

ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

BERNARD MORIN

Calcul Jacobien

Annales scientifiques de l'É.N.S. 4^e série, tome 8, n° 1 (1975), p. 1-98

http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1975_4_8_1_1_0

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1975, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (<http://www.elsevier.com/locate/ansens>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

CALCUL JACOBIEN

PAR BERNARD MORIN

... Hilfssatz reiht sich an Hilfssatz, alle Begriffe sind durch Formeln mit vier und fünf Indizes umschrieben, der Text fehlt fast vollständig so dass dem Verständnis die grössten Schwierigkeiten bereitet werden.

Emmy NOETHER [5].

INTRODUCTION

Dans ce travail qui développe les idées de [10], on se propose de donner des équations explicites pour les variétés de Thom-Boardman. On y parvient en suivant pas à pas la démarche de M. Boardman (cf. [2]) lorsqu'il démontre que les ensembles $\Sigma^{\mathbf{k}}$ [où

$$\mathbf{k} = (\mathbf{k}(1), \dots, \mathbf{k}(r))$$

est un système d'entiers décroissants tel que $\mathbf{k}(1) \leq n$] sont des sous-variétés de codimension $v(p, n; \mathbf{k})$ [cf. (c) du chapitre I] de l'espace $J^r(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^p)$ des jets d'ordre r d'applications de \mathbf{R}^n dans \mathbf{R}^p . En un sens, ce texte se présente donc comme une nouvelle rédaction de la démonstration de Boardman et ne présuppose pas la connaissance de [2]. Mais tandis que les constructions de Boardman s'efforcent d'être aussi indépendantes que possible de tout repère particulier, on adopte ici le parti pris opposé : dans les idéaux $\Delta^{\mathbf{k}}$ qui servent à définir les ensembles $\Sigma^{\mathbf{k}}$ (cf. [2]), on met en évidence des éléments privilégiés dont la définition dépend essentiellement des coordonnées choisies.

Ces éléments privilégiés sont des déterminants jacobiens d'un type particulier; l'étude de leurs propriétés s'appuie sur un calcul direct tout à fait classique faisant appel au lemme du pivot et à quelques-unes de ses variantes (cf. [11] ou [3]). Le résultat de cette étude constitue l'apport original du présent travail. Ce texte aurait donc pu être écrit il y a plus de cinquante ans : il tente de retrouver l'esprit des travaux de K. Hentzelt sur la théorie de l'élimination (cf. [5], [12] et [6]) qui n'ont pas encore été exploités comme ils le méritent. Par-delà les notations déplaisantes et les calculs sans gloire on a la surprise de découvrir une combinatoire à tout prendre très naturelle et dont l'impressionnante régularité procède certainement de quelque théorème important encore ignoré.

Les deux articles de ce fascicule sont dédiés par leurs auteurs à *Henri Cartan*. Pour des raisons matérielles, il n'a pas été possible de les faire paraître dans le tome 7 (1974) comme il aurait été souhaitable.



L'idée autour de laquelle s'organise la démarche est due à J. C. Tougeron [15] : il s'agit de la notion de v -strate qui est définie au (i) du chapitre IV. Dans un anneau A [anneau de polynômes ou de séries formelles sur un corps commutatif, ou encore anneau de germes de fonctions différentiables (resp. analytiques) lorsqu'on suppose le corps valué non discret] un couple (I, I') d'idéaux de A s'appelle une v -strate de A si I est contenu dans la racine de I' et s'il existe des éléments $a_1, \dots, a_s, b_1, \dots, b_t$ de A satisfaisant aux conditions suivantes :

(i) l'idéal I' est contenu dans la racine de l'idéal engendré par les a_i ($1 \leq i \leq s$) [resp. par les b_j ($1 \leq j \leq t$)];

(ii) l'idéal $a_i \cdot I$ est contenu dans un sous-idéal de I engendré par v éléments et ceci quel que soit $i \in \{1, \dots, s\}$;

(iii) les b_j (pour $1 \leq j \leq t$) sont des déterminants jacobiens d'ordre v formés à partir de v éléments de l'idéal I et de v dérivations de l'anneau A .

Affirmer que le couple (I, I') est une v -strate de A , c'est exprimer une condition suffisante pour que l'ensemble des zéros de I qui ne sont pas des zéros de I' soit une sous-variété lisse de codimension v .

L'intérêt de cette condition est que son énoncé ne fait pas appel à une localisation de l'anneau A . Il est indispensable de procéder ainsi lorsque A est un anneau de germes de fonctions. Mais ici aussi l'artifice est précieux car il conduit à présenter les résultats sous une forme où n'intervient jamais la division. Ainsi les algorithmes étudiés se trouvent-ils dégagés dans toute la pureté de leur vertu opérante. C'est que derrière la théorie des idéaux stratifiés de Tougeron et le constructivisme de Hentzelt se cache un principe cher aux mathématiciens grecs de l'Antiquité, qui reste aujourd'hui encore la règle d'or en ces matières. C'est ce principe qu'énonce Platon lorsqu'il conseille de ne jamais céder à la tentation de diviser ce qui n'est pas naturellement divisible (cf. [13], p. 525 E).

Sans doute est-il satisfaisant pour l'esprit, lorsqu'on a caractérisé un objet, de savoir qu'on peut en donner une détermination explicite. Il est certain aussi qu'on sera amené dans l'avenir à considérer des variétés Σ^k d'ordre de plus en plus élevé : les renseignements que l'on donne ici sur leurs équations prendront alors une valeur utilitaire. D'ailleurs sans attendre que les exemples compliqués deviennent d'actualité on peut d'ores et déjà constater que la démonstration des lemmes admis dans [9], qui requiert un certain effort de la part du lecteur de [2], devient évidente à qui sait calculer dans les idéaux jacobiens.

Toutefois la portée du présent article dépasse les applications pratiques : dans l'ébauche de ce travail (cf. [10]) on peut lire une caractérisation du symbole d'un idéal, qui, reprise et établie directement par J. Mather dans [8], est à la base d'une nouvelle démonstration du théorème de Boardman plus conceptuelle et plus rapide que celle de [2]. Le mérite de Mather est d'avoir su exploiter les renseignements de [10] pour maîtriser l'action du groupe de changement de repères de la source \mathbf{R}^n sur les ensembles Σ_*^k [cf. (d) du chapitre I]. Son approche suggère qu'une connaissance plus complète de cette action devrait permettre d'attaquer la difficile question de l'adhérence des variétés Σ_*^k qui, comme on le sait, ne forment pas une stratification de $J^r(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^p)$. Il serait exagéré de prétendre

qu'on puisse, dès à présent, exhiber une stratification explicite de l'espace des jets au moyen du calcul jacobien tel qu'il est présenté ici. Cependant on verra, à la fin du chapitre I (exemple de l'ombilic parabolique), comment les méthodes proposées permettent dans un cas particulier de caractériser les points frontières de la variété $\Sigma^{2,1,1,1}$ et plus généralement d'étudier les singularités dites de « transition » (cf. [17]).

Pour résoudre le problème en toute généralité, il faudra, pensons-nous, pousser plus loin le calcul : on devrait y parvenir en recourant à la théorie de l'élimination de K. Hentzelt déjà évoquée et en remplaçant les constructions de [8] dans le contexte de la théorie de l'invariant récemment remise à la mode par D. Mumford et J. Dieudonné (cf. [4]).

Voici comment s'enchaînent les idées qui forment la trame conceptuelle de ce qu'on va lire. Il ne s'agit pas à proprement parler du plan de l'article car pour éviter certaines redites, l'exposition adopte une présentation plus compacte (cf. remarque en fin d'article).

Au début du chapitre I on peut lire (cf. prop. 1) une démonstration du théorème de Boardman dans le cas où $r = 1$. Toute la suite vise à montrer qu'à quelques précautions près le cas général se ramène à ce cas particulier. Le processus qui permet cette réduction s'articule autour d'une notion centrale, celle d'*expression jacobienne bien formée* [cf. (f) du chapitre III]. L'information nécessaire à la fabrication d'une telle expression peut être codée par la donnée d'une permutation σ de l'ensemble $\{1, \dots, n\}$ et d'un tableau ψ (du type tableau de Young) dont les lignes sont de longueur inégale et dont les valeurs appartiennent à l'ensemble $\{1, \dots, p\}$ pour la première colonne et à l'ensemble $\{1, \dots, n\}$ pour les autres colonnes [cf. (g), 1°, du chapitre II]. La forme de ce tableau est déterminée par le système d'entiers \mathbf{k} ; on dira qu'il est de type (p, \mathbf{k}) ; l'expression jacobienne correspondante sera notée $J(\sigma, \psi)$, c'est un élément de $\Delta^{\mathbf{k}}$.

Une expression jacobienne bien formée est le déterminant d'une matrice jacobienne carrée dont les lignes sont formées à partir d'éléments qui sont, soit des fonctions coordonnées de l'espace but \mathbb{R}^p , soit des expressions jacobienes bien formées astreintes à certaines conditions de compatibilité. Ces conditions sont telles qu'en particulier les mineurs supérieurs gauches de $J(\sigma, \psi)$ sont encore des expressions jacobienes bien formées. Le produit de $J(\sigma, \psi)$ et de certains de ses mineurs supérieurs gauches s'appelle le *drapeau jacobien associé* à $J(\sigma, \psi)$: on le note $J^{\#}(\sigma, \psi)$ [cf. (f) du chapitre III].

L'idéal engendré par les $J(\sigma, \psi)$ [resp. les $J^{\#}(\sigma, \psi)$] n'est pas en général égal à $\Delta^{\mathbf{k}}$ mais sa racine coïncide avec celle de $\Delta^{\mathbf{k}}$. Nous dirons que les $J(\sigma, \psi)$ [resp. les $J^{\#}(\sigma, \psi)$] engendrent faiblement l'idéal $\Delta^{\mathbf{k}}$. On le voit en raisonnant par récurrence sur l'ensemble des systèmes \mathbf{k} convenablement ordonné [cf. (a) et (b) du chapitre II ainsi que (a) et (g) du chapitre IV]. En fait, l'ensemble des expressions jacobienes, formées à partir de tableaux ψ dont les lignes sont décroissantes, constitue déjà un système de générateurs faibles de l'idéal $\Delta^{\mathbf{k}}$: ce résultat s'obtient encore par récurrence sur \mathbf{k} grâce à deux lemmes dits de « commutation » [cf. (c), (d) et (e) du chapitre IV] qui décrivent ce qui se produit lorsqu'on permute deux éléments consécutifs sur l'une des lignes de ψ .

L'ensemble des zéros de $\Delta^{\mathbf{k}}$ qui n'appartiennent pas à $\Sigma^{\mathbf{k}}$ est aussi l'ensemble des zéros de l'idéal $\Delta'^{\mathbf{k}}$ ainsi défini : lorsque \mathbf{k} admet un successeur \mathbf{k}' pour l'ordre mentionné plus haut [cf. (f) du chapitre II] on pose $\Delta'^{\mathbf{k}} = \Delta^{\mathbf{k}'}$; dans le cas contraire $\Delta'^{\mathbf{k}}$ est l'anneau

tout entier. Lorsque \mathbf{k}' est défini, on montre au (f) du chapitre IV que, modulo $\Delta^{\mathbf{k}}$ l'idéal $\Delta^{\mathbf{k}'}$ est engendré par les expressions jacobienues formées à partir de tableaux ψ' de type (p, \mathbf{k}') dont les lignes sont décroissantes et ne prennent pas de valeurs trop petites; ces tableaux sont appelés *réguliers* [cf. (g), 5°, du chapitre II].

Soit σ une permutation de l'ensemble $\{1, \dots, n\}$ et ψ' un tableau régulier de type (p, \mathbf{k}') ; alors il existe un entier β tel que l'idéal $(J(\sigma, \psi'))^\beta \cdot \Delta^{\mathbf{k}}$ soit contenu dans le sous-idéal de $\Delta^{\mathbf{k}}$ engendré par les expressions $J(\sigma, \psi)$ où ψ est un tableau de type (p, \mathbf{k}) dont les premières lignes coïncident avec celles de ψ' et dont la dernière ligne est décroissante et satisfait à un principe d'exclusion énoncé au (g), 4°, du chapitre II [cf. th. 1 (g), du chapitre IV]. Les tableaux de ce type sont appelés *tableaux principaux* de type (p, \mathbf{k}) subordonnés à ψ' ; ils sont en nombre $v(p, n; \mathbf{k})$ (entier de Boardman) [cf. lemme du (g), 8°, du chapitre II]. Ce résultat jette une lumière nouvelle sur les raisons pour lesquelles les entiers de Boardman s'introduisent de façon naturelle dans l'étude des variétés $\Sigma^{\mathbf{k}}$. Le théorème reste vrai lorsque \mathbf{k}' n'est pas défini : dans ce cas particulier, son énoncé est plus simple car les tableaux de type (p, \mathbf{k}) n'ont alors qu'une seule ligne.

Si l'on désigne par J_1, \dots, J_v (où l'on a posé $v = v(p, n; \mathbf{k})$), les expressions jacobienues $J(\sigma, \psi)$ où ψ parcourt l'ensemble des tableaux principaux subordonnés à ψ' , on constate qu'il existe sur l'anneau structural de la variété $J^r(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^p)$, des dérivations D_1, \dots, D_v tels qu'à peu de choses près le déterminant jacobien formé à partir des J_h et des

$$D_{h'}, (1 \leq h \leq v, 1 \leq h' \leq v)$$

soit égal à une puissance de $J^{\mathbf{k}}(\sigma, \psi')$. Ce résultat, faux si on le prend à la lettre, est énoncé au lemme 20 du chapitre IV de telle manière qu'une récurrence sur les tableaux réguliers ψ' de type (p, \mathbf{k}') permet de conclure que le couple $(\Delta^{\mathbf{k}}, \Delta^{\mathbf{k}'})$ est une v -strate au sens de Tougeron [cf. th. 2 et 3 en (h) et (i) du chapitre IV].

Soit z un point de $\Sigma^{\mathbf{k}}$; d'après ce qui précède il existe une permutation σ de l'ensemble $\{1, \dots, n\}$ et un tableau régulier ψ' de type (p, \mathbf{k}') tels que le polynôme $J(\sigma, \psi')$ soit différent de 0 au point z . On cherche alors le plus grand tableau ψ'_0 de tous les tableaux réguliers ψ' de type (p, \mathbf{k}') pour lesquels il existe une permutation σ telle que $J(\sigma, \psi')$ soit différent de 0 au point z [l'ordre à prendre en considération sur les tableaux réguliers de type (p, \mathbf{k}') est défini au (g), 6°, du chapitre II]. Soit σ_0 une permutation telle que $J(\sigma_0, \psi'_0)$ soit différent de 0 au point z . Lorsque ψ parcourt l'ensemble des tableaux principaux subordonnés à ψ'_0 les v expressions $J(\sigma_0, \psi)$ fournissent un système d'équations locales de la variété $\Sigma^{\mathbf{k}}$ au voisinage du point z .

Au cours de longs entretiens, R. Thom qui ne m'a jamais mesuré la manne de ses suggestions substantielles, a grandement contribué au mûrissement des idées ici exposées : en particulier, il m'a communiqué celle qui permettait d'écrire [9]. J. Cerf a inventé les moyens les plus divers et toujours les plus efficaces pour m'interdire de renoncer à l'entreprise. Les encouragements de C. T. C. Wall m'ont également été précieux. Mais ce travail n'aurait jamais vu le jour si je n'avais trouvé auprès de M. Lejeune, B. Teissier et surtout de A. Chenciner, un auditoire décidé à comprendre à fond une exposition orale des résultats qu'il contient : en acceptant de subir jusqu'au bout des exposés souvent obscurs et embrouillés, ils m'ont donné l'occasion d'organiser et de clarifier mes idées et m'ont

beaucoup encouragé par l'intérêt qu'ils m'ont témoigné. M. Loday qui a également joué ce rôle d'auditeur éclairé et actif, m'a en outre apporté une aide précieuse dans la mise au point du manuscrit, notamment en relevant quantité d'erreurs de détail qui eussent exaspéré la sagacité du lecteur. Parmi toutes les personnes qui, à des degrés, en des temps et en des lieux divers, ont collaboré à l'établissement du texte, c'est avec reconnaissance que je citerai, outre ceux de mes proches, les noms de F. Albrecht, C. Weber, A. Whiteman, L. Hérault, F. Madrid, J. E. Tyvaert et D. Foata.

C'est avec émotion que je saisis l'occasion de cette publication pour témoigner à H. Cartan ma profonde gratitude. Avant même l'obtention de ma licence il m'a conseillé et permis d'entreprendre une carrière de chercheur en mathématiques. Dès le début il a su prévoir que mon intérêt se porterait sur la théorie des singularités d'applications différentiables, et m'a suggéré, d'entrée de jeu, la lecture de [14]. Durant les années où il m'a été donné de participer à son séminaire, j'ai été profondément marqué de son empreinte. L'honneur de pouvoir, après tant d'autres, me compter parmi ses élèves, a été pour moi un soutien moral irremplaçable.

Le Saulcy (Metz) 22 mai 1974

PLAN DE L'OUVRAGE

Il est difficile de motiver d'une façon pleinement satisfaisante l'introduction de la notion de symbole sans avoir au préalable donné toutes les définitions et les démonstrations de la théorie. Le chapitre I est une contribution aux efforts tentés dans ce sens par [14], [17], [7], [2], [8] et surtout [1]. C'est une version peu remaniée d'un texte intitulé *le symbole d'un jet* qui a été distribué aux membres du Symposium de Liverpool de 1970. Le chapitre II contient tout l'arsenal formel nécessaire à la mise en œuvre du calcul, à l'exception de ce qui se rapporte à la dérivation des expressions jacobienne qu'on trouvera au (h) du chapitre IV; le chapitre II est donc une sorte de dictionnaire auquel on doit se référer constamment dans la suite : il doit être omis en première lecture. Dans le chapitre III on définit les extensions jacobienne itérées d'un idéal d'un anneau A par rapport à un sous-module de l'algèbre des dérivations de A et à un sous-anneau de A. Cette notion permet d'introduire de façon très naturelle les idéaux Δ^k de Boardman [cf. (c) du chapitre III]. On montre ensuite que l'étude de ces idéaux peut se faire dans un contexte universel et que les propriétés particulières à l'anneau A n'interviennent pas dans leur étude. On définit alors les expressions jacobienne bien formées qui jouent un rôle décisif dans la suite. Un exemple très détaillé permet au lecteur de vérifier s'il a bien assimilé toutes les notions introduites. Le chapitre se termine par quelques remarques sur les expressions jacobienne bien formées. Le chapitre IV contient l'essentiel de la démonstration du théorème de Boardman. On montre que la racine d'un idéal de Boardman est égale à la racine de l'idéal engendré par des expressions jacobienne bien formées d'un type convenable. Cette « réduction » se fait par étapes et conduit à la proposition 2 [cf. (e) du chapitre IV] dont l'énoncé équivaut au suivant : au voisinage de tout point d'une variété Σ^k de Thom-Boardman l'idéal de cette variété est engendré par $v(p, k)$ éléments

[cf. (e) du chapitre II]. Reste ensuite à montrer que ces $v(p, k)$ éléments ont des différentielles linéairement indépendantes : c'est essentiellement ce qu'affirment les théorèmes 1 et 2 [cf. (g) et (h) du chapitre IV]. En fait les énoncés de la proposition 2 et des théorèmes 1 et 2 sont en apparence assez éloignés de ceux donnés ici : la fin du chapitre qui introduit la notion de v -strate (au sens de Tougeron) relie les calculs qui précèdent à l'énoncé classique du théorème de Boardman. On montre enfin que les variétés Σ^k sont non vides toutes les fois que l'entier $v(p, k)$ est strictement positif.

SOMMAIRE

| | Pages |
|--|-------|
| CHAPITRE I : <i>Le symbole d'un jet</i> | 7 |
| (a) Les variétés Σ^k ($k \in \mathbb{N}$) | 7 |
| (b) La théorie du symbole sur les variétés feuilletées | 11 |
| (c) Symboles d'ordre supérieur | 13 |
| (d) Les variétés $\Sigma^k(X, Y)$ | 16 |
| (e) Application : l'ombilic parabolique | 19 |
| CHAPITRE II : <i>Symboles et tableaux</i> | 23 |
| (a) L'ensemble des symboles | 23 |
| Symboles condensés | 24 |
| (b) Structures d'ordre sur \mathcal{S}_n | 24 |
| Structures d'ordre sur $\mathcal{S}^*(n, r)$ | 24 |
| Ordre du dictionnaire de rimes | 25 |
| (c) Applications associées à un symbole | 25 |
| (d) Restrictions d'un symbole | 26 |
| (e) Les entiers de Boardman | 27 |
| (f) Les successeurs itérés d'un symbole | 28 |
| (g) Les tableaux associés à un symbole | 29 |
| 1° Définitions générales | 29 |
| 2° Restrictions d'un tableau | 30 |
| 3° q -ième dérivé d'un tableau de type (p, k) | 30 |
| 4° Tableaux principaux de type (p, k) | 32 |
| 5° Tableaux réguliers | 33 |
| 6° Structures d'ordre sur $\tilde{\mathcal{F}}(p, k)$ | 34 |
| 7° Tableaux régularisables | 34 |
| 8° Tableaux principaux subordonnés à un tableau régulier | 34 |
| 9° Action d'une permutation sur un tableau | 35 |
| 10° Tableaux condensés | 35 |
| 11° Déploiement d'un tableau condensé | 36 |
| (h) Multiplication des symboles | 36 |
| (i) Multi-indices et symboles | 38 |
| (j) Passage du calcul indiciel au calcul symbolique | 38 |
| CHAPITRE III : <i>Jacobiens itérés</i> | 40 |
| (a) Extensions jacobienues simples | 40 |
| (b) Extensions jacobienues itérées | 43 |
| (c) Extensions jacobienues de type k | 43 |
| (d) Jacobiens de type (p, k) | 45 |
| (e) Les anneaux d'expressions jacobienues | 48 |
| Notion de spécialisation | 50 |
| Relation entre jacobiens et expressions jacobienues | 51 |

| | Pages |
|--|-----------|
| (f) Expressions jacobiennes bien formées | 53 |
| Pivots de drapeaux jacobiens | 55 |
| Idéaux d'expressions jacobiennes bien formées..... | 56 |
| (g) Exemple d'une expression jacobienne bien formée..... | 56 |
| (h) Conditions pour qu'une expression jacobienne bien formée soit différente de zéro..... | 61 |
| (i) Expressions jacobiennes mixtes | 62 |
| CHAPITRE IV : Propriétés des expressions jacobiennes bien formées..... | 64 |
| (a) Le lemme de réduction (cas général) | 64 |
| (b) Le lemme du pivot | 66 |
| (c) Premier lemme de commutation..... | 67 |
| (d) Deuxième lemme de commutation..... | 70 |
| (e) Le lemme de réduction (cas commutatif)..... | 74 |
| (f) Le lemme de régularisation..... | 75 |
| (g) Générateurs faibles de $\bar{\Delta}(p, k)$ | 76 |
| (h) Indépendance des expressions jacobiennes principales subordonnées à un même pivot..... | 80 |
| 1° Formalisme préparatoire..... | 80 |
| Odogrammes de k | 80 |
| Signature d'un odogramme..... | 80 |
| Coupures d'un odogramme..... | 81 |
| Odogrammes tronqués..... | 81 |
| Profils de type k | 81 |
| Trajets de ψ | 82 |
| Sélecteurs de ψ | 83 |
| Profil d'un sélecteur..... | 83 |
| Analyseurs de ψ | 84 |
| Analyseurs tronqués..... | 84 |
| Étendard associé à un analyseur..... | 84 |
| Propriété des sous-étendards d'un étendard..... | 85 |
| Composant directeur d'un étendard..... | 85 |
| Étendard banal..... | 85 |
| 2° Dérivées d'une expression jacobienne bien formée..... | 86 |
| (i) Strates d'un anneau..... | 92 |
| Stratification relative..... | 94 |
| <i>Bibliographie</i> | 98 |

CHAPITRE I

Le symbole d'un jet

(a) LES VARIÉTÉS Σ^k ($k \in \mathbb{N}$). — Soient X et Y des variétés différentiables de dimensions respectives n et p . La variété $J^1(X, Y)$ des jets d'ordre 1 d'applications différentiables de X dans Y , s'identifie au fibré $\text{Hom}(TX, TY)$ (où TV désigne le fibré tangent à la variété V) de base $J^0(X, Y) = X \times Y$ et de fibre $F_{(x,y)} = \text{Hom}(T_x X, T_y Y)$ ensemble des homomorphismes linéaires définis sur l'espace $T_x X$ (tangent à X en x) à valeurs dans l'espace $T_y Y$ tangent à Y en y ($x \in X, y \in Y$).

PROPOSITION 1. — *Posons $\alpha = \max(0, n-p)$. Soit k un entier tel que $\alpha \leq k \leq n$. L'ensemble $\Sigma^k(X, Y) \subset J^1(X, Y)$ des homomorphismes $z \in J^1(X, Y)$ de rang $n-k$ est une*

sous-variété de codimension $(p-n+k)$ k et un sous-fibré de $J^1(X, Y)$. Son adhérence $\bar{\Sigma}^k(X, Y)$ est égale à la réunion $\bigcup_{i=k}^n \Sigma^i(X, Y)$; c'est un sous-fibré en variétés algébriques de $J^1(X, Y)$.

Démonstration. — Soient U et V des ouverts de X et de Y respectivement. Il est clair que $\Sigma^k(U, V) = \Sigma^k(X, Y) \cap J^1(U, V)$. En outre si X' et Y' sont des variétés différentiables de dimension respective n et p et si $\varphi : U \rightarrow X'$ et $\varphi' : V \rightarrow Y'$ sont des difféomorphismes, le difféomorphisme qui à tout $z \in J^1(U, V)$ de projection $(x, y) \in U \times V$ associe le jet $z' = j_y^1(\varphi') \circ z \circ j_x^1(\varphi^{-1}) \in J^1(X', Y')$ induit une bijection de l'ensemble $\Sigma^k(U, V)$ sur $\Sigma^k(X', Y')$. (Ici $j_x^1 f$ désigne le jet d'ordre 1 de l'application f au point x .)

Compte tenu de cette remarque il suffit de démontrer la proposition lorsque $X = \mathbb{R}^n$ et $Y = \mathbb{R}^p$. On voit alors que $\Sigma^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ s'identifie à un sous-fibré trivial du fibré trivial $J^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p) \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$. On peut, par conséquent, se contenter de travailler sur la fibre type $M(p, n; \mathbb{R})$ ensemble des matrices à coefficients réels $z = (y_i^j)$ ($1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p$) à p lignes et n colonnes. On désigne par Σ^k la trace sur $M(p, n; \mathbb{R})$ de l'ensemble $\Sigma^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$.

L'ensemble $Z_k = \bigcup_{i=k}^n \Sigma^i$ est l'ensemble des zéros de l'idéal Δ^k de l'anneau $A = \mathbb{R}[y_i^j]$ engendré par les polynômes $\delta(I, J) = \det(y_i^j)$ (où $I \subset \{1, \dots, n\}$ et $J \subset \{1, \dots, p\}$ sont des sous-ensembles à $n-k+1$ éléments).

L'idéal Δ^k est donc engendré par

$$\frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} \times \frac{p!}{(p-n+k-1)!(n-k+1)!} \text{ éléments.}$$

Les points de Σ^k sont les $z = (y_i^j) \in Z_k$ qui n'appartiennent pas à Z_{k+1} c'est-à-dire ceux pour lesquels il existe deux ensembles à $n-k$ éléments $I' \subset \{1, \dots, n\}$ et $J' \subset \{1, \dots, p\}$ tels que $\delta(z) = \delta(I', J'; z) \neq 0$. On montre que dans l'anneau A_δ des fonctions rationnelles définies sur le complémentaire de l'ensemble $Z_{I', J'}$ des zéros de $\delta(I', J') = \delta$, l'idéal $\Delta^k \cdot A_\delta$ est engendré par les images des $\delta(I, J)$ (où $I \supset I'$ et $J \supset J'$ sont des ensembles à $n-k+1$ éléments) c'est-à-dire par $(p-n+k)$ k générateurs. Ce fait est une conséquence du lemme suivant :

LEMME 1. — Soient n, p et k des entiers naturels tels que $n-p \leq k \leq n$; soit B un anneau commutatif unitaire. Soient $I' \subset \{1, \dots, n\}$ et $J' \subset \{1, \dots, p\}$ deux ensembles à $n-k$ éléments. On pose

$$\delta = \delta(I', J') = \det(y_i^j);$$

c'est un élément de l'anneau $A = B[y_i^j]$. Soit Δ_0^k l'idéal engendré dans A par les $\delta(I, J) = \det(y_i^j)$ (où $I \supset I'$ et $J \supset J'$ sont des ensembles à $n-k+1$ éléments). Alors on a $\delta^{n-k+1} \Delta^k \subset \Delta_0^k$ et par conséquent $\Delta^k \cdot A_\delta = \Delta_0^k \cdot A_\delta$ (où A_δ désigne l'anneau des fractions rationnelles en les y_i^j dont les dénominateurs sont des puissances de δ).

Démonstration du lemme 1. — Puisque les déterminants sont des polynômes à coefficients entiers, il suffit de démontrer le lemme lorsque $B = Z$ [cf. (e) du chapitre III]. Pour avoir quelque chose à démontrer on doit supposer que $k \geq 1$ et $n-k+1 \leq p$. On peut également supposer que $I' = J' = \{1, \dots, n-k\} = I_0$. Pour tout $z \in M(p, n; A)$ [anneau des (p, n) -matrices à coefficients dans A], pour tout sous-ensemble I de $\{1, \dots, n\}$ et tout sous-ensemble J de $\{1, \dots, p\}$ ayant même nombre d'éléments on pose

$$\delta(I, J; z) = \det_{\substack{i \in I \\ j \in J}} (y_i^j(z))$$

[où $y_i^j(z)$ désigne le coefficient d'indice de ligne j et d'indice de colonne i de la matrice z]. Lorsque $i, j \in I_0$ posons

$$\delta'_{ij}(z) = \delta(I_0 - \{i\}, I_0 - \{j\}; z).$$

Pour tout $i \in \{1, \dots, n\} - I_0$ et pour tout $j \in \{1, \dots, p\} - I_0$ posons

$$\delta_{ij}(z) = \delta(I_0 \cup \{i\}, I_0 \cup \{j\}; z).$$

On décompose z en quatre sous-matrices de la façon suivante :

$$z = \begin{pmatrix} a(z) & b(z) \\ c(z) & d(z) \end{pmatrix},$$

où

$$\begin{aligned} a(z) &\in M(n-k, n-k; A), & b(z) &\in M(n-k, k; A), \\ c(z) &\in M(p-n+k, n-k; A) & \text{et} & d(z) \in M(p-n+k, k; A). \end{aligned}$$

On pose $\det(a(z)) = \delta(z)$.

Soit $a'(z) = (y_i^j(z))$ la $(n-k, n-k)$ -matrice définie en posant

$$y_i^j(z) = (-1)^{i+j} \delta'_{ji}(z)$$

[matrice adjointe de $a(z)$].

On considère la matrice

$$u'(z) = \begin{pmatrix} a'(z) & 0_{n-k, p-n+k} \\ -c(z)a'(z) & \delta(z)I_{p-n+k} \end{pmatrix} \in M(p, p; A)$$

(où I_m désigne la matrice identité d'ordre m et $0_{m, m'}$ représente la matrice nulle à m lignes et m' colonnes) et la matrice

$$u(z) = \begin{pmatrix} a(z) & 0_{n-k, p-n+k} \\ c(z) & I_{p-n+k} \end{pmatrix} \in M(p, p; A).$$

On a alors

$$v(z) = u'(z)z = \begin{pmatrix} \delta(z)I_{n-k} & a'(z)b(z) \\ 0_{p-n+k, n-k} & d'(z) \end{pmatrix}$$

[où $d'(z) = -c(z)a'(z)b(z) + \delta(z)d(z)$ a pour éléments les $\delta_{ij}(z)$ définis plus haut]. On a de même $u(z)u'(z) = \delta(z)I_p$ et par suite $u(z)v(z) = \delta(z)z$.

Soient $I \subset \{1, \dots, n\}$ et $J \subset \{1, \dots, p\}$ deux ensembles à $n-k+1$ éléments. On a

$$\delta(I, J; u(z)v(z)) = \delta^{n-k+1}(z) \delta(I, J; z) = \sum_{\substack{K \subset \{1, \dots, p\} \\ \overline{K} = n-k+1}} \delta(K, J; u(z)) \delta(I, K; v(z))$$

(où \overline{K} désigne le nombre d'éléments de K) ce qui, lorsque $z = (y_i^j)$ matrice générique, démontre le lemme puisque on ne peut avoir $K \subset I_0$.

Remarque. — Pour que le deuxième facteur de l'un quelconque des termes de la sommation précédente soit non nul il faut que $I \cap I_0 \subset K$. On a alors

$$\delta(I, K; v(z)) = \pm \delta^m(z) \delta(I - I \cap I_0, K - I \cap I_0; v(z))$$

(où l'on a posé $m = \overline{I \cap I_0}$).

De même pour que le premier facteur d'un tel terme soit non nul il faut que $K \subset J \cup I_0$. On a alors :

$$\delta(K, J; u(z)) = \pm \delta(K \cap I_0, (J \cap I_0) \cup (J - K \cap J); z).$$

Pour achever la démonstration de la première partie de la proposition 1, il reste à montrer que les différentielles des k ($p-n+k$) générateurs de $\Delta^k A_s$ sont linéairement indépendantes en tout point $z \in \Sigma^k - Z_{I', J'}$. Pour vérifier ce point, on remarque que si i et i' appartiennent à $\{1, \dots, n\} - I'$ et que si j et j' appartiennent à $\{1, \dots, p\} - J'$ on a

$$\frac{\partial}{\partial y_i^{j'}} \delta(I' \cup \{i\}, J' \cup \{j\}) = \begin{cases} \delta & \text{lorsque } (i', j') = (i, j), \\ 0 & \text{lorsque } (i', j') \neq (i, j). \end{cases}$$

Il s'ensuit que la matrice jacobienne d'ordre k ($p-n+k$) dont la (i, j) -ième ligne s'obtient en dérivant par rapport aux k ($p-n+k$) variables $y_i^{j'}$ le polynôme $\delta(I' \cup \{i\}, J' \cup \{j\})$, est égale à $\delta I_{k(n-p+k)}$. Par conséquent son déterminant [égal à $\delta^{k(n-p+k)}$] ne s'annule pas sur $\Sigma^k - Z_{I', J'}$.

En résumé, pour tout sous-ensemble I' de $\{1, \dots, n\}$ et tout sous-ensemble J' de $\{1, \dots, p\}$ ayant respectivement $n-k$ éléments, l'ensemble $U_{I', J'} = \Sigma^k - Z_{I', J'}$ est un ouvert de définition de la sous-variété Σ^k qui est entièrement recouverte par les $U_{I', J'}$.

Pour montrer que $\overline{\Sigma^k} = Z_k$ il suffit d'établir que lorsque $0 \leq i \leq \alpha-1$ on a $\Sigma_i \subset \overline{\Sigma^{i-1}}$. Montrons que $\Sigma^k \subset \overline{\Sigma^{k-1}}$: soit $z = (y_i^j) \in M(p, n; \mathbf{R})$ une matrice telle que

$$\det_{\substack{1 \leq i \leq n-k \\ 1 \leq j \leq n-k}} (y_i^j) \neq 0;$$

quel que soit $t \in \mathbf{R}$, on définit $z(t) = (y_i^j(t))$ en posant $y_i^j(t) = y_i^j$ lorsque

$$(i, j) \neq (n-k+1, n-k+1)$$

et $y_{n-k+1}^{n-k+1}(t) = y_{n-k+1}^{n-k+1} + t$.

En utilisant les constructions du lemme 1, on vérifie que, lorsque $z \in \Sigma^k$, on a $z(t) \in \Sigma^{k-1}$ quel que soit $t \in \mathbf{R}^*$.

