si de plus $\sigma(\mu)=\mu$; on dira qu'elle est markovienne si le processus (μ, X_t) est Markov. L'étude qui suit provient de [2] où Ph. Courrège et P. Renouard ont construit (pour chaque P) une probabilité μ sur $\mathscr{C}(\mathbf{R})$ qui est $\mathscr{D}(\mathbf{R})-\Lambda$-quasi-invariante, euclidienne et markovienne et ont montré l'unicité d'une probabilité sur $\mathscr{C}(\mathbf{R})$ vérifiant ces propriétés ainsi que quelques hypothèses de régularité. Ici on se propose (*cf.* th. 15) d'établir ce résultat d'unicité sans utiliser ces hypothèses de régularité. Les hypothèses employées restent probablement redondantes conformément à la remarque 4 du n° 6,1 de [2] où sont posées les conjectures suivantes (légèrement modifiées) :

(A) Il existe une seule probabilité $\mathscr{D}(\mathbf{R})-\Lambda$-quasi-invariante portée par $\mathscr{S}'(\mathbf{R})\cup\mathscr{C}(\mathbf{R})$; [on démontre que μ est portée par $\mathscr{S}'(\mathbf{R})$, espace des distributions tempérées sur $\mathbf{R}$].

(B) Il existe une seule probabilité sur $\mathscr{C}(\mathbf{R})$ qui soit $\mathscr{D}(\mathbf{R})-\Lambda$-quasi-invariante et invariante par les translations de $\mathbf{R}$; (on donnera à la fin une forme équivalente de cette conjecture).

Voici maintenant quelques mots pour situer le problème étudié ici. La considération de probabilités euclidiennes, markoviennes et $\mathscr{D}(\mathbf{R})$-quasi-invariante avec le cocyle Λ donné par la formule (F) peut constituer une première approche pour l'étude d'objets analogues en théorème quantique des champs (voir à ce sujet l'exposé de P. Cartier [9] et l'introduction de [2]). D'autre part il faut souligner que le caractère polynomial de P n'est pas fondamental pour obtenir les résultats énoncés ci-dessus; d'ailleurs pour une classe de fonctions P beaucoup plus large que celle des polynômes bornés inférieurement non constants, P. Priouret et M. Yor ont montré dans [8] l'existence d'une probabilité $\mathscr{D}(\mathbf{R})-\Lambda$-quasi-invariante, euclidienne et markovienne, Λ étant toujours donné par la formule (F). Nous nous limiterons cependant pour l'unicité au cas où P est un polynôme borné inférieurement non constant car nous utilisons des résultats (rappelés dans le théorème 14) qui ne sont démontrés que dans ce cadre dans [2] et aussi parce qu'il n'est pas sûr qu'on puisse obtenir des hypothèses simples et générales portant sur P qui assurent la validité du théorème d'existence et d'unicité en vue. Quant à la formule (F) il semble qu'elle puisse être justifiée indépendamment de son origine par un théorème du type suivant : si (μ, Λ) est un couple suffisamment régulier où μ est une probabilité markovienne euclidienne et $\mathscr{D}(\mathbf{R})-\Lambda$-quasi-invariante sur $\mathscr{C}(\mathbf{R})$, alors Λ ou un de ses multiples est donné par (F), où P est une fonction convenable (des résultats en ce sens ont été établis par M. Yor dans un cadre un peu différent [communication personnelle].

Je remercie C. Sunyach qui a découvert une importante erreur dans la première version de cette article et m'a communiqué un résultat permettant d'y remédier (voir la démonstration de la proposition 5).

I. Dans ce paragraphe on établit dans un cadre général quelques résultats utiles pour la suite. On désignera dans toute la suite par $E_\mu(\psi \mid \mathscr{F})$ une version quelconque mais fixée une fois pour toute de l'espérance conditionnelle de la fonction ψ par rapport à la tribu $\mathscr{F}$ et à la mesure μ. La proposition suivante est immédiate.

1. Proposition. — 1° *Soient* μ *une mesure* $V-\Lambda$*-quasi-invariante sur* W, F *une fonction borélienne sur* W, $\omega_0 \in W$; *alors les mesures* $\exp(-F(\omega))\,\mu(d\omega)$ *et* $\mu(\omega_0+d\omega)$ *sont* V*-quasi-invariantes et admettent respectivement les cocycles*

$$\Lambda(f, \omega)+F(\omega)-F(\omega+f) \qquad et \qquad \Lambda(f, \omega+\omega_0).$$

2° *Supposons que* μ *soit une probabilité; et soient* u *un homomorphisme continu de* W *dans un groupe topologique* W', $V' = u(V)$ et $\mu' = u(\mu)$; *alors* μ' *est* V'*-quasi-invariante. Soient* s' *une application quelconque* : $V' \to V$ *qui relève* u, $\mathscr{F}$ *l'image réciproque par* u *de la tribu borélienne de* W' *et désignons pour tout* $g \in V'$ *par* $\Lambda'(g, .)$ *la fonction sur* W' *définie par*

$$\exp \Lambda'(g, u(.)) = E_\mu(\exp \Lambda(s'(g), .) \mid \mathscr{F});$$

alors Λ' *est un pseudo-cocycle de quasi-invariance pour* μ'. *Supposons maintenant que sur un sous-groupe* D'' *de* D' *il existe un relèvement additif* s'' *de* u *tel que, pour tout* $g \in D''$, $\Lambda(s''(g), .)$ *se factorise sous la forme*

$$\Lambda(s''(g), \omega) = \Lambda''(g, u(\omega));$$

alors Λ'' *est un cocycle admissible pour la* D''*-quasi-invariance de* μ'.

2. Proposition. — *Supposons donnés un cocycle* , $V \times W \to \mathbf{R}$ *et un sous-groupe* V_0 *de* V *vérifiant la condition suivante , tout élément* f *de* V *est limite dans* W *d'une suite* f_n *d'éléments de* V_0 *telle que la suite des fonctions* $\Lambda(f_n, .)$ *est uniformément bornée sur tout compact de* W *et tend simplement vers* $\Lambda(f, .)$. *Alors toute probabilité de Radon* μ *qui est* $V_0-\Lambda_{|V_0}$*-quasi-invariante est aussi* $V-\Lambda$*-quasi-invariante.*

Démonstration. — On doit démontrer que

$$\int \psi(\omega-f)\,\mu(d\omega) = \int \psi(\omega) \exp \Lambda(f, \omega)\,\mu(d\omega)$$

pour toute fonction borélienne positive ψ sur W; μ étant de Radon, on peut se ramener au cas où ψ est continue bornée (car la mesure d'un ouvert O est la borne supérieure des intégrales des fonctions continues positives qui sont nulles en dehors de O et majorées par 1 sur O); dans ce cas, d'après les théorèmes de Lebesgue et de Fatou, on a :

$$\begin{aligned}\int \psi(\omega - f)\,\mu(d\omega) &= \int \lim_n \psi(\omega - f_n)\,\mu(d\omega) = \lim_n \int \psi(\omega - f_n)\,\mu(d\omega)\\ &= \lim_n \int \psi(\omega)\exp\Lambda(f_n, \omega)\,\mu(d\omega) \geqq \int \lim_n \inf(\psi(\omega)\exp\Lambda(f_n, \omega))\,\mu(d\omega)\\ &= \int \psi(\omega)\exp\Lambda(f, \omega)\,\mu(d\omega).\end{aligned}$$

Il reste à démontrer l'inégalité inverse; soit K un compact qui porte μ à ε près; si on pose : $A = \bigcup_n (K - f_n)$, A est relativement compact dans W et porte à ε près toutes les mesures $\mu\,(f_n + d\omega)$; il en résulte que

$$\forall n \int_A \psi(\omega)\exp\Lambda(f_n, \omega)\,\mu(d\omega) = \int_A \psi(\omega)\,\mu(f_n + d\omega) \geqq \int_W \psi(\omega - f_n)\,\mu(d\omega) - \varepsilon\,\|\psi\|_\infty;$$

l'hypothèse concernant les fonctions $\Lambda\,(f_n,\ .)$ permet de passer à la limite dans le membre de gauche, et on obtient

$$\int_A \psi(\omega)\exp\Lambda(f, \omega)\,\mu(d\omega) \geqq \int_W \psi(\omega - f)\,\mu(d\omega) - \varepsilon\,\|\psi\|_\infty;$$

d'où on déduit le résultat puisque ε est arbitraire.

Le résultat qui suit permet de désintégrer une mesure quasi-invariante en mesures quasi-invariantes.