N. B. La démonstration présentée ici consiste à établir que le couple d'idéaux (Δ^k, Δ^{k+1}) est une $k(p-n+k)$ -strate au sens de Tougeron [15]. La notion de v -strate est introduite au paragraphe (i) du chapitre IV.

La théorie du symbole consiste à définir sur $J^r(X, Y)$ des variétés $\Sigma^k(X, Y)$ puis [cf. (d) ci-dessous] une partition en sous-variétés $\Sigma_{\mathbf{k}}^k(X, Y)$ (où \mathbf{k} parcourt l'ensemble des systèmes décroissants de r entiers naturels inférieurs ou égaux à n) qui prolonge en un sens expliqué dans [2] et [8] les propriétés de la partition $(\Sigma^k(X, Y))_{(0 \leq k \leq n)}$ qu'on vient d'étudier sur $J^1(X, Y)$. Pour y parvenir Boardman introduit sur la fibre type de $J^r(X, Y)$ des idéaux $\Delta^{\mathbf{k}}$ que nous étudierons au chapitre III. La trace $\Sigma^{\mathbf{k}}$ sur la fibre type de $J^r(X, Y)$ de la variété $\Sigma^{\mathbf{k}}(X, Y)$ sera l'ensemble des points réguliers de l'ensemble des zéros $Z_{\mathbf{k}}$ de l'idéal $\Delta^{\mathbf{k}}$. Mais (à la différence de ce qu'on vient de voir lorsque $r = 1$) l'ensemble $Z_{\mathbf{k}}$ n'est pas en général égal à l'adhérence (pour la topologie de Zariski) de $\Sigma^{\mathbf{k}}$ car la racine [cf. (g) du chapitre IV] de l'idéal $\Delta^{\mathbf{k}}$ n'est pas en général un idéal premier. Toutefois la multiplicité de chaque composante irréductible de $Z_{\mathbf{k}}$ ne rencontrant pas $\Sigma^{\mathbf{k}}$ est supérieure ou égale à 2, ce qui explique que les seuls points réguliers de $Z_{\mathbf{k}}$ soient ceux qui présentent un intérêt géométrique.

Bien que l'introduction des idéaux $\Delta^{\mathbf{k}}$ soit très naturelle, il n'est pas facile de la motiver de façon convaincante. C'est pourtant ce que nous allons tenter de faire maintenant.

L'étude des propriétés algébriques des idéaux $\Delta^{\mathbf{k}}$ (développée aux chapitres III et IV) consiste à étendre à ces idéaux les constructions et les raisonnements utilisés dans la démonstration de la proposition 1 ci-dessus. Les détails de la technique nécessaire à la réalisation de cette extension paraîtront peut-être compliqués mais l'idée directrice est tout à fait simple et tient entièrement dans ce qu'on vient de lire.

(b) LA THÉORIE DU SYMBOLE SUR LES VARIÉTÉS FEUILLETÉES. — Dans toute la suite de ce chapitre on trouvera des énoncés dont les démonstrations sont données au chapitre IV.

Soient N , n et p des entiers naturels; soit J une variété différentiable de dimension N munie d'un feuilletage \mathfrak{F} de codimension p et soit \mathfrak{G} un feuilletage de J de dimension n . Pour tout $z \in J$ on désigne par F_z (resp. G_z) le germe en z de sous-variété défini par la feuille de \mathfrak{F} (resp. \mathfrak{G}) passant par z et par $T_z(\mathfrak{F})$ et $T_z(\mathfrak{G})$ les plans tangents à F_z et G_z respectivement. Pour tout entier k on désigne par $\Sigma^k(\mathfrak{F}, \mathfrak{G})$ l'ensemble des points $z \in J$ pour lesquels $\dim(T_z(\mathfrak{F}) \cap T_z(\mathfrak{G})) = k$. Au voisinage d'un point $z \in J$, soient y^1, \dots, y^p un système de fonctions engendrant différentiablement l'anneau B des fonctions différentiables constantes sur les feuilles de \mathfrak{F} et D_1, \dots, D_n des générateurs du sous-module \mathcal{D} des champs de vecteurs de J tangents aux feuilles de \mathfrak{G} . On désigne par $\Delta_{n-k+1}(B; \mathcal{D})$ ou encore par $\Delta^k(\mathfrak{F}, \mathfrak{G})$ l'idéal engendré par les expressions jacobienues de la forme

$$(1) \quad \mathcal{J}(d_1, \dots, d_{n-k+1}; \varphi_1, \dots, \varphi_{n-k+1}) = \det \begin{pmatrix} d_1 \varphi_1 & \cdots & d_{n-k+1} \varphi_1 \\ \dots & \dots & \dots \\ d_1 \varphi_{n-k+1} & \cdots & d_{n-k+1} \varphi_{n-k+1} \end{pmatrix},$$

où $\varphi_i \in B$ et $d_i \in \mathcal{D}$. Remarquons que si $k' \geq k$, on a $\Delta^{k'}(\mathfrak{F}, \mathfrak{G}) \supset \Delta^k(\mathfrak{F}, \mathfrak{G})$.

LEMME 2. — L'idéal $\Delta_{n-k+1}(B; \mathcal{D})$ est engendré par les expressions de la forme (1) où les φ_i sont pris parmi les y^j ($1 \leq j \leq p$) et les d_i parmi les D_m ($1 \leq m \leq n$).

Cet idéal est donc engendré par

$$\frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} \times \frac{p!}{(p-n+k-1)!(n-k+1)!} \text{ éléments.}$$

Soit $Z_k \subset J$ l'ensemble des zéros de $\Delta_{n-k+1}(B; \mathcal{D})$. On a

$$Z_{k+1} \subset Z_k \quad \text{et} \quad \Sigma^k(\mathfrak{F}, \mathfrak{G}) = Z_k - Z_{k+1}.$$

Posons $z_i^j = D_i y^j$ et plus généralement

$$z_{i_1, i_2, \dots, i_s}^j = D_{i_s} z_{i_1, i_2, \dots, i_{s-1}}^j \quad (1 \leq i_1, \dots, i_s \leq n \text{ et } 1 \leq j \leq p).$$

Si l'on suppose (ce qui est toujours possible) que les D_i commutent entre eux, on pose

$$z_{i_1, \dots, i_s}^j = z_i^j = y_{\omega_i}^j$$

[où $\omega_i : \{1, \dots, n\} \rightarrow \mathbb{N}$ est l'application définie en prenant pour $\omega_i(k)$ le nombre de termes égaux à k dans la suite $\mathbf{i} = (i_1, i_2, \dots, i_s)$].

DÉFINITION. — On dira que le feuilletage \mathfrak{G} est en *position générale à l'ordre r par rapport à \mathfrak{F}* si pour tout $z \in J$, il existe un système $(y^1, \dots, y^p; D_1, \dots, D_n)$ satisfaisant aux conditions énoncées ci-dessus, tel que les différentielles des fonctions y_{ω}^j soient linéairement indépendantes en z lorsque

$$1 \leq j \leq p \quad \text{et} \quad |\omega| \leq r \quad \left(\text{où } |\omega| = \sum_{k=1}^n \omega(k) \right).$$

Ceci implique en particulier que $\dim J \geq p [(n+r)!/n! r!]$. Notez que cette relation entre feuilletages \mathfrak{F} et \mathfrak{G} n'est pas symétrique.

Exemple. — Notons $x^1, \dots, x^n; y_{\omega_0}^1, \dots, y_{\omega_0}^p, \dots, y_{\omega}^j, \dots$ [où ω_0 est la suite $\overbrace{(0, \dots, 0)}^{n \text{ fois}}$] et où $1 \leq j \leq p$ et $|\omega| \leq r$] les coordonnées canoniques de la variété $J = J^r(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$. On a

$$\dim J = n + p \frac{(n+r)!}{n! r!} = N.$$

Lorsque $1 \leq i \leq n$ conformément aux notations précédemment adoptées on désigne par $\omega_i : \{1, \dots, n\} \rightarrow \mathbb{N}$ la suite définie par $\omega_i(j) = \delta_{ij}$ (symbole de Kronecker) et on pose

$$D_i = \frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{\substack{\omega \in \mathbb{N}^n \\ |\omega| \leq r-1}} \left(\sum_{j=1}^p y_{\omega+\omega_i}^j \frac{\partial}{\partial y_{\omega}^j} \right).$$

Lorsque $1 \leq i, i' \leq n$ on a $[D_i, D_{i'}] = 0$. D'autre part en tout point $z \in J$, les valeurs $D_i(z)$ de ces n champs de vecteurs sont linéairement indépendantes. Les D_i définissent donc sur J une distribution complètement intégrable de n -plans.

Les intégrales de cette distribution sont les images G_f de \mathbb{R}^n dans J par les applications $j^r(f) : \mathbb{R}^n \rightarrow J$ où $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ est une application polynomiale de degré inférieur

ou égal à r . Désignons par \mathfrak{G} le feuilletage de dimension n ainsi défini sur J et soit \mathfrak{F} le feuilletage de codimension p défini par les fibres de la projection canonique J sur \mathbf{R}^p . Une feuille F de \mathfrak{F} est l'ensemble des points pour lesquels $y_{\omega_0}^j = a_j$ ($1 \leq j \leq p$; $a_j \in \mathbf{R}$). Il est clair que le feuilletage \mathfrak{G} est en position générale à l'ordre r par rapport à \mathfrak{F} .

PROPOSITION 2. — Soit J une variété différentiable et soient \mathfrak{F} et \mathfrak{G} des feuilletages de J tels que \mathfrak{G} soit en position générale à l'ordre 1 par rapport à \mathfrak{F} . On pose $p = \text{codim } \mathfrak{F}$ et $n = \text{dim } \mathfrak{G}$. Alors pour tout entier k tel que $\max(0, n-p) \leq k \leq n$, on a

$$Z_k = \overline{\Sigma^k(\mathfrak{F}, \mathfrak{G})} = \bigcup_{i=k}^n \Sigma^i(\mathfrak{F}, \mathfrak{G}),$$

où Z_k est l'ensemble des zéros de l'idéal jacobien $\Delta^k(\mathfrak{F}, \mathfrak{G})$ défini ci-dessus; de plus l'ensemble $\Sigma^k(\mathfrak{F}, \mathfrak{G}) = Z_k - Z_{k+1}$ est une sous-variété de J de codimension k ($p-n+k$) transversale aux feuilles de \mathfrak{F} .

Pour que les variétés $\Sigma^k(\mathfrak{F}, \mathfrak{G})$ soient non vides, il suffit que $\Sigma^n(\mathfrak{F}, \mathfrak{G})$ soit non vide.

(c) SYMBOLES D'ORDRE SUPÉRIEUR. — On suppose maintenant que \mathfrak{G} est en position générale à l'ordre 1 par rapport à \mathfrak{F} . Alors pour tout $z \in \Sigma^k$ le plan tangent $T_z(\Sigma^k)$ est défini et sa codimension reste constante. Soit k' un entier inférieur ou égal à k . On désigne par $\Sigma^{k,k'}(\mathfrak{F}, \mathfrak{G})$ l'ensemble des points $z \in \Sigma^k$ pour lesquels

$$\dim(T_z(\mathfrak{F}) \cap T_z(\mathfrak{G}) \cap T_z(\Sigma^k(\mathfrak{F}, \mathfrak{G}))) = k'.$$

Soient $\delta_1, \dots, \delta_q$ un système de générateurs de l'idéal $I = \Delta_{n-k+1}(\mathbf{B}; \mathscr{D})$. On désigne par $\Delta_{n-k+1}(\mathbf{B}, I; \mathscr{D})$ ou encore par $\Delta^{k,k'}(\mathfrak{F}, \mathfrak{G})$ l'idéal engendré par I et les expressions jacobienes de la forme

$$(2) \quad \mathcal{J}(d_1, \dots, d_{n-k+1}; \varphi_1, \dots, \varphi_{n-k+1}),$$

où $\varphi_i \in \mathbf{B} + I$ et $d_i \in \mathscr{D}$ [pour la notation $\mathcal{J}(\quad)$, cf. la formule (1) ci-dessus]. Remarquons que si l'on avait supposé $k' > k$, on aurait

$$\Delta^{k,k'}(\mathfrak{F}, \mathfrak{G}) = \Delta^{k'}(\mathfrak{F}, \mathfrak{G}).$$

Pour tout couple d'entiers (k_1, k'_1) tels que $k_1 > k$ ou tels que $k_1 = k$ et $k'_1 \geq k'$ (ordre lexicographique) on a $\Delta^{k_1, k'_1}(\mathfrak{F}, \mathfrak{G}) \supset \Delta^{k, k'}(\mathfrak{F}, \mathfrak{G})$.

LEMME 3. — Soit I un idéal de fonctions différentiables définies sur J et $\delta_1, \dots, \delta_q$ des générateurs de I . L'idéal $\Delta_{n-k+1}(\mathbf{B}, I; \mathscr{D})$ est engendré par les $\delta_1, \dots, \delta_q$ et les expressions jacobienes de la forme (2) où les φ_i sont pris parmi les y^j et les δ_h ($1 \leq j \leq p$, $1 \leq h \leq q$) et où les d_i sont pris parmi les D_h ($1 \leq h \leq n$).

Remarque. — Il est important de noter que I n'est en général pas contenu dans l'idéal engendré par les expressions jacobienes de la forme (2) et que l'idéal engendré par les expressions jacobienes de la forme (2) énumérées dans le lemme 3 dépend du choix des générateurs $\delta_1, \dots, \delta_q$ de l'idéal I .

Soient k et k' des entiers tels que $1 \leq k' \leq k \leq n$. L'idéal $\Delta^{k, k'+1}(\mathfrak{F}, \mathfrak{G})$ est égal, on l'a vu, à $\Delta^{k+1}(\mathfrak{F}, \mathfrak{G})$ lorsque $k' = k \leq n-1$. Lorsque $k' = k = n$, cet idéal est l'anneau tout entier. Désignons par $Z_{k, k'}$ l'ensemble des zéros de $\Delta^{k, k'}(\mathfrak{F}, \mathfrak{G})$. D'après ce qu'on a vu, $Z_{k, k'} \supset Z_{k, k'+1}$ et on a

$$\Sigma^{k, k'}(\mathfrak{F}, \mathfrak{G}) = Z_{k, k'} - Z_{k, k'+1}.$$

PROPOSITION 3. — Soit J une variété différentiable et soient \mathfrak{F} et \mathfrak{G} des feuilletages de J tels que \mathfrak{G} soit en position générale à l'ordre 2 par rapport à \mathfrak{F} . On pose $p = \text{codim } \mathfrak{F}$ et $n = \dim \mathfrak{G}$. Soient k et k' des entiers tels que $1 \leq k' \leq k \leq n$ et $k > n-p$. Alors $\Delta^{k, k'}(\mathfrak{F}, \mathfrak{G})$ est une sous-variété de codimension $v(p, n; k, k')$ dont l'adhérence est contenue dans $Z_{k, k'+1}$. [L'entier $v(p, n; k, k')$ est défini au cours de l'énoncé du théorème ci-dessous.] Pour que $\Sigma^{k, k'}(\mathfrak{F}, \mathfrak{G})$ soit non vide il suffit que $\Sigma^{n, n}(\mathfrak{F}, \mathfrak{G})$ soit non vide.

On suppose maintenant que $I = \Delta^{k, k'}(\mathfrak{F}, \mathfrak{G})$. On peut alors construire, pour tout entier k'' , l'idéal $\Delta_{n-k''+1}(B, I; \mathcal{D}) = \Delta^{k, k', k''}(\mathfrak{F}, \mathfrak{G})$. Ici encore on a

$$\Delta^{k, k', k''}(\mathfrak{F}, \mathfrak{G}) = \Delta^{k, k''}(\mathfrak{F}, \mathfrak{G}),$$

lorsque $k'' > k'$. Si (m, m', m'') est un système d'entiers lexicographiquement supérieur ou égal au système (k, k', k'') on a

$$\Delta^{m, m', m''}(\mathfrak{F}, \mathfrak{G}) \supset \Delta^{k, k', k''}(\mathfrak{F}, \mathfrak{G}).$$

Plus généralement soit $\mathbf{k} = (\mathbf{k}(1), \dots, \mathbf{k}(r))$ un système décroissant au sens large de r entiers inférieurs ou égaux à n . On définit par récurrence sur l'entier r l'idéal $\Delta^{\mathbf{k}}(\mathfrak{F}, \mathfrak{G})$ en posant

$$\Delta^{\mathbf{k}}(\mathfrak{F}, \mathfrak{G}) = \Delta_{n-\mathbf{k}(r)+1}(B, \Delta^{\mathbf{tk}}(\mathfrak{F}, \mathfrak{G}); \mathcal{D}) \quad [\text{où } \mathbf{tk} = (\mathbf{k}(1), \dots, \mathbf{k}(r-1))].$$

Si \mathbf{m} est un système de même longueur r que \mathbf{k} lexicographiquement supérieur ou égal à \mathbf{k} , on a

$$\Delta^{\mathbf{m}}(\mathfrak{F}, \mathfrak{G}) \supset \Delta^{\mathbf{k}}(\mathfrak{F}, \mathfrak{G}).$$

Si \mathbf{k} est un système de longueur r tel que $\mathbf{k}(r) = 0$, alors on a,

$$\Delta^{\mathbf{k}}(\mathfrak{F}, \mathfrak{G}) = \Delta^{\mathbf{tk}}(\mathfrak{F}, \mathfrak{G}).$$

Cette remarque permet de ne considérer que les systèmes \mathbf{k} décroissants au sens large d'entiers supérieurs ou égaux à 1.

Soit \mathbf{k} un tel système et r sa longueur. Posons $\mathbf{k}(0) = n$ et désignons par

$$\chi(0) = n > \chi(1) > \dots > \chi(t) \geq 1$$

les $t+1$ valeurs prises par le système \mathbf{k} ainsi prolongé. Avec ces notations on a

$$(\star) \quad \mathbf{k} = \underbrace{\chi(0), \dots, \chi(0)}_{r(0) \text{ fois}}, \underbrace{\chi(1), \dots, \chi(1)}_{r(1)-r(0) \text{ fois}}, \dots, \underbrace{\chi(t), \dots, \chi(t)}_{r(t)-r(t-1) \text{ fois}}$$

[observer que la relation $r(0) = 0$ équivaut à la relation $\mathbf{k}(1) \leq n-1$]. Lorsque $t \geq 1$, soit \mathbf{k}' le système de longueur $r(t-1)+1$ dont les $r(t-1)$ premiers termes sont égaux aux termes correspondants de \mathbf{k} et dont le dernier terme est égal à $\chi(t)+1$.

Lorsque $t = 0$, \mathbf{k}' n'est pas défini. Plus généralement si $1 \leq q \leq t$, on désigne par $\mathbf{k}^{(q)}$ le système de longueur $r(q-1)+1$ dont les $r(q-1)$ premiers termes sont égaux aux termes correspondants de \mathbf{k} et dont le dernier est égal à $\chi(q)+1$. Avec ces conventions on a $\mathbf{k}' = \mathbf{k}^{(t)}$, lorsque $t \geq 1$. Enfin pour tout système \mathbf{k} de longueur r et tout entier s tel que $0 \leq s \leq r$ on convient de désigner par $\mathbf{s}^s \mathbf{k}$ le système $(\mathbf{k}(s+1), \mathbf{k}(s+2), \dots, \mathbf{k}(r))$. Pour tout système \mathbf{k} d'entiers décroissant au sens large non identiquement nul et de longueur r , on désigne par $\mu(\mathbf{k})$ le nombre des systèmes \mathbf{m} d'entiers, non identiquement nuls, décroissants au sens large et de longueur r tels que $\mathbf{m}(s) \leq \mathbf{k}(s)$ pour tout $s \in \{1, \dots, r\}$. (Le formalisme esquissé ici sera développé avec toutes sortes de détails au chapitre II dans le cadre des suites d'entiers décroissantes nulles à partir d'un certain rang.)

THÉORÈME (Boardman). — Soient r, n et p des entiers supérieurs ou égaux à 1; soit J une variété différentiable; soient \mathfrak{F} un feuilletage de J de codimension p et \mathfrak{G} un feuilletage de J de dimension n . On suppose que \mathfrak{G} est en position générale à l'ordre r par rapport à \mathfrak{F} . Pour tout système \mathbf{k} d'entiers, décroissant au sens large à valeurs dans $\{1, \dots, n\}$ de longueur inférieure ou égale à r , désignons par $Z_{\mathbf{k}}$ l'ensemble des zéros de $\Delta^{\mathbf{k}}(\mathfrak{F}, \mathfrak{G})$ et posons

$$\Sigma^{\mathbf{k}}(\mathfrak{F}, \mathfrak{G}) = Z_{\mathbf{k}} - Z'_{\mathbf{k}} \quad \left(\text{où } Z'_{\mathbf{k}} = \begin{cases} Z_{\mathbf{k}'} & \text{lorsque } \mathbf{k}' \text{ est défini} \\ \emptyset & \text{lorsque } \mathbf{k}' \text{ n'est pas défini} \end{cases} \right).$$

L'ensemble $\Sigma^{\mathbf{k}}$ est une sous-variété de J transversale à \mathfrak{F} de codimension

$$\begin{aligned} v(p, n; \mathbf{k}) &= p \mu(\mathbf{k}) + \sum_{s=1}^r (\mathbf{k}(s) - \mathbf{k}(s-1)) \mu(\mathbf{s}^{s-1} \mathbf{k}) \\ &= p \mu(\mathbf{k}) + \sum_{q=1}^t (\chi(q) - \chi(q-1)) \mu(\mathbf{s}^{r(q-1)} \mathbf{k}). \end{aligned}$$

La variété $\Sigma^{\mathbf{k}}(\mathfrak{F}, \mathfrak{G})$ est l'ensemble des points $z \in \Sigma^{\mathbf{k}}(\mathfrak{F}, \mathfrak{G})$ tels que

$$\dim(T_z(\mathfrak{F}) \cap T_z(\mathfrak{G}) \cap T_z(\Sigma^{\mathbf{k}}(\mathfrak{F}, \mathfrak{G}))) = \mathbf{k}(r).$$

Pour que les variétés $\Sigma^{\mathbf{k}}(\mathfrak{F}, \mathfrak{G})$ soient non vides, il suffit que

- (i) $\mathbf{k}(1) \geq n-p+1$ ou que $\mathbf{k}(r) = n-p$ et que
- (ii) $\Sigma^{\mathbf{m}_\infty}(\mathfrak{F}, \mathfrak{G})$ soient non vides [où l'on a posé $\mathbf{m}_\infty = \overbrace{(n, \dots, n)}^{r \text{ fois}}$].

Remarque. — L'application $v(p, n; \mathbf{k})$ n'est pas croissante en \mathbf{k} pour l'ordre lexicographique; par exemple on a

$$v(n, n; \overbrace{(1, \dots, 1)}^{k \text{ fois}}) = k \quad (\text{pour tout } k \in \mathbb{N}) \text{ et } v(n, n; (2)) = 4$$

(pour comparer des systèmes d'entiers strictement positifs de longueurs inégales, on convient de prolonger par 0 le système le plus court).

Il s'ensuit que l'adhérence de $\Sigma^k(\mathfrak{F}, \mathfrak{G})$ n'est pas en général égale à la réunion des $\Sigma^m(\mathfrak{F}, \mathfrak{G})$ pour m lexicographiquement strictement supérieur à k . Par suite, l'idéal $\Delta^k(\mathfrak{F}, \mathfrak{G})$ peut avoir plusieurs composantes irréductibles puisque lorsque m est lexicographiquement supérieur ou égal à k , la variété $\Sigma^m(\mathfrak{F}, \mathfrak{G})$ est contenue dans Z_k . En fait on a

$$Z_k = \left(\bigcup_{1 \leq q \leq t} \overline{\Sigma^{k^{(q)}}(\mathfrak{F}, \mathfrak{G})} \right) \cup \overline{\Sigma^k(\mathfrak{F}, \mathfrak{G})}$$

(où la barre horizontale désigne l'adhérence pour la topologie de Zariski).

(d) LES VARIÉTÉS $\Sigma^k(X, Y)$. — Pour appliquer le théorème de Boardman à l'espace des jets d'application d'une variété X dans une variété Y (de dimensions respectives n et p) on ne peut malheureusement faire appel à la construction présentée dans l'exemple du (b). En effet les champs de vecteurs D_i définis dans cet exemple ne sont pas invariants par changements de coordonnées de la source et du but. Dans $J^r(X, Y)$ on peut considérer le feuilletage \mathfrak{F} défini canoniquement par les fibres de la projection sur Y . En revanche, lorsque X et Y ne sont pas munies de structures affines, on ne peut considérer de distribution canonique de n -plans sur $J^r(X, Y)$: il n'existe pas de connexion canonique du fibré $J^r(X, Y)$ mais seulement un système de Pfaff (non complètement intégrable) exprimant les contraintes à imposer à une section différentiable du fibré des r -jets pour qu'elle soit le jet d'ordre r d'une application différentiable $f : X \rightarrow Y$. Les plans de la distribution définie par ce système de Pfaff sont de dimension $p [(n+r-1)/(n-1)!r!] + n$.

Pour pouvoir définir une connexion canonique on doit se placer dans

$$J^\infty(X, Y) = \varprojlim_{r \in \mathbb{N}} J^r(X, Y);$$

cet ensemble n'est plus une variété mais seulement un fibré de base $X \times Y$ dont la fibre est la pro-variété algébrique lisse $(\mathbb{R}[[x^1, \dots, x^n]])^p$ (où l'astérisque indique qu'on considère l'idéal des séries formelles à n variables sans termes constants) sur laquelle agit le groupe des isomorphismes formels de la source et du but.

Pour définir la connexion canonique de $J^\infty(X, Y)$ on procède de la façon suivante : quels que soient l'entier $r \geq 1$, le r -jet z d'application de X dans Y de source x , le représentant f de z et le vecteur $\xi \in T_x X$, on observe que le vecteur $Tj_x^{r-1} f(\xi)$ ne dépend pas de f mais seulement de z . Cette remarque permet donc de définir une application

$$H_r : J^r(X, Y) \times_X TX \rightarrow TJ^{r-1}(X, Y)$$

(où l'opération \times_X désigne le produit fibré au-dessus de l'espace X). En désignant par $\pi_r : J^r(X, Y) \rightarrow X$ la projection canonique de l'espace des jets d'ordre r sur la source on a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} & & TJ^{r-1}(X, Y) \\ & \nearrow H_r & \downarrow T\pi_{r-1} \\ J^r(X, Y) \times_X TX & \xrightarrow{\pi_r \times_X \text{id}} & TX \end{array}$$

En désignant par $\pi_{r',r}$ la projection naturelle de $J^{r'}(X, Y)$ sur $J^r(X, Y)$ (définie lorsque $r' \leq r$) on a en outre le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} J^{r+1}(X, Y) \times_X TX & \xrightarrow{H_{r+1}} & TJ^r(X, Y) \\ \pi_{r,r+1} \times_X \text{Id} \downarrow & & \downarrow T\pi_{r-1,r} \\ J^r(X, Y) \times_X TX & \xrightarrow{H_r} & TJ^{r-1}(X, Y) \end{array}$$

quel que soit $r \in \mathbb{N}^*$, qui exprime que les H_r forment un système projectif dont la limite $H_\infty : J^\infty(X, Y) \times_X TX \rightarrow TJ^\infty(X, Y)$ jouit de toutes les propriétés que les spécialistes ont coutume d'exiger d'une connexion [le fibré tangent $TJ^\infty(X, Y)$ de l'espace $J^\infty(X, Y)$ est la limite projective des fibrés $TJ^r(X, Y)$]. Cette connexion H_∞ s'appelle la *connexion canonique* de l'espace $J^\infty(X, Y)$: elle définit sur $J^\infty(X, Y)$ une distribution \mathfrak{G} de n -plans, qui est en position générale par rapport à \mathfrak{F} à l'ordre r pour tout $r \in \mathbb{N}$.

Voici comment on peut construire explicitement \mathfrak{G} :

Pour tout $x \in X$ et tout $y \in Y$ et pour tout système de coordonnées x^1, \dots, x^n défini dans un voisinage ouvert U de x et tout système de coordonnées y^1, \dots, y^p défini dans un voisinage ouvert V de y , posons avec les notations de l'exemple du (b) ci-dessus,

$$D_i = \frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} \left(\sum_{j=1}^p y_{\alpha + \omega_i}^j \frac{\partial}{\partial y_{\alpha}^j} \right) \quad (1 \leq i \leq n).$$

Pour tout $z \in J^\infty(U, V)$ et tout $i \in \{1, \dots, n\}$ on a

$$H_\infty \left(z, \frac{\partial}{\partial x^i} (\pi_\infty z) \right) = D_i(z)$$

[où π_∞ désigne la projection canonique de $J^\infty(X, Y)$ sur X et $\partial/\partial x^i (\pi_\infty z)$ l'évaluation au point $\pi_z \in X$ du champ de vecteurs $\partial/\partial x^i$]. Les n champs de vecteurs D_i qu'on vient ainsi de construire sur $J^\infty(U, V)$, engendrent un sous-module du module des champs de vecteurs de $J^\infty(U, V)$ qui détermine sur $J^\infty(U, V)$ la distribution \mathfrak{G} précédemment mentionnée. Cette distribution, qui est complètement intégrable, est indépendante des systèmes de coordonnées choisis, elle est donc définie canoniquement sur $J^\infty(X, Y)$ tout entier. Les variétés intégrales de \mathfrak{G} sont les images G_f de X dans $J^\infty(X, Y)$ par les applications $J^\infty(f)$ où $f : X \rightarrow Y$ est une application de classe C^∞ quelconque.

Par tout point $z \in J^\infty(X, Y)$ passe donc une infinité d'intégrales premières G_f ; dans le cadre où l'on s'est placé, on n'a plus de théorème d'unicité pour les variétés intégrales. Néanmoins les constructions du (b) et du (c) ci-dessus s'adaptent aisément à cette situation. D'ailleurs on retrouve l'unicité des variétés intégrales lorsqu'on se restreint à un voisinage formel d'un point quelconque $x \in X$ et, par conséquent, on peut encore parler de feuilletage.

Soit $\mathbf{k} = (\mathbf{k}(1), \dots)$ une suite décroissante d'entiers inférieurs ou égaux à n , nulle à partir d'un certain rang, et soit p le plus grand entier s tel que $\mathbf{k}(s) \neq 0$. La remarque précédente permet de définir des idéaux $\Delta_\infty^{\mathbf{k}}(X, Y)$ (ou mieux des faisceaux d'idéaux)

et par conséquent des ensembles $\Sigma_\infty^{\mathbf{k}}(X, Y)$ auxquels on peut appliquer le théorème de Boardman.

En fait lorsque $\rho \leq r$ l'idéal $\Delta_\infty^{\mathbf{k}}(X, Y)$ est l'image réciproque par la projection

$$\pi_{r, \infty} : J^\infty(X, Y) \rightarrow J^r(X, Y)$$

d'un idéal $\Delta_r^{\mathbf{k}}(X, Y) = \Delta^{r\mathbf{k}}(X, Y)$ [où $r\mathbf{k}$ désigne le système d'entiers $(k(1), \dots, k(r))$ défini sur $J^r(X, Y)$ de la façon suivante : lorsque $\rho = 0$, c'est-à-dire lorsque \mathbf{k} est identiquement nulle, $\Delta^{r\mathbf{k}}(X, Y)$ est l'idéal nul; lorsque $\rho \geq 1$, l'idéal $\Delta^{r\mathbf{k}}(X, Y)$ est l'idéal engendré sur $J^r(X, Y)$ par $\pi_{r-1, r}^*(\Delta^{r\mathbf{k}}(X, Y))$ et par les expressions de la forme

$$\mathcal{F}(d_1, \dots, d_{n-k(r)+1}; \varphi_1, \dots, \varphi_{n-k(r)+1})$$

[où les φ_i appartiennent à $\pi_{r-1, r}^*(\Delta^{r\mathbf{k}}(X, Y)) + \pi_{0, r}^*\mathcal{O}_Y$ (où \mathcal{O}_Y désigne l'image réciproque sur $J^0(X, Y) = X \times Y$ du faisceau des fonctions différentiables sur Y) et les d_i sont des champs de vecteurs de $J^r(X, Y)$ annulant le système de Pfaff canonique de $J^r(X, Y)$].

On observera que, lorsque $\rho = 1$, l'idéal $\Delta_1^{\mathbf{k}}(X, Y)$ s'identifie à l'idéal $\Delta^{\mathbf{k}(1)}(X, Y)$ qui a été défini au (a) ci-dessus.

Ainsi, toutes les fois que r est supérieur ou égal à ρ , les ensembles $\Sigma_\infty^{\mathbf{k}}(X, Y)$ sont les images réciproques par $\pi_{r, \infty}$ de sous-variétés $\Sigma_r^{\mathbf{k}}(X, Y) = \Sigma^{r\mathbf{k}}(X, Y)$ de $J^r(X, Y)$ de codimension $v(p, n; r\mathbf{k})$. Les $\Sigma_\infty^{\mathbf{k}}(X, Y)$ sont donc des sous-provariétés de codimension $v(p, n; r\mathbf{k})$ de $J^\infty(X, Y)$: elles sont non vides pour toute suite \mathbf{k} tel que $v(p, n; r\mathbf{k}) \geq 0$.

Dans les chapitres suivants, on travaillera exclusivement dans la limite projective, cadre universel dans lequel on peut inscrire toutes les constructions portant sur les jets d'ordre fini.

Sur $J^r(X, Y)$ on définit comme suit une décomposition en sous-variétés $\Sigma_*^{\mathbf{k}}(X, Y)$ où \mathbf{k} parcourt l'ensemble des systèmes décroissants d'entiers compris entre 0 et n . Lorsque $\mathbf{k}(r) \neq 0$, la variété $\Sigma_*^{\mathbf{k}}(X, Y)$ s'identifie à la variété $\Sigma^{\mathbf{k}}(X, Y)$ précédemment définie. Lorsque $\mathbf{k}(r) = 0$, on désigne par r_0 le plus grand entier s tel que $\mathbf{k}(s)$ soit différent de 0 et par \mathbf{k}^* le système d'entiers défini en posant

$$\mathbf{k}^*(s) = \begin{cases} \mathbf{k}(s) & \text{lorsque } 1 \leq s \leq r_0, \\ \mathbf{k}(r_0) & \text{lorsque } s = r_0, \\ 1 & \text{lorsque } s = r_0 + 1, \\ 0 & \text{lorsque } r_0 + 2 \leq s \leq r. \end{cases}$$

Alors on a l'inclusion $\Sigma_*^{\mathbf{k}^*}(X, Y) \subset \Sigma^{\mathbf{k}}(X, Y)$, ce qui permet de poser

$$\Sigma_*^{\mathbf{k}}(X, Y) = \Sigma^{\mathbf{k}}(X, Y) - \Sigma_*^{\mathbf{k}^*}(X, Y).$$

La décomposition en sous-variétés ainsi construite n'est malheureusement pas une stratification, car, comme on l'a vu plus haut, la condition de frontière n'est pas en général respectée [pour un exemple, cf. (e) ci-dessous].

Lorsque \mathbf{k} est une suite décroissante d'entiers compris entre 0 et n nulle à partir d'un certain rang, on définit de même sur $J^\infty(X, Y)$ les provariétés $\Sigma_{\infty, * }^{\mathbf{k}}(X, Y)$. L'ensemble

de ces provariétés ne constitue pas une décomposition en sous-variétés de $J^\infty(X, Y)$; en effet, pour obtenir une partition de $J^\infty(X, Y)$ il faut également prendre en compte les sous-ensembles $\Sigma_\infty^{\mathbf{k}}(X, Y) = \Sigma_{\infty, *}^{\mathbf{k}}(X, Y)$ correspondant aux suites \mathbf{k} qui ne prennent jamais la valeur 0. Or ces ensembles sont des sous-variétés de codimension infinie.