3. Proposition. — *On suppose que* V *est muni d'une topologie métrisable et séparable plus fine que celle de* W *et soient* Λ *un cocycle continu sur* $V \times W$, μ *une probabilité de Radon* $V - \Lambda$*-quasi-invariante, h une application* μ*-mesurable de* W *dans un espace topologique séparé* X, $\nu = h\,(\mu)$ *et* μ_x, $x \in X$, *une désintégration de* μ *par rapport à h en probabilités de Radon. Si h est invariante par le sous-groupe* V *alors, pour* ν*-presque tout x,* μ_x *est* $V - \Lambda$*-quasi-invariante.*

Démonstration. — Soit V_0 un sous-groupe dénombrable dense de V; il est immédiat que pour presque tout x, μ_x est $V_0 - \Lambda_{|V_0}$-quasi-invariante et il suffit d'appliquer la proposition 2.

Dans la proposition qui suit on caractérise les mesures gaussiennes par leur propriété de quasi-invariance (ce résultat est repris de [2]).

4. Proposition. — *Soit* $\mathscr{F}$ *un espace de Fréchet nucléaire réel muni d'un produit scalaire* (., .) *continu et défini positif; soient u l'injection de* $\mathscr{F}$ *dans* $\mathscr{F}'$ *canoniquement définie*

par ce produit scalaire et $\mathscr{V} = u(\mathscr{F})$; *on considère sur* $\mathscr{V} \times \mathscr{F}'$ *le cocycle*

$$\Lambda(f, \omega) = -\left\langle u^{-1}(f), \omega + \frac{1}{2} f \right\rangle.$$

Alors il existe une unique probabilité sur $\mathscr{F}'$ *qui soit* $\mathscr{V} - \Lambda$*-quasi-invariante à savoir la mesure gaussienne (centrée) de covariance* (., .).

Démonstration. — On va montrer que cette mesure gaussienne est l'unique mesure positive μ sur $\mathscr{F}'$, vérifiant

$$(\mathrm{Q}_0) \qquad \forall f \in \mathscr{V}, \quad \int_{\mathscr{F}'} \exp \Lambda(f, \omega) \mu(d\omega) = 1;$$

la proposition en résultera; d'abord l'unicité découlera de ce que (Q) implique (Q_0); ensuite si μ vérifie (Q_0) il en est de même d'après (C) pour tout $g \in \mathscr{V}$ de la mesure $\mu_g(d\omega) = \exp - \Lambda(g, \omega) \mu(g + d\omega)$; on aura donc $\mu_g = \mu$ pour tout g ce qui équivaut à (Q). Mais (Q_0) équivaut à dire que pour tout $\varphi \in \mathscr{F}$ la transformée de Laplace de la mesure $\varphi(\mu)$ (image de μ par l'application : $\omega \mapsto \langle \varphi, \omega \rangle$) est la fonction

$$\lambda \mapsto \exp \frac{1}{2} \lambda^2 (\varphi, \varphi)$$

ou encore que sa transformée de Fourier est $\exp - (1/2) \lambda^2 (\varphi, \varphi)$, ou enfin que

$$\forall \varphi \in \mathscr{F}, \quad \int \exp i \langle \varphi, \omega \rangle \mu(d\omega) = \exp - \frac{1}{2} (\varphi, \varphi).$$

La proposition qui suit donne un autre cas simple d'unicité.

C. Q. F. D.

PROPOSITION. — *Soit* $\mathbf{R}^{(\mathbf{N})}$ *le sous-espace de* $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ *formé des suites à support fini. On suppose donné un cocycle* Λ *sur* $\mathbf{R}^{(\mathbf{N})} \times \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ *local, c'est-à-dire vérifiant*

$$\forall c \in \mathbf{R}^{(\mathbf{N})}, \quad \forall \gamma, \gamma' \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}} \ (\gamma_n = \gamma'_n \ \textit{pour} \ n \in \operatorname{supp} c) \quad \Rightarrow \quad \Lambda(c, \gamma) = \Lambda(c, \gamma').$$

Alors il existe au plus une probabilité μ *sur* $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ *qui soit* $\mathbf{R}^{(\mathbf{N})} - \Lambda$*-quasi-invariante.*

Démonstration. — Pour toute partie finie I de $\mathbf{N}$ notons p_{I} la projection canonique de $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ sur $\mathbf{R}^{\mathrm{I}}$ et $\mu_{\mathrm{I}} = p_{\mathrm{I}}(\mu)$; la localité de Λ implique que μ_{I} est $\mathbf{R}^{\mathrm{I}}$-quasi-invariante avec un cocycle Λ_{I} déduit de Λ (*cf.* prop. 1); on en déduit l'unicité de μ_{I} pour tout I (car d'après [4] (p. 352) μ_{I} est équivalente à la mesure de Lebesgue de $\mathbf{R}^{\mathrm{I}}$) donc aussi celle de μ.

II. Avant d'arriver au problème évoqué dans l'introduction on étudie au préalable dans ce paragraphe deux problèmes analogues concernant des probabilités sur $\mathscr{C}([a, b])$. Tous les espaces de fonctions introduits seront réels; on notera $\mathscr{C}_0([a, b])$ (resp. $\mathscr{C}_0^\infty([a, b])$) le sous-espace de $\mathscr{C}([a, b])$ (resp. $\mathscr{C}^\infty([a, b])$ formé des fonctions s'annulant en a et b;

on emploiera aussi les notations abrégées $\mathscr{C}_0$, $\mathscr{C}_0^\infty$, L^p, $\mathscr{C}$, etc. D'autre part pour tout polynôme réel P borné inférieurement on désignera par W_p l'espace $L^{\partial-1}([a, b])$ lorsque le degré ∂ de P est $\geqq 2$ et l'espace $(\mathscr{C}^\infty([a, b])$ lorsque P est constant.

5. Proposition. — *Soit* P *un polynôme borné inférieurement et* y *une fonction continue sur l'intervalle* $[a, b]$. *Il existe une probabilité unique sur* W_p *qui soit* $\mathscr{C}_0^\infty$*-quasi-invariante avec le cocycle:*

$$\Lambda_{p,y}(f, \omega) = \int_a^b \left[\left(\omega(t) + \frac{1}{2} f(t)\right) f''(t) + P(\omega(t) + y(t)) - P(\omega(t) + y(t) + f(t))\right] dt.$$

De plus les probabilités ainsi obtenues lorsque P *et* y *varient sont équivalentes et portées par* $\mathscr{C}_0([a, b])$.

Avant de commencer la démonstration nous avons besoin de préliminaires et de trois lemmes.

Préliminaires. — Pour tout $f \in L^2([a, b])$ désignons par $G_{a,b}(f)$ la fonction de $\mathscr{C}_0([a, b])$ vérifiant $(G_{a,b}(f))'' = -f$; $G_{a,b}$ est un opérateur autoadjoint positif compact de L^2; posant pour $k \in N^*$, $t \in [a, b]$,

$$\sigma_k(t) = 2^{1/2}(b-a)^{-1/2} \sin k \frac{t-a}{b-a} \pi,$$

σ_k est un vecteur propre de $G_{a,b}$ correspondant à la valeur propre $1/k^2$ et la suite σ_k est une base orthonormée de L^2. Pour toute fonction $\omega \in L^1$, notons $\hat{\omega}$ la suite définie par $\hat{\omega}_k = \int_a^b \omega(t)\, \sigma_k(t)\, dt$; $\omega \mapsto \hat{\omega}$ est une injection (en effet prenons $a = 0$, $b = \pi$ et soit $\tilde{\omega}$ le prolongement impair de ω sur $[-\pi, +\pi]$; $\hat{\omega} = 0$ revient à dire que $\tilde{\omega}$ a tous ses coefficients de Fourier nuls). Enfin on posera

$$\mathscr{W} = \{\omega \in L^1 \mid \forall p > 1\, \hat{\omega} \in l^p(N^*)\}.$$

6. Lemme. — *Pour tout* $1 \leqq p \leqq 2$, $\hat{\omega} \in l^p$ *implique que* $\omega \in L^{p'}$ *avec* $(1/p)+(1/p') = 1$ *et il existe une constante* K_p *telle que* $\|\omega\|_p \leqq K_p \|\hat{\omega}\|_{p'}$ *en particulier* $\mathscr{W}$ *est contenu dans tous les* W_p.

Démonstration. — L'application inverse de $\omega \mapsto \hat{\omega}$ induit une isométrie de l^2 sur L^2 et, les fonctions σ_k étant uniformément bornées sur $[a, b]$, une application continue : $l^1 \to L^\infty$; d'après le théorème de convexité de Riesz. Thorin (*cf.* [7], chap. XII, § 1) elle induit donc aussi une application continue de l^p dans $L^{p'}$ pour $1 \leqq p \leqq 2$.