DÉFINITION. — Soit \mathbf{k} une suite décroissante d'entiers compris entre 0 et n (resp. un système décroissant d'entiers compris entre 0 et n). Lorsque

$$z \in \Sigma_{\infty, *}^{\mathbf{k}}(X, Y) \text{ [resp. } \Sigma_*^{\mathbf{k}}(X, Y)\text{],}$$

on dit que z est *de symbole* \mathbf{k} .

D'après ce qui précède, quel que soit $z \in J_\infty(X, Y)$ [resp. $J_r(X, Y)$ avec $r \in \mathbb{N}$], le symbole de z est défini.

Soit r un entier supérieur ou égal à 1, soit $f : X \rightarrow Y$ une application de classe C^r et $\mathbf{k} = (\mathbf{k}(1), \dots, \mathbf{k}(r))$ un symbole. On pose

$$\Sigma^{\mathbf{k}}(f) = (j^r(f))^{-1}(\Sigma_r^{\mathbf{k}}(X, Y))$$

[définition analogue pour $\Sigma_*^{\mathbf{k}}(f)$].

Lorsque f est de classe C^{r+1} et $j^r(f)$ est transversale à $\Sigma_r^{\mathbf{k}}(X, Y)$, l'ensemble $\Sigma^{\mathbf{k}}(f)$ est une sous-variété de X de codimension $v(p, n; \mathbf{k})$. Toute application f de classe C^∞ peut être approchée arbitrairement près (dans la topologie \mathcal{C}^∞) par une application g telle que pour tout $r \in \mathbb{N}^*$, l'application $j^r(g)$ soit transversale à toute variété $\Sigma_r^{\mathbf{k}}(X, Y)$. Les applications g jouissant de cette propriété sont telles que leurs restrictions aux $\Sigma^{\mathbf{k}}(g)$ soient de rang constant (cf. [2] et [8]).

On a des résultats analogues en substituant aux $\Sigma^{\mathbf{k}}$ les $\Sigma_*^{\mathbf{k}}$.

N. B. L'outil fondamental pour démontrer le théorème de Boardman est la notion d'expression jacobienne bien formée de type (p, \mathbf{k}) qui sera expliquée au (f) du chapitre III [cf. également l'exemple du (g), chap. III]. Ce concept en apparence compliqué est en réalité de manipulation très aisée lorsqu'on travaille sur des exemples particuliers. A titre d'illustration de cette affirmation on donne maintenant la méthode permettant de calculer les équations des variétés $\Sigma^{\mathbf{k}}(f)$ au voisinage de 0 lorsque f présente à l'origine la singularité dite « ombilic parabolique ». Le plan de cette méthode est dicté par le lemme 13 du chapitre IV (g).

(e) APPLICATION : L'OMBILIC PARABOLIQUE. [On suppose maintenant que le lecteur, stimulé par les considérations heuristiques qui précèdent, vient d'assimiler la substance des chapitres II, III et IV.]

Calcul des variétés $\Sigma^{\mathbf{k}}(f)$ lorsque $f : \mathbb{R}^6 \rightarrow \mathbb{R}^5$ est définie par

$$f(x, y, t, u, v, w) = (x^2 y + y^4 + wx^2 + ty^2 - ux - vy, t, u, v, w).$$

[Les coordonnées de \mathbb{R}^5 sont notées X, T, U, V, W .]

1° L'ensemble $\Sigma^2(f)$ est le sous-ensemble de \mathbf{R}^6 défini par l'annulation des deux expressions jacobiennes suivantes :

$$\begin{aligned}\delta_2 &= \mathcal{J} \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v}, \frac{\partial}{\partial w}; X, T, U, V, W \right) \\ &= \frac{\partial X}{\partial x} = -u + 2x(y+w)\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\delta_1 &= \mathcal{J} \left(\frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v}, \frac{\partial}{\partial w}; X, T, U, V, W \right) \\ &= \frac{\partial X}{\partial y} = -v + x^2 + 2y(2y^2 + t).\end{aligned}$$

C'est une sous-variété fermée de \mathbf{R}^6 isomorphe à \mathbf{R}^4 .

2° L'ensemble $\Sigma^{2,2}(f)$ est le sous-ensemble de $\Sigma^2(f)$ défini par l'annulation des trois expressions suivantes :

$$\begin{aligned}\delta_{2,2} &= \mathcal{J} \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v}, \frac{\partial}{\partial w}; \delta_2, T, U, V, W \right) \\ &= \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} = 2(y+w),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\delta_{2,1} &= \mathcal{J} \left(\frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v}, \frac{\partial}{\partial w}; \delta_2, T, U, V, W \right) = \delta_{1,2} \\ &= \mathcal{J} \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v}, \frac{\partial}{\partial w}; \delta_1, T, U, V, W \right) \\ &= \frac{\partial^2 X}{\partial x \partial y} = 2x\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\delta_{1,1} &= \mathcal{J} \left(\frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v}, \frac{\partial}{\partial w}; \delta_1, T, U, V, W \right) \\ &= \frac{\partial^2 X}{\partial y^2} = 2(6y^2 + t).\end{aligned}$$

C'est une courbe régulière de $\Sigma^2(f)$ que l'on peut paramétrer par w .

3° L'ensemble $\overline{\Sigma^{2,1}}(f)$ est le sous-ensemble de $\Sigma^2(f)$ défini par l'annulation de l'expression suivante :

$$\begin{aligned}\Delta &= \mathcal{J} \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v}, \frac{\partial}{\partial w}; \delta_2, \delta_1, T, U, V, W \right) \\ &= \det \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 X}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 X}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 X}{\partial y^2} \end{bmatrix} = 4((y+w)(6y^2 + t) - x^2).\end{aligned}$$

L'ensemble $\Sigma^{2,1}(f)$ est l'ensemble des points réguliers de la sous-variété algébrique $\overline{\Sigma^{2,1}(f)}$. Le sous-ensemble des points singuliers de $\overline{\Sigma^{2,1}(f)}$ [qui s'identifie à $\Sigma^{2,2}(f)$] est défini dans $\overline{\Sigma^{2,1}(f)}$ par l'annulation des expressions $y+w$ et $6y^2+t$.

4° L'ensemble $\overline{\Sigma^{2,1,1}(f)}$ est le sous-ensemble de $\overline{\Sigma^{2,1}(f)}$ défini par l'annulation des deux expressions suivantes :

$$\begin{aligned} \Delta_2 &= \mathcal{J} \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v}, \frac{\partial}{\partial w}; \delta_1, \Delta, T, U, V, W \right) \\ &= \det \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 X}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 X}{\partial y^2} \\ \frac{\partial \Delta}{\partial x} & \frac{\partial \Delta}{\partial y} \end{bmatrix} = 24x(10y^2 + 4wy + t) \\ &= 24x(6y^2 + t + 4y(y+w)), \\ \Delta_1 &= \mathcal{J} \left(\frac{\partial}{\partial x}, \dots, \frac{\partial}{\partial w}; \delta_2, \Delta, T, U, V, W \right) \\ &= \det \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 X}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial \Delta}{\partial x} & \frac{\partial \Delta}{\partial y} \end{bmatrix} \\ &= 8((y+w)(18y^2 + 12wy + t) + 2x^2) \\ &= 8(3(y+w)(10y^2 + 4wy + t) - 2((y+w)(6y^2 + t) - x^2)) \end{aligned}$$

ou encore par l'annulation de la seule expression

$$(y+w)(6y^2 + t + 4y(y+w)).$$

Cet ensemble se décompose en deux sous-variétés algébriques irréductibles $\Sigma_h^{2,1,1}(f)$ [qui est une sous-variété lisse isomorphe à \mathbb{R}^2 et qui comme sous-ensemble de $\Sigma^2(f)$ est défini par l'annulation de x et de $y+w$] et $\Sigma_e^{2,1,1}(f)$ définie comme sous-ensemble de $\Sigma^2(f)$ par l'annulation des deux expressions :

$$10y^2 + 4wy + t \quad \text{et} \quad x^2 + 4y(y+w)^2.$$

(C'est une surface algébrique avec singularités isomorphe au « parapluie » de Whitney : sous-ensemble de \mathbb{R}^3 défini par l'annulation de l'expression $y^2 - zx^2$.)

Comme sous-ensemble de $\Sigma_h^{2,1,1}(f)$ l'ensemble $\Sigma^{2,2}(f)$ est défini par l'annulation de l'expression $10y^2 + 4wy + t$. Comme sous-ensemble de $\Sigma_e^{2,1,1}(f)$, l'ensemble $\Sigma^{2,2}(f)$ est défini par l'annulation de l'expression $y+w$. C'est l'ensemble des points singuliers de $\Sigma_e^{2,1,1}(f)$.

Remarque. — Le fait que $\overline{\Sigma^{2,1,1}(f)}$ ne soit pas irréductible est accidentel : on peut trouver des applications g ayant en $O \in \mathbb{R}^6$ même jet d'ordre 5 que f (et par suite localement différenciablement équivalentes à f) telles que $\overline{\Sigma^{2,1,1}(g)}$ soit globalement irréductible.

En effet $\overline{\Sigma^{2,1,1}(f)}$ est l'image réciproque par $j^3 f$ d'une sous-variété algébrique irréductible de $J^3(\mathbf{R}^6, \mathbf{R}^5)$. En général la décomposition donnée ici ne peut se faire que localement.

5° En tout point de $\Sigma^{2,2}(f)$ de coordonnée $w > 0$, le cône transverse tangent à $\Sigma^{2,1,1}(f)$ se compose de trois droites dont l'une est tangente à $\Sigma_h^{2,1,1}(f)$ et les deux autres à chacune des deux nappes définies localement par $\Sigma_e^{2,1,1}(f)$. Un tel point $\Sigma^{2,2}(f)$ est dit de type *elliptique*. L'ensemble de ces points est noté $\Sigma_e^{2,2}(f)$.

En tout point $p \in \Sigma^{2,2}(f)$ de coordonnée $w < 0$, le cône transverse tangent à $\Sigma^{2,1,1}(f)$ se compose d'une seule droite tangente à $\Sigma_h^{2,1,1}(f)$ [en effet $\Sigma_e^{2,1,1}(f)$ se réduit au voisinage de p à la courbe $\Sigma^{2,2}(f) \subset \Sigma_h^{2,1,1}(f)$]. Un tel point de $\Sigma^{2,2}(f)$ est dit de type *hyperbolique*. L'ensemble de ces points est noté $\Sigma_h^{2,2}(f)$. Lorsque $w = 0$ (c'est-à-dire à l'origine de \mathbf{R}^6) le cône transverse tangent est formé de deux droites. L'origine présente donc une singularité de transition dite *parabolique* entre le cas elliptique et le cas hyperbolique. L'origine O est l'unique élément d'un ensemble que nous noterons $\Sigma_p^{2,2}(f)$.

6° L'ensemble $\Sigma^{2,1,1,1}(f) \cup \Sigma^{2,2}(f)$ est le sous-ensemble de $\overline{\Sigma^{2,1,1}(f)}$ défini par l'annulation des quatre expressions suivantes :

$$\begin{aligned} \Delta_{2,2} &= \mathcal{J} \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v}, \frac{\partial}{\partial w}; \delta_1, \Delta_1, T, U, V, W \right) \\ &= \det \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 X}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 X}{\partial y^2} \\ \frac{\partial \Delta_1}{\partial x} & \frac{\partial \Delta_1}{\partial y} \end{bmatrix} \\ &= 48x(10y^2 + 20wy + 4w^2 - t) \\ &= 48x(4(y+w)(5y+w) - (10y^2 + 4wy + t)), \\ \Delta_{2,1} &= \mathcal{J} \left(\frac{\partial}{\partial x}, \dots, \frac{\partial}{\partial w}; \delta_1, \Delta_2, T, U, V, W \right) \\ &= \det \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 X}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 X}{\partial y^2} \\ \frac{\partial \Delta_2}{\partial x} & \frac{\partial \Delta_2}{\partial y} \end{bmatrix} \\ &= 48(4x^2(5y+w) - (6y^2 + t)(10y^2 + 4wy + t)) \\ &= 48(4(6y^2 + t)(y+w) - (5y+w)(6y^2 + t)(10y^2 + 4wy + t) \\ &\quad - 4((y+w)(6y^2 + t) - x^2)(5y+w)), \\ \Delta_{1,2} &= \mathcal{J} \left(\frac{\partial}{\partial x}, \dots, \frac{\partial}{\partial w}; \delta_2, \Delta_1, T, U, V, W \right) \\ &= \det \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 X}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial \Delta_1}{\partial x} & \frac{\partial \Delta_1}{\partial y} \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta_{1,2} &= 16((y+w)(54y^2+60wy+12w^2+t)-4x^2) \\ &= 16(3(y+w)(4(y+w)(5y+w)-(10y^2+4wy+t)) \\ &\quad +4((y+w)(6y^2+t)-x^2)).\end{aligned}$$

$$\Delta_{1,1} = \mathcal{J}\left(\frac{\partial}{\partial x}, \dots, \frac{\partial}{\partial w}; \delta_2, \Delta_2, T, U, V, W\right)$$

$$= \det \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 X}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial \Delta_2}{\partial x} & \frac{\partial \Delta_2}{\partial y} \end{bmatrix}$$

$$= 48x(4(y+w)(5y+w)-(10y^2+4wy+t))$$

ou encore par l'annulation des deux expressions suivantes :

$$(y+w)(5y+w) \quad \text{et} \quad (6y^2+t)(10y^2+4wy+t).$$

C'est encore le sous-ensemble de $\overline{\Sigma^{2,1}}(f)$ défini par l'annulation des deux expressions suivantes :

$$(y+w)(5y+w) \quad \text{et} \quad 6y^2+t+4y(y+w).$$

C'est donc le sous-ensemble de $\Sigma_e^{2,1,1}(f)$ défini par l'annulation de l'expression $(y+w)(5y+w)$. Le fait que cet ensemble ne soit pas irréductible n'est pas accidentel. La composante définie dans $\Sigma_e^{2,1,1}(f)$ par l'annulation de $y+w$ est l'ensemble $\overline{\Sigma^{2,2}}(f)$. La composante définie par l'annulation de $5y+w$ est l'ensemble $\overline{\Sigma^{2,1,1,1}}(f)$. C'est une courbe à point de rebroussement du type « parabole semi-cubique » dont l'ensemble des singularités (réduit à un élément) est l'ensemble $\overline{\Sigma^{2,1,1,1}}(f) \cap \overline{\Sigma^{2,2}}(f) = \Sigma_p^{2,2}(f)$ [singularité de symbole (2, 2) de type parabolique] déjà rencontrée en 5°].

CHAPITRE II

Symboles et tableaux

Le présent chapitre constitue en quelque sorte le dictionnaire des notations et définitions qu'on est obligé d'introduire pour pouvoir manipuler les extensions jacobiniennes itérées [cf. l'exemple (g) du chapitre III]. On sera donc contraint de s'y référer constamment, mais il serait absurde de vouloir en faire l'étude avant d'avoir commencé la lecture du chapitre III et sans se reporter à l'exemple (p. 56-61).

(a) L'ENSEMBLE DES SYMBOLES. — Soit $n \in \mathbb{N}$.

On désigne par \mathcal{S}_n l'ensemble des applications $\mathbf{k} : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ décroissantes au sens large et telles que $\mathbf{k}(0) = n$ et $\mathbf{k}(s) = 0$ lorsque s est assez grand. Un élément de \mathcal{S}_n s'appelle un *symbole* de hauteur n .

La longueur $|\mathbf{k}|$ d'une suite $\mathbf{k} \in \mathcal{S}_n$ ($n \geq 1$) est le plus grand entier s tel que $\mathbf{k}(s) \neq 0$. L'ensemble des symboles de hauteur n et de longueur égale à $r \in \mathbb{N}$ sera noté $\mathcal{S}_n(r)$. On pose

$$\mathcal{S} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{S}_n \quad \text{et} \quad \mathcal{S}(r) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{S}_n(r).$$

N. B. Dans la pratique, la valeur $\mathbf{k}(0)$ n'est pas notée et le symbole \mathbf{k} s'écrit $(\mathbf{k}(1), \dots, \mathbf{k}(|\mathbf{k}|), 0)$ ou même plus simplement $(\mathbf{k}(1), \dots, \mathbf{k}(|\mathbf{k}|))$ le contexte précisant que \mathbf{k} appartient à \mathcal{S}_n .

SYMBLES CONDENSÉS. — On dira qu'un symbole \mathbf{m} de hauteur $n \geq 1$ est *condensé* si la restriction de \mathbf{m} à \mathbb{N}^* prend toutes les valeurs comprises entre $\mathbf{m}(|\mathbf{m}|)$ et n . Pour qu'il en soit ainsi, il faut, en particulier, que $|\mathbf{m}| \geq 1$. On désigne par $\mathcal{S}^*(n, r)$ l'ensemble des symboles condensés de longueur inférieure ou égale à r . [Lorsque $n = 0$ ou $r = 0$, l'ensemble $\mathcal{S}^*(n, r)$ est vide].

(b) **STRUCTURES D'ORDRE SUR \mathcal{S}_n .** — Soient \mathbf{k} et \mathbf{l} deux éléments de \mathcal{S} .

On dit que \mathbf{k} est *inférieur ou égal à \mathbf{l} au sens usuel*, si pour tout $s \in \mathbb{N}$ on a $\mathbf{k}(s) \leq \mathbf{l}(s)$: on définit ainsi sur \mathcal{S} une relation d'ordre (non total) que l'on note $\mathbf{k} \leq \mathbf{l}$. La restriction à \mathcal{S}_n de cette relation possède un plus petit élément. C'est le symbole \mathbf{e}_n défini en posant $\mathbf{e}_n(0) = n$ et $\mathbf{e}_n(s) = 0$ pour tout entier $s \geq 1$.

Soient $\mathbf{k}, \mathbf{l} \in \mathcal{S}$.

On dit que \mathbf{k} est *lexicographiquement inférieur ou égal à \mathbf{l}* si $\mathbf{k} = \mathbf{l}$ ou si, en désignant par s_0 le plus petit entier tel que $\mathbf{k}(s_0) \neq \mathbf{l}(s_0)$ on a $\mathbf{k}(s_0) \leq \mathbf{l}(s_0)$. Ceci définit sur \mathcal{S} une relation d'ordre total moins fine que la précédente que l'on note $\mathbf{k} \leq \mathbf{l}$.

STRUCTURES D'ORDRE SUR $\mathcal{S}^*(n, r)$. — Soient n et r des entiers.

On désigne par $\theta : \mathcal{S}^*(n, r) \rightarrow \mathcal{S}_{n+1}(r)$ l'application qui à tout \mathbf{m} associe le symbole \mathbf{l} défini en posant

$$\mathbf{l}(s) = \begin{cases} n+1 & \text{lorsque } 0 \leq s \leq r - |\mathbf{m}|, \\ \mathbf{m}(s - r + |\mathbf{m}|) & \text{lorsque } r - |\mathbf{m}| + 1 \leq s \leq r. \end{cases}$$

Il est clair que l'application θ est injective.

Quels que soient les éléments \mathbf{m} et \mathbf{m}' de $\mathcal{S}^*(n, r)$, on dira que \mathbf{m} est *strictement inférieur* à \mathbf{m}' pour l'ordre usuel de $\mathcal{S}^*(n, r)$ et on écrira $\mathbf{m} \ll \mathbf{m}'$ si $\theta(\mathbf{m}) \leq \theta(\mathbf{m}')$ et $\theta(\mathbf{m}) \neq \theta(\mathbf{m}')$. De même, on dira que \mathbf{m} est *strictement inférieur* à \mathbf{m}' pour l'ordre lexicographique de $\mathcal{S}^*(n, r)$ et on écrira $\mathbf{m} \ll \mathbf{m}'$ si $\theta(\mathbf{m}) \leq \theta(\mathbf{m}')$ et $\theta(\mathbf{m}) \neq \theta(\mathbf{m}')$.

L'ordre induit sur $\mathcal{S}^*(n, r)$ de l'ordre lexicographique de $\mathcal{S}_{n+1}(r)$ par θ est un ordre total moins fin que l'ordre usuel qui lui correspond. Lorsque n et r sont supérieurs ou égaux à 1, le plus petit élément pour cette relation d'ordre sera noté \mathbf{m}_0 . C'est le symbole défini en posant

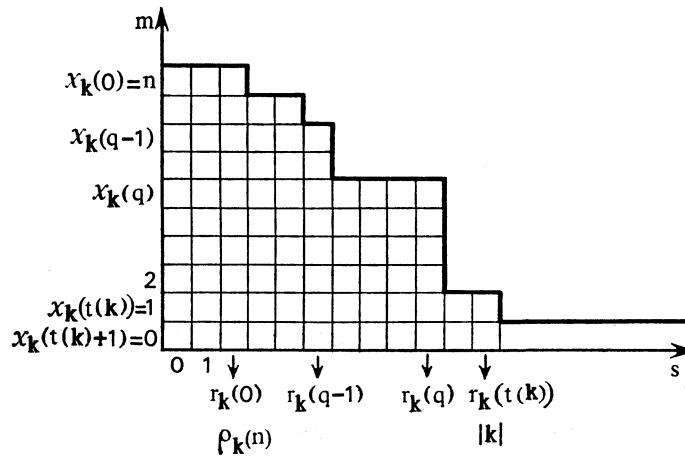
$$\mathbf{m}_0(s) = \begin{cases} n-s+1 & \text{lorsque } 1 \leq s \leq \min(r, n) \\ \text{et} \\ 1 & \text{lorsque } n+1 \leq s \leq r. \end{cases}$$

On désigne par \mathbf{m}_n le plus grand élément de $\mathcal{S}^*(n, r)$ pour cette relation d'ordre. C'est le symbole de longueur 1 défini en posant $\mathbf{m}_n(1) = n$.

ORDRE DU DICTIONNAIRE DE RIMES. — Soient p, n et r des entiers.

On désigne par $\mathcal{S}_n^p(r)$ l'ensemble $\{1, \dots, p\} \times \mathcal{S}_n(r)$ et par $\theta' : \{0, \dots, r\} \rightarrow \{0, \dots, r\}$ l'application définie en posant $\theta'(s) = r - s$ quel que soit $s \in \{0, \dots, r\}$. A tout couple $\mathbf{r} = (j; \mathbf{l})$ [$j \in \{1, \dots, p\}$ et $\mathbf{l} \in \mathcal{S}_n(r)$] considéré comme application de $\{0, \dots, r\}$ dans \mathbb{N}^* on associe l'application $\mathbf{r}^0 = \mathbf{r} \circ \theta'$. Soient \mathbf{r} et \mathbf{r}' des éléments de $\mathcal{S}_n^p(r)$: on dira que \mathbf{r} est inférieure ou égal à \mathbf{r}' pour l'ordre du dictionnaire de rimes sur $\mathcal{S}_n^p(r)$ et on écrira $\mathbf{r} \preceq \mathbf{r}'$ (le contexte se chargeant d'éliminer toute ambiguïté éventuelle) si \mathbf{r}^0 est inférieur ou égal à \mathbf{r}'^0 pour l'ordre lexicographique habituel de $(\mathbb{N})^{(0, \dots, r)}$. Cette relation est une relation d'ordre total moins fine que la relation d'ordre usuel et distincte de la relation d'ordre lexicographique habituel.

(c) APPLICATIONS ASSOCIÉES A UN SYMBOLE. — Soient n un entier supérieur ou égal à 1 et $\mathbf{k} \in \mathcal{S}_n$.



On désigne par $\rho_{\mathbf{k}}$ l'application de l'ensemble $\{1, \dots, n\}$ dans \mathbb{N} qui associe à tout entier m ($1 \leq m \leq n$) le plus grand des entiers s tels que $\mathbf{k}(s) \geq m$. L'application $m \mapsto \rho_{\mathbf{k}}(m)$ ainsi définie est, elle aussi, décroissante au sens large et l'on a $\rho_{\mathbf{k}}(1) = |\mathbf{k}|$. Désignons par $t(\mathbf{k})+2$ le nombre de valeurs distinctes prises par la suite \mathbf{k} . Puisque $n \geq 1$ on a $t(\mathbf{k}) \geq 0$.

Soit $\chi_{\mathbf{k}}$ l'application de l'ensemble $\{0, \dots, t(\mathbf{k})+1\}$ dans \mathbb{N} définie par récurrence sur l'entier $q \leq t(\mathbf{k})+1$ en posant

$$\chi_{\mathbf{k}}(0) = n \quad \text{et} \quad \chi_{\mathbf{k}}(q) = \mathbf{k}(\rho_{\mathbf{k}}(\chi_{\mathbf{k}}(q-1)) + 1).$$

C'est une application strictement décroissante ayant même image que \mathbf{k} [cf. formule (★) du (c), du chapitre I]. En particulier, on a

$$\chi_{\mathbf{k}}(t(\mathbf{k})+1) = 0.$$

Soit $r_{\mathbf{k}} : \{0, \dots, t(\mathbf{k})\} \rightarrow \mathbb{N}$ l'application définie par $r_{\mathbf{k}}(q) = \rho_{\mathbf{k}}(\chi_{\mathbf{k}}(q))$. Cette application est strictement croissante. Elle a même image que $\rho_{\mathbf{k}}$ et l'on a $r_{\mathbf{k}}(t(\mathbf{k})) = |\mathbf{k}|$.

Lorsque $\mathbf{k} \neq \mathbf{e}_n$ on pose

$$t'(\mathbf{k}) = \begin{cases} t(\mathbf{k}) & \text{lorsque } \mathbf{k}(|\mathbf{k}|) = \mathbf{k}(|\mathbf{k}|-1), \\ t(\mathbf{k})-1 & \text{lorsque } \mathbf{k}(|\mathbf{k}|) \neq \mathbf{k}(|\mathbf{k}|-1), \end{cases}$$

c'est-à-dire $t'(\mathbf{k}) = t(\mathbf{tk})$ [cf. (d) ci-dessous].

Les notations qui viennent d'être introduites sont résumées dans la figure ci-dessus qui représente les graphes des applications \mathbf{k} et $\rho_{\mathbf{k}}$.

N. B. Dans la suite, lorsqu'on ne travaille que sur un seul symbole \mathbf{k} ou lorsque aucune ambiguïté n'est possible, les applications $\rho_{\mathbf{k}}$, $\chi_{\mathbf{k}}$ et $r_{\mathbf{k}}$ ainsi que les entiers $t(\mathbf{k})$ et $t'(\mathbf{k})$ associés au symbole \mathbf{k} sont simplement notés ρ , χ , r , t et t' respectivement.

(d) RESTRICTIONS D'UN SYMBOLE. — Soit \mathbf{k} un symbole.

Pour tout $s \in \mathbb{N}$ on désigne par $\mathbf{t}_s \mathbf{k}$ l'élément de \mathcal{S} défini par

$$\mathbf{t}_s \mathbf{k}(s') = \begin{cases} \mathbf{k}(s') & \text{si } 0 \leq s' \leq s, \\ 0 & \text{si } s' \geq s+1. \end{cases}$$

Remarquons que si $s \geq |\mathbf{k}|$ on a $\mathbf{t}_s \mathbf{k} = \mathbf{k}$.

Lorsque $s = |\mathbf{k}|-1 \geq 0$, on pose $\mathbf{t}_s \mathbf{k} = \mathbf{tk}$ ce qui permettra, par exemple, d'écrire :

$$\mathbf{t}^2 \mathbf{k} = \mathbf{t}_{|\mathbf{k}|-2} \mathbf{k} \quad \text{lorsque } |\mathbf{k}| \geq 2$$

et, plus généralement :

$$\mathbf{t}^i \mathbf{k} = \mathbf{t}_{|\mathbf{k}|-i} \mathbf{k} \quad \text{lorsque } 1 \leq i \leq |\mathbf{k}|.$$

Soit $n \in \mathbb{N}$ et soit $\mathbf{k} \in \mathcal{S}_n$.

Pour tout $i \in \mathbb{N}$ on désigne par $\mathbf{s}^i \mathbf{k}$ l'élément de \mathcal{S}_n défini par

$$\mathbf{s}^i \mathbf{k}(s) = \mathbf{k}(s+i) \quad \text{pour tout } s \geq 1.$$

Soit m un entier tel que $1 \leq m \leq n$.

On désigne par $\mathbf{v}_m \mathbf{k}$ l'élément de \mathcal{S}_{m-1} défini par

$$\mathbf{v}_m \mathbf{k}(s) = \mathbf{s}^{p(m)} \mathbf{k}(s) \quad \text{pour tout } s \geq 1.$$

Si $n \geq 1$ et si $\mathbf{k} \in \mathcal{S}_n$ est tel que $|\mathbf{k}| \geq 1$, on désigne par \mathbf{uk} l'élément de \mathcal{S}_n défini en posant

$$\mathbf{uk}(s) = \mathbf{k}(s) \quad \text{pour tout entier } s \neq |\mathbf{k}|$$

et

$$\mathbf{uk}(|\mathbf{k}|) = \mathbf{k}(|\mathbf{k}|-1).$$

De même, pour tout symbole $\mathbf{k} \in \mathcal{S}_n$, on définit par récurrence sur l'entier $i \geq 0$, le symbole $\mathbf{u}^i \mathbf{k}$, en posant $\mathbf{u}^0 \mathbf{k} = \mathbf{k}$ et, lorsque $|\mathbf{u}^{i-1} \mathbf{k}| \geq 1$, $\mathbf{u}^i \mathbf{k} = \mathbf{u}(\mathbf{u}^{i-1} \mathbf{k})$.

Si l'on pose

$$N(\mathbf{k}) = \sum_{s=1}^{|\mathbf{k}|} \mathbf{k}(s),$$

on voit que $\mathbf{u}^h \mathbf{k}$ est défini lorsque $0 \leq h \leq N(\mathbf{k})$ et que $\mathbf{u}^{N(\mathbf{k})} \mathbf{k} = \mathbf{e}_n$. Avec ces conventions, on a, par exemple $\mathbf{u}^{k(1)} \mathbf{k} = \mathbf{t}\mathbf{k}$.

Enfin, soit m un entier supérieur ou égal à 1, pour lequel il existe un entier $s \geq 1$ tel que $\mathbf{k}(s) = m$.

On définit le symbole $\mathbf{d}_m \mathbf{k} \in \mathcal{S}_n$ en posant

$$\mathbf{d}_m \mathbf{k}(s) = \mathbf{k}(s) \quad \text{lorsque } 0 \leq s \leq \rho(m) - 1$$

et

$$\mathbf{d}_m \mathbf{k}(s) = \mathbf{k}(s+1) \quad \text{lorsque } \rho(m) \leq s.$$

Lorsque la restriction à \mathbf{N}^* de \mathbf{k} ne prend pas la valeur m la suite $\mathbf{d}_m \mathbf{k}$ n'est pas définie.

(e) LES ENTIERS DE BOARDMAN. — Soient p et n des entiers naturels et $\mathbf{k} \in \mathcal{S}_n$.

On désigne par $\mu(\mathbf{k})$ le nombre d'éléments $\mathbf{l} \in \mathcal{S}_n$ différents de \mathbf{e}_n et tels que $\mathbf{l} \leq \mathbf{k}$.

Pour tout $\mathbf{k} \neq \mathbf{e}_n$ on désigne par $\lambda(\mathbf{k})$ le nombre d'éléments $\mathbf{l} \in \mathcal{S}_n$ ($|\mathbf{k}|$) tels que $\mathbf{l} \leq \mathbf{k}$ et on pose $\lambda(\mathbf{e}_n) = 0$.

Observons que

$$\mu(\mathbf{k}) = \sum_{s=0}^{|\mathbf{k}|} \lambda(\mathbf{t}_s \mathbf{k}).$$

On pose

$$v'(p, \mathbf{k}) = (p - n + \mathbf{k}(1)) \lambda(\mathbf{k}) + \sum_{i=1}^{|\mathbf{k}|-1} (\mathbf{k}(i+1) - \mathbf{k}(i)) \lambda(\mathbf{s}^i \mathbf{k}),$$

soit encore, avec les conventions du (c) (N. B.)

$$v'(p, \mathbf{k}) = p \lambda(\mathbf{k}) - \sum_{q=1}^{\mathbf{k}} (\chi(q-1) - \chi(q)) \lambda(\mathbf{s}^{r(q-1)} \mathbf{k}).$$

On appelle *entier de Boardman* associé au couple (p, \mathbf{k}) et on note $v(p, \mathbf{k})$ le nombre

$$v(p, \mathbf{k}) = (p - n + \mathbf{k}(1)) \mu(\mathbf{k}) + \sum_{i=1}^{|\mathbf{k}|-1} (\mathbf{k}(i+1) - \mathbf{k}(i)) \mu(\mathbf{s}^i \mathbf{k}),$$

soit encore avec les conventions du (c) :

$$\begin{aligned} v(p, \mathbf{k}) &= p \mu(\mathbf{k}) - \sum_{q=1}^{\mathbf{k}} (\chi(q-1) - \chi(q)) \mu(\mathbf{s}^{r(q-1)} \mathbf{k}) \\ &= \sum_{s=1}^{|\mathbf{k}|} v'(p, \mathbf{t}_s \mathbf{k}). \end{aligned}$$

Observons que pour que $v'(p, \mathbf{k})$ et $v(p, \mathbf{k})$ soient supérieurs ou égaux à 0, il faut et il suffit que

$$(1) \quad \begin{cases} \mathbf{k}(s) = n-p & \text{pour } 1 \leq s \leq |\mathbf{k}| \\ \text{ou bien } n-p+1 \leq \mathbf{k}(1). \end{cases}$$

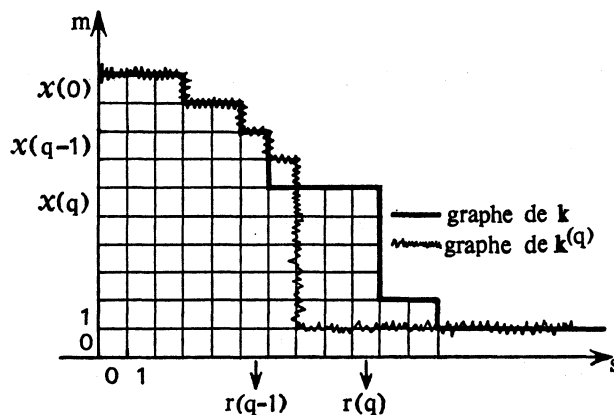
N. B. Au (c) du chapitre I, on a défini les entiers de Boardman pour des systèmes $\mathbf{k} = (\mathbf{k}(1), \dots, \mathbf{k}(r))$ décroissants de r entiers compris entre 0 et n . Dans ce contexte, l'entier de Boardman a été noté $v(p, n; \mathbf{k})$. Soit n un entier et $\mathbf{k} \in \mathcal{S}_n$, on désigne par ρ le plus grand entier s tel que $\mathbf{k}(s) \neq 0$ et par \mathbf{k} le système de ρ entiers $(\mathbf{k}(1), \dots, \mathbf{k}(\rho))$ [cf. (d) du chapitre I]. Avec ces notations on a $v(p, \mathbf{k}) = v(p, n; \mathbf{k})$, où le \mathbf{k} du premier membre est seul à contenir l'information $\mathbf{k}(0) = n$.

(f) LES SUCESSEURS ITÉRÉS D'UN SYMBOLE. — Soient n un entier supérieur ou égal à 1 et \mathbf{k} un symbole différent de \mathbf{e}_n de hauteur n et soit $t \geq 0$ le nombre des valeurs (distinctes de 0 et de n) prises par la suite \mathbf{k} . Lorsque $1 \leq q \leq t+1$, on désigne par $\mathbf{k}^{(q)}$ l'élément de \mathcal{S}_n défini par

$$\mathbf{k}^{(q)}(s) = \begin{cases} \mathbf{k}(s) & \text{lorsque } 0 \leq s \leq r(q-1), \\ \chi(q)+1 & \text{lorsque } s = r(q-1)+1, \\ 0 & \text{lorsque } r(q-1)+2 \leq s \end{cases}$$

[où χ et r sont les applications associées à \mathbf{k} qu'on a définies en (c)]. La suite $\mathbf{k}^{(t)}$ sera également désignée par \mathbf{k}' et, lorsqu'elle est définie, la suite $\mathbf{k}^{(t-1)}$ par \mathbf{k}'' .