7. Lemme. — *Soit* $\gamma_{a,b}$ *la mesure gaussienne sur* $(\mathscr{C}^\infty([a, b]))'$ *de covariance*

$$(f, g) = \langle f \mid G_{a,b}(g) \rangle$$

($f, g \in \mathscr{C}^\infty$, $\langle\, . \mid . \,\rangle$ *est le produit scalaire dans* L^2); $\gamma_{a,b}$ *est portée par* $\mathscr{C}_0([a, b])$.

Démonstration. — On va d'abord démontrer que γ est portée par $\mathscr{C}$ (on supprime les mentions a et b pour alléger); remarquons que γ considérée comme mesure cylindrique sur $(\mathscr{C}^\infty)'$ est l'image de la mesure cylindrique gaussienne canonique Γ de L^2 par l'application $i \circ G^{1/2}$, où i est l'injection canonique : $L^2 \to (\mathscr{C}^\infty)'$; Γ étant de type q pour tout q il nous suffit donc de démontrer que $G^{1/2}$ provient d'une application $V : L^2 \to \mathscr{C}$ qui est q-radonifiante pour un $q > 1$ (pour tout cela, *cf.* [6]). Pour cela on va montrer qu'il existe $q > 1$, $\alpha_1 > 0$, $\alpha_2 > 0$ avec $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$ tels que $G^{\alpha_1/2}$ provienne d'une application continue : $L^2 \to L^\infty$ et $G^{\alpha_2/2}$ induise une application continue : $L^q \to \mathscr{C}$; on aura alors factorisé V en passant par l'injection canonique : $L^\infty \to L^q$; donc V sera q-sommante et q-radonifiante. Or (on fait ici $a = 0$, $b = \pi$) en diagonalisant G on obtient

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} &\forall f \in L^2, \quad \forall x \in [0, \pi],\\ &[G^{\alpha/2}(f)](x) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \int_0^\pi f(t) \sin nt\, dt. \sin nx\\ &\qquad = (2\pi)^{-1/2} \sum \frac{1}{n^\alpha} \int_0^\pi (\cos n(x+t) - \cos n(x-t)) f(t)\, dt. \end{aligned}\right.$$

Pour que $G^{\alpha/2}$ induise une application de L^q dans $\mathscr{C}$ il suffit d'après cette formule que la série : $S(x) = \sum (\cos nx/n^\alpha)$ converge dans $L^{q'}$, $q' = q/(q-1)$ [car la convolution d'une fonction de $L^{q'}(\mathbf{R})$ par une fonction de $L^q(\mathbf{R})$ est une fonction continue]; de même $G^{\alpha/2}$ applique L^2 dans $\mathscr{C}$ lorsque $S(x)$ converge dans L^2. Or on sait (*cf.* [7], chap. V, § 2 ou [6]) que $S(x)$ converge dans L^p lorsque $1 \leqq p \leqq (1-\alpha)^{-1}$; on obtiendra donc des nombres α_1, α_2, q satisfaisant aux exigences énoncées plus haut en prenant

$$\frac{1}{2} < \alpha_1 < 1, \qquad \alpha_2 = 1 - \alpha_1, \qquad q > \frac{1}{\alpha_1}.$$

Il reste à montrer que γ est portée par $\mathscr{C}_0$; désignons par J la transformée de Fourier de $\gamma : \mathscr{C}' \to \mathbf{R}$; il faut établir que pour tout $\lambda \in \mathbf{R}$, $J(\lambda\, \varepsilon_a) = 1$ (resp. ε_b); or un calcul facile montre que

$$(f, g) = \int K(x, t) f(t) g(x)\, dx\, dt$$

où K est la fonction symétrique sur $[a, b] \times [a, b]$ qui vaut $[(t-a)(b-x)]/b-a$ pour $a \leqq t \leqq x \leqq b$; la continuité de K permet d'étendre $(.,.)$ à $\mathscr{C}' \times \mathscr{C}'$ et l'on a pour $\xi \in \mathscr{C}'$, $J(\xi) = \exp -(1/2)(\xi, \xi)$; le résultat en découle immédiatement.

8. Lemme. — *Toute probabilité μ qui est $\mathscr{C}_0^\infty - \Lambda_{p,y}$-quasi-invariante sur W_p est portée par $\mathscr{W}$.*

Démonstration. — Dans le cas où $\partial = 0$ on établit grâce à la proposition 4 que $\mu = \gamma_{a,b}$ et donc que μ est portée par $\mathscr{C}_0([a, b])$; la démonstration se poursuit alors comme dans le cas $\partial \geqq 2$ que voici :

Pour toute suite $F = (f_n)$ d'éléments de $\mathscr{C}_0^\infty$, on a

$$\int_{W_p} \sum_n \frac{1}{n^2} \exp \Lambda_{p,y}(f_n, \omega)\, \mu(d\omega) = \sum \frac{1}{n^2} < \infty$$

et donc μ est portée par l'ensemble

$$A(F) = \left\{ \omega \in W_p \,\middle|\, \sum \frac{1}{n^2} \exp \Lambda_{p,y}(f_n, \omega) < \infty \right\}.$$

Prenons $f_n = -(1/n)\,\sigma_n$; alors on a

$$\Lambda_{p,y}(f_n, \omega) = (b-a)^{-2}\left(n\,\hat{\omega}_n - \frac{1}{2}\right) + \int_a^b [P(\omega(t)+y(t)) - P(\omega(t)+y(t)+f_n(t))]\,dt;$$

d'autre part on peut trouver $C > 0$ tel que

$$\forall x,\ \alpha \in \mathbf{R} \quad |\alpha| \leqq 1 \quad \Rightarrow \quad |P(x) - P(x+\alpha)| \leqq C(|x|^{\partial-1}+1),$$

ce qui implique :

$$\int_a^b |P(\omega(t)+y(t)) - P(\omega(t)+y(t)+f_n(t))|\,dt \leqq C[(b-a) + (\|\omega+y\|_{\partial-1})^{\partial-1}]$$

donc pour tout $\omega \in W_p = L^{\partial-1}$, on peut trouver une constante $K(\omega)$ telle que

$$\Lambda_{p,y}(f_n, \omega) \geqq \frac{n\,\hat{\omega}_n}{(b-a)^2} + K(\omega).$$

Il en résulte que pour tout $\omega \in A(F)$ la série $n^{-2} \exp [n\,\hat{\omega}_n/(b-a)^2]$ converge ce qui entraîne que $(\hat{\omega}_n^+) \in l^p$ pour tout $p > 1$ [il existe en effet une constante $K'(\omega)$ telle que $\hat{\omega}_n \leqq [(b-a)^2/n] \log K'(\omega)\, n^2$]. Enfin en prenant $f_n = (1/n)\,\sigma_n$ on établit de même que $(\hat{\omega}_n^-) \in l^p$, $\forall p > 1$.

Démonstration de la proposition 5. — D'abord on peut faire rentrer le cas P constant dans le cadre de la proposition 3; il suffit pour cela de prendre $\mathscr{F} = \mathscr{C}^\infty$ muni du produit scalaire $(.,.)$ défini dans le lemme 7; on en déduit que la mesure cherchée est la gaussienne $\gamma_{a,b}$ qui est d'après ce lemme portée par $\mathscr{C}_0$. Ceci permet de considérer la mesure

$$\mu_{p,y}(d\omega) = \exp - \int_a^b P(\omega(t)+y(t))\,dt.\gamma_{a,b}(d\omega);$$

$\mu_{p,y}$ est une mesure bornée $\mathscr{C}_0^\infty - \Lambda_{p,y}$-quasi-invariante ce qui démontre la partie existence de la proposition. Il ne nous reste donc plus qu'à établir l'unicité pour $\partial \geqq 2$, car la dernière assertion de la proposition découlera de l'expression de $\mu_{p,y}$.

Unicité. — Soit $\mu \geqq 0$ bornée $\mathscr{C}_0^\infty - \Lambda_{p,y}$-quasi-invariante; d'après le lemme 8, μ est portée par $\mathscr{W}$. D'autre part P vérifie une inégalité du type :

$$\forall x,\ a \in \mathbf{R}, \quad |a| \leqq \|y\|_\infty \quad \Rightarrow \quad |P(x+a)| \leqq C(|x|^\partial + 1)$$

et d'après le lemme 6, il existe $k > 0$ tel que pour tout $\omega \in \mathscr{W}$:

$$\|\omega\|_\partial \leqq k\,\|\hat{\omega}\|_{\partial'} \qquad \text{avec} \quad \partial' = \frac{\partial}{\partial - 1};$$

donc si on pose

$$F(\omega) = \int_a^b P(\omega(t) + y(t))\, dt,$$

on aura pour tout $\omega \in \mathscr{W}$:

$$(1) \qquad F(\omega) \leqq k\,C\,[(\|\hat{\omega}\|_{\partial'})^{\partial} + 1];$$

considérons alors la mesure σ-finie $\tilde{\mu}(d\omega) = \exp(F(\omega))\,\mu(d\omega)$; elle est $\mathscr{C}_0^\infty$-quasi-invariante avec le même cocycle que la gaussienne $\gamma_{a,b}$; considérons aussi la mesure μ^* image de $\tilde{\mu}$ par l'injection canonique : $\mathscr{W} \to l^{\partial'}(\mathbf{N}^*)\ \omega \mapsto \hat{\omega}$. D'après (1) μ^* est de masse finie sur toute boule de $l^{\partial'}(\mathbf{N}^*)$ (et est donc une mesure de Radon) et d'autre part μ^* est $\mathbf{R}^{(\mathbf{N}^*)}$-quasi-invariante avec le cocycle local donné par (on suppose $b-a$ égal à π pour simplifier) :

$$\Lambda^*(c, w) = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \left(w_n + \frac{1}{2} c_n\right) c_n;$$

on termine au moyen du lemme suivant :

LEMME (cas particulier d'un résultat de Sunyach, *cf.* [10]). — *Si deux mesures sur* $l^{\partial'}(\mathbf{N}^*)$ *sont bornées sur toute boule de* $l^{\partial'}(\mathbf{N}^*)$ *et* $\mathbf{R}^{(\mathbf{N}^*)} - \Lambda^*$*-quasi-invariantes elles sont nécessairement proportionnelles.*

Démonstration. — On note qu'on connaît déjà une mesure de probabilité qui a la propriété précédente : l'image, notée γ^* de la gaussienne $\gamma_{a,b}$ par l'injection $\omega \mapsto \hat{\omega}$. On posera $\Omega = l^{\partial'}(\mathbf{N}^*)$; en regroupant les n premiers éléments de toute suite de Ω, on établit un isomorphisme u_n :

$$\Omega \to \Omega_n \times \overline{\Omega}_n, \quad \text{où } \Omega_n = \mathbf{R}^n \quad \text{et} \quad \overline{\Omega}_n = l^{\partial'}(\{n+1, n+2, \ldots\});$$

on note p_n et $\bar{p}_n$ les projections canoniques de Ω sur Ω_n et $\overline{\Omega}_n$. Soit ν une mesure satisfaisant aux conditions de l'énoncé; si F_1 et F_2 sont des fonctions positives à supports bornés sur Ω_n et $\overline{\Omega}_n$ respectivement, l'intégrale :

$$A(F_1, F_2) = \int_\Omega F_1(p_n(w))\, F_2(\bar{p}_n(w))\, \nu(dw)$$

est finie; l'application $F_1 \mapsto A(F_1, F_2)$ définit donc une mesure σ-finie sur Ω_n; il est clair que cette mesure est Ω_n-quasi-invariante avec le même cocycle que la gaussienne $\gamma_n^* = p_n(\gamma^*)$ et donc il existe une constante $K(F_2)$ telle que

$$(1) \qquad A(F_1, F_2) = K(F_2)\, \gamma_n^*(F_1);$$

γ_n^* étant de masse 1 on peut faire $F_1 = 1$ dans cette formule au moyen du théorème de Fatou, et on trouve

$$(2) \qquad K(F_2) = \int_\Omega F_2(\bar{p}_n(w))\, \nu(dw);$$

considérons alors la fonction ψ sur Ω définie par

$$\psi(w) = \mathrm{F}_1(p_n(w))\,\mathrm{F}_2(\overline{p}_n(w)); \tag{3}$$

les formules (1)-(2) s'écrivent aussi :

$$\int_\Omega \psi(w)\,\nu(dw) = \int_{\Omega\times\Omega} \psi(u_n(p_n(w'),\ \overline{p}_n(w''))\,\gamma^*(dw')\,\nu(dw'')). \tag{4}$$

Mais comme les fonctions du type donné par (3) engendrent la tribu borélienne de Ω, la formule (4) reste valable lorsque ψ est une fonction borélienne quelconque sur Ω, les deux membres pouvant alors être infinis (*cf.* [5], th. 1.20). Prenons en particulier ψ continue positive sur Ω; on a alors :

$$\forall\, w',\ w'' \quad \lim_n \psi(u_n(p_n(w'),\ \overline{p}_n(w''))) = \psi(w')$$

et donc d'après le théorème de Fatou :

$$\int_\Omega \psi(w)\,\nu(dw) \geqq \int_{\Omega\times\Omega} \psi(w')\,\gamma^*(dw')\,\nu(dw''); \tag{5}$$

or ν étant localement bornée on peut trouver ψ continue et positive telle que $\nu(\psi) < \infty$ et $\gamma^*(\psi) > 0$; la formule (5) montre donc que ν est bornée. On termine en appliquant la proposition directement en remarquant qu'on peut alors obtenir l'égalité dans (5) au moyen du théorème de Lebesgue.

Remarque. — Dans le cas $\partial = 2$ la proposition reste vraie si on prend $\mathrm{W}_p = (\mathscr{C}^\infty)'$; ce résultat découle de la proposition 3 car la mesure en cause est une gaussienne (non centrée si $y \neq 0$).

Notations. — On désignera par $r_{a,b}$ l'application :

$$\mathscr{C}([a,\ b]) \to \mathbf{R}^2, \qquad \omega \mapsto (\omega(a),\ \omega(b))$$

et pour $x = (x_1,\ x_2') \in \mathbf{R}^2$ par $t \mapsto y_{a,b}(x,\ t)$ la solution de $y'' = 0$ telle que $r_{a,b}(y) = x$; on posera aussi pour $x \in \mathbf{R}$:

$$\mathrm{I}(a,\ b,\ x) = \int_{\mathscr{C}_0([a,\ b])} \exp - \int_a^b \mathrm{P}(\omega(t) + y_{a,b}(x,\ t))\,dt \,.\, \gamma_{ab}(d\omega).$$

9. Proposition. — *Un polynôme borné inférieurement* P *étant fixé,*

1° *pour toute probabilité* β *sur* $\mathbf{R}^2$ *il existe une probabilité unique* μ *sur* $\mathscr{C}([a,\ b])$ *qui vérifie les conditions suivantes ,*

(i) $r_{a,b}(\mu) = \beta$*;*

(ii) μ *est* $\mathscr{C}_0^\infty$*-quasi-invariante et admet le cocycle*

$$\Lambda(f,\ \omega) = \omega(a) f'(a) - \omega(b) f'(b) + \int_a^b \left[\left(\omega(t) + \frac{1}{2} f(t)\right) f''(t) + \mathrm{P}(\omega(t)) - \mathrm{P}(\omega(t) + f(t))\right] dt.$$

2° *Si* β_1 *et* β_2 *sont deux probabilités équivalentes sur* $\mathbf{R}^2$, *les probabilités correspondantes* μ_1 *et* μ_2 *sur* $\mathscr{C}([a, b])$ *sont équivalentes et leur densité relative est* $d \circ r_{a,b}$, *où* d *est une densité de* β_1 *par rapport à* β_2.

3° *Si* β *est équivalente à la mesure de Lebesgue,* μ *est* $\mathscr{C}^\infty$*-quasi-invariante avec le cocycle :*

$$\begin{aligned}\Lambda(f, \omega) = {} & l((f(a), f(b)), (\omega(a), \omega(b))) + \log \mathrm{I}(a, b, (\omega(a), \omega(b))) \\ & - \log \mathrm{I}(a, b, \omega(a)+f(a), \omega(b)+f(b)) + \left(\omega(a)+\frac{1}{2}f(a)\right)f'(a) \\ & - \left(\omega(b)+\frac{1}{2}f(b)\right)f'(b) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\left(\omega(b)-\omega(a)+\frac{1}{2}(f(b)-f(a))\right) \\ & + \int_a^b \left[\left(\omega(t)+\frac{1}{2}f(t)\right)f''(t) + \mathrm{P}(\omega(t)) - \mathrm{P}(\omega(t)+f(t))\right] dt,\end{aligned}$$

où l *désigne un cocycle admissible pour* β.

Démonstration. — Dans cette démonstration on abrègera respectivement les notations $r_{a,b}$, $y_{a,b}(x, t)$, $\mathrm{I}(a, b, x)$ en r, $y_x(t)$, I_x.