Lorsque $1 \leq q \leq t$, le symbole $\mathbf{k}^{(q)}$ est le successeur de $t_{r(q)} \mathbf{k}$ pour l'ordre induit sur $\bigcup_{s \leq r(q)} \mathcal{S}_n(s)$ par l'ordre lexicographique de \mathcal{S} . Le symbole $\mathbf{k}^{(t+1)}$ est le successeur de $\mathbf{k} \in \mathcal{S}$ pour l'ordre lexicographique de \mathcal{S} . Il est défini même lorsque $t = 0$. Notons que lorsque \mathbf{k}' est défini, on a avec les notations de (c) $t'(\mathbf{k}') = t(\mathbf{k}) - 1$.



Avec les conventions introduites en (d) on a, lorsque $1 \leq q \leq t+1$,

$$u\mathbf{k}^{(q)} = t_{r(q-1)+1} \mathbf{k} \leq \mathbf{k}$$

(au sens usuel). Notons que lorsque $(u\mathbf{k})$ ($|\mathbf{k}| \geq 1$), on a $(u\mathbf{k})' = \mathbf{k}$.

Remarque. — Lorsque l'entier t' [défini au (c) ci-dessus] est différent de zéro, le symbole $\mathbf{k}^{(t')}$ est le plus petit des symboles $\mathbf{l} \in \mathcal{S}_n$ pour l'ordre lexicographique de \mathcal{S}_n tels que $\mathbf{k} \preceq \mathbf{l}$ et $\mathbf{k} \neq \mathbf{l}$ qui ne soient pas supérieurs ou égaux à \mathbf{k} pour l'ordre usuel. De même, lorsque $1 \leq q \leq t' - 1$ le symbole $\mathbf{k}^{(q)}$ est le plus petit des symboles $\mathbf{l} \in \mathcal{S}_n$ pour l'ordre lexicographique de \mathcal{S}_n tels que $\mathbf{k}^{(q+1)} \preceq \mathbf{l}$ et $\mathbf{k}^{(q+1)} \neq \mathbf{l}$ qui ne soient pas supérieurs ou égaux à $\mathbf{k}^{(q+1)}$ pour l'ordre usuel. Cette remarque justifie le terme « successeurs itérés » adopté pour désigner les symboles $\mathbf{k}^{(q)}$ (lorsque $1 \leq q \leq t$).

Dans la suite, nous aurons à utiliser également des *successeurs itérés* de \mathbf{k} en un sens moins restrictif. En voici la définition.

Lorsque $\mathbf{k} (|\mathbf{k}|) \leq m \leq n$ on définit le symbole $\mathbf{g}_m \mathbf{k}$ en posant

$$\mathbf{g}_{\mathbf{k}(|\mathbf{k}|)} \mathbf{k} = \mathbf{k}$$

et

$$\mathbf{g}_m \mathbf{k}(s) = \begin{cases} \mathbf{k}(s) & \text{si } 0 \leq s \leq \rho(m), \\ m & \text{si } s = \rho(m) + 1 \\ \text{et} & \\ 0 & \text{si } \rho(m) + 2 \leq s, \end{cases}$$

lorsque $\mathbf{k} (|\mathbf{k}|) + 1 \leq m \leq n$.

Avec ces conventions, on a

$$\mathbf{k}^{(q)} = \mathbf{g}_{\chi(q)+1} \mathbf{k} \quad \text{lorsque } 1 \leq q \leq t.$$

On définit l'application $q_{\mathbf{k}} : \mathbb{N} \rightarrow \{0, \dots, t+1\}$ en posant $q_{\mathbf{k}}(s) = q'$ pour tous les $s \in \mathbb{N}$ tels que $\mathbf{k}(s) = \chi_{\mathbf{k}}(q')$. C'est une application croissante telle que $q_{\mathbf{k}}(0) = 0$ et $q_{\mathbf{k}}(s) = t+1$ pour tout $s \geq |\mathbf{k}| + 1$. En restriction à $\{0, \dots, |\mathbf{k}|\}$ on a $q_{\mathbf{k}}(s) = t (t_s \mathbf{k})$. On écrit $q(s)$ au lieu de $q_{\mathbf{k}}(s)$ lorsqu'aucune confusion n'est à craindre.

On a alors :

$$(t_s \mathbf{k})^{(t_s \mathbf{k})} = \mathbf{g}_{\mathbf{k}(s)+1} \mathbf{k} = \mathbf{k}^{(q_{\mathbf{k}}(s))}$$

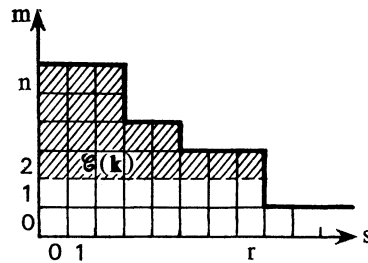
et

$$(t_s \mathbf{k})^{(q)} = \mathbf{k}^{(q)} \quad \text{pour } 1 \leq s \leq |\mathbf{k}| \text{ et } 1 \leq q \leq q_{\mathbf{k}}(s).$$

(g) LES TABLEAUX ASSOCIÉS A UN SYMBOLE. — Soient p et n des entiers supérieurs ou égaux à 1 et \mathbf{k} un symbole de hauteur n .

Soient ρ, χ, r, t et t' les applications et les nombres associés à \mathbf{k} [cf. (c)].

1° *Définitions générales.* — On désigne par $\mathcal{C}(\mathbf{k})$ l'ensemble des points (s, m) de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ tels que $\mathbf{k} (|\mathbf{k}|) \leq m \leq \mathbf{k}(s)$.



On désigne par $\hat{\mathcal{F}}(p, \mathbf{k})$ l'ensemble des applications de $\mathcal{C}(\mathbf{k})$ dans \mathbf{N} satisfaisant aux conditions suivantes :

$$\begin{cases} 1 \leq \psi(0, m) \leq p & \text{si } \chi(t) \leq m \leq n \\ \text{et} \\ 1 \leq \psi(s, m) \leq n & \text{si } (s, m) \in \mathcal{C}(\mathbf{k}) \text{ et } 1 \leq s. \end{cases}$$

On pose :

$$\hat{\mathcal{F}}(p, n) = \{\emptyset\} \cup \left(\bigcup_{\mathbf{k} \in \mathcal{S}_n} \hat{\mathcal{F}}(p, \mathbf{k}) \right)$$

et

$$\hat{\mathcal{F}}^*(p, n) = \{\emptyset\} \cup \left(\bigcup_{\mathbf{k} \in (\mathcal{S}_n - \{\mathbf{e}_n\})} \hat{\mathcal{F}}(p, \mathbf{k}) \right).$$

DÉFINITION. — Un élément de $\hat{\mathcal{F}}(p, \mathbf{k})$ s'appelle un *tableau de type* (p, \mathbf{k}) . L'ensemble vide sera lui aussi appelé *tableau* bien que n'étant pas de type (p, \mathbf{l}) quel que soit $\mathbf{l} \in \mathcal{S}_n$. Les éléments de $\hat{\mathcal{F}}(p, n)$ seront appelés des (p, n) -tableaux.

Soit ψ un élément de $\hat{\mathcal{F}}(p, \mathbf{k})$ et soit m un entier tel que $\mathbf{k}(|\mathbf{k}|) \leq m \leq n$. On désigne par $\mathbf{r}_m : \{0, 1, \dots, \rho(m)\} \rightarrow \mathbf{N}$ l'application définie en posant $\mathbf{r}_m \psi(s) = \psi(s, m)$ pour $0 \leq s \leq \rho(m)$. On l'appelle la *ligne d'indice* m du tableau ψ .

C'est un élément de $\{1, \dots, p\} \times \{1, \dots, n\}^{\rho(m)}$ noté

$$(j_m; l_m) \quad (j_m \in \{1, \dots, p\}; l_m \in \{1, \dots, n\}^{\rho(m)}).$$

Grâce à ces conventions, le tableau ψ pourra être noté

$$\psi = (\mathbf{r}_n \psi, \mathbf{r}_{n-1} \psi, \dots, \mathbf{r}_{\mathbf{k}(|\mathbf{k}|)} \psi)$$

ou encore

$$\psi = ((j_n; l_n), (j_{n-1}; l_{n-1}), \dots, (j_{\mathbf{k}(|\mathbf{k}|)}; l_{\mathbf{k}(|\mathbf{k}|)})).$$

Lorsque $t \neq t'$, la restriction à $\{0, \dots, |\mathbf{k}|-1\}$ de la dernière ligne $\mathbf{r}_{\mathbf{k}(|\mathbf{k}|)} \psi$ du tableau ψ sera notée $\mathbf{tr}_{\mathbf{k}(|\mathbf{k}|)} \psi$ (*ligne tronquée*)

2° Restrictions d'un tableau. — Soit $\psi \in \hat{\mathcal{F}}(p, \mathbf{k})$. Quel que soit $(s, m) \in \mathcal{C}(\mathbf{k})$, on définit l'application $\mathbf{t}_{s, m} \psi : \mathcal{C}(\mathbf{t}_s \mathbf{k}) \rightarrow \mathbf{N}$ en posant

$$\begin{cases} \mathbf{t}_{s, m} \psi(s', \mathbf{k}(s)) = \psi(s', m) & \text{pour } 0 \leq s' \leq s \\ \text{et} \\ \mathbf{t}_{s, m} \psi(s', m') = \psi(s', m') & \text{lorsque } (s', m') \in \mathcal{C}(\mathbf{k}) \text{ et } m' \geq \mathbf{k}(s) + 1. \end{cases}$$

C'est un tableau de type $(p, \mathbf{t}_s \mathbf{k})$ et l'on a $\mathbf{t}_{\mathbf{k}|\mathbf{k}, \mathbf{k}(|\mathbf{k}|)} \psi = \psi$.

3° q -ième dérivé d'un tableau de type (p, \mathbf{k}) . — On suppose que $\mathbf{k} \neq \mathbf{e}_m$.

Soient q un entier tel que $1 \leq q \leq t$ et ψ un tableau de type (p, \mathbf{k}) .

On désigne par $\psi^{(q)}$ le tableau de type $(p, \mathbf{k}^{(q)})$ défini en posant

$$\psi^{(q)}(s, m) = \begin{cases} \psi(s, m) & \text{si } (s, m) \in \mathcal{C}(\mathbf{k}) \cap \mathcal{C}(\mathbf{k}^{(q)}) \\ \text{et} \\ \chi(q) + 1 & \text{si } (s, m) = (r(q-1) + 1, \chi(q) + 1). \end{cases}$$

En outre, on désigne par $\psi^{(0)}$ le tableau vide.

Remarquons qu'avec ces conventions, même lorsque $t = 0$ (c'est-à-dire lorsque \mathbf{k}' n'est pas défini) $\psi^{(t)}$ est encore défini.

Soit $\hat{\mathcal{F}}'(p, \mathbf{k})$ le sous-ensemble de $\hat{\mathcal{F}}(p, \mathbf{k}')$ formé des éléments ψ' tels que

$$\psi'(|\mathbf{k}'|, \mathbf{k}'(|\mathbf{k}'|)) = \mathbf{k}'(|\mathbf{k}'|),$$

lorsque \mathbf{k}' est défini et l'ensemble réduit au tableau vide, lorsque \mathbf{k}' n'est pas défini. Alors, lorsque $0 \leq q \leq t$ on a $\psi^{(q)} \in \hat{\mathcal{F}}'(p, \mathbf{t}_{r(q)}\mathbf{k})$. Si $\psi' \in \hat{\mathcal{F}}'(p, \mathbf{k})$ et si $\psi \in \hat{\mathcal{F}}(p, \mathbf{k})$ est tel que $\psi^{(t)} = \psi'$, on dit que ψ est subordonné à ψ' .

Pour déterminer un tableau ψ de type (p, \mathbf{k}) subordonné à ψ' , il suffit de se donner la dernière ligne $\mathbf{r}_{\mathbf{k}(|\mathbf{k}|)} \psi = (j; l)$ de ψ (où $j \in \{1, \dots, p\}$ et $l \in \{1, \dots, n\}^{|\mathbf{k}|}$). Le tableau ψ ainsi défini sera noté $(\psi'; j, l)$.

L'ensemble des tableaux ψ de type (p, \mathbf{k}) subordonnés au tableau ψ' sera noté $\hat{\mathcal{R}}(\psi', |\mathbf{k}|)$.

L'ensemble des tableaux ψ de type (p, \mathbf{k}) subordonnés au tableau ψ' et dont la restriction de la dernière ligne à $\{1, \dots, |\mathbf{k}|\}$ est décroissante et inférieure ou égale à la restriction de \mathbf{k} à ce même ensemble, sera noté $\hat{\mathcal{R}}_{\text{dec}}(\psi', |\mathbf{k}|)$.

Soit maintenant m un entier tel que $\mathbf{k}(|\mathbf{k}|) \leq m \leq n$, et ψ un tableau de type (p, \mathbf{k}) . On désigne par $\mathbf{g}_m \psi$ le tableau de type $(p, \mathbf{g}_m \mathbf{k})$ défini en posant

$$\mathbf{g}_{\mathbf{k}(|\mathbf{k}|)} \psi = \psi$$

et

$$\mathbf{g}_m \psi(s, m') = \begin{cases} \psi(s, m') & \text{si } (s, m') \in \mathcal{C}(\mathbf{k}) \cap \mathcal{C}(\mathbf{g}_m \mathbf{k}), \\ m & \text{si } (s, m') = (\rho(m) + 1, m), \end{cases}$$

lorsque $\mathbf{k}(|\mathbf{k}|) + 1 \leq m \leq n$. En outre, on convient que $\mathbf{g}_{n+1} \psi$ est le tableau vide.

Avec ces conventions, on a $\psi^{(q)} = \mathbf{g}_{\chi(q)+1} \psi$ lorsque $1 \leq q \leq t$.

On a de même, quel que soit $(s, m) \in \mathcal{C}(\mathbf{k})$:

$$(\mathbf{t}_{s, m} \psi)^{(t(\mathbf{t}_s \mathbf{k}))} = \mathbf{g}_{\mathbf{k}(s)+1} \psi = \psi^{(q_{\mathbf{k}}(s))}$$

et

$$(\mathbf{t}_{s, m} \psi)^{(q)} = \psi^{(q)} \quad \text{pour } 1 \leq s \leq |\mathbf{k}| \quad \text{et } 0 \leq q \leq q_{\mathbf{k}}(s) - 1$$

[où l'application $q_{\mathbf{k}}$ a été définie au (f)].

Enfin, soient $m_1 \in \mathbb{N}^*$ et $m_2 \in \{1, \dots, n\}$; soient m' et m'' des entiers pour lesquels il existe q tel que $1 \leq q \leq t'$ et $\chi(q) + 1 \leq m' \leq m'' \leq \chi(q-1)$, ou encore tels que $\mathbf{k}(|\mathbf{k}|) \leq m' \leq m'' \leq \chi(t')$. On définit une application $\mathbf{c}_{m_1, m_2}^{m', m''} \psi$ de $\mathcal{C}(\mathbf{g}_{m''} \mathbf{k})$ dans \mathbb{N}^* en posant

$$\mathbf{c}_{m_1, m_2}^{m', m''} \psi(s, m) = \begin{cases} \psi(s, m) & \text{lorsque } m' + 1 \leq m \leq n, \\ \psi(s, m') & \text{lorsque } 0 \leq s \leq |\mathbf{g}_{m''} \mathbf{k}| - 2 \quad \text{et } m = m'', \\ m_1 & \text{lorsque } (s, m) = (|\mathbf{g}_{m''} \mathbf{k}| - 1, m''), \\ m_2 & \text{lorsque } (s, m) = (|\mathbf{g}_{m''} \mathbf{k}|, m''). \end{cases}$$

Lorsque $|\mathbf{k}| = 1$ et $m_1 \in \{1, \dots, p\}$ (resp. $|\mathbf{k}| \geq 2$ et $m_1 \in \{1, \dots, n\}$) l'application $\mathbf{c}_{m_1, m_2}^{m', m''} \psi$ est un tableau de type $(p, \mathbf{g}_{m''} \mathbf{k})$.

Pour simplifier l'écriture, on pose

$$\mathbf{c}_{m_1, m_2}^{m', m''} \psi = \begin{cases} \mathbf{c}_{m_1, m_2}^{m''} \psi & \text{lorsque } m'' = \chi(t'), \\ \mathbf{c}_{m_2}^{m'} \psi & \text{lorsque } m'' = \chi(t') \text{ et } m_1 = \psi(|\mathbf{k}|-1, m'), \\ \mathbf{c}_{m_2}^{m', m''} \psi & \text{lorsqu'on a} \end{cases}$$

ou bien

$$m' = \mathbf{k}(|\mathbf{k}|) \quad \text{et} \quad m_1 = \psi(|\mathbf{k}|-1, \mathbf{k}(|\mathbf{k}|)),$$

ou bien

$$m' \geq \mathbf{k}(|\mathbf{k}|) + 1 \quad \text{et} \quad m_1 = \psi(\rho(m'), m').$$

Lorsque $t' = t$, on a

$$\psi = \mathbf{c}_{\psi(|\mathbf{k}|), \mathbf{k}(|\mathbf{k}|)}^{\mathbf{k}(|\mathbf{k}|)} \psi$$

et

$$\psi = \mathbf{c}_{\psi(|\mathbf{k}|-1, \mathbf{k}(|\mathbf{k}|)), \psi(|\mathbf{k}|, \mathbf{k}(|\mathbf{k}|))}^{\mathbf{k}(|\mathbf{k}|)} \psi.$$

Lorsque $t' \neq t$, on a

$$\mathbf{g}_{\chi(t')} \psi = \mathbf{c}_{\chi(t')}^{\chi(t')} \psi$$

et

$$\mathbf{g}_{\chi(t')} \psi = \mathbf{c}_{\psi(|\mathbf{k}|-1, \chi(t')), \chi(t')}^{\chi(t')} \psi.$$

4° *Tableaux principaux de type* (p, \mathbf{k}) . — On désigne par $\overline{\mathcal{F}}(p, \mathbf{k})$, le sous-ensemble de $\hat{\mathcal{F}}(p, \mathbf{k})$ formé des éléments satisfaisant aux conditions suivantes :

(i) (majoration des lignes par le symbole \mathbf{k}) :

$$1 \leq \psi(s, m) \leq \mathbf{k}(s) \quad \text{si } 1 \leq s \text{ et } (s, m) \in \mathcal{E}(\mathbf{k}).$$

(ii) (principe d'exclusion) :

Pour tout entier q tel que $1 \leq q \leq t$,

tout entier m tel que $\chi(q) \leq m \leq \chi(q)$,

tout entier m' tel que $\chi(q)+1 \leq m' \leq \chi(q-1)$,

la restriction de $\mathbf{r}_m \psi$ à l'ensemble $\{0, 1, \dots, \chi(q-1)\}$ est distincte de l'application $\mathbf{r}_m \psi$.

En outre, les restrictions de l'application $m \rightarrow \mathbf{r}_m \psi$ aux ensembles

$$\{\chi(q)+1, \dots, \chi(q-1)\} \quad (1 \leq q \leq t)$$

sont injectives.

(iii) (ordre du dictionnaire de rimes sur les lignes) :

Les restrictions de l'application $m \rightarrow \mathbf{r}_m \psi$ aux ensembles

$$\{\chi(q)+1, \dots, \chi(q-1)\} \quad (1 \leq q \leq t)$$

sont croissantes pour l'ordre lexicographique de l'ensemble

$$\{1, \dots, p\} \times \{1, \dots, n\}^{r(q-1)}$$

dont on a pris les facteurs dans l'ordre opposé de l'ordre naturel [ordre du dictionnaire de rimes; comparer avec (b) ci-dessus].

(iv) (décroissance des lignes) :

$$\psi(s, m) \geq \psi(s+1, m) \quad \text{si } 1 \leq s \text{ et } (s+1, m) \in \mathcal{E}(\mathbf{k}).$$

(v) (principe de régularité) :

$$\psi(s, m) \geq \mathbf{k}(\rho(m)+1)+1 = \chi(q)+1$$

si

$$1 \leq s \leq \rho(m) = r(q-1), \quad \chi(q)+1 \leq m \leq \chi(q-1) \quad \text{et} \quad 1 \leq q \leq t.$$

Observons que si $\psi \in \overline{\mathcal{F}}(p, \mathbf{k})$ alors, quel que soit $(s, m) \in \mathcal{C}(\mathbf{k})$, $\mathbf{t}_{s,m} \psi \in \overline{\mathcal{F}}(p, \mathbf{t}_s \mathbf{k})$.

DÉFINITION. — Lorsque $\mathbf{k} \neq \mathbf{e}_n$, un élément de $\overline{\mathcal{F}}(p, \mathbf{k})$ s'appelle un *tableau principal de type* (p, \mathbf{k}) .

Lorsque $\mathbf{k} = \mathbf{e}_n$, l'ensemble $\overline{\mathcal{F}}(p, \mathbf{k})$ possède p tableaux qui ne sont pas dits principaux.

Observons que les conditions (i) et (iv) expriment que la ligne d'indice m d'un tel tableau est donnée par un couple $(j; \mathbf{l})$ où $j \in \{1, 2, \dots, p\}$ et \mathbf{l} est un symbole inférieur ou égal à \mathbf{k} de longueur $\rho(m)$. Avec les conventions du (b) ci-dessus, on a donc $\mathbf{r}_m \psi \in \mathcal{S}_n^p(\rho(m))$.

Pour qu'il existe des tableaux principaux de type (p, \mathbf{k}) , il faut et il suffit que $\mathbf{k}(1) \geq \max(n-p+1, 1)$ [comparer avec les conditions (1) du (e)]. Un tableau de type (p, \mathbf{k}) ($\mathbf{k} \neq \mathbf{e}_n$) sera dit *non trivial* s'il satisfait aux conditions (i) et (ii); s'il satisfait en outre à la condition (iii) on dira qu'il est *ordonné*.

5° Tableaux réguliers. — On désigne par $\tilde{\mathcal{F}}(p, \mathbf{k})$ le sous-ensemble de $\hat{\mathcal{F}}(p, \mathbf{k})$ formé des éléments ψ satisfaisant aux conditions (i), (ii), (iii) et (iv) des tableaux principaux ainsi qu'aux conditions (iii'), (v') et (v'') qu'on énonce maintenant.

(iii') Lorsque $t \neq t'$ la restriction $\mathbf{tr}_{\mathbf{k}(|\mathbf{k}|)} \psi$ de $\mathbf{r}_{\mathbf{k}(|\mathbf{k}|)} \psi$ à l'ensemble $\{0, 1, \dots, |\mathbf{k}|-1\}$ est strictement inférieure à $\mathbf{r}_{\chi(t)+1} \psi$ pour l'ordre du dictionnaire de rimes de $\mathcal{S}_n^p(r(t-1))$ [cf. (b)].

$$(v') \quad \left\{ \begin{array}{l} \psi(s, m) \geq \mathbf{k}(\rho(m)+1)+1 = \chi(q)+1 \\ \text{si} \\ 1 \leq s \leq \rho(m) = r(q-1), \quad \chi(q)+1 \leq m \leq \chi(q-1) \quad \text{et} \quad 1 \leq q \leq t'. \end{array} \right.$$

$$(v'') \quad \left\{ \begin{array}{l} \psi(s, m) \geq \mathbf{k}(|\mathbf{k}|) \\ \text{si} \\ (s, m) \in \mathcal{C}(\mathbf{k}), \quad 1 \leq s \quad \text{et} \quad \mathbf{k}(|\mathbf{k}|) \leq m \leq \chi(t'). \end{array} \right.$$

Observons que les conditions (i) et (v'') impliquent que

$$\psi(|\mathbf{k}|, \mathbf{k}(|\mathbf{k}|)) = \mathbf{k}(|\mathbf{k}|).$$

On pose

$$\tilde{\mathcal{F}}(p, n) = \{\emptyset\} \cup \left(\bigcup_{\mathbf{k} \in \mathcal{S}_n} \tilde{\mathcal{F}}(p, \mathbf{k}) \right)$$

et

$$\tilde{\mathcal{F}}^*(p, n) = \{\emptyset\} \cup \left(\bigcup_{\mathbf{k} \in (\mathcal{S}_n - \{\mathbf{e}_n\})} \tilde{\mathcal{F}}(p, \mathbf{k}) \right).$$

DÉFINITION. — Lorsque $\mathbf{k} \neq \mathbf{e}_n$, un élément de $\tilde{\mathcal{F}}(p, \mathbf{k})$ s'appelle un *tableau régulier de type* (p, \mathbf{k}) .

Lorsque $\mathbf{k} = \mathbf{e}_n$ l'ensemble $\mathcal{F}(p, \mathbf{k})$ possède p tableaux qui ne sont pas dits réguliers. En revanche, le tableau vide sera dit régulier. En résumé, un tableau régulier est un élément de $\tilde{\mathcal{F}}^*(p, n)$.

6° Structures d'ordre sur $\tilde{\mathcal{F}}(p, \mathbf{k})$. — Comme on l'a remarqué plus haut, si $m \in \{\chi(q)+1, \dots, \chi(q-1)\}$ pour $1 \leq q \leq t$ quel que soit $\psi \in \tilde{\mathcal{F}}(p, \mathbf{k})$ la ligne $\mathbf{r}_m \psi$ appartient à l'ensemble $\mathcal{S}_n^p(r(q-1))$ sur lequel on a défini au (b) une structure d'ordre usuel et une structure lexicographique dite « du dictionnaire de rimes » (notées respectivement \leq et \prec).

De même, la dernière ligne $\mathbf{r}_{\mathbf{k}(|\mathbf{k}|)} \psi$ appartient à $\mathcal{S}_n^p(|\mathbf{k}|)$.

Sur $\tilde{\mathcal{F}}(p, \mathbf{k})$ on définit les deux structures d'ordre suivant : quels que soient ψ_1 et ψ_2 appartenant à $\tilde{\mathcal{F}}(p, \mathbf{k})$ on pose

$$\psi_1 = (\mathbf{r}_n \psi_1, \mathbf{r}_{n-1} \psi_1, \dots, \mathbf{r}_{\mathbf{k}(|\mathbf{k}|)} \psi_1)$$

et

$$\psi_2 = (\mathbf{r}_n \psi_2, \mathbf{r}_{n-1} \psi_2, \dots, \mathbf{r}_{\mathbf{k}(|\mathbf{k}|)} \psi_2).$$

On dit que ψ_1 est inférieur ou égal à ψ_2 pour l'ordre usuel de $\tilde{\mathcal{F}}(p, \mathbf{k})$ et on écrit $\psi_1 \leq \psi_2$ si, quel que soit $m \in \{\mathbf{k}(|\mathbf{k}|), \dots, n\}$, on a $\mathbf{r}_m \psi_1 \leq \mathbf{r}_m \psi_2$. C'est une relation d'ordre non total.

On dit que ψ_1 est inférieur ou égal à ψ_2 pour l'ordre lexicographique de $\tilde{\mathcal{F}}(p, \mathbf{k})$ et on écrit $\psi_1 \prec \psi_2$ si, $\psi_1 = \psi_2$ ou si, en désignant par m_0 le plus grand entier de $\{\mathbf{k}(|\mathbf{k}|), \dots, n\}$ tel que $\mathbf{r}_{m_0} \psi_1 \neq \mathbf{r}_{m_0} \psi_2$ on a $\mathbf{r}_{m_0} \psi_1 \prec \mathbf{r}_{m_0} \psi_2$ (pour l'ordre du dictionnaire de rimes).

Cette relation définit sur $\tilde{\mathcal{F}}(p, \mathbf{k})$ une relation d'ordre total moins fine que la précédente.

7° Tableaux régularisables. — Un tableau de $\hat{\mathcal{F}}^*(p, n)$ satisfaisant seulement aux conditions (i), (ii), (iv), (v') et (v'') sera dit régularisable.

Il est clair que si $\mathbf{k} \neq \mathbf{e}_n$ et si ψ est un tableau régularisable de type (p, \mathbf{k}) il existe une permutation unique des lignes $\mathbf{r}_m \psi$ (pour $m \in \{\mathbf{k}(|\mathbf{k}|)+1, \dots, n\}$) et au besoin de la ligne tronquée $\mathbf{tr}_{\mathbf{k}(|\mathbf{k}|)} \psi$ [définie au (g), 1° ci-dessus] rendant le tableau ψ régulier. Ainsi modifié, le tableau ψ sera noté $\bar{\psi}$ et appelé le régularisé de ψ .

8° Tableaux principaux subordonnés à un tableau régulier. — On observera qu'un tableau régulier n'est pas en général principal : pour qu'un tableau régulier ψ de type (p, \mathbf{k}) soit principal, il suffit par exemple que $t = t'$. De même, un tableau principal n'est pas en général régulier : pour qu'un tableau principal ψ soit régularisable, il faut et il suffit que $\psi(|\mathbf{k}|, \mathbf{k}(|\mathbf{k}|)) = \mathbf{k}(|\mathbf{k}|)$, mais lorsque $t \neq t'$, on ne peut en déduire que ψ est régulier.

Cependant, si ψ est un tableau principal de type (p, \mathbf{k}) , le tableau $\psi^{(q)}$ est un tableau régulier [de type $(p, \mathbf{k}^{(q)})$ pour $1 \leq q \leq t$ et le tableau vide pour $q = 0$]. En revanche, si $m \in \{\mathbf{k}(|\mathbf{k}|)+1, \dots, n\}$ est différent de $\chi(q)+1$ pour $1 \leq q \leq t$, le tableau $\mathbf{g}_m \psi$ n'est pas en général un tableau régulier.

Désignons par $\overline{\mathcal{F}'}(p, \mathbf{k})$ l'ensemble $\tilde{\mathcal{F}}(p, \mathbf{k}')$ des tableaux réguliers de type (p, \mathbf{k}') lorsque \mathbf{k}' est défini et l'ensemble réduit au tableau vide lorsque \mathbf{k}' n'est pas défini. Si $\psi' \in \overline{\mathcal{F}'}(p, \mathbf{k})$, on a, comme plus haut, une notion de tableau principal *subordonné* au tableau ψ' . Lorsque ψ' est régulier, on désigne par $\overline{\mathcal{R}}(\psi', |\mathbf{k}|)$ l'ensemble des tableaux principaux de type (p, \mathbf{k}) subordonnés à ψ' . On a le lemme suivant dont la démonstration est immédiate.

LEMME. — Soient p et n des entiers supérieurs ou égaux à 1 et \mathbf{k} un symbole de hauteur n satisfaisant à la condition

$$(1) \quad \begin{cases} \mathbf{k}(s) = n - p & \text{pour } 1 \leq s \leq |\mathbf{k}| \\ \text{ou bien} \\ n - p + 1 \leq \mathbf{k}(1) \end{cases}$$

et soit ψ' un élément de $\overline{\mathcal{F}'}(p, \mathbf{k})$. Alors l'ensemble $\overline{\mathcal{R}}(\psi', |\mathbf{k}|)$ des tableaux principaux de type (p, \mathbf{k}) subordonnés à ψ' possède $v'(p, \mathbf{k})$ éléments [où l'entier $v'(p, \mathbf{k})$ a été défini au (e)]. Lorsque la condition (1) est violée, l'ensemble $\overline{\mathcal{R}}(\psi', |\mathbf{k}|)$ est vide.

CONVENTION. — Les $v'(p, \mathbf{k})$ lignes $\mathbf{r} = (j; \mathbf{l}) \in \mathcal{S}_n^p(|\mathbf{k}|)$ [où $j \in \{1, \dots, p\}$ et $\mathbf{l} \in \mathcal{S}_n(|\mathbf{k}|)$] qui définissent les $v'(p, \mathbf{k})$ éléments de $\overline{\mathcal{R}}(\psi', |\mathbf{k}|)$ seront rangées par ordre croissant pour l'ordre du dictionnaire de rimes de $\mathcal{S}_n^p(|\mathbf{k}|)$ [cf. (b)].

Ainsi rangées, ces lignes seront respectivement notées

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(1, \psi') &= (j(1, \psi'); \mathbf{l}(1, \psi')), \\ \mathbf{r}(2, \psi') &= (j(2, \psi'); \mathbf{l}(2, \psi')), \\ &\dots\dots\dots \\ \mathbf{r}(v', \psi') &= (j(v', \psi'); \mathbf{l}(v', \psi')) \end{aligned}$$

[où l'on a posé $v' = v'(p, \mathbf{k})$].

L'ensemble des lignes $\mathbf{r}(h, \psi')$ [$1 \leq h \leq v'(p, \mathbf{k})$] sera noté $\overline{\mathcal{L}}(\psi', |\mathbf{k}|)$: c'est un sous-ensemble de l'ensemble $\mathcal{S}_n^p(|\mathbf{k}|)$.

9° *Action d'une permutation sur un tableau.* — Soit G_n le groupe des permutations de l'ensemble $\{1, \dots, n\}$. Quels que soient $\sigma \in G_n$ et $\psi \in \hat{\mathcal{F}}(p, \mathbf{k})$ (où $\mathbf{k} \in \mathcal{S}_n$). On définit le tableau $\sigma\psi$ en posant

$$\sigma\psi(0, m) = \psi(0, m) \quad \text{pour } \mathbf{k}(|\mathbf{k}|) \leq m \leq n$$

et

$$\sigma\psi(s, m) = \sigma(\psi(s, m)) \quad \text{pour tout } (s, m) \in \mathcal{C}(\mathbf{k}) \quad (s \geq 1).$$

10° *Tableaux condensés.* — Soit ψ un tableau de type (p, \mathbf{k}) ($\mathbf{k} \neq \mathbf{e}_n$) dont la dernière ligne est décroissante en restriction à \mathbf{N}^* . Conformément à une observation faite plus haut, on peut écrire :

$$\mathbf{r}_{\mathbf{k}(|\mathbf{k}|)}\psi = (j; \mathbf{l}) \in \mathcal{S}_n^p(|\mathbf{k}|) \quad [\text{où } 1 \leq j \leq p \text{ et } \mathbf{l} \in \mathcal{S}_n(|\mathbf{k}|)].$$

On suppose que $l \leq k$. On dit alors que ψ est *condensable*. On dira que ψ est *condensé* si en outre l prend toutes les valeurs comprises entre $l(|k|)$ et $k(|k|)$, c'est-à-dire si $v_{k(|k|)+1} \mathbf{l} \in \mathcal{S}^*(k(|k|), |k|)$ [symbole condensé, cf. (a) et (d)].

Pour tout tableau ψ tel que

$$r_{k(|k|)} \psi = (j; \mathbf{l}) \in \mathcal{S}_n^p(|k|) \quad \text{avec } l \leq k$$

(et en particulier pour tout tableau principal), soit $\sigma_\psi \in G_n$ la permutation qui induit l'identité sur $\{k(|k|)+1, \dots, n\}$ et telle que les $\sigma_\psi(1), \dots, \sigma_\psi(h)$ soient respectivement égaux aux h éléments de l'ensemble $\{1, \dots, k(|k|)\}$ n'appartenant pas à l'image de l (rangés dans l'ordre croissant) et que les $\sigma_\psi(h+1), \dots, \sigma_\psi(k(|k|))$ soient respectivement égaux aux valeurs [inférieures ou égales à $k(|k|)$] de l rangées par ordre croissant.

Alors le tableau $\sigma_\psi^{-1} \psi$ est condensé.

Avec les notations du (h) ci-dessous, la restriction à l'ensemble $\{1, \dots, k(|k|)\}$ de la permutation σ_ψ est égale à la permutation $\sigma^{-1} [v_{k(|k|)+1} \mathbf{l}] \in G_{k(|k|)}$.