1° Soit μ une probabilité vérifiant (i) et (ii); d'après [1] (n° 2.7), μ admet une désintégration par rapport à r que l'on notera

$$\mu = \int_{\mathbf{R}^2} \nu_x \, \beta(dx), \tag{1}$$

où ν_x est une probabilité portée par : $\{\omega \mid r(\omega) = x\}$; de plus on peut d'après la proposition 2 supposer que ν_x est $\mathscr{C}_0^\infty$-quasi-invariante avec le cocycle

$$\begin{aligned}\Lambda'(f, \omega) = {} & x_1 f'(a) - x_2 f'(b) \\ & + \int_a^b \left[\left(\omega(t)+\frac{1}{2}f(t)\right)f''(t) + \mathrm{P}(\omega(t)) - \mathrm{P}(\omega(t)+f(t))\right] dt\end{aligned}$$

$[x = (x_1, x_2)]$; Si on pose

$$m_x(d\omega) = \nu_x(y_x + d\omega), \tag{2}$$

m_x est donc $\mathscr{C}_0^\infty - \Lambda''$-quasi-invariante, où

$$\Lambda''(f, \omega) = \int_a^b \left[\left(\omega(t)+\frac{1}{2}f(t)\right)f''(t) + \mathrm{P}(\omega(t)+y_x(t)) - \mathrm{P}(\omega(t)+y_x(t)+f(t))\right] dt.$$

Cette propriété caractérise m_x d'après la proposition 5 d'où le résultat d'unicité; pour la suite on remarquera que plus précisément d'après la démonstration de la proposition 5, on a

$$m_x(d\omega) = \mathrm{I}_x^{-1} \exp - \int_a^b \mathrm{P}(\omega(t)+y_x(t))\, dt . \gamma(d\omega); \tag{3}$$

il est enfin clair que réciproquement les formules (1), (2) et (3) définissent une mesure satisfaisant à (i) et (ii).

2° Ce résultat découle immédiatement de (1), (2) et (3).

3° Il s'agit d'établir la formule de quasi-invariance (Q) dans le cas particulier en cause; d'après (ii) cette formule est vérifiée pour $f \in \mathscr{C}_0^\infty$ et, comme toute fonction de $\mathscr{C}^\infty$ est somme d'une fonction de $\mathscr{C}_0^\infty$ et d'une fonction affine, il suffit de l'établir lorsque f est affine [grâce à la propriété de cocycle (C) vérifiée par Λ], c'est-à-dire de la forme y_ξ avec $\xi \in \mathbf{R}^2$. Ceci va résulter du calcul suivant; considérons :

$$A = \int_{\mathscr{C}} \psi(\omega - y_\xi)\,\mu(d\omega),$$

où ψ est une fonction borélienne bornée sur $\mathscr{C}$; d'après (1),

$$A = \int_{\mathbf{R}^2} \beta(dx) \int_{\mathscr{C}} \psi(\omega - y_\xi)\,\nu_x(d\omega);$$

d'autre part d'après (2) et (3) pour tous $x, x' \in \mathbf{R}^2$, $\nu_x(d\omega)$ et $\nu_{x'}(y_{x'-x} + d\omega)$ sont équivalentes et plus précisément pour toute fonction borélienne positive F :

$$\int_{\mathscr{C}} F(\omega)\,\nu_x(d\omega) = I_x^{-1}\,I_{x'} \int_{\mathscr{C}} F(\omega + y_{x-x'}) \exp - \Delta(x', x, \omega)\,\nu_{x'}(d\omega),$$

où l'on a posé

$$\Delta(x', x, \omega) = \int_a^b \left[P(\omega(t) + y_{x-x'}(t)) - P(\omega(t))\right] dt.$$

On a donc aussi

$$A = \int_{\mathbf{R}^2} \beta(dx)\,I_x^{-1}\,I_{x-\xi} \int_{\mathscr{C}} \psi(\omega) \exp - \Delta(x-\xi, x, \omega)\,\nu_{x-\xi}(d\omega),$$

et d'après la quasi-invariance de β :

$$A = \int_{\mathbf{R}^2} \beta(dx)\,I_{x+\xi}^{-1}\,I_x \exp l(\xi, x) \int_{\mathscr{C}} \psi(\omega) \exp - \Delta(x, x+\xi, \omega)\,\nu_x(d\omega),$$

ce qui s'écrit aussi comme $r(\omega) = x$, $\nu_x(d\omega)$-presque partout :

$$A = \int_{\mathscr{C}} \psi(\omega)\,I_{r(\omega)+\xi}^{-1}\,I_{r(\omega)} \exp\left[-\Delta(r(\omega), r(\omega)+\xi, \omega) + l(\xi, r(\omega))\right] \mu(d\omega).$$

Comme

$$\Delta(r(\omega), r(\omega)+\xi, \omega) = \int_a^b \left[P(\omega(t)) - P(\omega(t) + y_\xi(t))\right] dt,$$

cette dernière égalité équivaut à la formule (Q) lorsque $f = y_\xi$ (on remarquera les simplifications apportées dans ce cas par $f'' = 0$ et $f'(a) = f'(b) = [f(b) - f(a)]/(b-a)$ dans l'expression de $\Lambda(f, \omega)$).

III. On va démontrer maintenant le résultat annoncé dans l'introduction, dont on reprend les notations, par une méthode qui suit des suggestions de Ph. Courrège et P. Renouard.

Dans ce paragraphe, P désignera un polynôme borné inférieurement non constant fixé; on posera

$$\mathrm{K}(f, \omega, t) = \left(\omega(t) + \frac{1}{2} f(t)\right) f''(t) + \mathrm{P}(\omega(t)) - \mathrm{P}(\omega(t) + f(t))$$

et le cocycle sur $\mathscr{D}$ (**R**) $\times \mathscr{C}$ (**R**) en cause est donné par

$$\Lambda(f, \omega) = \int_{\mathbf{R}} \mathrm{K}(f, \omega, t)\, dt.$$

Pour tout sous-ensemble J de **R**, soient $\mathscr{R}_{\mathrm{J}}$ l'application de restriction canonique $\mathscr{C}(\mathbf{R}) \to \mathscr{C}(\mathrm{J})$, $\mathscr{F}_{\mathrm{J}}$ la tribu image réciproque par $\mathscr{R}_{\mathrm{J}}$ de la tribu borélienne de $\mathscr{C}$ (J) et posons pour toute mesure μ sur $\mathscr{C}$ (**R**) : $\mu_{\mathrm{J}} = \mathscr{R}_{\mathrm{J}}(\mu)$; $\mathscr{F}_{\mathrm{J}}$ coïncide avec la tribu engendrée par les fonctions X_t, $t \in \mathrm{J}$; on emploiera en fait seulement les notations plus spécialisées données par le tableau suivant (où : $a < b$) :

$\mathrm{J} =]-\infty, a]$,	$[b, +\infty[$,	$[a, b]$,	$\{a, b\}$,	$\{a\}$,
$\mathscr{R}_{\mathrm{J}} = \bigstar$	$\bigstar$	$\mathscr{R}_{a,b}$,	$r_{a,b}$,	X_a,
$\mathscr{F}_{\mathrm{J}} = \mathscr{F}_a^+$,	$\mathscr{F}_b^-$,	$\mathscr{F}_{a,b}$,	$\bigstar$,	$\bigstar$,
$\mu_{\mathrm{J}} = \mu_a^+$,	μ_b^-,	$\mu_{a,b}$,	$\bigstar$,	μ_a.

Il est entendu dans ce tableau que $\mathscr{C}(\{a, b\})$ et $\mathscr{C}(\{a\})$ sont respectivement identifiés à $\mathbf{R}^2$ et **R**; alors $r_{a,b}(\mu)$ est une mesure sur $\mathbf{R}^2$, qui est $\mathbf{R}^2$-quasi-invariante lorsque μ est $\mathscr{D}$ (**R**)-quasi-invariante. Dans ce cas on notera $l_{a,b}$ un cocycle de quasi-invariance pour $\mu_{a,b}$ et on définira un cocycle

$$\Lambda_{a,b} : \quad \mathscr{C}^\infty([a, b]) \times \mathscr{C}([a, b]) \to \mathbf{R}$$

en remplaçant l par $l_{a,b}$ dans la formule finale de la proposition 9. Enfin on emploiera (lorsqu'il n'y a pas ambiguïté) le signe $\simeq$ pour signifier l'égalité presque partout de deux fonctions. On peut maintenant énoncer le lemme et la proposition suivante :

10. Lemme. — *Soit* μ *une probabilité* $\mathscr{D}$ (**R**)$-\Lambda$*-quasi-invariante sur* $\mathscr{C}$ (**R**). *Alors* μ *est aussi* $\mathscr{N}''$*-quasi-invariante, où* $\mathscr{N}''$ *est l'espace des fonctions continues à support compact dont la dérivée seconde (au sens des distributions) est une mesure et admet pour cocycle l'extension naturelle de* Λ *à* $\mathscr{N}'' \times \mathscr{C}$ (**R**).

Démonstration. — On applique la proposition 2; en effet si φ_n désigne une fonction de $\mathscr{D}$ d'intégrale 1 et à support dans $]-1/n, +1/n[$ et si on pose pour tout $f \in \mathscr{N}''$: $f_n = f \bigstar \varphi_n$, on vérifie facilement que f_n satisfait aux conditions décrites dans la proposition 2.