Soit $\psi' \in \hat{\mathcal{F}}'(p, k)$ [resp. $\psi' \in \overline{\mathcal{F}}'(p, k)$]. On désigne par $\hat{\mathcal{R}}_{cn}(\psi', |k|)$ [resp. par $\overline{\mathcal{R}}_{cn}(\psi', |k|)$] l'ensemble des tableaux [resp. des tableaux principaux] condensés de type (p, k) subordonnés à ψ' . De même, on désigne par $\hat{\mathcal{R}}_{acc}(\psi', |k|)$ [resp. par $\overline{\mathcal{R}}(\psi', |k|)$] l'ensemble des tableaux [resp. des tableaux principaux] condensables de type (p, k) subordonnés à ψ' .

Soit $\sigma \in G_n$; on désigne par $G(\sigma; k(|k|)+1, \dots, n)$ l'ensemble des permutations $\bar{\sigma} \in G_n$ qui coïncident avec σ en restriction à l'ensemble $\{k(|k|)+1, \dots, n\}$.

11° *Déploiement d'un tableau condensé.* — Soit ψ un tableau condensé. Comme plus haut, on pose

$$r_{k(|k|)} \psi = (j; \mathbf{l}) \in \mathcal{S}_n^p(|k|).$$

On désigne par $\tilde{\psi}$ le tableau de type $(p, u^{k(|k|)-1(|k|)} k)$ [cf. (d)] dont les lignes sont définies en posant

$$\begin{aligned} r_m \tilde{\psi} &= r_m \psi && \text{lorsque } k(|k|)+1 \leq m \leq n, \\ r_m \tilde{\psi} &= (j; d_m \mathbf{l}) && \text{lorsque } l(|k|)+1 \leq m \leq k(|k|) \end{aligned}$$

et

$$r_{l(|k|)} \tilde{\psi} = (j; \mathbf{l}).$$

Le tableau $\tilde{\psi}$ s'appelle le *déploiement* de ψ . Lorsque $l(|k|) = k(|k|)$, on a $\tilde{\psi} = \psi$. On remarquera que cette condition est automatiquement vérifiée lorsque $k(|k|) = 1$.

Lorsque ψ est principal $\tilde{\psi}$ est régularisable. On dit alors que c'est le *déploiement régularisable* de ψ .

(h) MULTIPLICATION DES SYMBOLES. — Lorsque n et r sont des entiers, on convient d'identifier l'ensemble $\mathcal{S}_n(r)$ à l'ensemble des orbites de l'ensemble $\mathcal{E}_n(r) = \{1, \dots, n\}^{X_r}$ des applications de $X_r = \{1, \dots, r\}$ dans $\{1, \dots, n\}$ sous l'action du groupe des permutations de X_r .

Si r et r' appartiennent à \mathbf{N} la juxtaposition [c'est-à-dire la loi de composition sur le monoïde libre non commutatif à n lettres $\mathcal{E}_n = \bigcup_{r \in \mathbf{N}} \mathcal{E}_n(r)$] définit une application de $\mathcal{E}_n(r) \times \mathcal{E}_n(r')$ à valeurs dans $\mathcal{E}_n(r+r')$ qui induit par passage au quotient une loi de composition de $\mathcal{S}_n(r) \times \mathcal{S}_n(r')$ dans $\mathcal{S}_n(r+r')$. On munit ainsi $\mathcal{S}_n = \bigcup_{r \in \mathbf{N}} \mathcal{S}_n(r)$ d'une loi de monoïde commutatif notée multiplicativement dont l'unité est la suite e_n de hauteur n et de longueur nulle. On désigne par $\Phi : \mathcal{E}_n \rightarrow \mathcal{S}_n$ l'homomorphisme canonique du monoïde \mathcal{E}_n sur \mathcal{S}_n qui applique l'élément unité e_n de \mathcal{E}_n sur e_n . Observons que la longueur, notée $|\cdot|$ dans les deux cas, est un homomorphisme de monoïde respectant les éléments neutres qui applique \mathcal{E}_n (resp. \mathcal{S}_n) sur le monoïde additif \mathbf{N} .

Pour tout $\mathbf{k} \in \mathcal{S}_n$ et tout $m \in \{0, \dots, n\}$ on se permettra de noter $\mathbf{k}.m$ (ou encore $\mathbf{k}m$) la composée du symbole \mathbf{k} et du symbole $\mathbf{l} \in \mathcal{S}_n$ de longueur inférieure ou égale à 1 défini par $\mathbf{l}(1) = m$. Avec ces conventions, lorsque $t \geq 1$, on a

$$\mathbf{k}^{(q)} = t_{r(q)} \mathbf{k}.(\mathbf{k}(r(q)+1)+1)$$

et

$$\mathbf{uk} = t\mathbf{k}.(\mathbf{k}(|\mathbf{k}|-1)) \quad [\text{cf. } (f) \text{ et } (d) \text{ de ce chapitre}].$$

De façon analogue, on sera parfois amené à écrire \mathbf{k} sous la forme $\mathbf{k}(\sigma(1)) \dots \mathbf{k}(\sigma(|\mathbf{k}|))$ où σ désigne une permutation de $\{1, \dots, |\mathbf{k}|\}$ [cf. (j)].

En outre, grâce à l'identification précédente, on voit que l'action du groupe G_n des permutations de l'ensemble $\{1, \dots, n\}$ sur le monoïde unitaire \mathcal{E}_n est compatible avec Φ et définit donc une action de G_n sur \mathcal{S}_n . L'action d'une permutation $\sigma \in G_n$ sur $\mathbf{k} \in \mathcal{S}_n$ sera notée $\sigma.\mathbf{k}$ (ou encore $\sigma\mathbf{k}$). On a les relations suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma e_n = e_n, \\ \sigma.(\mathbf{k}\mathbf{l}) = (\sigma\mathbf{k}).(\sigma\mathbf{l}) \quad \text{pour tout } \mathbf{k} \in \mathcal{S}_n \text{ et tout } \mathbf{l} \in \mathcal{S}_n, \end{array} \right.$$

qui expriment que le groupe G_n s'identifie à un sous-groupe du groupe des automorphismes du monoïde unitaire \mathcal{S}_n . En outre, on a $|\sigma\mathbf{k}| = |\mathbf{k}|$.

Exemple. — Si l'entier n est supérieur ou égal à 2, si la permutation σ est telle que, $\sigma(1) = 2$ et $\sigma(2) = 1$ et si $\mathbf{k} = (2, 1, 1)$ alors $\sigma\mathbf{k} = (2, 2, 1)$.

Remarquons que l'action de G_n n'est compatible avec aucune des structures et applications définies aux paragraphes (b) à (f), à l'exception près suivante :

Soit $\mathbf{k} \in \mathcal{S}_n$ et soit $m \geq 1$ un entier pour lequel il existe $s \in \mathbf{N}^*$ tel que $\mathbf{k}(s) = m$. Le symbole $\mathbf{d}_m \mathbf{k}$ défini au (d) est l'unique symbole $\mathbf{l} \in \mathcal{S}_n$ tel que $\mathbf{l}.m = \mathbf{k}$. Par conséquent, quelle que soit la permutation $\sigma \in G_n$ pour que $\sigma(\mathbf{d}_m \mathbf{k})$ soit défini, il faut et il suffit que $\mathbf{d}_m \mathbf{k}$ le soit; on a alors

$$\sigma(\mathbf{d}_m \mathbf{k}) = \mathbf{d}_{\sigma(m)}(\sigma\mathbf{k}).$$

A tout symbole $\mathbf{k} \in (\mathcal{S}_n - \{e_n\})$, on associe l'unique permutation $\sigma[\mathbf{k}] \in G_n$ qui applique l'ensemble A' des valeurs prises par la restriction de \mathbf{k} à \mathbf{N}^* sur l'ensemble

$$A = \begin{cases} \{n-t(\mathbf{k}), \dots, n\} & \text{lorsque } \mathbf{k}(1) = n, \\ \{n-t(\mathbf{k})+1, \dots, n\} & \text{lorsque } \mathbf{k}(1) \neq n, \end{cases}$$

de façon croissante et $\{1, \dots, n\} - A'$ sur $\{1, \dots, n\} - A$ également de façon croissante.

(i) MULTI-INDICES ET SYMBOLES. — Soit $\mathbf{k} \in \mathcal{S}_n$ et ρ l'application associée à \mathbf{k} conformément aux conventions de (c).

On désigne par $\omega_{\mathbf{k}} = (\omega(1), \dots, \omega(n)) \in \mathbb{N}^n$ le multi-indice défini en posant

$$\omega(m) = \begin{cases} \rho(m) - \rho(m+1) & \text{si } 1 \leq m \leq n-1 \\ \text{et} & \\ \rho(n) & \text{si } m = n. \end{cases}$$

On définit ainsi un isomorphisme de monoïde multiplicatif \mathcal{S}_n sur le monoïde additif \mathbb{N}^n . En effet, pour tout $\omega \in \mathbb{N}^n$, l'unique symbole \mathbf{k} (qu'on notera à l'occasion \mathbf{k}_{ω}) tel que $\omega_{\mathbf{k}} = \omega$ est celui dont la suite ρ est donnée par

$$\rho(m) = \sum_{i=m}^n \omega(i).$$

On rappelle que pour tout $\omega = (\omega(1), \dots, \omega(n)) \in \mathbb{N}^n$ on pose

$$|\omega| = \sum_{m=1}^n \omega(m) \quad \text{et} \quad \omega! = \prod_{m=1}^n \omega(m)!$$

et que, si $a = (a_1, \dots, a_n)$ est un système d'objets appartenant à un monoïde multiplicatif commutatif, on pose

$$a^{\omega} = \prod_{m=1}^n (a_m)^{\omega(m)}.$$

De même, pour tout $\mathbf{k} \in \mathcal{S}_n$, nous poserons

$$\mathbf{k}! = \omega_{\mathbf{k}}! = \rho(n)! \prod_{m=1}^{n-1} (\rho(m) - \rho(m+1))! \quad \text{et} \quad a^{\mathbf{k}} = \prod_{s=1}^{|\mathbf{k}|} a_{\mathbf{k}(s)}.$$

On va se servir de ces conventions pour traduire en terme de symboles les calculs classiquement exprimés dans la notation multi-indices.

(j) PASSAGE DU CALCUL INDICIEL AU CALCUL SYMBOLIQUE. — On se borne à étudier les deux situations suivantes :

1° Soient (X, x_0) et (Y, y_0) des germes de variétés de dimensions respectives n et p que l'on supposera de classe \mathcal{C}^{∞} (resp. formelles sur un corps de caractéristique 0, resp. analytiques sur un corps valué, complet, non discret de caractéristique 0).

On désigne par A' l'anneau des germes de fonctions de la variété $X \times Y$ au point (x_0, y_0) et par B le sous-anneau des germes de fonctions ne dépendant que de la variable $y \in Y$. Alors, sur $J^{\infty}((X, x_0); (Y, y_0))$ l'anneau structural s'identifie au moyen d'un système de coordonnées (x^1, \dots, x^n) de X en x_0 et d'un système de coordonnées (y^1, \dots, y^p) de Y en y_0 à l'algèbre $A = A' [y_{\omega}^j]$ des polynômes à coefficients dans A' et à une infinité de variables y_{ω}^j (où $\omega \in \mathbb{N}^n$ est un multi-indice de longueur supérieure ou égale à 1 et j un entier tel que $1 \leq j \leq p$).

Avec ces notations, le jet $j^\infty f(x_0)$ d'un morphisme $f : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ s'écrit :

$$(1) \quad j^\infty f(x_0) = \left(\sum_{|\omega| \geq 1} \frac{y_\omega^j}{\omega!} x^\omega \right)_{j=1, \dots, p} \quad \text{où} \quad y_\omega^j = \frac{\partial^{|\omega|}}{(\partial x)^\omega} f^j(x_0),$$

en désignant par f^j la j -ième composante de f dans le système de coordonnées (y^1, \dots, y^p) .

Si on pose

$$(2) \quad D_i = \frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{\omega \in \mathbb{N}^n} \left(\sum_{j=1}^p y_\omega^j \frac{\partial}{\partial y_\omega^j} \right)$$

[où ω_i désigne le multi-indice $(\underbrace{0, \dots, 0}_{(i-1) \text{ fois}}, 1, \underbrace{0, \dots, 0}_{(n-i) \text{ fois}})$], on définit une dérivation de $A' [y_\omega^j]$

déterminée par les conditions

$$(3) \quad D_i(y_\omega^j) = y_{\omega+\omega_i}^j \quad \text{lorsque} \quad |\omega| \geq 0 \quad \text{et} \quad D_i x_h = \delta_{ih} \quad (\text{symbole de Kronecker}).$$

A tout champ de vecteurs d défini sur (X, x_0) on associe par ce moyen un champ de vecteurs D sur $J^\infty((X, x_0); (Y, y_0))$ d'une façon compatible avec l'action du groupe $\text{Diff}(X, x_0) \times \text{Diff}(Y, y_0)$ (c'est-à-dire indépendamment des coordonnées choisies) vérifiant la propriété de spécialisation suivante :

$$d(\varphi \circ j^\infty f) = (D\varphi) \circ j^\infty f \quad \text{pour tout} \quad \varphi \in A' [y_\omega^j]$$

et pour tout morphisme

$$f : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0) \quad (\text{connexion canonique}).$$

Le sous-A-module \mathcal{D} de l'algèbre $\mathcal{D}(A)$ des dérivations de A engendré par les D_i est une sous-algèbre de Lie car on a $[D_i, D_j] = 0$ lorsque $1 \leq i, j \leq n$.

Observons que les D_i laissent stable le sous-anneau $B [y_\omega^j]_{|\omega| \geq 1}$ de A et qu'en restriction à ce sous-anneau, on a

$$D_i = D_i - \frac{\partial}{\partial x^i} \quad (1 \leq i \leq n)$$

puisque $\partial/\partial x^i$ est nul en restriction à ce sous-anneau.

2° On aboutit à une situation analogue en désignant par A l'anneau des germes de fonctions d'une variété J en un point z . Si on suppose que J est munie d'un feuilletage \mathfrak{F} de codimension p , on désigne par B l'anneau des germes en z de fonctions constantes sur les feuilles de \mathfrak{F} et par y^1, \dots, y^p un système de générateurs différentiables de l'anneau B .

Soit \mathfrak{G} un feuilletage de dimension n .

On désigne par D_1, \dots, D_n des générateurs du A-module \mathcal{D} des germes en z de champs de vecteurs sur J tangents aux feuilles de \mathfrak{G} . On choisit les D_i de façon que $[D_i, D_j] = 0$ (lorsque $1 \leq i, j \leq n$). Dire que \mathfrak{G} est en position générale à l'ordre r par rapport à \mathfrak{F} , c'est affirmer, comme on l'a vu au chapitre I, que les fonctions $D^\omega y^j = y_\omega^j$ [pour $1 \leq |\omega| \leq r$ et $1 \leq j \leq p$ et où D désigne le système (D_1, \dots, D_n)] ont leurs différentielles linéairement indépendantes en z . Soient x^1, \dots, x^N des germes en z de fonctions sur J qui complètent le système des $(y_\omega^j)_{\substack{1 \leq |\omega| \leq r \\ 1 \leq j \leq p}}$ en un système de coordonnées de J en z .

Si A' désigne l'anneau des germes en z de fonctions sur J qui ne dépendent que des x^1, \dots, x^N , alors l'anneau des polynômes $A' [y_{\omega}^j]_{(1 \leq |\omega| \leq r)}$ est un sous-anneau de A et on peut appliquer toutes les constructions qui interviennent dans la suite à cette situation pourvu que r soit assez grand. Comme plus haut, on peut supposer que le couple (j, z) est un germe de variété de classe \mathcal{C}^{∞} (resp. analytique, resp. formelle).

Désormais, nous poserons $y_{\omega_{\mathbf{k}}}^j = z_{\mathbf{k}}^j$ pour tout $\mathbf{k} \in \mathcal{S}_n$; en particulier, nous écrirons z^j au lieu de y^j .

Observons que, avec les notations de (h), pour tout $k \in \mathcal{E}_n(r)$ et toute permutation σ de $\{1, \dots, |k|\}$ on a

$$z_{k(1)\dots k(|k|)}^j = z_{k(\sigma(1))\dots k(\sigma(|k|))}^j.$$

En effet, par définition $k(1) \dots k(|k|)$ est égal au symbole $\Phi(k)$ et par construction on a $\Phi(k) = \Phi(k \circ \sigma)$.

Avec les conventions du paragraphe précédent, les formules (1), (2) et (3) s'écrivent respectivement :

$$(1') \quad j^{\infty} f(x_0) = \left(\sum_{\mathbf{k} \in (\mathcal{S}_n - \{\mathbf{e}_n\})} \frac{z_{\mathbf{k}}^j x^{\mathbf{k}}}{\mathbf{k}!} \right)_{j=1, \dots, p},$$

où

$$z_{\mathbf{k}}^j = \frac{\partial^{|\mathbf{k}|}}{(\partial x)^{\mathbf{k}}} f^j(x_0),$$

$$(2') \quad D_i = \frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{\substack{j=1, \dots, p \\ \mathbf{k} \in \mathcal{S}_n}} z_{\mathbf{k}, i}^j \frac{\partial}{\partial z_{\mathbf{k}}^j},$$

$$(3') \quad D_i z_{\mathbf{k}}^j = z_{\mathbf{k}, i}^j \quad \text{pour tout } \mathbf{k} \in \mathcal{S}_n.$$

Observons que dans les deux situations envisagées les dérivations

$$\frac{\partial}{\partial z_{\mathbf{k}}^j} \quad (\mathbf{k} \in \mathcal{S}_n, \mathbf{k} \neq \mathbf{e}_n \text{ et } 1 \leq j \leq p)$$

jouissent de la propriété

$$\frac{\partial}{\partial z_{\mathbf{k}}^j} z_{\mathbf{l}}^{j'} = \delta_{(j, \mathbf{k}), (j', \mathbf{l})} \quad (\text{symbole de Kronecker})$$

lorsque $\mathbf{l} \in \mathcal{S}_n, \mathbf{l} \neq \mathbf{e}_n$ et $1 \leq j' \leq p$ ce qui indique notamment qu'elles sont linéairement indépendantes sur A . Dans la deuxième situation, il faut également imposer les conditions $|\mathbf{k}| \leq r$ et $|\mathbf{l}| \leq r$.

CHAPITRE III

Jacobiens itérés

(a) EXTENSIONS JACOBIENNES SIMPLES. — Soient m , un entier positif ou nul; A , un anneau commutatif unitaire; B , un sous-anneau de A ; I , un idéal de A ; \mathcal{D} un sous-module du A -module $\mathcal{D}(A)$ des dérivations de A dans lui-même.

NOTATION. — Soient a_1, \dots, a_m des éléments de A ; d_1, \dots, d_m des éléments de \mathcal{D} .
On pose

$$\mathcal{J}(d_1, \dots, d_m; a_1, \dots, a_m) = \det(d_i a_h)_{\substack{i=1, \dots, m \\ h=1, \dots, m}}.$$

DÉFINITION. — On appelle *extension jacobienne de rang m du couple (B, I) par rapport à \mathcal{D}* et on note $\Delta_m(B, I; \mathcal{D})$ l'idéal de A engendré par I et par tous les $a \in A$ de la forme

$$(\star) \quad a = \mathcal{J}(d_1, \dots, d_m; a_1, \dots, a_m),$$

où $d_i \in \mathcal{D}$ et $a_i \in B + I$ pour $1 \leq i \leq m$.

Les éléments de la forme (\star) s'appellent les *m -jacobiens* (ou *jacobiens de rang m*) de $B + I$ par rapport à \mathcal{D} .

Lorsque $B = \{0\}$ et $\mathcal{D} = \mathcal{D}(A)$ on parlera simplement de l'extension jacobienne de rang m de I qu'on notera $\Delta_m(I)$.

Remarque. — L'idéal $\Delta_0(B, I; \mathcal{D})$ est égal à A car il est engendré par l'unique 0-jacobien, appelé *jacobien vide*, égal à l'unité de A .

LEMME 1. — *Sous les hypothèses de ce paragraphe on a*

$$(1) \quad A = \Delta_0(B, I; \mathcal{D}) \supset \Delta_1(B, I; \mathcal{D}) \supset \dots \supset \Delta_{n+1}(B, I; \mathcal{D})$$

et, lorsque \mathcal{D} est engendré comme A -module par n éléments, $\Delta_{n+1}(B, I; \mathcal{D}) = I$.

(2) *Pour tout $m \in \mathbb{N}$ et tout $m' \in \mathbb{N}$ on a*

$$\Delta_m(B, I; \mathcal{D}) \subset \Delta_{m'}(B, \Delta_m(B, I; \mathcal{D}); \mathcal{D})$$

et lorsque $m \in \mathbb{N}^*$ et $m' \in \mathbb{N}^*$:

$$\Delta_{m'}(B, \Delta_m(B, I; \mathcal{D}); \mathcal{D}) / \Delta_m(B, I; \mathcal{D}) \subset \Delta_{m-1}(B, I; \mathcal{D}).$$

(3) *Lorsque $m \in \mathbb{N}^*$ et $m' \in \mathbb{N}^*$ on a*

$$\Delta_{m'}(B, \Delta_m(B, I; \mathcal{D}); \mathcal{D}) \subset \Delta_{m-1}(B, I; \mathcal{D}).$$

(4) *Lorsque $0 \leq m' \leq m-1$:*

$$\Delta_{m'}(B, \Delta_m(B, I; \mathcal{D}); \mathcal{D}) = \Delta_{m'}(B, I; \mathcal{D}).$$

En effet (1) s'obtient de proche en proche à partir de la remarque ci-dessus en appliquant la règle de développement d'un déterminant par rapport à l'une de ses lignes. La formule (2) résulte de la définition des extensions jacobiennes et du fait que tout m' -jacobien formé sur des éléments de $\Delta_m(B, I; \mathcal{D})$ est combinaison linéaire d'éléments de $\Delta_{m-1}(B, I; \mathcal{D})$ en vertu de la règle de dérivation des déterminants. La formule (3) se déduit immédiatement de (1) et de (2). Pour obtenir (4) on remarque que

$$\Delta_{m'}(B, I; \mathcal{D}) \subset \Delta_{m'}(B, \Delta_m(B, I; \mathcal{D}); \mathcal{D}),$$

puis on applique (3) lorsque $m' \geq 1$ et (1) lorsque $m' = 0$.

LEMME 2. — Soient n et p des entiers naturels et K un corps commutatif. On suppose maintenant :

que A est une K -algèbre commutative unitaire;

que B est une sous-algèbre de A qui contient l'unité de A et qui possède un idéal maximal \mathcal{M} engendré par p éléments z^1, \dots, z^p et tel que $B/\mathcal{M} = K$;

que l'idéal I de A est engendré par q éléments $\alpha_1, \dots, \alpha_q$ et que \mathcal{D} est un sous-module du A -module $\mathcal{D}_K(A)$ des dérivations K -linéaires de A dans lui-même engendré par n éléments D_1, \dots, D_n .

Alors $\Delta_m(B, I; \mathcal{D})/\mathcal{M} \cdot \Delta_m(B, I; \mathcal{D})$ est engendré par les α_h ($1 \leq h \leq q$) et par les $C_{p+q}^m \cdot C_n^m$ déterminants de la forme (\star) où les a_j sont pris parmi les α_h et les z^l , les d_i parmi les D_h et où $C_n^m = n!/[m!(n-m)!]$.

Observons qu'on n'a pas supposé que $[D_i, D_h] = 0$ [le crochet désigne la loi d'algèbre de Lie définie sur $\mathcal{D}(A)$].

Démonstration. — L'application $\mathcal{J} : \mathcal{D}^m \times A^m \rightarrow A$ qui associe à tout élément $(d_1, \dots, d_m; a_1, \dots, a_m)$ le jacobien $\mathcal{J}(d_1, \dots, d_m; a_1, \dots, a_m)$ est additive par rapport à chacune des $2m$ variables; de plus elle est A -linéaire par rapport aux m premières variables. En outre pour tout $a_0 \in A$ et tout $i \in \{1, \dots, m\}$ on a

$$(5) \quad \mathcal{J}(d_1, \dots, d_m; a_1, \dots, a_{i-1}, a_0 a_i, a_{i+1}, \dots, a_m) \\ = a_0 \mathcal{J}(d_1, \dots, d_m; a_1, \dots, a_m) + a_i \mathcal{J}(d_1, \dots, d_m; a_1, \dots, a_{i-1}, a_0, a_{i+1}, \dots, a_m),$$

relation qui exprime que \mathcal{J} est un opérateur différentiel par rapport à chacune des variables a_1, \dots, a_m . On déduit de là, immédiatement que $\Delta_m(B, I; \mathcal{D})$ est engendré par $\alpha_1, \dots, \alpha_q$ et par les $a \in A$ de la forme (\star) où les d_i sont pris parmi les D_h ($1 \leq i \leq m, 1 \leq h \leq n$) et où les a_j appartiennent à l'ensemble $B \cup \{\alpha_1, \dots, \alpha_q\}$.

Lorsque dans l'expression de a , l'élément a_i appartient à B on peut supposer qu'il appartient à \mathcal{M} . Ceci résulte du fait que les D_i sont des dérivations K -linéaires. On peut alors écrire a_i sous la forme

$$a_i = \sum_{j=1}^p b_{ij} z^j \quad \text{où } b_{ij} \in B$$

et par suite

$$a = \sum_{j=1}^p (z^j \mathcal{J}(d_1, \dots, d_m; a_1, \dots, a_{i-1}, b_{ij}, a_{i+1}, \dots, a_m) \\ + b_{ij} \mathcal{J}(d_1, \dots, d_m; a_1, \dots, a_{i-1}, z^j, a_{i+1}, \dots, a_m))$$

[en vertu de (5)] ce qui achève la démonstration du lemme 2.

LEMME 3. — Lorsque A, B et \mathcal{D} sont de l'un des types décrits au (j) du chapitre II ainsi que les z^j et D_i si I est engendré par q éléments $\alpha_1, \dots, \alpha_q$ comme idéal de A , alors quel que soit $m \in \mathbb{N}$, l'idéal $\Delta_m(B, I; \mathcal{D})$ est engendré par les α_h ($1 \leq h \leq q$) et par les déterminants de la forme (\star) où les a_j sont pris parmi les α_h et les z^l , les d_i parmi les D_h .

C'est une conséquence du lemme 2 et du théorème de préparation.

(b) EXTENSIONS JACOBIENNES ITÉRÉES. — Soient A , un anneau commutatif unitaire; B , un sous-anneau de A ; I , un idéal de A ; \mathcal{D} , un sous-module du A -module $\mathcal{D}(A)$ des dérivations de A dans lui-même et $\mathbf{m} = (\mathbf{m}(1), \mathbf{m}(2), \dots)$ une suite d'entiers positifs ou nuls.

Pour tout $r \in \mathbb{N}$ on pose

$$\Delta_{\mathbf{m}(1), \dots, \mathbf{m}(r)}(B, I; \mathcal{D}) = \Delta_{\mathbf{m}(r)}(B, \Delta_{\mathbf{m}(1), \dots, \mathbf{m}(r-1)}(B, I; \mathcal{D}); \mathcal{D}).$$

Observons que d'après le lemme 1 s'il existe un entier s ($1 \leq s \leq r$) tel que $\mathbf{m}(s) = 0$, alors

$$\Delta_{\mathbf{m}(1), \dots, \mathbf{m}(r)}(B, I; \mathcal{D}) = A$$

et que s'il existe $s \leq r-1$ tel que $\mathbf{m}(s+1) \leq \mathbf{m}(s)-1$, alors

$$\Delta_{\mathbf{m}(1), \dots, \mathbf{m}(r)}(B, I; \mathcal{D}) = \Delta_{\mathbf{m}(1), \dots, \mathbf{m}(s-1), \mathbf{m}(s+1), \dots, \mathbf{m}(r)}(B, I; \mathcal{D}),$$

ce qui conduit à n'envisager que des suites \mathbf{m} croissantes. Enfin, si \mathcal{D} est engendré par n dérivations D_1, \dots, D_n et si $\mathbf{m}(r) \geq n+1$ on a

$$\Delta_{\mathbf{m}(1), \dots, \mathbf{m}(r)}(B, I; \mathcal{D}) = \Delta_{\mathbf{m}(1), \dots, \mathbf{m}(r-1)}(B, I; \mathcal{D}),$$

ce qui conduit à n'envisager que des suites \mathbf{m} majorées par n . Si \mathbf{m} est une suite croissante pour laquelle il existe r tel que $\mathbf{m}(r+1) = n+1$ on pose

$$\Delta_{\mathbf{m}}(B, I; \mathcal{D}) = \Delta_{\mathbf{m}(1), \dots, \mathbf{m}(r)}(B, I; \mathcal{D}).$$

Ces remarques justifient la notion que nous introduisons maintenant :

(c) EXTENSIONS JACOBIENNES DE TYPE \mathbf{k} . — Soit n , un entier supérieur ou égal à 1.

Soient A , un anneau commutatif unitaire; B , un sous-anneau de A ; \mathcal{D} , un sous-module du A -module $\mathcal{D}(A)$ des dérivations de A dans lui-même, engendré par n éléments D_1, \dots, D_n .

DÉFINITION. — A tout symbole \mathbf{k} de hauteur n [cf. (a) du chapitre II], on associe un idéal de A noté $\Delta^{\mathbf{k}}(B; \mathcal{D})$ qu'on appelle *extension jacobienne de type \mathbf{k}* de B par rapport à \mathcal{D} défini comme suit par récurrence sur la longueur de \mathbf{k} :

$$\Delta^{\mathbf{k}}(B; \mathcal{D}) = \begin{cases} \Delta_{n-\mathbf{k}(1)+1}(B, \{0\}; \mathcal{D}) & \text{si } |\mathbf{k}| \leq 1 \\ \text{et} \\ \Delta_{n-\mathbf{k}(|\mathbf{k}|)+1}(B, \Delta^{\mathbf{t}\mathbf{k}}(B, \mathcal{D}); \mathcal{D}) & \text{si } |\mathbf{k}| \geq 2. \end{cases}$$

En outre on pose

$$\Delta'^{\mathbf{k}}(B; \mathcal{D}) = \Delta^{\mathbf{k}'}(B; \mathcal{D})$$

lorsque \mathbf{k}' est défini, et

$$\Delta'^{\mathbf{k}}(B; \mathcal{D}) = A$$

lorsque \mathbf{k}' n'est pas défini [cf. (f) du chapitre II].

LEMME 4. — *Sous les hypothèses de ce paragraphe, soient $\mathbf{k} \in \mathcal{S}_n$ et $\mathbf{l} \in \mathcal{S}_n$ deux symboles tels que $\mathbf{k} \leq \mathbf{l}$ [ordre lexicographique : cf. (b) du chapitre II], alors on a*

$$\{0\} = \Delta^{\mathbf{e}_n}(\mathbf{B}; \mathcal{D}) \subset \Delta^{\mathbf{k}}(\mathbf{B}; \mathcal{D}) \subset \Delta^{\mathbf{l}}(\mathbf{B}; \mathcal{D}).$$

En particulier, on a

$$\Delta^{\mathbf{k}}(\mathbf{B}; \mathcal{D}) \subset \Delta^{\mathbf{k}'}(\mathbf{B}; \mathcal{D})$$

et, lorsque $\mathbf{k} \neq \mathbf{e}_n$ on a

$$\Delta^{\mathbf{t}\mathbf{k}}(\mathbf{B}; \mathcal{D}) \subset \Delta^{\mathbf{u}\mathbf{k}}(\mathbf{B}, \mathcal{D}) \subset \Delta^{\mathbf{k}}(\mathbf{B}; \mathcal{D}),$$

[cf. (d) et (f) du chapitre II].

En effet, si $s \in \mathbb{N}^*$, soient $(\mathbf{m}(1), \mathbf{m}(2), \dots)$, une suite d'entiers naturels, et $(\mathbf{n}(s), \mathbf{n}(s+1), \dots)$, une suite croissante d'entiers, tels que $\mathbf{n}(s) \geq \mathbf{m}(s)+1$. Avec les notations du (b) on a, par récurrence sur l'entier $r \geq s$, quel que soit l'idéal \mathbf{I} de \mathbf{A} :

$$\begin{aligned} & \Delta_{\mathbf{m}(1), \dots, \mathbf{m}(s-1), \mathbf{n}(s), \dots, \mathbf{n}(r)}(\mathbf{B}, \mathbf{I}; \mathcal{D}) \\ & \subset \Delta_{\mathbf{m}(1), \dots, \mathbf{m}(s-1), \mathbf{n}(s), \dots, \mathbf{n}(r-1)-1}(\mathbf{B}, \mathbf{I}; \mathcal{D}) \subset \Delta_{\mathbf{m}(1), \dots, \mathbf{m}(s-1), \mathbf{n}(s)-1}(\mathbf{B}, \mathbf{I}; \mathcal{D}) \\ & \subset \Delta_{\mathbf{m}(1), \dots, \mathbf{m}(s)}(\mathbf{B}, \mathbf{I}; \mathcal{D}) \end{aligned}$$

en vertu des formules (1) et (3) du lemme 1. On en déduit que quel que soit $r \geq s$ on a

$$\Delta_{\mathbf{m}(1), \dots, \mathbf{m}(s-1), \mathbf{n}(s), \dots, \mathbf{n}(r)}(\mathbf{B}, \mathbf{I}; \mathcal{D}) \subset \Delta_{\mathbf{m}(1), \dots, \mathbf{m}(r)}(\mathbf{B}, \mathbf{I}; \mathcal{D})$$

ce qui lorsque $\mathbf{I} = \{0\}$ démontre le lemme.

LEMME 5. — *Sous les hypothèses du lemme 4, pour qu'un $(n - \mathbf{k}(|\mathbf{k}|) + 1)$ -jacobien*

$$\mathbf{J} = \mathcal{J}(d_1, \dots, d_{n - \mathbf{k}(|\mathbf{k}|) + 1}; a_1, \dots, a_{n - \mathbf{k}(|\mathbf{k}|) + 1})$$

[où les $d_i \in \mathcal{D}$ et les $a_j \in \Delta^{\mathbf{t}\mathbf{k}}(\mathbf{B}; \mathcal{D}) + \mathbf{B}$] n'appartienne pas à $\Delta^{\mathbf{t}\mathbf{k}}(\mathbf{B}; \mathcal{D})$ il faut que :

- (i) l'un des a_i au moins n'appartienne pas à $\Delta^{\mathbf{t}\mathbf{k}}(\mathbf{B}; \mathcal{D}) + \mathbf{B}$ et que
- (ii) quel que soit l'entier q tel que $0 \leq q \leq t-1$, $\chi(q) - \mathbf{k}(|\mathbf{k}|) + 1$ des a_i n'appartiennent pas à $\Delta^{\mathbf{t}^r(\mathbf{a}) - \mathbf{1}\mathbf{k}}(\mathbf{B}; \mathcal{D}) + \mathbf{B}$, où χ , r et t sont les fonctions et l'entier qu'on a associés à \mathbf{k} au (c) du chapitre II.

[Observons que la condition (ii) est vide pour les valeurs de q telles que $r(q) = 0$; cette circonstance ne peut se produire que si $q = 0$.]

En effet (i) résulte immédiatement de la définition de $\Delta^{\mathbf{t}\mathbf{k}}(\mathbf{B}; \mathcal{D})$. D'autre part s'il existe q tel que $0 \leq q \leq t-1$ pour lequel (ii) est en défaut, on vérifie que \mathbf{J} appartient à

$$\Delta^{\mathbf{t}^r(\mathbf{a})\mathbf{k}}(\mathbf{B}; \mathcal{D}) \subset \Delta^{\mathbf{t}\mathbf{k}}(\mathbf{B}; \mathcal{D})$$

en développant, au moyen de la règle de Laplace, cette expression par rapport à $n - \chi(\mathbf{a}) + 1$ lignes dont les indices i sont tels que a_i , soit un élément de $\Delta^{\mathbf{t}^r(\mathbf{a}) - \mathbf{1}\mathbf{k}}(\mathbf{B}; \mathcal{D}) + \mathbf{B}$ et en appliquant la définition de $\Delta^{\mathbf{t}^r(\mathbf{a})\mathbf{k}}(\mathbf{B}; \mathcal{D})$.