11. PROPOSITION. — *Soit* μ *une probabilité* $\mathscr{D}(\mathbf{R})-\Lambda$-*quasi-invariante sur* $\mathscr{C}(\mathbf{R})$. *Alors* $\mu_{a,b}$ *est* $\mathscr{C}^\infty$-*quasi-invariante avec le cocycle* $\Lambda_{a,b}$. *Si* μ' *est une autre probabilité* $\mathscr{D}(\mathbf{R})-\Lambda$-*quasi-invariante,* $\mu'_{a,b}$ *est équivalente à* $\mu_{a,b}$ *et si* $d_{a,b}$ *est une densité de* $r_{a,b}(\mu)$ *par rapport à* $r_{a,b}(\mu')$ *la fonction* $\omega \mapsto d_{a,b}(\omega(a), \omega(b))$ *est une densité de* $\mu_{a,b}$ *par rapport à* $\mu'_{a,b}$. *Enfin les fonctions* $d_{a,b}$ *satisfont à l'équation de compatibilité : si* $[a, b] \subset [a', b]$,

$$E_{\mu'}(d_{a,b}(X_a, X_b) \mid \mathscr{F}_{a,b}) \simeq d_{a,b}(X_a, X_b)$$

Démonstration. — Remarquons d'abord que cette équation de compatibilité est une conséquence facile du reste et exprime simplement le fait que le système des mesures $\mu_{a,b}$ est projectif. Les autres assertions vont découler de la proposition 9 lorsqu'on aura démontré que $\mu_{a,b}$ et $\mu'_{a,b}$ satisfont à l'hypothèse (ii) de cette proposition; pour cela on remarquera que pour toute fonction f de $\mathscr{C}_0^\infty([a, b])$, la fonction $\tilde{f}$ obtenue en prolongeant f par 0 hors de $[a, b]$ est dans $\mathscr{N}''$, et que

$$\Lambda(\tilde{f}, \omega) = \omega(a) f'(a) - \omega(b) f'(b) + \int_a^b K(f, \omega, t)\, dt;$$

il suffit alors d'appliquer la dernière partie de la proposition 1.

La propriété de Markov va donner des renseignements sur la structure du cocycle $\Lambda_{a,b}$:

12. PROPOSITION. — *On suppose que la probabilité* μ *est* $\mathscr{D}(\mathbf{R})-\Lambda$-*quasi-invariante et markovienne. Alors il existe deux familles de dx-pseudo-cocycles (dx étant la mesure de Lebesgue),* l_a^-, l_b^+ *sur* $\mathbf{R}\times\mathbf{R}$ *telles que, pour tout* $g \in \mathscr{C}^\infty([a, b])$, *on a, pour* $\mu_{a,b}$-*presque tout* ω :

$$\begin{aligned}\Lambda_{a,b}(f, \omega) = {} & l_a^-(g(a), \omega(a)) + l_b^+(g(b), \omega(b)) + \left(\omega(a) + \frac{1}{2} g(a)\right) g'(a) \\ & - \left(\omega(b) + \frac{1}{2} g(b)\right) g'(b) + \int_a^b K(g, \omega, t)\, dt;\end{aligned}$$

de plus $l_a^- + l_a^+$ *est un pseudo-cocycle de quasi-invariance pour* μ_a.

Démonstration. — Nous démontrerons d'abord le résultat intermédiaire suivant : il existe deux familles de fonctions F_a^- et $F_b^+ : \mathscr{C}(\mathbf{R}) \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, boréliennes par rapport à leur deuxième variable et avec les propriétés suivantes :

(α) Pour tous $a < b$, $f \in \mathscr{D}(\mathbf{R})$, on a pour $\mu_{a,b}$-presque tout ω :

$$\begin{aligned}\Lambda_{a,b}(R_{a,b}(f), \omega) = {} & F_a^-(f, \omega(a)) + F_b^+(f, \omega(b)) + \left(\omega(a) + \frac{1}{2} f(a)\right) f'(a) \\ & - \left(\omega(b) + \frac{1}{2} f(b)\right) f'(b) + \int_b^b K(f, \omega, t)\, dt.\end{aligned}$$

(β) Pour tous f_1, $f_2 \in \mathscr{D}(\mathbf{R})$, $F_a^-(f_1 + f_2, .) \simeq F_a^-(f_1, .) + F_a^-(f_2, . + f_1(a))$ (resp. b, F_b^+).

(γ) Si f est nulle au voisinage de a, $F_a^-(f, .) \simeq 0$ (resp. b, F_b^+).

Pour cela on part de l'égalité suivante, qui résulte de la proposition 1 :

$$\exp \Lambda_{a,b}(R_{a,b}(f), R_{a,b}(.)) \simeq E_\mu \left(\exp \int_{-\infty}^{+\infty} K(f, ., t)\, dt \,\middle|\, \mathscr{F}_{a,b}\right) \tag{1}$$

et on pose pour $f \in \mathscr{D}$ (**R**), $\omega \in \mathscr{C}$ (**R**) :

$$A_a^-(f, .) = \int_{-\infty}^{a} K(f, \omega, t)\, dt \qquad \left(\text{resp. } A_b^+, \int_b^{+\infty}; B, \int_a^b\right); \tag{2}$$

les fonctions $A_a^-(f, .)$, $A_b^+(f, .)$, $B(f, .)$ sont respectivement $\mathscr{F}_a^+$, $\mathscr{F}_b^-$ et $\mathscr{F}_{a,b}$-mesurables et d'autre part, d'après la propriété de Markov, les deux premières de ces tribus sont conditionnellement indépendantes par rapport à la troisième (*cf.* [5]); il en résulte que

$$E_\mu(\exp(A^- + B + A^+) \mid \mathscr{F}_{a,b}) \simeq \exp B . E_\mu(A^- \mid \mathscr{F}_{a,b}) . E_\mu(A^+ \mid \mathscr{F}_{a,b}); \tag{3}$$

la propriété de Markov implique en outre qu'il existe des fonctions Φ_a^- et Φ_b^+ sur $\mathscr{D}$ (**R**) $\times$ **R** telle que pour tout f:

$$\begin{cases} \exp \Phi_a^-(f, X_a) \simeq E_\mu(A_a^-(f, .) \mid \mathscr{F}_a^-), \\ \exp \Phi_b^+(f, X_b) \simeq E_\mu(A_b^+(f, .) \mid \mathscr{F}_b^+); \end{cases} \tag{4}$$

donc si on pose

$$\begin{cases} F_a^-(f, x) = \Phi_a^-(f, x) - \left(\omega(a) + \dfrac{1}{2} f(a)\right) f'(a), \\ F_b^+(f, x) = \Phi_b^+(f, x) + \left(\omega(b) + \dfrac{1}{2} f(b)\right) f'(b), \end{cases} \tag{5}$$

la suite des égalités (1)-(5) va entraîner (α). On va maintenant vérifier (β) et (γ) pour F_b^+; pour cela on remarque que d'après la proposition 1, la fonction $\mathscr{L}_b^+$ sur $\mathscr{D}$ ($]-\infty, 0]$) $\times \mathscr{C}$ ($]-\infty, 0]$) définie par

$$\mathscr{L}_b^+(g, \omega) = F_b^+(\tilde{g}, \omega(b)) - \left(\omega(b) + \frac{1}{2} g(b)\right) g'(b) + \int_{-\infty}^{b} K(g, \omega, t)\, dt,$$

où g est une fonction quelconque de $\mathscr{D}$ (**R**) qui prolonge g, est un pseudo-cocycle de quasi-invariance pour μ_b^+; par l'unicité essentielle de ce pseudo-cocycle on aura $F_b^+(f, .) \simeq F_b^+(f', .)$ à chaque fois que f et f' coïncident sur $]-\infty, b]$; en particulier si f est nulle au voisinage de b, f' peut être choisi nulle sur $[b, +\infty[$ et alors $F_b^+(f', .)$ est essentiellement nulle par sa définition même ce qui démontre (γ); enfin (β) s'obtient en écrivant que $\mathscr{L}_b^+$ est un pseudo-cocycle.