(d) JACOBIENS DE TYPE (p, \mathbf{k}) . — Soient n et p des entiers supérieurs ou égaux à 1.

Soit A un anneau commutatif unitaire.

Soient z^1, \dots, z^p , des éléments de A , et D_1, \dots, D_n , des éléments du A -module $\mathcal{D}(A)$ des dérivations de A dans lui-même.

Soient \mathbf{k} un symbole de hauteur n et χ , r et t les applications et le nombre associés à \mathbf{k} conformément au (c) du chapitre II.

DÉFINITION 1. — On appelle *jacobien de type (p, \mathbf{k})* formé à partir des D_1, \dots, D_n et des z^1, \dots, z^p :

(i) lorsque $|\mathbf{k}| \leq 1$, tout $(n - \mathbf{k}(1) + 1)$ -jacobien de la forme (\star) [cf. (a) ci-dessus] où les a_j sont pris parmi les z^l et les d_i parmi les D_h ;

(ii) lorsque $|\mathbf{k}| \geq 2$ tout $(n - \mathbf{k}(|\mathbf{k}|) + 1)$ -jacobien de la forme (\star) où les a_j sont pris parmi les z^l et parmi les jacobiens de type $(p, \mathbf{t}_s \mathbf{k})$ (pour tout s tel que $1 \leq s \leq |\mathbf{k}| - 1$) et les d_i parmi les D_h .

L'ordre d'un jacobien de type (p, \mathbf{k}) est par définition la longueur de \mathbf{k} .

Le lemme 5 conduit à introduire la définition suivante :

DÉFINITION 2. — On appelle *jacobien effectif de type (p, \mathbf{k})* ($\mathbf{k} \neq \mathbf{e}_n$) formé à partir des D_1, \dots, D_n et des z^1, \dots, z^p :

(i) lorsque $|\mathbf{k}| = 1$ tout $(n - \mathbf{k}(1) + 1)$ -jacobien de type (p, \mathbf{k}) au sens précédent;

(ii) lorsque $|\mathbf{k}| \geq 2$ tout $(n - \mathbf{k}(|\mathbf{k}|) + 1)$ -jacobien de la forme (\star) où les d_i sont pris parmi les D_h et pour lequel il existe un système croissant d'entiers

$$(s(1), \dots, s(n - \mathbf{k}(|\mathbf{k}|) + 1))$$

satisfaisant à

$$\begin{cases} r(q) \leq s(n - \chi(q) + 1) & \text{pour } 0 \leq q \leq t - 1, \\ s(n - \mathbf{k}(|\mathbf{k}|) + 1) = |\mathbf{k}| - 1, \end{cases}$$

et tel que les a_j soient pris parmi les z^l lorsque $s(j) = 0$ et parmi les jacobiens effectifs de type $(p, \mathbf{t}_{s(j)} \mathbf{k})$ lorsque $1 \leq s(j) \leq |\mathbf{k}| - 1$.

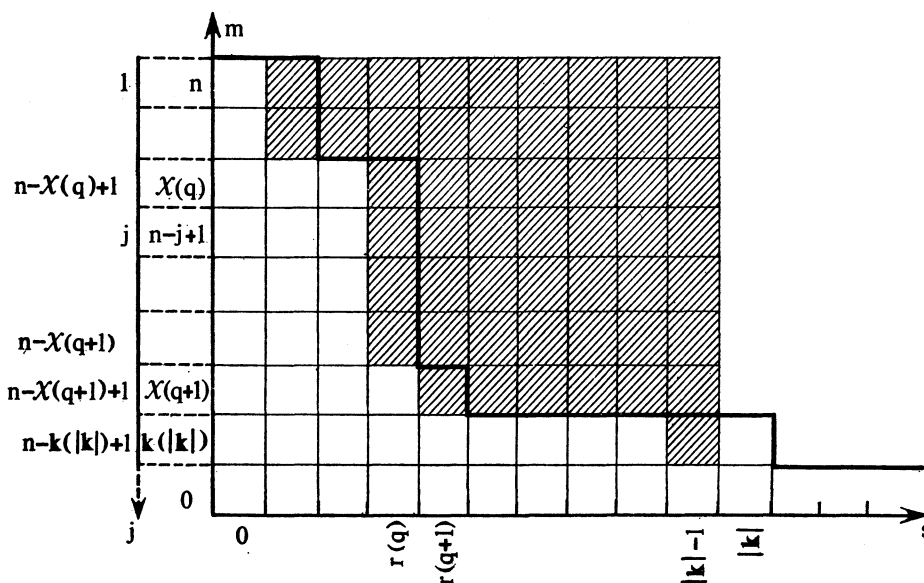
Il n'y a pas de jacobien effectif de type (p, \mathbf{e}_n) .

Remarque. — Les conditions imposées au système croissant $(s(1), \dots, s(n - \mathbf{k}(|\mathbf{k}|) + 1))$ sont équivalentes aux conditions suivantes :

$$\begin{cases} \text{lorsque } 1 \leq i \leq n - \mathbf{k}(|\mathbf{k}|), & s(i) \geq \rho(n - i + 1), \\ \text{lorsque } i = n - \mathbf{k}(|\mathbf{k}|) + 1, & s(i) = |\mathbf{k}| - 1 \end{cases}$$

[où ρ est l'application associée à \mathbf{k} conformément au (c) du chapitre II].

Ces conditions impliquent que le graphe du système $(s(1), \dots, s(n - \mathbf{k}(|\mathbf{k}|) + 1))$ soit inclus dans l'ensemble représenté par la zone hachurée de la figure ci-après.



Le plus petit système $(s(1), \dots, s(n - k(|k|) + 1))$ satisfaisant aux conditions de la définition 2 est donné par les formules

$$\begin{cases} s(j) = \rho(n - j + 1) & \text{lorsque } 1 \leq j \leq n - k(|k|), \\ s(n - k(|k|) + 1) = |k| - 1. \end{cases}$$

L'utilisation exclusive de ces systèmes minimaux conduit à la définition suivante :

DÉFINITION 3. — On appelle *jacobien minimal de type (p, k)* ($k \neq e_n$) formé à partir des D_1, \dots, D_n et des z^1, \dots, z^p :

- (i) Lorsque $|k| = 1$, tout $(n - k(1) + 1)$ -jacobien de type (p, k) au sens précédent.
- (ii) Lorsque $|k| \geq 2$, tout $(n - k(|k|) + 1)$ -jacobien de la forme (\star) où les d_i sont pris parmi les D_h et où les a_j sont pris :
 - lorsque $j = n - k(|k|) + 1$: parmi les jacobiens minimaux de type tk ;
 - lorsque $1 \leq j \leq n - k(|k|)$:
 - (1) si $1 \leq j \leq n - \chi(1)$ et $r(0) = 0$ parmi les z^t ,
 - (1') si $1 \leq j \leq n - \chi(1)$ et $r(0) \geq 1$ parmi les jacobiens minimaux de type $t_{r(0)}k$,
 - (2) si $n - \chi(q) + 1 \leq j \leq n - \chi(q + 1)$ et $1 \leq q \leq t - 1$ parmi les jacobiens minimaux de type $t_{r(q)}k$.

Il n'y a pas de jacobien minimal de type (p, e_n) .

Remarque. — Lorsque $|k| \geq 2$, observons que si $t = 0$ [c'est-à-dire si

$$k = \underbrace{(n, n, \dots, n, 0)}_{r(0) \text{ fois}}, \quad r(0) \geq 2]$$

les conditions (1), (1') et (2) sont vides, et que si $t = 1$ [c'est-à-dire si

$$\mathbf{k} = (\underbrace{n, \dots, n}_{r(0) \text{ fois}}, \underbrace{\mathbf{k}(|\mathbf{k}|), \dots, \mathbf{k}(|\mathbf{k}|)}_{|\mathbf{k}| - r(0) \text{ fois}}, 0)$$

la condition (2) est vide.

Il est clair que tout jacobien minimal de type (p, \mathbf{k}) est effectif.

DÉFINITION 4. — On appelle *extension jacobienne de type \mathbf{k}* construite sur z^1, \dots, z^p et D_1, \dots, D_n et on note $\Delta^{\mathbf{k}}(z^1, \dots, z^p; D_1, \dots, D_n)$ l'idéal de A engendré par les jacobiens de type $(p, \mathbf{t}_s \mathbf{k})$ pour tout s tel que $0 \leq s \leq |\mathbf{k}|$, formés à partir de D_1, \dots, D_n et de z^1, \dots, z^p .

En outre on pose

$$\Delta^{\mathbf{k}}(z^1, \dots, z^p; D_1, \dots, D_n) = \Delta^{\mathbf{k}'}(z^1, \dots, z^p; D_1, \dots, D_n),$$

lorsque \mathbf{k}' est défini, et

$$\Delta^{\mathbf{k}}(z^1, \dots, z^p; D_1, \dots, D_n) = A,$$

lorsque \mathbf{k}' n'est pas défini.

Remarquons que si $\mathbf{k}(1) \leq \min(n-p, 0)$, on a

$$\Delta^{\mathbf{k}}(z^1, \dots, z^p; D_1, \dots, D_n) = \{0\}.$$

LEMME 4'. — Soient $\mathbf{k} \in \mathcal{S}_n$ et $\mathbf{l} \in \mathcal{S}_n$ deux symboles tels que $\mathbf{k} \leq \mathbf{l}$.

Sous les hypothèses de ce paragraphe on a

$$\{0\} = \Delta^{\mathbf{e}_n}(z^1, \dots, z^p; D_1, \dots, D_n) \subset \Delta^{\mathbf{k}}(z^1, \dots, z^p; D_1, \dots, D_n) \subset \Delta^{\mathbf{l}}(z^1, \dots, z^p; D_1, \dots, D_n)$$

En particulier on a

$$\Delta^{\mathbf{k}}(z^1, \dots, z^p; D_1, \dots, D_n) \subset \Delta^{\mathbf{k}'}(z^1, \dots, z^p; D_1, \dots, D_n)$$

et lorsque $\mathbf{k} \neq \mathbf{e}_n$ on a

$$\Delta^{\mathbf{k}}(z^1, \dots, z^p; D_1, \dots, D_n) \subset \Delta^{\mathbf{nk}}(z^1, \dots, z^p; D_1, \dots, D_n) \subset \Delta^{\mathbf{k}}(z^1, \dots, z^p; D_1, \dots, D_n)$$

[cf. (d) et (f) du chapitre II].

La démonstration de ce lemme est analogue à celle du lemme 4 mais elle est plus simple car elle s'appuie uniquement sur les règles de Laplace et de dérivations d'un déterminant car les idéaux considérés sont définis par des systèmes de générateurs canoniques.

LEMME 5'. — Soit $\mathbf{k} \in \mathcal{S}_n$.

Sous les hypothèses de ce paragraphe $\Delta^{\mathbf{k}}(z^1, \dots, z^p; D_1, \dots, D_n)$ est engendré par les jacobiens effectifs de type $(p, \mathbf{t}_s \mathbf{k})$, pour tout s tel que $1 \leq s \leq |\mathbf{k}|$, formés à partir des D_1, \dots, D_n et des z^1, \dots, z^p .

En effet, un raisonnement analogue à celui de la démonstration du lemme 5 montre que les jacobiens qui ne sont pas effectifs appartiennent à $\Delta^{\mathbf{k}}(z^1, \dots, z^p; D_1, \dots, D_n)$.

La définition 4 est justifiée par le lemme suivant :

LEMME 6. — Lorsque A, B et \mathcal{D} sont de l'un des types décrits au (j) du chapitre II ainsi que z^1, \dots, z^p et D_1, \dots, D_n , alors, pour tout symbole $\mathbf{k} \in \mathcal{S}_n$, l'idéal $\Delta^{\mathbf{k}}(B; \mathcal{D})$ est engendré par tous les jacobiens (resp. par tous les jacobiens effectifs) de type $(p, \mathbf{t}, \mathbf{k})$, pour tout s tel que $1 \leq s \leq |\mathbf{k}|$, formés à partir des D_1, \dots, D_n et des z^1, \dots, z^p . En d'autres termes on a

$$\Delta^{\mathbf{k}}(B; \mathcal{D}) = \Delta^{\mathbf{k}}(z^1, \dots, z^p; D_1, \dots, D_n).$$

Ce lemme se démontre par récurrence sur la longueur de \mathbf{k} à partir du lemme 3 (resp. des lemmes 3 et 5').

Remarque. — Les lemmes 4' et 5' ne supposent pas que le sous-module \mathcal{D} de l'algèbre de Lie des dérivations K -linéaires de A engendré par D_1, \dots, D_n soit une sous-algèbre de Lie. Néanmoins, même lorsque $[D_i, D_h] = 0$ pour $1 \leq i, h \leq n$, il ne semble pas que $\Delta^{\mathbf{k}}(z^1, \dots, z^p; D_1, \dots, D_n)$ soit engendré par les jacobiens minimaux de type $(p, \mathbf{t}, \mathbf{k})$, pour tout s tel que $1 \leq s \leq |\mathbf{k}|$, formés à partir des D_1, \dots, D_n et des z^1, \dots, z^p . Malheureusement, le schéma de construction d'un jacobien de type (p, \mathbf{k}) même minimal serait fort pénible à décrire [cf. la définition de $N_1(\mathbf{k})$ et de $N_2(\mathbf{k})$ au (e) ci-dessous]. Or, il se trouve qu'on peut définir une classe de jacobiens minimaux relativement simples, qui, bien que n'engendrant certainement pas l'idéal $\Delta^{\mathbf{k}}(z^1, \dots, z^p; D_1, \dots, D_n)$ permettent d'exprimer d'importantes propriétés du couple d'idéaux

$$(\Delta^{\mathbf{k}}(z^1, \dots, z^p; D_1, \dots, D_n), \Delta^{\mathbf{k}'}(z^1, \dots, z^p; D_1, \dots, D_n))$$

(cf. chap. IV). En vue de les définir et les étudier on va se placer dans un cadre universel dont l'étude fait l'objet du paragraphe suivant.

(e) LES ANNEAUX D'EXPRESSIONS JACOBINIENNES.

NOTATION. — Soient p et n des entiers et Z^1, \dots, Z^p et $\bar{D}_1, \dots, \bar{D}_n$ (resp. $\hat{D}_1, \dots, \hat{D}_n$) des indéterminées.

Les éléments de l'ensemble $\{1, \dots, p\} \times (\mathcal{S}_n - \{e_n\})$ [resp. $\{1, \dots, p\} \times (\mathcal{E}_n - \{e_n\})$] [cf. (h) du chapitre II] seront ici notés \bar{Z}_i^j ($1 \leq j \leq p$ et $\mathbf{l} \in \mathcal{S}_n - \{e_n\}$) [resp. \hat{Z}_i^j ($1 \leq j \leq p$ et $\mathbf{l} \in \mathcal{E}_n - \{e_n\}$)].

Pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, tout $j \in \{1, \dots, p\}$ et tout $\mathbf{l} \in \mathcal{S}_n - \{e_n\}$ (resp. $\mathbf{l} \in \mathcal{E}_n - \{e_n\}$) on pose la règle suivante :

$$(7) \quad \bar{D}_i \bar{Z}_i^j = \bar{Z}_{i,\mathbf{l}}^j \quad [\text{resp. } (7') \quad \hat{D}_i \hat{Z}_i^j = \hat{Z}_{i,\mathbf{l}}^j]$$

[où $\mathbf{l}.i$ (resp. $\mathbf{l}.i$) représente la multiplication dans \mathcal{S}_n (resp. \mathcal{E}_n), cf. (h) du chapitre II] de sorte que, quel que soit $\mathbf{l} \in \mathcal{S}_n - \{e_n\}$ (resp. $\mathbf{l} \in \mathcal{E}_n - \{e_n\}$) et quel que soit $j \in \{1, \dots, p\}$ on a

$$\begin{aligned} \bar{Z}_i^j &= \bar{D}_{\mathbf{l}(1)} \bar{D}_{\mathbf{l}(1|-1)} \dots \bar{D}_{\mathbf{l}(1)} Z^j \\ [\text{resp. } \hat{Z}_i^j &= \hat{D}_{\mathbf{l}(1)} \hat{D}_{\mathbf{l}(1|-1)} \dots \hat{D}_{\mathbf{l}(1)} Z^j]. \end{aligned}$$

DÉFINITION. — On appelle *anneau des expressions jacobiennes commutatives* (resp. *non commutatives*) de hauteur n formées à partir de p indéterminées Z^1, \dots, Z^p et on note $\overline{\mathcal{A}}'_n(Z^1, \dots, Z^p)$ (ou plus simplement $\overline{\mathcal{A}}'^p_n$) [resp. $\hat{\mathcal{A}}'_n(Z^1, \dots, Z^p)$ ou plus simplement $\hat{\mathcal{A}}'^p_n$] l'anneau $\mathbf{Z}[\overline{Z}^j]$ ($1 \leq j \leq p$ et $1 \in \mathcal{S}_n - \{e_n\}$) [resp. l'anneau $\mathbf{Z}[\hat{Z}^j]$ ($1 \leq j \leq p$ et $1 \in \mathcal{S}_n - \{e_n\}$)] des polynômes à coefficients entiers en les indéterminées \overline{Z}^j (resp. \hat{Z}^j).

Cet anneau est canoniquement muni des dérivations \overline{D}_i (resp. \hat{D}_i) pour $1 \leq i \leq n$ définies sur les indéterminées \overline{Z}^j (resp. \hat{Z}^j) par les relations 7 (resp. 7').

On a donc

$$\overline{D}_i = \sum_{j=1}^p \left(\sum_{1 \in \mathcal{S}_n - \{e_n\}} \overline{Z}^{j,i} \frac{\partial}{\partial \overline{Z}^j} \right)$$

$$\left[\text{resp. } \hat{D}_i = \sum_{j=1}^p \left(\sum_{1 \in \mathcal{S}_n - \{e_n\}} \hat{Z}^{j,i} \frac{\partial}{\partial \hat{Z}^j} \right) \right], \quad 1 \leq i \leq n.$$

[Comparer avec les formules (2') et (3') du (j) du chapitre II.]

On vérifie facilement que

$$[\overline{D}_i, \overline{D}_h] = 0 \quad \text{pour } 1 \leq i, h \leq n$$

et que

$$[\hat{D}_i, \hat{D}_h] \neq 0 \quad \text{pour } 1 \leq i, h \leq n, \quad i \neq h.$$

Les éléments de $\overline{\mathcal{A}}'_n(Z^1, \dots, Z^p)$ [resp. $\hat{\mathcal{A}}'_n(Z^1, \dots, Z^p)$] sont appelés *expressions jacobiennes commutatives* (resp. *non commutatives*) de hauteur inférieure ou égale à n , formées à partir de p indéterminées.

Observons que les Z^j n'appartiennent ni à $\overline{\mathcal{A}}'_n(Z^1, \dots, Z^p)$ ni à $\hat{\mathcal{A}}'_n(Z^1, \dots, Z^p)$.

L'anneau des polynômes obtenu en adjoignant les indéterminées Z^1, \dots, Z^p à $\overline{\mathcal{A}}'_n(Z^1, \dots, Z^p)$ [resp. à $\hat{\mathcal{A}}'_n(Z^1, \dots, Z^p)$] sera noté $\overline{\mathcal{A}}'^p_n[Z^1, \dots, Z^p]$ ou plus simplement $\overline{\mathcal{A}}'^p_n$ (resp. $\hat{\mathcal{A}}'^p_n[Z^1, \dots, Z^p]$ ou plus simplement $\hat{\mathcal{A}}'^p_n$).

On prolonge les dérivations canoniques à ces anneaux en posant

$$\overline{D}_i Z^j = \overline{Z}^j \quad (\text{resp. } \hat{D}_i Z^j = \hat{Z}^j) \quad 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq p.$$

Sur $\overline{\mathcal{A}}'^p_n$ (resp. $\hat{\mathcal{A}}'^p_n$) on a donc

$$\overline{D}_i = \sum_{j=1}^p \left(\sum_{1 \in \mathcal{S}_n} \overline{Z}^{j,i} \frac{\partial}{\partial \overline{Z}^j} \right) \quad \left(\text{resp. } \hat{D}_i = \sum_{j=1}^p \left(\sum_{1 \in \mathcal{S}_n} \hat{Z}^{j,i} \frac{\partial}{\partial \hat{Z}^j} \right) \right), \quad 1 \leq i \leq n.$$

L'anneau $\overline{\mathcal{A}}'^p_n$ (resp. $\hat{\mathcal{A}}'^p_n$) s'obtient par extension de l'anneau \mathbf{Z} des scalaires de $\overline{\mathcal{A}}'^p_n$ (resp. $\hat{\mathcal{A}}'^p_n$) à l'anneau $\mathcal{B}^p = \mathbf{Z}[Z^1, \dots, Z^p]$.

L'application Φ du (h) du chapitre II définit un épimorphisme d'anneaux, noté aussi Φ , de $\hat{\mathcal{A}}_n^p$ dans $\overline{\mathcal{A}}_n^p$ (resp. de $\hat{\mathcal{A}}_n^p$ dans $\overline{\mathcal{A}}_n^p$ qui induit l'identité sur \mathcal{B}^p), caractérisé par les relations

$$\Phi(\hat{Z}_i^j) = \overline{Z}_{\Phi(l)}^j \quad (l \in \mathcal{E}_n - \{e_n\}, 1 \leq j \leq p)$$

et tel que

$$\Phi \circ \hat{D}_i = \overline{D}_i \circ \Phi \quad (1 \leq i \leq n).$$

On déduit de cette dernière relation que

$$[\hat{D}_i, \hat{D}_h] \in \text{Ker } \Phi \quad \text{pour } 1 \leq i, h \leq n.$$

On attribue aux indéterminées Z^1, \dots, Z^p le poids 0 et aux indéterminées \overline{Z}_i^j (resp. \hat{Z}_i^j) le poids $|l|$ (resp. $|l|$). Le sous-anneau de $\overline{\mathcal{A}}_n^p$ (resp. $\hat{\mathcal{A}}_n^p$, $\overline{\mathcal{A}}_n^p$, $\hat{\mathcal{A}}_n^p$) engendré par les indéterminées de poids inférieur ou égal à r sera noté $\overline{\mathcal{A}}_n^p(r)$ [resp. $\hat{\mathcal{A}}_n^p(r)$, $\overline{\mathcal{A}}_n^p(r)$, $\hat{\mathcal{A}}_n^p(r)$]. Une expression jacobienne sera dite d'ordre r si elle appartient à $\overline{\mathcal{A}}_n^p(r) - \overline{\mathcal{A}}_n^p(r-1)$ [resp. $\hat{\mathcal{A}}_n^p(r) - \hat{\mathcal{A}}_n^p(r-1)$].

Notion de spécialisation. — Une spécialisation de $\overline{\mathcal{A}}_n^p$ (resp. de $\hat{\mathcal{A}}_n^p$) dans un anneau commutatif unitaire A est un homomorphisme d'anneaux unitaires

$$\overline{\varphi} : \overline{\mathcal{A}}_n^p \rightarrow A \quad (\text{resp. } \hat{\varphi} : \hat{\mathcal{A}}_n^p \rightarrow A),$$

pour lequel il existe des éléments z^1, \dots, z^p de A et des dérivations D_1, \dots, D_n de A dans lui-même, commutant deux à deux (resp. quelconques), satisfaisant aux conditions

$$\begin{aligned} \overline{\varphi}(\overline{Z}_i^j) &= D_{l(|l|)} D_{l(|l|-1)} \dots D_{l(1)} z^j \quad \text{pour tout } l \in \mathcal{E}_n - \{e_n\} \text{ et } 1 \leq j \leq p \\ [\text{resp. } \hat{\varphi}(\hat{Z}_i^j) &= D_{l(|l|)} D_{l(|l|-1)} \dots D_{l(1)} z^j \quad \text{pour tout } l \in \mathcal{E}_n - \{e_n\} \text{ et } 1 \leq j \leq p]. \end{aligned}$$

Un tel homomorphisme se prolonge canoniquement de façon évidente, en un homomorphisme de $\overline{\mathcal{A}}_n^p$ (resp. $\hat{\mathcal{A}}_n^p$).

On dit alors que les z^j *spécialisent* les Z^j et que les D_i *spécialisent* les \overline{D}_i (resp. \hat{D}_i).

On a alors $\overline{\varphi} \circ \overline{D}_i = D_i \circ \overline{\varphi}$ (resp. $\hat{\varphi} \circ \hat{D}_i = D_i \circ \hat{\varphi}$) pour $1 \leq i \leq n$.

Soit d une dérivation, non nécessairement canonique, de $\overline{\mathcal{A}}_n^p$ (resp. de $\hat{\mathcal{A}}_n^p$) et $\overline{\varphi}$ (resp. $\hat{\varphi}$) une spécialisation de cet anneau dans un anneau commutatif unitaire A .

On dira qu'une dérivation d' de A *spécialise d à travers $\overline{\varphi}$* (resp. $\hat{\varphi}$), si elle vérifie la relation

$$d' \circ \overline{\varphi} = \overline{\varphi} \circ d \quad (\text{resp. } d' \circ \hat{\varphi} = \hat{\varphi} \circ d).$$

Avec ces conventions la donnée d'un système d'éléments (z^1, \dots, z^p) d'un anneau A commutatif unitaire et de dérivations (D_1, \dots, D_n) de A dans lui-même, définit une spécialisation $\hat{\varphi}$ de $\hat{\mathcal{A}}_n^p$ dans A qui, lorsque les D_i commutent entre elles, se factorise par Φ en une spécialisation $\overline{\varphi}$ de $\overline{\mathcal{A}}_n^p$ dans A .

EXEMPLE 1. — Soient m et h des entiers supérieurs ou égaux à 1 et U^1, \dots, U^h des indéterminées. Tout système $(\delta_1, \dots, \delta_n)$ d'éléments de $\overline{\mathcal{A}}_n^p [Z^1, \dots, Z^p]$ (resp. $\hat{\mathcal{A}}_n^p [Z^1, \dots, Z^p]$) et tout système (d_1, \dots, d_m) de dérivations de $\overline{\mathcal{A}}_n^p [Z^1, \dots, Z^p]$ à valeurs dans $\overline{\mathcal{A}}_n^p$ (resp. de $\hat{\mathcal{A}}_n^p [Z^1, \dots, Z^p]$ à valeurs dans $\hat{\mathcal{A}}_n^p$) définit une spécialisation φ de $\overline{\mathcal{A}}_m^p (U^1, \dots, U^h)$ dans $\overline{\mathcal{A}}_n^p$ [resp. de $\hat{\mathcal{A}}_m^p (U^1, \dots, U^h)$ dans $\hat{\mathcal{A}}_n^p$] prenant ses valeurs dans $\overline{\mathcal{A}}_n^p$ (resp. dans $\hat{\mathcal{A}}_n^p$).

Même lorsque

$$m = n \quad \text{et} \quad d_i = \begin{cases} \overline{D}_i \\ \hat{D}_i \end{cases} \quad (1 \leq i \leq n),$$

il peut se faire que certaines dérivations de $\overline{\mathcal{A}}_m^h$ (resp. de $\hat{\mathcal{A}}_m^h$) ne se spécialisent pas à travers φ .

EXEMPLE 2. — Dans le premier cas traité au (j) du chapitre II la donnée (z^1, \dots, z^p) , (D_1, \dots, D_n) définit une spécialisation de $\overline{\mathcal{A}}_n^p$ dans A à travers laquelle toutes les dérivations $\partial/\partial \overline{Z}_1^j$ (pour $1 \leq j \leq p$ et $\mathbf{l} \in \mathcal{S}_n - \{e_n\}$) sont spécialisées par les $\partial/\partial z_1^j$ correspondantes qui sont A -linéairement indépendantes. Dans le deuxième cas on a le même résultat si on impose en outre la condition $|\mathbf{l}| \leq r$.

Relation entre jacobiens et expressions jacobienues. — Soit (z^1, \dots, z^p) , (D_1, \dots, D_n) une donnée définissant une spécialisation $\hat{\varphi}$ de $\hat{\mathcal{A}}_n^p$ dans un anneau commutatif A . L'image de $\hat{\mathcal{A}}_n^p$ par $\hat{\varphi}$ est le sous-ensemble de A des combinaisons linéaires à coefficients entiers du jacobien vide ainsi que de tous les jacobiens de A de type (p, \mathbf{k}) formés à partir des D_1, \dots, D_n et des z^1, \dots, z^p [où $\mathbf{k} \in \mathcal{S}_n$ est un symbole de longueur arbitraire $r \geq 1$ tel que $\mathbf{k}(r) = n$] [cf. définition 1 du (d)].

LEMME 6'. — Pour tout symbole $\mathbf{k} \in \mathcal{S}_n$ on a

$$\Delta^{\mathbf{k}}(\mathcal{B}^p; \overline{\mathcal{D}}) = \Delta^{\mathbf{k}}(Z^1, \dots, Z^p; \overline{D}_1, \dots, \overline{D}_n)$$

(où $\overline{\mathcal{D}}$ désigne le $\overline{\mathcal{A}}_n^p$ -module engendré par $\overline{D}_1, \dots, \overline{D}_n$) et on a

$$\Delta^{\mathbf{k}}(\mathcal{B}^p; \hat{\mathcal{D}}) = \Delta^{\mathbf{k}}(Z^1, \dots, Z^p; \hat{D}_1, \dots, \hat{D}_n)$$

(où $\hat{\mathcal{D}}$ désigne le $\hat{\mathcal{A}}_n^p$ -module engendré par $\hat{D}_1, \dots, \hat{D}_n$) [cf. la définition 4 du (d)].

C'est une conséquence du lemme 2 du (a) convenablement exploité.

Quel que soit $\mathbf{k} \in \mathcal{S}_n$ les jacobiens de type (p, \mathbf{k}) formés à partir des $\overline{D}_1, \dots, \overline{D}_n$ (resp. $\hat{D}_1, \dots, \hat{D}_n$) et des Z^1, \dots, Z^p sont des polynômes isobares qui appartiennent à $\overline{\mathcal{A}}_n^p$ (resp. à $\hat{\mathcal{A}}_n^p$). On les appelle les *expressions jacobienues (commutatives ou non) de type (p, \mathbf{k})* .

Ce sont des expressions d'ordre $|\mathbf{k}|$. De façon analogue, on a une notion d'*expression jacobienne effective* (resp. *minimale*) conformément aux définitions 2 et 3 du (d).

Une expression minimale de type (p, \mathbf{k}) ($\mathbf{k} \in \mathcal{S}_n$) est un polynôme isobare et de poids $P(\mathbf{k})$ où l'entier $P(\mathbf{k})$ est défini par récurrence sur la longueur de \mathbf{k} au moyen des formules

$$P(\mathbf{e}_n) = 0$$

et

$$P(\mathbf{k}) = n - \mathbf{k}(|\mathbf{k}|) + 1 + P(\mathbf{tk}) + \sum_{q=1}^{\mathbf{k}} (\chi(q-1) - \chi(q)) P(\mathbf{t}_{r(q-1)}\mathbf{k}),$$

lorsque $\mathbf{k} \neq \mathbf{e}_n$.

L'ensemble des expressions minimales de type (p, \mathbf{k}) est indexé de façon naturelle par l'ensemble $\{1, \dots, p\}^{N_1(\mathbf{k})} \times \{1, \dots, n\}^{N_2(\mathbf{k})}$ où les entiers $N_1(\mathbf{k})$ et $N_2(\mathbf{k})$ sont définis par récurrence sur la longueur de \mathbf{k} au moyen des formules

$$N_1(\mathbf{e}_n) = 1$$

et

$$N_1(\mathbf{k}) = N_1(\mathbf{tk}) + \sum_{m=\mathbf{k}(|\mathbf{k}|)+1}^n N_1(\mathbf{t}_{p(m)}\mathbf{k}) \quad \text{pour } \mathbf{k} \neq \mathbf{e}_n,$$

$$N_2(\mathbf{e}_n) = 0$$

et

$$N_2(\mathbf{k}) = n - \mathbf{k}(|\mathbf{k}|) + 1 + N_2(\mathbf{tk}) + \sum_{m=\mathbf{k}(|\mathbf{k}|)+1}^n N_2(\mathbf{t}_{p(m)}\mathbf{k}) \quad \text{pour } \mathbf{k} \neq \mathbf{e}_n.$$

[Remarquons que $P(\mathbf{k}) = N_2(\mathbf{k})$ pour tout $\mathbf{k} \in \mathcal{S}_n$.]

L'idéal engendré par les expressions jacobiniennes de type $(p, \mathbf{t}_s \mathbf{k})$ dans $\overline{\mathcal{A}}_n^{p,p}$ (resp. dans $\widehat{\mathcal{A}}_n^{p,p}$) pour $1 \leq s \leq |\mathbf{k}|$, se note $\overline{\Delta}(p, \mathbf{k})$ [resp. $\widehat{\Delta}(p, \mathbf{k})$]. C'est la trace sur $\overline{\mathcal{A}}_n^{p,p}$ (resp. $\widehat{\mathcal{A}}_n^{p,p}$) de l'idéal $\Delta^{\mathbf{k}}(Z^1, \dots, Z^p; \overline{D}_1, \dots, \overline{D}_n)$ [resp. de l'idéal $\Delta^{\mathbf{k}}(Z^1, \dots, Z^p; \widehat{D}_1, \dots, \widehat{D}_n)$]. On a évidemment $\Phi(\widehat{\Delta}(p, \mathbf{k})) = \overline{\Delta}(p, \mathbf{k})$.

Comme dans la définition 4 du (d) on pose

$$\overline{\Delta}'(p, \mathbf{k}) = \begin{cases} \overline{\Delta}(p, \mathbf{k}') & \text{lorsque } \mathbf{k}' \text{ est défini,} \\ \overline{\mathcal{A}}_n^{p,p} & \text{lorsque } \mathbf{k}' \text{ n'est pas défini} \end{cases}$$

et

$$\widehat{\Delta}'(p, \mathbf{k}) = \begin{cases} \widehat{\Delta}(p, \mathbf{k}') & \text{lorsque } \mathbf{k}' \text{ est défini,} \\ \widehat{\mathcal{A}}_n^{p,p} & \text{lorsque } \mathbf{k}' \text{ n'est pas défini.} \end{cases}$$

D'après le lemme 4', si $\mathbf{k} \in \mathcal{S}_n$ et $\mathbf{l} \in \mathcal{S}_n$ sont tels que $\mathbf{k} \leq \mathbf{l}$ on a

$$\{0\} = \overline{\Delta}(p, \mathbf{e}_n) \subset \overline{\Delta}(p, \mathbf{k}) \subset \overline{\Delta}(p, \mathbf{l}).$$

En particulier on a

$$\overline{\Delta}(p, \mathbf{k}) \subset \overline{\Delta}'(p, \mathbf{k})$$

et lorsque $\mathbf{k} \neq \mathbf{e}_n$ on a

$$\overline{\Delta}(p, \mathbf{tk}) \subset \overline{\Delta}(p, \mathbf{uk}) \subset \overline{\Delta}(p, \mathbf{k}),$$

ainsi que les inclusions analogues pour les $\widehat{\Delta}$.

D'après le lemme 5', l'idéal $\Delta^{\mathbf{k}}(Z^1, \dots, Z^p; \hat{D}_1, \dots, \hat{D}_n)$ est engendré par les expressions jacobiennes effectives de type $(p, \mathbf{t}, \mathbf{k})$ pour tout s tel que $1 \leq s \leq |\mathbf{k}|$. Il en est donc de même pour les idéaux $\hat{\Delta}(p, \mathbf{k})$ et $\bar{\Delta}(p, \mathbf{k})$.

On note $\bar{\Delta}_{\min}(p, \mathbf{k})$ [resp. $\hat{\Delta}_{\min}(p, \mathbf{k})$] l'idéal de $\bar{\mathcal{A}}_n^p$ (resp. $\hat{\mathcal{A}}_n^p$) engendré par les expressions jacobiennes minimales commutatives (resp. non commutatives) de type $(p, \mathbf{t}, \mathbf{k})$ pour $1 \leq s \leq |\mathbf{k}|$. On définit de façon évidente les idéaux $\bar{\Delta}'_{\min}(p, \mathbf{k})$ et $\hat{\Delta}'_{\min}(p, \mathbf{k})$. Comme plus haut on a pour les Δ_{\min} des inclusions analogues à celles du lemme 4'. Pour le vérifier on utilise la règle de Laplace, la règle de dérivation d'un déterminant et la formule 5 du lemme 2 [cf. (a)]. On procède par récurrence sur la longueur des symboles selon un schéma de démonstration analogue à celui appliqué aux expressions jacobiennes mixtes étudiées au (i) ci-dessous.

LEMME 7. — Soient A un anneau commutatif unitaire, z^1, \dots, z^p des éléments de A et D_1, \dots, D_n des dérivations de A . Si $\hat{\varphi} : \hat{\mathcal{A}}_n^p \rightarrow A$ désigne la spécialisation définie par la donnée $(z^1, \dots, z^p), (D_1, \dots, D_n)$ on a

$$\hat{\varphi}(\hat{\Delta}(p, \mathbf{k})) \cdot A = \Delta^{\mathbf{k}}(z^1, \dots, z^p; D_1, \dots, D_n)$$

et par conséquent, lorsque $\hat{\varphi}$ se factorise par $\bar{\Phi}$ en un homomorphisme $\bar{\varphi} : \bar{\mathcal{A}}_n^p \rightarrow A$ on a en outre

$$\bar{\varphi}(\bar{\Delta}(p, \mathbf{k})) \cdot A = \Delta^{\mathbf{k}}(z^1, \dots, z^p; D_1, \dots, D_n).$$

Ce lemme est évident.

Il exprime que toutes les propriétés formelles des jacobien formés à partir des D_1, \dots, D_n et des z^1, \dots, z^p proviennent de relations entre expressions jacobiennes que l'on vérifie soit dans l'anneau $\hat{\mathcal{A}}_n^p$ soit dans l'anneau $\bar{\mathcal{A}}_n^p$.

A l'aide d'idéaux auxiliaires introduits aux paragraphes suivants, on va établir au chapitre 4 certaines propriétés du couple d'idéaux $(\bar{\Delta}(p, \mathbf{k}), \bar{\Delta}'(p, \mathbf{k}))$. Il sera alors immédiat de vérifier qu'elles se conservent par n'importe quelle spécialisation φ à travers laquelle toute dérivation de $\bar{\mathcal{A}}_n^p$ est spécialisable. Les spécialisations étudiées dans l'exemple (2) ci-dessus jouissent de cette propriété.

(f) EXPRESSIONS JACOBIENNES BIEN FORMÉES. — Soient p et n des entiers supérieurs ou égaux à 1.

Soit $\psi \in \mathcal{F}(p, n)$ [cf. chap. II (g), 1°]. Lorsque $\psi \neq \emptyset$ soit $\mathbf{k} \in \mathcal{S}_n$ l'unique symbole tel que ψ soit de type (p, \mathbf{k}) .

Soient ρ, χ, r, t et t' les applications et les nombres associés à \mathbf{k} [cf. chap. 2, (c)].

Soit $\sigma \in G_n$ une permutation de l'ensemble $\{1, \dots, n\}$. On pose

$$d(i) = \begin{cases} \bar{D}_{\sigma(i)} \\ \text{ou} \\ \hat{D}_{\sigma(i)} \end{cases}$$

selon qu'on est dans le cas commutatif ou non et on définit l'élément $J(\sigma, \psi)$ de \mathcal{A}_n^p (resp. de $\hat{\mathcal{A}}_n^p$) en posant

$J(\sigma, \psi) = 1$ (jacobien vide) lorsque ψ est l'ensemble vide,

$J(\sigma, \psi) = Z^{\psi(0, n)}$ lorsque ψ est de type (p, \mathbf{k}) et $\mathbf{k} = \mathbf{e}_n$,

$$J(\sigma, \psi) = \mathcal{J}(d(n), d(n-1), \dots, d(\mathbf{k}(|\mathbf{k}|)+1), d(\psi(|\mathbf{k}|, \mathbf{k}(|\mathbf{k}|))));$$

$$J(\sigma, \mathbf{t}_{p(n), n} \psi), J(\sigma, \mathbf{t}_{p(n-1), n-1} \psi), \dots,$$

$$J(\sigma, \mathbf{t}_{p(\mathbf{k}(|\mathbf{k}|)+1), \mathbf{k}(|\mathbf{k}|)+1} \psi), J(\sigma, \mathbf{t}_{|\mathbf{k}|-1, \mathbf{k}(|\mathbf{k}|)} \psi)$$

[où les $\mathbf{t}_{s, m} \psi$ sont les restrictions du tableau ψ définies au (g), 2°, du chapitre II] lorsque ψ est de type (p, \mathbf{k}) et $\mathbf{k} \neq \mathbf{e}_n$.

Observons que, lorsque ψ est de type (p, \mathbf{k}) et $\mathbf{k} \neq \mathbf{e}_n$ l'élément $J(\sigma, \psi)$ est une expression jacobienne (commutative ou non selon le cas dans lequel on s'est placé) minimale de type (p, \mathbf{k}) [cf. (d) et (e) ci-dessus]. Lorsqu'on désire préciser l'anneau auquel appartient $J(\sigma, \psi)$ cette expression sera notée $\bar{J}(\sigma, \psi)$ [resp. $\hat{J}(\sigma, \psi)$]. Cette précaution sera le plus souvent inutile car, avec les notations du (e) ci-dessus on a $\bar{J}(\sigma, \psi) = \Phi(\hat{J}(\sigma, \psi))$.

DÉFINITION. — Lorsque $\psi \in \hat{\mathcal{F}}^*(p, n)$ l'expression $\bar{J}(\sigma, \psi)$ [resp. $\hat{J}(\sigma, \psi)$] s'appelle l'expression jacobienne commutative (resp. non commutative) formée au moyen de σ et de ψ . On dit encore que $\bar{J}(\sigma, \psi)$ [resp. $\hat{J}(\sigma, \psi)$] est l'expression jacobienne bien formée associée au couple (σ, ψ) .

Le jacobien qui s'en déduit par la spécialisation définie par une donnée (z^1, \dots, z^p) , (D_1, \dots, D_n) d'un anneau commutatif unitaire A , s'appelle jacobien formé au moyen de σ et de ψ [ou encore jacobien bien formé associé au couple (σ, ψ)] à partir des z^1, \dots, z^p et des D_1, \dots, D_n et se note

$$J(\sigma, \psi; D_1, \dots, D_n; z^1, \dots, z^p).$$

Dans le cas commutatif, lorsque ψ est principal (resp. régulier, régularisable, condensé, condensable) l'expression jacobienne bien formée et le jacobien bien formé associés au couple (σ, ψ) seront dits principaux (resp. réguliers, régularisables, condensés, condensables) (cf. chap. II, (g), 4° [resp. (g), 5°, 7°, 10°]).

REMARQUE 1. — Lorsque ψ est de type (p, \mathbf{k}) , on construit $J(\sigma, \psi)$ en calculant tous les $J(\sigma, \mathbf{t}_{s, m} \psi)$ pour $1 \leq s \leq |\mathbf{k}|$ et pour $\mathbf{k}(|\mathbf{k}|) \leq m \leq \mathbf{k}(s)$ à partir de la formule

$$J(\sigma, \mathbf{t}_{0, m} \psi) = Z^{\psi(0, m)} \quad [\mathbf{k}(|\mathbf{k}|) \leq m \leq n],$$

au moyen de la relation

$$J(\sigma, \mathbf{t}_{s, m} \psi) = \mathcal{J}(d(n), d(n-1), \dots, d(\mathbf{k}(s)+1), d(\psi(s, m)));$$

$$J(\sigma, \mathbf{t}_{p(n), n} \psi), J(\sigma, \mathbf{t}_{p(n-1), n-1} \psi), \dots,$$

$$J(\sigma, \mathbf{t}_{p(\mathbf{k}(s)+1), \mathbf{k}(s)+1} \psi), J(\sigma, \mathbf{t}_{s-1, m} \psi).$$

vérifiée quel que soit $(s, m) \in \mathcal{C}(\mathbf{k})$ et $s \geq 1$ [cf. l'exemple du (g) ci-dessus].

REMARQUE 2. — Pour qu'il existe des expressions jacobienues bien formées de type (p, \mathbf{k}) il faut et il suffit que $\mathbf{k} \neq \mathbf{e}_n$. En revanche pour qu'il existe des expressions principales (resp. régulières) de type (p, \mathbf{k}) il faut et il suffit que $\mathbf{k}(1) \geq \max(n-p+1, 1)$.

REMARQUE 3. — Pour toute permutation $\sigma' \in G_n$ induisant l'identité sur

$$\{\mathbf{k}(|\mathbf{k}|)+1, \dots, n\}$$

on a

$$J(\sigma, \psi) = J(\sigma \cdot \sigma'^{-1}, \sigma' \psi)$$

[on observera que cette relation cesse en général d'être vraie lorsqu'on ne suppose plus que σ' induise l'identité sur $\{\mathbf{k}(|\mathbf{k}|)+1, \dots, n\}$, cf. cependant la remarque du (h) ci-dessous].

En particulier lorsque $\mathbf{r}_{\mathbf{k}(|\mathbf{k}|)} \psi = (j; \mathbf{l})$ où \mathbf{l} est une suite décroissante inférieure ou égale à \mathbf{k} , on a

$$J(\sigma, \psi) = J(\sigma \cdot \sigma_\psi, \sigma_\psi^{-1} \psi),$$

où σ_ψ est la permutation définie en (g), 10°, du chapitre II.

Pivots et drapeaux jacobienues. — Sous les mêmes hypothèses que ci-dessus et lorsque $\psi \neq \emptyset$ on pose

$$J^{(q)}(\sigma, \psi) = J(\sigma, \psi^{(q)}) \quad \text{lorsque } 0 \leq q \leq t,$$

de sorte qu'on a

$$J^{(0)}(\sigma, \psi) = J(\emptyset) = 1,$$

et si $1 \leq q \leq t$:

$$J^{(q)}(\sigma, \psi) = \mathcal{J}(d(n), d(n-1), \dots, d(\chi(q)+1); \\ J(\sigma, \mathbf{t}_{p(n), n} \psi), J(\sigma, \mathbf{t}_{p(n-1), n-1} \psi), \\ \dots, J(\sigma, \mathbf{t}_{p(\chi(q)+1), \chi(q)+1} \psi)).$$

Il est éclairant d'observer que les $J^{(q)}(\sigma, \psi)$ sont les mineurs supérieurs gauches de rang $n-\chi(q)$ du déterminant qui définit $J(\sigma, \psi)$. Lorsque $q \geq 1$ ce sont des expressions jacobienues bien formées de type $(p, \mathbf{k}^{(q)})$. De même lorsque $\mathbf{k}(|\mathbf{k}|) \leq m \leq n+1$ les $J(\sigma, \mathbf{g}_m \psi)$ sont les mineurs supérieurs gauches de rang $n-m+1$ du déterminant qui définit $J(\sigma, \psi)$. Ce sont des expressions jacobienues bien formées de type $(p, \mathbf{g}_m \mathbf{k})$. Enfin, les $J(\sigma, \mathbf{c}_{m_2}^{m_1, m-1} \psi)$, où les contraintes sur le domaine d'indexation sont celles du (g), 3° du chapitre II, avec, en outre, la condition

$$m_2 = \psi(|\mathbf{k}|, \mathbf{k}(|\mathbf{k}|)) \quad \text{ou} \quad \mathbf{k}(|\mathbf{k}|)+1 \leq m_2 \leq m-1,$$

sont ceux des mineurs (obtenus en bordant les précédents par une ligne et une colonne) qui sont des expressions jacobienues bien formées.

L'expression jacobienne $J^{(t)}(\sigma, \psi)$ (qui est définie même lorsque $t = 0$) s'appelle le *pivot* sur lequel est formé $J(\sigma, \psi)$.

Noter que pour obtenir toutes les expressions jacobienues de type (p, \mathbf{k}) , bien formées sur le pivot $J^{(t)}(\sigma, \psi)$, il suffit de se donner la dernière ligne du tableau ψ .

On pose

$$J^*(\sigma, \psi) = J(\sigma, \psi) \prod_{q=1}^{t'} J^{(q)}(\sigma, \psi) \quad \text{lorsque } \psi \neq \emptyset \quad \text{et} \quad J^*(\sigma, \emptyset) = 1.$$

C'est le *drapeau jacobien associé* à $J(\sigma, \psi)$. Lorsque $\psi \neq \emptyset$ ce n'est pas une expression jacobienne bien formée.

Observons que, lorsque $\psi \neq \emptyset$, l'expression jacobienne

$$J'(\sigma, \psi) = \prod_{q=1}^t J^{(q)}(\sigma, \psi)$$

est égale au drapeau jacobien associé à $J^{(t)}(\sigma, \psi)$.

Lorsque ψ est régulier [cf. chap. II, (g), 5°] $J^*(\sigma, \psi)$ s'appelle un *drapeau régulier*. Observons que lorsque ψ est principal [cf. chap. II, (g), 4°] $J'(\sigma, \psi)$ est un drapeau régulier.

Idéaux d'expressions jacobienne bien formées. — Quel que soit $\mathbf{k} \in \mathcal{S}_n$, on désigne par $\bar{\Delta}_{\text{bf}}(p, \mathbf{k})$ [resp. par $\hat{\Delta}_{\text{bf}}(p, \mathbf{k})$] l'idéal de $\bar{\mathcal{A}}_n^{ip}$ (resp. $\hat{\mathcal{A}}_n^{ip}$) engendré par les expressions jacobienne bien formées de type $(p, \mathbf{u}^h \mathbf{k})$ lorsque $0 \leq h \leq N(\mathbf{k})$ (cf. (d) du chapitre II). De même on désigne par $\bar{\Delta}_{\text{pr}}(p, \mathbf{k})$ l'idéal de $\bar{\mathcal{A}}_n^{ip}$ engendré par les expressions jacobienne principales de type $(p, \mathbf{t}_s \mathbf{k})$ lorsque $1 \leq s \leq |\mathbf{k}|$.

On désigne par $\bar{\Delta}_{\text{reg}}(p, \mathbf{k})$ l'idéal de $\bar{\mathcal{A}}_n^{ip}$ engendré par les expressions jacobienne régulières de type $(p, \mathbf{u}^h \mathbf{k})$, lorsque $0 \leq h \leq N(\mathbf{k})$.

Enfin on désigne par $\Delta^*(p, \mathbf{k})$ l'idéal de $\bar{\mathcal{A}}_n^{ip}$ engendré par les drapeaux réguliers de type $(p, \mathbf{u}^h \mathbf{k})$ lorsque $0 \leq h \leq N(\mathbf{k})$. Comme en (c), (d) et (e) on définit des idéaux $\bar{\Delta}'_{\text{bf}}(p, \mathbf{k})$, $\hat{\Delta}'_{\text{bf}}(p, \mathbf{k})$, $\bar{\Delta}'_{\text{reg}}(p, \mathbf{k})$ et $\Delta^{*'}(p, \mathbf{k})$.

Avec ces conventions on a évidemment

$$\hat{\Delta}_{\text{bf}}(p, \mathbf{k}) \subset \hat{\Delta}(p, \mathbf{k})$$

et

$$\Delta^*(p, \mathbf{k}) \subset \bar{\Delta}_{\text{reg}}(p, \mathbf{k}) \subset \bar{\Delta}_{\text{pr}}(p, \mathbf{k}) + \bar{\Delta}_{\text{reg}}(p, \mathbf{k}) \subset \bar{\Delta}_{\text{bf}}(p, \mathbf{k}) \subset \bar{\Delta}(p, \mathbf{k}).$$

De même on a pour les $\hat{\Delta}_{\text{bf}}(p, \mathbf{k})$ et les $\bar{\Delta}_{\text{bf}}(p, \mathbf{k})$ des relations d'inclusion analogues à celles établies au lemme 4'. Ces relations n'ont pas lieu pour les idéaux $\bar{\Delta}_{\text{reg}}(p, \mathbf{k})$ et $\Delta^*(p, \mathbf{k})$.

(g) EXEMPLE D'UNE EXPRESSION JACOBienne BIEN FORMÉE. — On pose $n = 6$ et $p = 5$. Soit $\mathbf{k} \in \mathcal{S}_6$ le symbole donné par la formule $\mathbf{k} = (4, 3, 1, 1)$ (cf. N.B. du chapitre 2 a). Alors on a $|\mathbf{k}| = 4$ et $t(\mathbf{k}) = t'(\mathbf{k}) = 3$.

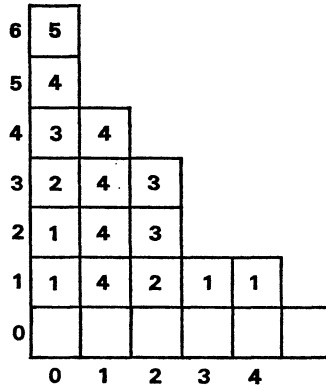
Les applications $\chi_{\mathbf{k}}$, $r_{\mathbf{k}}$ et $\rho_{\mathbf{k}}$ et les symboles $\mathbf{g}_m \mathbf{k}$ ($1 \leq m \leq 6$) et $\mathbf{k}^{(q)}$ ($1 \leq q \leq 3$) sont données par les tableaux :

$$\begin{array}{lll} \chi_{\mathbf{k}}(0) = 6 & r_{\mathbf{k}}(0) = \rho_{\mathbf{k}}(6) = 0 & \mathbf{g}_6 \mathbf{k} = (6) \\ & \rho_{\mathbf{k}}(5) = 0 & \mathbf{k}^{(1)} = \mathbf{g}_5 \mathbf{k} = (5) \\ \chi_{\mathbf{k}}(1) = 4 & r_{\mathbf{k}}(1) = \rho_{\mathbf{k}}(4) = 1 & \mathbf{k}^{(2)} = \mathbf{g}_4 \mathbf{k} = (4, 4) \\ \chi_{\mathbf{k}}(2) = 3 & r_{\mathbf{k}}(2) = \rho_{\mathbf{k}}(3) = 2 & \mathbf{g}_3 \mathbf{k} = (4, 3, 3) \\ & \rho_{\mathbf{k}}(2) = 2 & \mathbf{k}^{(3)} = \mathbf{g}_2 \mathbf{k} = (4, 3, 2) \\ \chi_{\mathbf{k}}(t(\mathbf{k})) = \chi_{\mathbf{k}}(3) = 1 & r_{\mathbf{k}}(3) = \rho_{\mathbf{k}}(1) = 4 & \mathbf{k} = \mathbf{g}_1 \mathbf{k} = (4, 3, 1, 1) \end{array}$$

En outre on a $N(\mathbf{k}) = 9$ et

$$\begin{aligned}
 \mathbf{k} &= \mathbf{t}_4 \mathbf{k} = \mathbf{u}^0 \mathbf{k} = (4, 3, 1, 1) & \mathbf{s} \mathbf{k} &= (3, 1, 1) \\
 \mathbf{t} \mathbf{k} &= \mathbf{t}_3 \mathbf{k} = \mathbf{u}^1 \mathbf{k} = (4, 3, 1) & \mathbf{s}^2 \mathbf{k} &= (1, 1) \\
 \mathbf{t}^2 \mathbf{k} &= \mathbf{t}_2 \mathbf{k} = \mathbf{u}^2 \mathbf{k} = (4, 3) & \mathbf{s}^3 \mathbf{k} &= (1) \\
 & & \mathbf{u}^3 \mathbf{k} &= (4, 2) & \mathbf{s}^4 \mathbf{k} &= \mathbf{e}_6 \\
 & & \mathbf{u}^4 \mathbf{k} &= (4, 1) \\
 \mathbf{t}^3 \mathbf{k} &= \mathbf{t}_1 \mathbf{k} = \mathbf{u}^5 \mathbf{k} = (4) & \mathbf{v}_6 \mathbf{k} &= (4, 3, 1, 1) \in \mathcal{S}_5 \\
 & & \mathbf{u}^6 \mathbf{k} &= (3) & \mathbf{v}_5 \mathbf{k} &= (4, 3, 1, 1) \in \mathcal{S}_4 \\
 & & \mathbf{u}^7 \mathbf{k} &= (2) & \mathbf{v}_4 \mathbf{k} &= (3, 1, 1) \in \mathcal{S}_3 \\
 & & \mathbf{u}^8 \mathbf{k} &= (1) & \mathbf{v}_3 \mathbf{k} &= (1, 1) \in \mathcal{S}_2 \\
 \mathbf{t}^4 \mathbf{k} &= \mathbf{t}_0 \mathbf{k} = \mathbf{u}^9 \mathbf{k} = \mathbf{e}_6 & \mathbf{v}_2 \mathbf{k} &= (1, 1) \in \mathcal{S}_1 \\
 & & & & \mathbf{d}_1 \mathbf{k} &= (4, 3, 1) \\
 & & & & \mathbf{d}_3 \mathbf{k} &= (4, 1, 1) \\
 & & & & \mathbf{d}_4 \mathbf{k} &= (3, 1, 1)
 \end{aligned}$$

La fonction $q_{\mathbf{k}}(s)$ prend les valeurs $q_{\mathbf{k}}(0) = 0, q_{\mathbf{k}}(1) = 1, q_{\mathbf{k}}(2) = 2, q_{\mathbf{k}}(3) = q_{\mathbf{k}}(4) = 3$.
 Soit ψ le tableau principal et régulier de type $(5, \mathbf{k})$ défini par le diagramme suivant :



On en déduit les tableaux suivants dont les colonnes sont indexées de façon croissante à partir de 0 et les lignes de façon décroissante à partir de $n = 6$.

$$\begin{aligned}
 \mathbf{t}_{0,6} \psi &= (5), \\
 \mathbf{t}_{0,5} \psi &= (4), \\
 \mathbf{t}_{0,4} \psi &= (3), & \mathbf{t}_{1,4} \psi &= \begin{bmatrix} 5 & \cdot \\ 4 & \cdot \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \\
 \mathbf{t}_{0,3} \psi &= (2), & \mathbf{t}_{1,3} \psi &= \begin{bmatrix} 5 & \cdot \\ 4 & \cdot \\ 2 & 4 \end{bmatrix}, & \mathbf{t}_{2,3} \psi &= \begin{bmatrix} 5 & \cdot & \cdot \\ 4 & \cdot & \cdot \\ 3 & 4 & \cdot \\ 2 & 4 & 3 \end{bmatrix},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 t_{0,2}\psi = (1), \quad t_{1,2}\psi &= \begin{bmatrix} 5 & \cdot \\ 4 & \cdot \\ 1 & 4 \end{bmatrix}, \quad t_{2,2}\psi = \begin{bmatrix} 5 & \cdot & \cdot \\ 4 & \cdot & \cdot \\ 3 & 4 & \cdot \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix}, \\
 t_{0,1}\psi = (1), \quad t_{1,1}\psi &= \begin{bmatrix} 5 & \cdot \\ 4 & \cdot \\ 1 & 4 \end{bmatrix}, \quad t_{2,1}\psi = \begin{bmatrix} 5 & \cdot & \cdot \\ 4 & \cdot & \cdot \\ 3 & 4 & \cdot \\ 1 & 4 & 2 \end{bmatrix}, \\
 t_{3,1}\psi &= \begin{bmatrix} 5 & \cdot & \cdot & \cdot \\ 4 & \cdot & \cdot & \cdot \\ 3 & 4 & \cdot & \cdot \\ 2 & 4 & 3 & \cdot \\ 1 & 4 & 3 & \cdot \\ 1 & 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad \psi = t_{4,1}\psi = \begin{bmatrix} 5 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 4 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 3 & 4 & \cdot & \cdot & \cdot \\ 2 & 4 & 3 & \cdot & \cdot \\ 1 & 4 & 3 & \cdot & \cdot \\ 1 & 4 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

En outre on a

$$\begin{aligned}
 g_6\psi &= [5 \ 6], \\
 \psi^{(1)} = g_5\psi &= \begin{bmatrix} 5 & \cdot \\ 4 & 5 \end{bmatrix}, \\
 \psi^{(2)} = g_4\psi &= \begin{bmatrix} 5 & \cdot & \cdot \\ 4 & \cdot & \cdot \\ 3 & 4 & 4 \end{bmatrix}, \\
 g_3\psi &= \begin{bmatrix} 5 & \cdot & \cdot & \cdot \\ 4 & \cdot & \cdot & \cdot \\ 3 & 4 & \cdot & \cdot \\ 2 & 4 & 3 & 3 \end{bmatrix}, \\
 \psi^{(3)} = g_2\psi &= \begin{bmatrix} 5 & \cdot & \cdot & \cdot \\ 4 & \cdot & \cdot & \cdot \\ 3 & 4 & \cdot & \cdot \\ 2 & 4 & 3 & \cdot \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{bmatrix}, \\
 \psi &= g_1\psi.
 \end{aligned}$$

Lorsque $1 \leq m_1, m_2 \leq 6$ on a

$$c_{m_1}^1 \psi = \begin{bmatrix} 5 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 4 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 3 & 4 & \cdot & \cdot & \cdot \\ 2 & 4 & 3 & \cdot & \cdot \\ 1 & 4 & 3 & \cdot & \cdot \\ 1 & 4 & 2 & 1 & m_1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad c_{m_1, m_2}^1 \psi = \begin{bmatrix} 5 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 4 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 3 & 4 & \cdot & \cdot & \cdot \\ 2 & 4 & 3 & \cdot & \cdot \\ 1 & 4 & 3 & \cdot & \cdot \\ 1 & 4 & 2 & m_1 & m_2 \end{bmatrix}.$$

Les entiers de Boardman sont donnés par les formules :

$$\begin{aligned} \lambda(\mathbf{k}) = 9, \quad \lambda(\mathbf{sk}) = 3, \quad \lambda(\mathbf{s}^2\mathbf{k}) = 1, \quad v'(5, \mathbf{k}) = 3 \times 9 - 3 - 2 \times 1 = 22, \\ \mu(\mathbf{k}) = 31, \quad \mu(\mathbf{sk}) = 9, \quad \mu(\mathbf{s}^2\mathbf{k}) = 2 \quad \text{et} \quad v(5, \mathbf{k}) = 3 \times 31 - 9 - 2 \times 2 = 80. \end{aligned}$$

Si $\psi' = \psi^{(3)}$ les

$$\mathbf{r}(h, \psi') = (j(h, \psi'); \mathbf{l}(h, \psi')) \in \overline{\mathcal{L}}(\psi', 4) \quad (1 \leq h \leq 22)$$

sont données par le tableau suivant :

| h | $\mathbf{r}(h, \psi') = (j(h, \psi'); \mathbf{l}(h, \psi'))$ |
|---------|--|
| 1..... | (1; 1, 1, 1, 1) |
| 2..... | (2; 1, 1, 1, 1) |
| 3..... | (3; 1, 1, 1, 1) |
| 4..... | (1; 2, 1, 1, 1) |
| 5..... | (2; 2, 1, 1, 1) |
| 6..... | (3; 2, 1, 1, 1) |
| 7..... | (1; 3, 1, 1, 1) |
| 8..... | (2; 3, 1, 1, 1) |
| 9..... | (3; 3, 1, 1, 1) |
| 10..... | (1; 4, 1, 1, 1) |
| 11..... | (2; 4, 1, 1, 1) |
| 12..... | (1; 2, 2, 1, 1) |
| 13..... | (2; 2, 2, 1, 1) |
| 14..... | (3; 2, 2, 1, 1) |
| 15..... | (1; 3, 2, 1, 1) |
| 16..... | (2; 3, 2, 1, 1) |
| 17..... | (3; 3, 2, 1, 1) |
| 18..... | (1; 4, 2, 1, 1) |
| 19..... | (2; 4, 2, 1, 1) |
| 20..... | (1; 3, 3, 1, 1) |
| 21..... | (2; 3, 3, 1, 1) |
| 22..... | (3; 3, 3, 1, 1) |

On voit ainsi que $\mathbf{r}_1 \psi = \mathbf{r}(18, \psi') = (j(18, \psi'); \mathbf{l}(18, \psi'))$.

On désigne par id l'élément unité du groupe G_6 . Nous décrivons à titre d'exemple l'expression jacobienne non commutative bien formée $J(\text{id}, \psi)$ de type $(5, \mathbf{k})$. Pour ne pas alourdir l'écriture des formules on pose

$$\begin{aligned} J(s, m) = J(\text{id}, \mathbf{t}_{s,m} \psi) \quad [(s, m) \in \mathcal{C}(\mathbf{k})], \\ J^{(a)} = J^{(a)}(\text{id}, \psi) \quad \text{pour} \quad 0 \leq q \leq t(\mathbf{k}) = 3 \end{aligned}$$

et

$$J_m = J(\text{id}, \mathbf{g}_m \psi) \quad \text{pour} \quad \mathbf{k}(|\mathbf{k}|) + 1 = \mathbf{k}(4) + 1 = 2 \leq m \leq 6.$$

Expression de type (6) formée sur le pivot $J^{(0)} = 1$ à partir de la ligne (5; 6) :

$$J_6 = \mathcal{J}(\hat{D}_6, Z^5) = \hat{Z}_6^{5,1}$$

Expression de type (5) formée sur le pivot J_6 à partir de la ligne (4; 5) :

$$J^{(1)} = J_5 = \mathcal{J}(\hat{D}_6, \hat{D}_5; Z^5, Z^4).$$

Expression de type (4) formée sur le pivot $J^{(1)}$ à partir de la ligne (3; 4) :

$$J(1, 4) = \mathcal{J}(\hat{D}_6, \hat{D}_5, \hat{D}_4; Z^5, Z^4, Z^3).$$

Expression de type (4) formée sur le pivot $J^{(1)}$ à partir de la ligne (2; 4) :

$$J(1, 3) = \mathcal{J}(\hat{D}_6, \hat{D}_5, \hat{D}_4; Z^5, Z^4, Z^2).$$

Expression de type (4) formée sur le pivot $J^{(1)}$ à partir de la ligne (1; 4) :

$$J(1, 2) = J(1, 1) = \mathcal{J}(\hat{D}_6, \hat{D}_5, \hat{D}_4; Z^5, Z^4, Z^1).$$

Expression de type (4, 4) formée sur le pivot $J^{(1)}$ à partir de la ligne (2; 4, 4) :

$$J^{(2)} = J_4 = \mathcal{J}(\hat{D}_6, \hat{D}_5, \hat{D}_4; Z^5, Z^4, J(1, 4)).$$

Expression de type (4, 3) formée sur le pivot $J^{(2)}$ à partir de la ligne (2; 4, 3) :

$$J(2, 3) = \mathcal{J}(\hat{D}_6, \hat{D}_5, \hat{D}_4, \hat{D}_3; Z^5, Z^4, J(1, 4), (1, 3)).$$

Expression de type (4, 3) formée sur le pivot $J^{(2)}$ à partir de la ligne (1; 4, 3) :

$$J(2, 2) = \mathcal{J}(\hat{D}_6, \hat{D}_5, \hat{D}_4, \hat{D}_3; Z^5, Z^4, J(1, 4), J(1, 2)).$$

Expression de type (4, 3) formée sur le pivot $J^{(2)}$ à partir de la ligne (1; 4, 2) :

$$J(2, 1) = \mathcal{J}(\hat{D}_6, \hat{D}_5, \hat{D}_4, \hat{D}_2; Z^5, Z^4, J(1, 4), J(1, 1)).$$

Expression de type (4, 3, 3) formée sur le pivot $J^{(2)}$ à partir de la ligne (2; 4, 3, 3) :

$$J_3 = \mathcal{J}(\hat{D}_6, \hat{D}_5, \hat{D}_4, \hat{D}_3; Z^5, Z^4, J(1, 4), J(2, 3)).$$

Expression de type (4, 3, 2) formée sur le pivot J_3 à partir de la ligne (1; 4, 3, 2) :

$$J^{(3)} = J_2 = \mathcal{J}(\hat{D}_6, \hat{D}_5, \hat{D}_4, \hat{D}_3, \hat{D}_2; Z^5, Z^4, J(1, 4), J(2, 3), J(2, 2)).$$

Expression de type (4, 3, 1) formée sur le pivot $J^{(3)}$ à partir de la ligne (1; 4, 2, 1) :

$$J(3, 1) = \mathcal{J}(\hat{D}_6, \hat{D}_5, \hat{D}_4, \hat{D}_3, \hat{D}_2, \hat{D}_1; Z^5, Z^4, J(1, 4), J(2, 3), J(2, 2), J(2, 1)).$$

Expression de type (4, 3, 1, 1) formée sur le pivot $J^{(3)}$ à partir de la ligne (1; 4, 2, 1, 1) :

$$\begin{aligned} & J(\text{id}, \psi; \hat{D}_1, \dots, \hat{D}_6; Z^1, \dots, Z^5) \\ & = J(4, 1) = \mathcal{J}(\hat{D}_6, \hat{D}_5, \hat{D}_4, \hat{D}_3, \hat{D}_2, \hat{D}_1; Z^5, Z^4, J(1, 4), J(2, 3), J(2, 2), J(3, 1)). \end{aligned}$$

Remarque. — Si dans l'expression de $J(4, 1)$ considérée comme fonction de $J(3, 1)$ on remplace $J(3, 1)$ par $J(4, 1)$ lui-même on obtient l'expression jacobienne $J(5, 1)$ de type $(4, 3, 1, 1, 1)$ formée sur le pivot $J^{(3)}$ à partir de la ligne $(1; 4, 2, 1, 1, 1)$ et par itération de ce procédé toutes les expressions jacobienes $J(r+2, 1)$ de type $(4, 3, \underbrace{1, \dots, 1}_{r \text{ fois}})$ formées sur le pivot $J^{(3)}$ à partir de la ligne $(1; 4, 2, \underbrace{1, \dots, 1}_{r \text{ fois}})$.

(h) CONDITIONS POUR QU'UNE EXPRESSION JACOBIENNE BIEN FORMÉE SOIT DIFFÉRENTE DE ZÉRO. — Soient p et n des entiers ≥ 1 et \mathbf{k} un symbole de hauteur n .

Soient χ, r, ρ, t et t' les applications et les nombres associés à \mathbf{k} au (c) du chapitre II. Soient ψ un tableau de type (p, \mathbf{k}) et σ une permutation de l'ensemble $\{1, \dots, n\}$.

LEMME 8. — *S'il existe un couple $(s, m) \in \mathcal{C}(\mathbf{k})$ tel que $J(\sigma, \mathbf{t}_{s,m} \psi) = 0$ alors $J(\sigma, \psi) = 0$.*
En effet sous les hypothèses du lemme on voit par récurrence sur l'entier s' que

$$J(\sigma, \mathbf{t}_{s',m} \psi) = 0$$

lorsque $s \leq s' \leq \rho(m)$, puis que $J(\psi, \mathbf{t}_{s',m'} \psi) = 0$ pour tout $(s', m') \in \mathcal{C}(\mathbf{k})$ tel que $\rho(m)+1 \leq s' \leq \mathbf{k}(|\mathbf{k}|)$ car les déterminants qui définissent ces expressions jacobienes ont une ligne identiquement nulle.

LEMME 9. — *S'il existe un couple $(s, m) \in \mathcal{C}(\mathbf{k})$ ($s \geq 1$) tel que $\psi(s, m) \geq \mathbf{k}(s)+1$ alors*

$$J(\sigma, \mathbf{t}_{s,m} \psi) = 0.$$

En effet, sous les hypothèses du lemme le déterminant qui définit $J(\sigma, \mathbf{t}_{s,m} \psi)$ a deux colonnes égales.