La proposition va maintenant découler de la confrontation de (α) avec la formule de définition de $\Lambda_{a,b}$; si on pose

$$L_{a,b}(x, z) = l_{a,b}(x, z) + \log I(a, b, z) - \log I(a, b, x+z) + \frac{x_2 - x_1}{b-a}\left(z_2 - z_1 + \frac{1}{2}(x_2 - x_1)\right)$$

$L_{a,b}$ est un cocycle sur $\mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2$ et on aura pour tout $f \in \mathcal{D}(\mathbf{R})$:

(6) Pour presque tout (z_1, z_2) :

$$L_{a,b}((f(a), f(b)), (z_1, z_2)) = F_a^-(f, z_1) + F_b^+(f, z_2).$$

De cette égalité on va déduire qu'il existe des dz-pseudo-cocycles l_a^- et l_b^+ sur $\mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2$ tels que

$$\text{(7)} \qquad F_a^-(f, .) \simeq l_a^-(f(a), .) \qquad (\text{resp. } b,\ F_b^+,\ l_b^+),$$

ce qui démontrera la formule annoncée dans la proposition; il nous suffit, a et b étant fixés avec $a < b$, de trouver des exemplaires de l_a^- et l_b^+ satisfaisant à (7). Pour cela considérons une application linéaire u^- (resp. : u^+) : $\mathbf{R} \to \mathcal{D}(\mathbf{R})$ telle qu'on ait

$$[u^-(x)](a) = x \qquad \text{et} \qquad [u^-(x)](t) = 0$$

pour t voisin de b (resp. u^+, b, a) et posons

$$\text{(8)} \qquad l_a^-(x, z) = F_a^-(u^-(x), z) \qquad (\text{resp. } b,\ l_b^+,\ F_b^+,\ u^+);$$

appliquant l'égalité (6) pour $f = u^-(x)$ (resp. u^+) et tenant compte de (γ) on aura pour tout $x_1 \in \mathbf{R}$:

$$\text{pour presque tout } z : \quad L_{a,b}((x_1, 0), z) = l_a^-(x_1, z_1) \qquad [\text{resp. } (0, x_2),\ l_b^+,\ x_2,\ z_2];$$

comme d'après (β) et (9) l_b^+ et l_a^- sont des pseudo-cocycles et que $L_{a,b}$ est un cocycle en exploitant l'égalité $(x_1, x_2) = (x_1, 0) + (0, x_2)$, on obtient pour tout $x \in \mathbf{R}$:

$$\text{pour presque tout } z : \quad L_{a,b}(x, z) = l_a^-(x_1, z_1) + l_b^+(x_2, z_2);$$

on déduit (7) en comparant cette égalité avec (6) (compte tenu des propriétés de pseudo-cocycle possédées par les termes en cause).

Enfin on démontre la dernière assertion de la proposition en faisant $a = b$ dans la démonstration de (α) (avec les identifications nécessaires).

La proposition 12 permet de préciser la proposition 11 de la manière suivante :

13. PROPOSITION. — *Soient* μ *et* μ' *deux probabilités* $\mathcal{D}(\mathbf{R}) - \Lambda$*-quasi-invariantes sur* $\mathcal{C}(\mathbf{R})$ *et* $d_{a,b}$ *comme dans la proposition* 11. *Alors si* μ *et* μ' *sont markoviennes il existe deux familles de fonctions boréliennes partout positives sur* $\mathbf{R}$, φ_a^- *et* φ_b^+ *telles que*

(α) $d_{a,b} \simeq \varphi_a^- \otimes \varphi_b^+$.

$$(\beta) \qquad \begin{cases} \textit{pour} \quad a' < a, & E_{\mu'}(\varphi_{a'}^- \circ X_{a'} \,|\, \mathcal{F}_a^-) \simeq \varphi_a^- \circ X_a, \\ \textit{pour} \quad b < b', & E_{\mu'}(\varphi_{b'}^+ \circ X_{b'} \,|\, \mathcal{F}_b^+) \simeq \varphi_b^+ \circ X_b. \end{cases}$$

(γ) μ_a *admet la fonction* $\varphi_a^- . \varphi_a^+$ *comme densité par rapport à* μ'_a.

Si de plus μ *et* μ' *sont invariantes par les translations de* $\mathbf{R}$, *il existe deux fonctions* ψ^- *et* ψ^+ *et* $\lambda\in\mathbf{R}$ *telles que*

$$\varphi_a^- = e^{-\lambda a}\psi^- \quad \textit{et} \quad \varphi_b^+ = e^{\lambda b}\psi^+ \quad \textit{pour tous } a,\, b\in\mathbf{R}.$$

Démonstration. — On remarquera tout d'abord que (γ) est une conséquence de (α) et (β) et de la fin de la proposition 12. On va simplement démontrer qu'il existe des fonctions $\tilde{\varphi}_a^-$ et $\tilde{\varphi}_b^+ > 0$ vérifiant :

$$(1) \qquad d_{a,b} \simeq C_{a,b}\tilde{\varphi}_a^- \otimes \tilde{\varphi}_b^+,$$

où $C_{a,b}$ est une constante; on vérifie alors facilement en utilisant la relation de compatibilité satisfaite par les fonctions $d_{a,b}$ qu'on peut trouver des constantes > 0 C_a^- et C_b^+ telles que les fonctions $\varphi_a^- = C_a^-\,\tilde{\varphi}_a^-$, $\varphi_b^+ = C_b^+\,\tilde{\varphi}_b^+$ satisfont les égalités (α) et (β).

Fixant maintenant $a < b$ on va trouver des exemplaires de φ_a^- et φ_b^+ de la manière suivante; utilisant l'expression de $\Lambda'_{a,b}-\Lambda_{a,b}$ donnée par la proposition 12, on obtient pour tout $x\in\mathbf{R}^2$:

(2) Pour presque tout z :

$$\log d_{a,b}(x+z)-\log d_{a,b}(z) = \lambda_a^-(x_1, z_1)+\lambda_b^+(x_2, z_2),$$

où

$$\lambda_a^- = l_a^{-\prime}-l_a^-, \qquad \lambda_b^+ = l_b^{+\prime}-l_b^+;$$

ceci va impliquer qu'il existe des fonctions boréliennes positives $\tilde{\varphi}_a^-$ et $\tilde{\varphi}_b^+$ telles que

$$(3) \qquad \forall x_1\in\mathbf{R},\quad \lambda_a^-(x_1, .) \simeq \log\tilde{\varphi}_a^-(x_1+.)-\log\tilde{\varphi}_a^-(.)$$

(resp. b, λ_b^+, x_2, φ_b^+), ce qui démontrera (1) par comparaison avec (2); pour montrer (3) notons Q un sous-groupe dénombrable de $\mathbf{R}$ et remarquons que pour presque tout $z\in\mathbf{R}^2$, on aura pour tout x_1 dans Q :

$$(4) \qquad d_{a,b}(z_1+x_1, z_2)-d_{a,b}(z_1, z_2) = \lambda_a^-(x_1, z_1);$$

on en déduit qu'il existe un ensemble négligeable N tel que, pour tout $z_2\notin N$ et $z'_2\notin N$, la fonction sur $\mathbf{R}$ $d_{a,b}(., z_2)-d_{a,b}(., z_2)$ est essentiellement invariante par l'action de Q donc essentiellement constante; il suffit donc de fixer $\zeta\notin N$ et de poser $\tilde{\varphi}_a^-(z_1) = d_{a,b}(z_1, \zeta)$ pour obtenir (3) et la première partie de la proposition. Lorsque μ et μ' sont invariantes par les translations de $\mathbf{R}$, on a la relation $d_{a+h,b+h}\simeq d_{a,b}$ qui entraîne que les fonctions φ_a^- (resp. φ_b^+) sont mutuellement essentiellement proportionnelles. Considérant alors les termes introduits par les relations

$$\psi^- = \varphi_0^- \quad (\text{resp. } \psi^+ = \varphi_0^+) \qquad \text{et} \qquad \varphi_a^- = K_a^-\,\psi^- \quad (\text{resp. } b,\, +),$$

on a d'après les relations (β) : $K_{a_1+a_2}^- = K_{a_1}^-\,K_{a_1}^-$ (resp. b, $+$).

D'autre part la fonction : $a\mapsto K_a^-$ est borélienne, [pour voir cela, utilisons la relation

$$\forall a<0,\ K_a^-\,E_{\mu'}(\psi^-\circ X_a\,|\,\mathscr{F}_0^-) \simeq \psi^-\circ X_0;$$

il nous suffit de démontrer que si A est un ensemble $\mathscr{F}_0^-$-mesurable sur lequel $\psi^- \circ X_0$ est intégrable et ψ est une fonction borélienne > 0 la fonction $a \mapsto \int_A \psi \circ X_a(\omega)\, \mu(d\omega)$ est borélienne; et ceci s'établit en remarquant que cette fonction est continue lorsque ψ est continue bornée grâce au théorème de Lebesgue et à la continuité des trajectoires du processus (μ', X_t)] et donc on a :

$$K_a^- = e^{-\lambda^- a} \qquad (\text{resp. } K_a^+ = e^{\lambda^+ a}).$$

Par l'invariance par les translations de $\mathbf{R}$, on aura $\lambda^- = \lambda^+$.

C. Q. F. D.

Rappelons maintenant le résultat d'existence suivant (*cf.* [2]) :

14. THÉORÈME. — 1° *Il existe un seul couple* (λ, ρ), *où* $\lambda \in \mathbf{R}$ *et* ρ *est une fonction* $\mathscr{C}^\infty$ *sur* $\mathbf{R}$ *tel que l'on ait*

$$\forall x \quad \rho(x) > 0, \quad \int \rho(x)\, dx = 1 \qquad et \qquad -\frac{1}{2}(\rho^{1/2})'' + (P+\lambda)\,\rho^{1/2} = 0.$$

Posant $\xi(dx) = \rho(x)\, dx$, *l'opérateur non borné* H *de* $L^2(\xi)$ *défini par*

$$H\psi = -\frac{1}{2}\left(\psi'' + \frac{\rho'}{\rho}\psi'\right)$$

sur le domaine

$$D = \left\{\psi \in H^2_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}) \,\middle|\, \psi'' + \frac{\rho'}{\rho}\psi' \in L^2(\xi)\right\}$$

est autoadjoint, positif et admet comme seuls vecteurs propres partout strictement positifs les constantes.

2° *Il existe une mesure unique* $\underline{\mu}$ *sur* $\mathscr{C}(\mathbf{R})$ *qui est markovienne, euclidienne et qui vérifie* $\mu_0 = \xi$ *et pour tout* $\psi \in \mathscr{L}^2(\xi)$ *et* $t < t'$,

$$E_{\underline{\mu}}(\psi \circ X_{t'} \,|\, \mathscr{F}_t^+) = e^{-tH}(\dot{\psi}) \circ X_t$$

(*le* . *signifiant qu'il s'agit de classes de fonctions mesurables*).

3° $\underline{\mu}$ *est* $\mathscr{D}(\mathbf{R}) - \Lambda$-*quasi-invariante et portée par* $\mathscr{S}'(\mathbf{R}) \cap \mathscr{C}(\mathbf{R})$.

On peut alors établir le résultat d'unicité annoncé :

15. THÉORÈME. — *Il existe une seule probabilité sur* $\mathscr{C}(\mathbf{R})$ *qui soit euclidienne, markovienne et* $\mathscr{D}(\mathbf{R}) - \Lambda$-*quasi-invariante.*

Démonstration. — Soit μ une probabilité satisfaisant aux hypothèses; on va montrer que $\mu = \underline{\mu}$ ($\underline{\mu}$ étant comme dans le théorème 14) ce qui démontrera le théorème. Pour cela on applique la proposition 13 en prenant $\mu' = \underline{\mu}$. Comme de plus μ et $\underline{\mu}$ sont euclidiennes on peut toujours supposer dans cette proposition que $\psi^+ = \psi^-$ et puisque $\psi^+ . \psi^-$ est la densité de μ_0 par rapport à $\underline{\mu}_0$ on a : $\psi^+ \in \mathscr{L}^2(\mu_0)$; la condition de compatibilité (β) signifie alors que la classe $\dot{\psi}^+$ est vecteur propre partout positif de H (correspondant à la valeur propre λ); et donc ψ^+ est essentiellement constante (et $\lambda = 0$), d'où le résultat.

Le théorème 15 n'est pas optimal; en particulier dans le cas où P est du second degré, on peut décrire la structure de toutes les probabilités $\mathscr{D}(\mathbf{R}) - \Lambda$-quasi-invariantes sur $\mathscr{C}(\mathbf{R})$; d'abord, en supposant pour simplifier que $P(x) = m^2(x^2/2)$, la mesure $\underline{\mu}$ est portée par $W = \mathscr{S}'(\mathbf{R}) \cap \mathscr{C}(\mathbf{R})$ et peut être identifiée [par l'injection canonique : $W \to \mathscr{S}'(\mathbf{R})$] avec la mesure gaussienne sur $\mathscr{S}'(\mathbf{R})$ dont la covariance est $(f, g) = \langle f, \Sigma^{-1} g \rangle$, où $f, g \in \mathscr{S}(\mathbf{R})$, $\langle ., . \rangle$ est le produit scalaire dans $L^2(\mathbf{R})$ et Σ est l'automorphisme de $\mathscr{S}(\mathbf{R}) : g \to m^2 g - g''$ [on note que les structures boréliennes induites par celles de $\mathscr{S}'(\mathbf{R})$ et $\mathscr{C}(\mathbf{R})$ coïncident sur W]; ensuite on a le résultat suivant [dont la démonstration se fait comme pour la proposition 3 en exploitant l'égalité $\int \exp \Lambda(f, \omega)\, \mu(d\omega) = 1$] :

16. PROPOSITION. — *Supposons que* $P(x) = m^2(x^2/2)$; *pour* $\xi = (\xi_1, \xi_2) \in \mathbf{R}^2$ *désignons par* S_ξ *la solution* $t \to \xi_1 e^{-mt} + \xi_2 e^{+mt}$ *de l'équation* $-S'' + m^2 S = 0$ *et par* ν_ξ *la mesure :* $d\omega \mapsto \underline{\mu}(S_\xi + d\omega)$.

Alors pour que la probabilité μ *sur* $\mathscr{C}(\mathbf{R})$ *soit* $\mathscr{D}(\mathbf{R}) - \Lambda$*-quasi-invariante, il faut et il suffit qu'il existe une probabilité* α *sur* $\mathbf{R}^2$ *telle que* $\mu = \int_{\mathbf{R}^2} \nu_\xi\, \alpha(d\xi)$; α *est déterminée de manière unique par cette égalité.*

Ce résultat permet de vérifier facilement dans le cas $P(x) = m^2(x^2/2)$ les conjectures (A) et (B) de l'introduction. Et d'autre part la solution de la conjecture (B) semble abordable dans le cas général par l'équivalence suivante :

17. PROPOSITION. — *La conjecture* (B) *est équivalente à la suivante : si* $d_{a,b}$, $a < b$, *est une famille de fonctions boréliennes partout positives sur* $\mathbf{R}^2$ *vérifiant les hypothèses :*

(i) $d_{a,b}$ *est d'intégrale* 1 *pour la mesure* $r_{a,b}(\underline{\mu})$;

(ii) *pour tout* $h \in \mathbf{R}$, $d_{a+h,b+h} \simeq d_{a,b}$;

(iii) *lorsque* $[a, b] \subset [a', b]$,

$$E_{\underline{\mu}}(d_{a',b'}(X_{a'}, X_{b'}) \mid \mathscr{F}_{a,b}) \simeq d_{a,b}(X_a, X_b),$$

alors on a $d_{a,b} \simeq 1$, *pour tout* $a < b$.

Démonstration. — Il est clair d'après la proposition 11 qu'à toute probabilité invariante par les translations de **R** et $\mathscr{D}(\mathbf{R}) - \Lambda$-quasi-invariante on peut faire correspondre une telle famille et réciproquement, $d_{a,b}$ étant donnée vérifiant (i), (ii) et (iii), les mesures

$$\mu_{a,b} = d_{a,b}(X_a, X_b) . \underline{\mu}_{a,b}$$

constituent un système projectif de mesures qui provient d'après [1] (n° 4.3) d'une mesure sur $\mathscr{C}(\mathbf{R})$ qui a toutes les propriétés demandées.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BOURBAKI, *Intégration sur les espaces topologiques séparés.*

[2] PH. COURRÈGE et P. RENOUARD, *Oscillateur anharmonique, mesures quasi-invariantes sur* $\mathscr{C}$ (**R**, **R**), *et théorie quantique des champs en dimension* $d = 1$ [*Astérisque* (à paraître)].

[3] R. E. EDWARDS, *Fourier Series*, vol. 1, chap. 7, exercice 7-8.

[4] I. M. GUELFAND and N. YA-VILENKIN, *Generalized fonctions*, vol. 4, 1964.

[5] P. A. MEYER, *Probabilités et Potentiel*, chap. 2, n° 47.

[6] *Séminaire Schwartz* 1969-1970, *Applications radonifiantes*, exposés 11 et 12.

[7] A. ZYGMUND, *Trigonometric series.*

[8] P. PRIOURET et M. YOR, *Processus de diffusion sur* **R** *et mesures quasi-invariantes sur* $\mathscr{C}$ (**R**, **R**) [*Astérisque* (à paraître)].

[9] P. CARTIER, *Problèmes mathématiques de la théorie quantique des champs. II : prolongement analytique* (*Séminaire Bourbaki*, n° 418, 1972-1973).

[10] C. SUNYACH, *Sur les mesures quasi-invariantes* (à paraître).

(Manuscrit reçu le 14 novembre 1974,
révisé le 2 mai 1975.)

Gilles ROYER,
Équipe d'Analyse,
E. R. A. au C. N. R. S. n° 294,
Université Pierre-et-Marie-Curie,
(Université Paris VI),
Tour 46, 4e étage-46/0,
75230 Paris Cedex 05.