LEMME 10. — *S'il existe un entier q tel que $1 \leq q \leq t$, un entier m tel que $\chi(t) \leq m \leq \chi(q)$ et un entier m' tel que $\chi(q)+1 \leq m' \leq \chi(q-1)$ pour lesquels la restriction de $\mathbf{r}_m \psi$ à l'ensemble $\{0, 1, \dots, r(q-1)\}$ soit égale à l'application $\mathbf{r}_{m'} \psi$, alors on a*

$$J_1 = J(\sigma, \mathbf{t}_{r(q-1)+1, m} \psi) = 0.$$

D'autre part, s'il existe un entier q tel que $1 \leq q \leq t$ et des entiers distincts m et m' tels que $\chi(q)+1 \leq m, m' \leq \chi(q-1)$, pour lesquels $\mathbf{r}_m \psi = \mathbf{r}_{m'} \psi$ alors on a

$$J_2 = J(\sigma, \mathbf{t}_{r(q-1)+1, m'} \psi) = 0 \quad \text{lorsque } \mathbf{k}(|\mathbf{k}|) \leq m'' \leq \chi(q).$$

En effet, sous les hypothèses du lemme, les déterminants qui définissent J_1 et J_2 ont deux lignes égales.

Pour tout entier q tel que $1 \leq q \leq t$ et tout entier s tel que $r(q-1) \leq s \leq |\mathbf{k}|$, on définit $\varphi(s, q)$ en posant

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi(r(q-1), q) = 0 \\ \text{et} \\ \varphi(s, q) = \varphi(s-1, q) + 1 + \sum_{q'=q}^{r(\mathbf{t}_s \mathbf{k})-1} \varphi(r(q'), q)(\chi(q') - \chi(q'+1)). \end{array} \right.$$

LEMME 11. — Soient q et m des entiers tels que $1 \leq q \leq t$ et $\chi(q)+1 \leq m \leq \chi(q-1)-1$. On désigne par ψ_m le tableau obtenu en permutant entre elles les lignes $r_m \psi$ et $r_{m+1} \psi$ du tableau ψ [lorsque $m \geq \mathbf{k}(|\mathbf{k}|)+1$] et la restriction $\mathbf{t}_m \psi$ à l'ensemble $\{0, \dots, |\mathbf{k}|-1\}$ de la ligne $r_m \psi$ et la ligne $r_{m+1} \psi$ [lorsque $m = \mathbf{k}(|\mathbf{k}|)$ et $t' \neq t$].

Alors on a

$$J(\sigma, \psi_m) = (-1)^{\varphi(|\mathbf{k}|, q)} J(\sigma, \psi).$$

En effet, en appliquant la règle selon laquelle un déterminant change de signe lorsqu'on permute entre elles deux de ses lignes ou lorsqu'on change le signe de l'une de ses lignes. On voit que

$$J(\sigma, \mathbf{t}_{s, m'} \psi_m) = (-1)^{\varphi(s, q)} J(\sigma, \mathbf{t}_{s, m'} \psi)$$

[lorsque $r(q-1)+1 \leq s \leq |\mathbf{k}|$ et $\mathbf{k}(|\mathbf{k}|) \leq m' \leq \mathbf{k}(s)$].

COROLLAIRE. — Lorsque ψ est régularisable l'expression $J(\sigma, \psi)$ est au signe près, égale à l'expression $J(\sigma, \bar{\psi})$ où $\bar{\psi}$ désigne le régularisé de ψ [cf. (g), 7°, du chapitre II].

En combinant les quatre lemmes précédents on a la proposition suivante :

PROPOSITION 1. — Pour que l'expression jacobienne $J(\sigma, \psi)$ soit différente de zéro il faut que le tableau ψ soit non trivial, c'est-à-dire qu'il satisfasse aux conditions (i) et (ii) des tableaux principaux [cf. (g), 4°, du chapitre II]. En outre si ψ_0 est le tableau ordonné obtenu à partir de ψ en permutant les lignes de ce dernier de façon à satisfaire à la condition (iii) des tableaux principaux, alors $J(\sigma, \psi_0)$ est égal à $J(\sigma, \psi)$ au signe près.

Remarque. — La remarque 3 du (f) ci-dessus peut être complétée de la façon suivante :

Soit σ' une permutation de l'ensemble $\{1, \dots, n\}$ laissant globalement invariants les sous-ensembles $\{1, \dots, \mathbf{k}(|\mathbf{k}|)\}$ et $\{\chi(q)+1, \dots, \chi(q-1)\}$ (lorsque $1 \leq q \leq t$). Alors quels que soient $\sigma \in G_n$ et $\psi \in \hat{\mathcal{F}}(p, \mathbf{k})$, l'expression jacobienne de $J(\sigma, \psi)$ est, au signe près, égale à l'expression $J(\sigma \cdot \sigma'^{-1}, \sigma' \psi)$. Ceci permet dans l'énumération des expressions $J(\sigma, \psi)$ de ne prendre en considération que des expressions jacobiniennes formées à partir de tableaux ψ surcondensés, en un sens qu'on laisse au lecteur le soin de préciser, car on n'aura pas besoin dans ce travail de faire appel à ce raffinement de la technique.

(i) EXPRESSIONS JACOBINIENNES MIXTES. — Soient n et p des entiers supérieurs ou égaux à 1.

Soient \mathbf{k} un symbole de hauteur n tel que $|\mathbf{k}| \geq 2$ et χ, ρ, r et t les applications et le nombre associés à \mathbf{k} [cf. (c) du chapitre II]. Soient $\psi' \in \hat{\mathcal{F}}'(p, \mathbf{k})$ un tableau [cf. (g), 3° du chapitre II] et δ un élément de $\overline{\mathcal{A}}_n^p$ (resp. de $\hat{\mathcal{A}}_n^p$). Soient $\sigma \in G_n$ et $m \in \{1, \dots, n\}$. On pose

$$\begin{aligned} J(\sigma, \psi'; \delta, m) &= \mathcal{J}(d(n), d(n-1), \dots, d(\mathbf{k}(|\mathbf{k}|)+1), d(m); \\ &\quad J(\sigma, \mathbf{t}_{\rho(n), n} \psi'), J(\sigma, \mathbf{t}_{\rho(n-1), n-1} \psi'), \dots, \\ &\quad J(\sigma, \mathbf{t}_{\rho(\mathbf{k}(|\mathbf{k}|)+1), \mathbf{k}(|\mathbf{k}|)+1} \psi'), \delta), \end{aligned}$$

où comme au (f) on note

$$d(i) = \begin{cases} \overline{D}_{\sigma(i)} \\ \text{ou} \\ \hat{D}_{\sigma(i)}, \end{cases}$$

selon qu'on est dans le cas commutatif ou non.

C'est une expression jacobienne qui appartient à $\overline{\Delta}(p, \mathbf{k})$ [resp. à $\hat{\Delta}(p, \mathbf{k})$] et qui est de type (p, \mathbf{k}) lorsque $\delta \in \overline{\Delta}(p, \mathbf{tk})$ [resp. $\delta \in \hat{\Delta}(p, \mathbf{tk})$] mais qui n'est en général pas bien formée, même lorsque δ est lui-même bien formé.

DÉFINITION. — Lorsque $\delta \in \overline{\Delta}(p, \mathbf{tk})$ [resp. $\delta \in \hat{\Delta}(p, \mathbf{tk})$] l'expression $J(\sigma, \psi'; \delta, m)$ s'appelle une *expression jacobienne mixte*.

LEMME 12 (lemme de pseudo-linéarité). — Soit h un entier positif. Soient a_1, \dots, a_h des éléments de $\overline{\mathcal{A}}_n^p$ (resp. de $\hat{\mathcal{A}}_n^p$); soient $\delta_1, \dots, \delta_h$ des éléments de $\overline{\Delta}(p, \mathbf{tk})$ [resp. de $\hat{\Delta}(p, \mathbf{tk})$] et δ un élément de $\overline{\Delta}(p, \mathbf{t}^2 \mathbf{k})$ [resp. de $\hat{\Delta}(p, \mathbf{t}^2 \mathbf{k})$]. Alors il existe un élément δ' de $\overline{\Delta}(p, \mathbf{tk})$ [resp. $\hat{\Delta}(p, \mathbf{tk})$] tel que

$$J\left(\sigma, \psi'; \sum_{h'=1}^h a_{h'} \delta_{h'} + \delta, m\right) = \sum_{h'=1}^h a_{h'} J(\sigma, \psi'; \delta_{h'}, m) + \delta'.$$

En effet d'après la formule (5) du lemme 2 du (a) on a

$$\delta' = \sum_{h'=1}^h \delta_{h'} J(\sigma, \psi'; a_{h'}, m) + J(\sigma, \psi'; \delta, m)$$

et d'après le lemme 5' du (d), l'expression jacobienne $J(\sigma, \psi'; \delta, m)$ qui n'est pas effective, appartient à $\overline{\Delta}(p, \mathbf{tk})$ [resp. à $\hat{\Delta}(p, \mathbf{tk})$].

De façon générale, soit $s \in \{0, \dots, |\mathbf{k}| - 1\}$ et $(m(s+1), \dots, m(|\mathbf{k}|))$ un système d'éléments de $\{1, \dots, n\}$; on définit $J(\sigma, \psi'; \delta, (m(s+1), \dots, m(|\mathbf{k}|)))$ en posant $J_s = \delta$ puis

$$\begin{aligned} J_{s'} &= \mathcal{J}(d(n), d(n-1), \dots, d(\mathbf{k}(s)+1), d(m(s'))); \\ &J(\sigma, \mathbf{t}_{p(n), n} \psi'), J(\sigma, \mathbf{t}_{p(n-1), n-1} \psi'), \dots, \\ &J(\sigma, \mathbf{t}_{p(\mathbf{k}(s)+1), \mathbf{k}(s)+1} \psi'), J_{s'-1}, \end{aligned}$$

lorsque $s+1 \leq s' \leq |\mathbf{k}|$ et enfin

$$J(\sigma, \psi'; \delta, (m(s+1), \dots, m(|\mathbf{k}|))) = J_{|\mathbf{k}|}.$$

En appliquant le lemme 12 successivement à tous les $J_{s'}$, pour $s+1 \leq s' \leq |\mathbf{k}|$, on établit le lemme suivant :

LEMME 13 (pseudo-linéarité généralisée). — Soient s un entier tel que $1 \leq s \leq |\mathbf{k}| - 1$ et h un entier positif. Soient a_1, \dots, a_h des éléments de $\overline{\mathcal{A}}_n^p$ (resp. de $\hat{\mathcal{A}}_n^p$); soient $\delta_1, \dots, \delta_h$ des éléments de $\overline{\Delta}(p, \mathbf{t}_s \mathbf{k})$ [resp. de $\hat{\Delta}(p, \mathbf{t}_s \mathbf{k})$] et δ un élément de $\overline{\Delta}(p, \mathbf{t}_{s-1} \mathbf{k})$ [resp.

de $\hat{\Delta}(p, \mathbf{t}_{s-1} \mathbf{k})$. (Pour $s = 1$ on doit donc avoir $\delta = 0$). Alors il existe un élément δ' de $\bar{\Delta}(p, \mathbf{tk})$ [resp. de $\hat{\Delta}(p, \mathbf{tk})$] tel que

$$\begin{aligned} & J\left(\sigma, \psi'; \sum_{h'=1}^h a_{h'} \delta_{h'} + \delta, (m(s+1), \dots, m(|\mathbf{k}|))\right) \\ &= \sum_{h'=1}^h a_{h'} J(\sigma, \psi'; \delta_{h'}, (m(s+1), \dots, m(|\mathbf{k}|))) + \delta'. \end{aligned}$$

CHAPITRE IV

Propriétés des expressions jacobienues bien formées

(a) LE LEMME DE RÉDUCTION (CAS GÉNÉRAL). — Soient n et p des entiers supérieurs ou égaux à 1 et \mathbf{k} un symbole de hauteur n .

Soit $\psi' \in \hat{\mathcal{F}}'(p, \mathbf{k})$ [cf. 3°, (g), du chapitre II] et soit $\sigma \in G_n$ une permutation de l'ensemble $\{1, \dots, n\}$. On désigne par $\bar{\Delta}(\sigma, \psi', |\mathbf{k}|)$ [resp. par $\hat{\Delta}(\sigma, \psi', |\mathbf{k}|)$] l'idéal de $\bar{\mathcal{A}}_n^p$ (resp. de $\hat{\mathcal{A}}_n^p$) engendré par les expressions jacobienues $J(\sigma, \mathbf{t}_{s, \mathbf{k}(|\mathbf{k}|)} \psi)$ où $\psi \in \hat{\mathcal{D}}(\psi', |\mathbf{k}|)$ [cf. (g), 3°, du chapitre II; pour la définition de $\mathbf{t}_{s, m} \psi$, cf. (g), 1°, du chapitre II] et $1 \leq s \leq |\mathbf{k}|$.

LEMME 1. — Soient n et h des entiers supérieurs ou égaux à 1 et \mathbf{k} un symbole de hauteur n et de longueur 1. On suppose que l'entier $m = \mathbf{k}(1)$ vérifie la condition $n - h \leq m$.

Soit $\psi' \in \hat{\mathcal{F}}'(h, \mathbf{k})$ le tableau défini (lorsque $m \leq n - 1$) en posant :

$$\psi'(0, m') = h - n + m' \quad \text{pour } m + 1 \leq m' \leq n$$

et

$$\psi'(1, m + 1) = m + 1.$$

Soit id l'élément unité du groupe G_n .

Alors quel que soit $\delta \in \hat{\Delta}(h, \mathbf{k})$, l'élément $J(\text{id}, \psi')^{n-m+1} \delta$ est combinaison linéaire des $J(\text{id}, \psi)$ où $\psi \in \hat{\mathcal{D}}(\psi', 1)$.

Ce lemme a déjà été énoncé (avec d'autres notations) et démontré au (a) du chapitre I.

LEMME 2. — Soient n et p des entiers supérieurs ou égaux à 1 et \mathbf{k} un symbole de hauteur n . Soient r, χ et t les applications et le nombre associés à \mathbf{k} au (c) du chapitre II. [Lorsque $t = 0$ on pose $r(t - 1) = -1$.] Soit $\psi' \in \hat{\mathcal{F}}'(p, \mathbf{k})$ [cf. (g), 3°, du chapitre II] et $\sigma \in G_n$. Alors quelle que soit l'expression jacobienne effective δ de type (p, \mathbf{k}) il existe $\delta' \in \bar{\Delta}(p, \mathbf{tk})$ [resp. $\delta' \in \hat{\Delta}(p, \mathbf{tk})$] tel que l'élément

$$(J(\sigma, \psi'))^{(|\mathbf{k}| - r(t-1))(n - \mathbf{k}(|\mathbf{k}|) + 1)} \prod_{q=1}^{t-1} (J^{(q)}(\sigma, \psi'))^{(r(q) - r(q-1))(n - \chi(q) + 1)} \delta - \delta',$$

soit combinaison linéaire des $J(\sigma, \psi)$ où $\psi \in \hat{\mathcal{D}}(\psi', |\mathbf{k}|)$.

Ce lemme, évident pour $\mathbf{k} = \mathbf{e}_n$ se démontre par récurrence sur la longueur de \mathbf{k} . On pose $m = \mathbf{k}(|\mathbf{k}|)$ et on désigne par $h-p$ le nombre d'expressions jacobiniennes effectives de type $(p, \mathbf{t}_s, \mathbf{k})$ (pour $1 \leq s \leq |\mathbf{k}| - 1$) et on définit une spécialisation $\hat{\phi}$ de $\hat{\mathcal{A}}'_n(U^1, \dots, U^h)$ dans $\overline{\mathcal{A}}'_n(Z^1, \dots, Z^p)$ [resp. dans $\hat{\mathcal{A}}'_n(Z^1, \dots, Z^p)$] comme dans l'exemple 1 du chapitre III en posant

$$\hat{\phi}(U^{h-n+m'}) = J(\sigma, \mathbf{t}_{\rho(m'), m'} \psi') \quad \text{pour } m+1 = \mathbf{k}(|\mathbf{k}|)+1 \leq m' \leq n$$

[l'application $\rho = \rho_{\mathbf{k}}$ ayant été définie au (c) du chapitre II] et en associant aux $U^{h'}$ (pour $1 \leq h' \leq h-n+m$) les expressions jacobiniennes de type $(p, \mathbf{t}_s, \mathbf{k})$ et les Z^j restants et aux \hat{D}_i les $d(i)$ ($1 \leq i \leq n$) [cf. (f) du chapitre III] pour la définition de $d(i)$.

Le lemme précédent permet alors d'affirmer que l'élément

$$a = (J(\sigma, \psi'))^{n-\mathbf{k}(|\mathbf{k}|)+1} \delta$$

est combinaison linéaire d'expressions jacobiniennes mixtes $J_1, \dots, J_{h'}$ ($1 \leq h' \leq h$) formées sur le pivot $J(\sigma, \psi')$. Soient $\delta_1, \dots, \delta_{h'}$ les éléments à partir desquels sont formées les dernières lignes de $J_1, \dots, J_{h'}$. L'hypothèse de récurrence appliquée à ceux des δ_i ($1 \leq i \leq h'$) qui sont de type $(p, \mathbf{t}\mathbf{k})$, le lemme 11 du (h) du chapitre III appliqué aux J_i correspondants et le lemme 5 du (c) du chapitre III appliqué aux J_i restants permettent alors de conclure.

NOTATION. — Pour tout symbole \mathbf{k} , on pose

$$\alpha'(\mathbf{k}) = \max_{1 \leq q \leq t} (r(q) - r(q-1))(n - \chi(q) + 1)$$

et

$$\alpha(\mathbf{k}) = \sum_{s=1}^{|\mathbf{k}|} \alpha(\mathbf{t}_s, \mathbf{k}).$$

PROPOSITION 1. — *Sous les hypothèses du lemme 2 et avec les notations du (f) du chapitre III, on a*

$$(J^{\#}(\sigma, \psi'))^{\alpha(\mathbf{k})} \hat{\Delta}(p, \mathbf{k}) \subset \hat{\Delta}(\sigma, \psi', |\mathbf{k}|)$$

et par spécialisation

$$(J^{\#}(\sigma, \psi'))^{\alpha(\mathbf{k})} \overline{\Delta}(p, \mathbf{k}) \subset \overline{\Delta}(\sigma, \psi', |\mathbf{k}|).$$

Cette proposition évidente pour $\mathbf{k} = \mathbf{e}_n$ se démontre par récurrence sur la longueur de \mathbf{k} . D'après le lemme 2 on a

$$J^{\#}(\sigma, \psi')^{\alpha'(\mathbf{k})} \hat{\Delta}(p, \mathbf{k}) \subset \hat{\Delta}(\sigma, \psi', |\mathbf{k}|) + \hat{\Delta}(p, \mathbf{t}\mathbf{k})$$

[resp. $J^{\#}(\sigma, \psi')^{\alpha'(\mathbf{k})} \overline{\Delta}(p, \mathbf{k}) \subset \overline{\Delta}(\sigma, \psi', |\mathbf{k}|) + \overline{\Delta}(p, \mathbf{t}\mathbf{k})$].

On déduit alors la proposition de l'hypothèse de récurrence compte tenu de la relation $\alpha(\mathbf{k}) = \alpha'(\mathbf{k}) + \alpha(\mathbf{t}\mathbf{k})$.

(b) LE LEMME DU PIVOT.

LEMME 3. — Soit h un entier supérieur ou égal à 1. On désigne par \mathbf{k} le symbole de hauteur h et de longueur 1 défini en posant $\mathbf{k}(1) = 1$ et par ψ le tableau de type (h, \mathbf{k}) défini en posant

$$\psi(0, m) = m \quad (\text{pour } 1 \leq m \leq h)$$

et

$$\psi(1, 1) = 1.$$

On désigne par id l'élément unité du groupe G_n . Alors avec les notations du (g), 3°, du chapitre II (lorsque $1 \leq m \leq h+1$) on a

$$(\text{J}(\text{id}, g_m \psi))^{m-2} \text{J}(\text{id}, \psi) = \det(\text{J}(\text{id}, \mathbf{c}_{m_2}^{m_1, m-1} \psi)) \quad (m-1 \geq m_1, m_2 \geq 1).$$

Ce résultat est classique (cf. [11], chap. VI, n° 187, p. 179) et est proposé en exercice dans [3] (cf. ex. 12). C'est l'extension d'ordre $h-m+1$ du développement total d'un déterminant d'ordre $m-1$. On peut le démontrer en utilisant les constructions du lemme 1 du chapitre I. On peut encore l'énoncer.

LEMME 3'. — Avec les notations du lemme 1 [chap. I, (a)] et de sa démonstration, en supposant $I' = J' = J_0$, ainsi que $0 \leq n-k \leq \min(n, p) = h$, soit

$$\delta'(z) = \det(y_i^j(z)) \quad (1 \leq i, j \leq h).$$

Alors, on a

$$(\delta(z))^{h+k-n-1} \delta'(z) = \det(\delta_{ij}(z)) \quad (n-k+1 \leq i, j \leq h).$$

LEMME 4. — Soient n et p des entiers supérieurs ou égaux à 1 et \mathbf{k} un symbole de hauteur n , différent de \mathbf{e}_n . Soient χ et t' l'application et le nombre associés à \mathbf{k} au (c) du chapitre II. Soient $\psi \in \hat{\mathcal{F}}(p, \mathbf{k})$ [cf. (g), 1°, du chapitre II] et $\sigma \in G_n$. Alors, quel que soit $m \in \{\mathbf{k}(|\mathbf{k}|), \dots, \chi(t')+1\}$ on a

$$(\text{J}(\sigma, g_m \psi))^{m-k(|\mathbf{k}|)-1} \text{J}(\sigma, \psi) = \det(\text{J}(\sigma, \mathbf{c}_{m(m_2)}^{m_1, m-1} \psi)) \quad [m-1 \geq m_1, m_2 \geq \mathbf{k}(|\mathbf{k}|)].$$

où

$$\mathbf{m}(m_2) = \begin{cases} m_2 & \text{lorsque } m-1 \geq m_2 \geq \mathbf{k}(|\mathbf{k}|)+1, \\ \psi(|\mathbf{k}|, \mathbf{k}(|\mathbf{k}|)) & \text{lorsque } m_2 = \mathbf{k}(|\mathbf{k}|). \end{cases}$$

En particulier, pour $m = \chi(t')+1$, on a

$$(\text{J}^{(t')}(\sigma, \psi))^{\chi(t')-\mathbf{k}(|\mathbf{k}|)} \text{J}(\sigma, \psi) = \det(\text{J}(\sigma, \mathbf{c}_{m(m_2)}^{m_1, m-1} \psi)) \quad [\chi(t') \geq m_1, m_2 \geq \mathbf{k}(|\mathbf{k}|)].$$

Ce lemme s'obtient à partir du précédent par spécialisation. On pose

$$h = n - \mathbf{k}(|\mathbf{k}|) + 1$$

et

$$\hat{\phi}(U^h) = \begin{cases} J(\sigma, \mathfrak{t}_{|\mathbf{k}|-1, \mathbf{k}(|\mathbf{k}|)} \Psi) & \text{lorsque } h' = 1 \\ \text{et} \\ J(\sigma, \mathfrak{t}_{\rho(\mathbf{k}(|\mathbf{k}|)+h'-1), \mathbf{k}(|\mathbf{k}|)+h'-1} \Psi) & \text{lorsque } 2 \leq h' \leq h \end{cases}$$

[où ρ est l'application associée à \mathbf{k} au (c) du chapitre II] et on associe $d(\Psi(|\mathbf{k}|, \mathbf{k}(|\mathbf{k}|)))$ à \hat{D}_1 et $d(n-h+h')$ à \hat{D}_h lorsque $2 \leq h' \leq h$ [pour la définition de $d(i)$, cf. (f) du chapitre III].

(c) PREMIER LEMME DE COMMUTATION.

N.B. — Dans toute la suite, sauf mention expresse du contraire, [cf. (h)] on va se restreindre au cas commutatif.

LEMME 5. — Soit h un entier supérieur ou égal à 2. On désigne par \mathbf{k} le symbole de hauteur h et de longueur 2 défini en posant $\mathbf{k}(1) = \mathbf{k}(2) = 2$ et par $\psi_{1,2}$ et $\psi_{2,1}$ les tableaux de type $(h-1, \mathbf{k})$ définis en posant

$$\begin{cases} \psi_{1,2}(0, m) = m-1 \\ \psi_{1,2}(1, 2) = 1 \\ \psi_{1,2}(2, 2) = 2 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \psi_{2,1}(0, m) = m-1 \text{ pour } 2 \leq m \leq h, \\ \psi_{2,1}(1, 2) = 2, \\ \psi_{2,1}(2, 2) = 1. \end{cases}$$

On note ψ' le tableau $\psi' = \psi_{1,2}^{(t)} = \psi_{2,1}^{(t)}$ (où $t = 0$ si $h = 2$ et 1 si $h \geq 3$).

Soit id l'élément unité du groupe G_h . Alors on a

$$\begin{aligned} & J(\text{id}, \psi_{2,1}) - J(\text{id}, \psi_{1,2}) \\ &= \mathcal{J}(\overline{D}_h, \overline{D}_{h-1}, \dots, \overline{D}_1; U^{h-1}, U^{h-2}, \dots, U^1, J(\text{id}, \psi')) \end{aligned}$$

[où les U^m ($1 \leq m \leq h-1$) désignent les indéterminées de $\overline{\mathcal{A}}_h^{h-1}$].

Le lemme 5 vient d'être énoncé en utilisant les notations qui nous serviront dans la suite. Pour développer les calculs nécessaires à sa démonstration il est plus agréable de l'énoncer sous une forme légèrement différente, ce que nous allons faire maintenant.

LEMME 5'. — Soient k un entier supérieur ou égal à 1 et $\mathcal{A}'_{k+2}(U^1, \dots, U^{k+1})$ l'anneau défini au (e) du chapitre III. Pour tout $i \in \{1, \dots, k+2\}$ on pose

$$W_i = \mathcal{J}(\overline{D}_1, \dots, \overline{D}_i, \dots, \overline{D}_{k+2}; U^1, \dots, U^{k+1})$$

(où, comme dans toute la suite, la notation \hat{i} signifie que l'indice i est omis). En outre on pose

$$\begin{aligned} J_{1,2} &= \mathcal{J}(\overline{D}_1, \dots, \overline{D}_{k+1}; U^1, \dots, U^k, W_{k+1}), \\ J_{2,1} &= \mathcal{J}(\overline{D}_1, \dots, \overline{D}_k, \overline{D}_{k+2}; U^1, \dots, U^k, W_{k+2}), \\ \delta &= \mathcal{J}(\overline{D}_1, \dots, \overline{D}_k; U^1, \dots, U^k), \\ J &= \mathcal{J}(\overline{D}_1, \dots, \overline{D}_{k+2}; U^1, \dots, U^{k+1}, \delta). \end{aligned}$$

Avec ces conventions on a

$$J_{1,2} - J_{2,1} = -J.$$

Pour démontrer ce lemme on introduit en outre les notations suivantes :

$$\left. \begin{aligned} \delta_i &= \mathcal{J}(\overline{D}_1, \dots, \overline{D}_{\hat{i}}, \dots, \overline{D}_{k+1}; U^1, \dots, U^k) \\ \delta'_i &= \mathcal{J}(\overline{D}_1, \dots, \overline{D}_{\hat{i}}, \dots, \overline{D}_k, \overline{D}_{k+2}; U^1, \dots, U^k) \\ \bar{\delta}_i &= \mathcal{J}(\overline{D}_1, \dots, \overline{D}_k; U^1, \dots, U^{\hat{i}}, \dots, U^{k+1}) \end{aligned} \right\} \text{ lorsque } 1 \leq i \leq k$$

et

$$\left. \begin{aligned} \delta_{i,j} &= \mathcal{J}(\overline{D}_1, \dots, \overline{D}_{\hat{j}}, \dots, \overline{D}_{k+1}; U^1, \dots, U^{\hat{i}}, \dots, U^{k+1}) \\ \delta'_{i,j} &= \mathcal{J}(\overline{D}_1, \dots, \overline{D}_{\hat{j}}, \dots, \overline{D}_k, \overline{D}_{k+2}; U^1, \dots, U^{\hat{i}}, \dots, U^{k+1}) \\ \alpha_{j,i} &= \mathcal{J}(\overline{D}_1, \dots, \overline{D}_{\hat{i}}, \dots, \overline{D}_k; U^1, \dots, U^{\hat{j}}, \dots, U^k) \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{lorsque } 1 \leq i \leq k \\ \text{et } 1 \leq j \leq k, \end{array}$$

puis

$$\begin{aligned} A_1 &= \sum_{i,j,l \in \{1, \dots, k\}} \overline{D}_i \overline{D}_l U^j ((-1)^{j+l} \delta'_{j,l} (-1)^{i+k+1} \delta_i \\ &\quad - (-1)^{j+l} \delta_{j,l} (-1)^{i+k+1} \delta'_i), \\ A_2 &= (-1)^{2k+2} \delta \sum_{j,l \in \{1, \dots, k\}} (-1)^{j+l} (\overline{D}_{k+1} \overline{D}_l U^j \delta'_{j,l} - \overline{D}_{k+2} \overline{D}_l U^j \delta_{j,l}), \\ A_3 &= \sum_{i,l \in \{1, \dots, k\}} \overline{D}_i \overline{D}_l U^{k+1} ((-1)^{l+k+1} \delta'_i (-1)^{i+k+1} \delta_i \\ &\quad - (-1)^{l+k+1} \delta_i (-1)^{i+k+1} \delta'_i), \\ A_4 &= \sum_{i,j \in \{1, \dots, k\}} (\overline{D}_i \overline{D}_{k+2} U^j (-1)^{j+k+1} \bar{\delta}_j (-1)^{i+k+1} \delta_i \\ &\quad - \overline{D}_i \overline{D}_{k+1} U^j (-1)^{j+k+1} \bar{\delta}_j (-1)^{i+k+1} \delta'_i), \\ A_5 &= (-1)^{2k+2} \delta \sum_{i \in \{1, \dots, k\}} (\overline{D}_i \overline{D}_{k+2} U^{k+1} (-1)^{i+k+1} \delta_i \\ &\quad - \overline{D}_i \overline{D}_{k+1} U^{k+1} (-1)^{i+k+1} \delta'_i), \\ A_6 &= \sum_{j \in \{1, \dots, k\}} (\overline{D}_{k+1} \overline{D}_{k+2} U^j (-1)^{j+k+1} \bar{\delta}_j (-1)^{2k+2} \delta \\ &\quad - \overline{D}_{k+2} \overline{D}_{k+1} U^j (-1)^{j+k+1} \bar{\delta}_j (-1)^{2k+1} \delta), \\ A_7 &= (-1)^{2k+2} \delta \sum_{l \in \{1, \dots, k\}} (\overline{D}_{k+1} \overline{D}_l U^{k+1} (-1)^{l+k+1} \delta'_l \\ &\quad - \overline{D}_{k+2} \overline{D}_l U^{k+1} (-1)^{l+k+1} \delta_l), \\ A_8 &= (\overline{D}_{k+1} \overline{D}_{k+2} U^{k+1} (-1)^{2k} \delta (-1)^{2k+2} \delta - \overline{D}_{k+2} \overline{D}_{k+1} U^{k+1} (-1)^{2k} \delta (-1)^{2k+2} \delta) \end{aligned}$$

et enfin

$$\begin{aligned} B_1 &= - \sum_{i,j,l \in \{1, \dots, k\}} \overline{D}_i \overline{D}_l U^j (-1)^{j+l} \alpha_{j,l} (-1)^{i+k+2} W_i, \\ B_2 &= - \sum_{j,l \in \{1, \dots, k\}} \overline{D}_{k+1} \overline{D}_l U^j (-1)^{j+l} \alpha_{j,l} (-1)^{2k+3} W_{k+1}, \\ B_3 &= - \sum_{j,l \in \{1, \dots, k\}} \overline{D}_{k+2} \overline{D}_l U^j (-1)^{j+l} \alpha_{j,l} (-1)^{2k+4} W_{k+2}. \end{aligned}$$

En développant par rapport à leurs dernières lignes les déterminants $J_{1,2}$ et $J_{2,1}$, on voit alors que

$$J_{1,2} - J_{2,1} = \sum_{h=1}^8 A_h.$$

De même en développant par rapport à sa dernière ligne le déterminant J on constate que $-J = B_1 + B_2 + B_3$. Comme les \bar{D}_i commutent entre eux, on a

$$A_6 = A_8 = A_5 + A_7 = A_3 = 0.$$

D'après le lemme 3 où l'on a posé $h = k+1$ et $m = 3$, on a les identités

$$(-1)^{j+l+2k+2} (\delta \delta'_{j,l} - \bar{\delta}_j \delta'_l) = -(-1)^{j+l+2k+3} \alpha_{j,l} W_{k+1}$$

et

$$(-1)^{j+l+2k+2} (\bar{\delta}_j \delta_l - \delta \delta_{j,l}) = -(-1)^{j+l+2k+4} \alpha_{j,l} W_{k+2},$$

quels que soient $j, l \in \{1, \dots, k\}$ car elles sont respectivement équivalentes à

$$\alpha_{j,l} W_{k+1} = \det \begin{pmatrix} \delta & \delta'_l \\ \bar{\delta}_j & \delta'_{j,l} \end{pmatrix}$$

et à

$$\alpha_{j,l} W_{k+2} = \det \begin{pmatrix} \delta & \delta_l \\ \bar{\delta}_j & \delta_{j,l} \end{pmatrix},$$

d'où l'on tire que $A_2 + A_4 = B_2 + B_3$.

Pour les mêmes raisons on a

$$(-1)^{2i+j+k+1} (\delta'_{j,i} \delta_i - \delta_{j,i} \delta'_i) = -(-1)^{2i+j+k+2} \alpha_{j,i} W_i \quad \text{lorsque } 1 \leq i \leq k,$$

car

$$\alpha_{j,i} W_i = \det \begin{pmatrix} \delta_i & \delta'_i \\ \delta_{j,i} & \delta'_{j,i} \end{pmatrix}.$$

On pose

$$M = \begin{pmatrix} V_{1,1} & V_{1,2} & V_{1,3} & V_{1,4} \\ V_{2,1} & V_{2,2} & V_{2,3} & V_{2,4} \\ V_{3,1} & V_{3,2} & V_{3,3} & V_{3,4} \end{pmatrix}.$$

Grâce à un calcul direct on constate que

$$\begin{aligned} & \det \begin{pmatrix} V_{1,1} & V_{1,4} \\ V_{3,1} & V_{3,4} \end{pmatrix} \det \begin{pmatrix} V_{1,2} & V_{1,3} \\ V_{2,2} & V_{2,3} \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} V_{1,2} & V_{1,4} \\ V_{3,2} & V_{3,4} \end{pmatrix} \det \begin{pmatrix} V_{1,1} & V_{1,3} \\ V_{2,1} & V_{2,3} \end{pmatrix} \\ & - \det \begin{pmatrix} V_{1,1} & V_{1,3} \\ V_{3,1} & V_{3,3} \end{pmatrix} \det \begin{pmatrix} V_{1,2} & V_{1,4} \\ V_{2,2} & V_{2,4} \end{pmatrix} - \det \begin{pmatrix} V_{1,2} & V_{1,3} \\ V_{3,2} & V_{3,3} \end{pmatrix} \det \begin{pmatrix} V_{1,1} & V_{1,4} \\ V_{2,1} & V_{2,4} \end{pmatrix} \\ & = V_{1,1} \det \begin{pmatrix} V_{1,2} & V_{1,3} & V_{1,4} \\ V_{2,2} & V_{2,3} & V_{2,4} \\ V_{3,2} & V_{3,3} & V_{3,4} \end{pmatrix} + V_{1,2} \det \begin{pmatrix} V_{1,1} & V_{1,3} & V_{1,4} \\ V_{2,1} & V_{2,3} & V_{2,4} \\ V_{3,1} & V_{3,3} & V_{3,4} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Par extension d'ordre $k-2$ (cf. [11], chap. VI, n° 187, p. 179 ou [3] ex. 12) on en déduit que

$$\begin{aligned} & (-1)^{i+j+l+k+1} (\delta'_{j,l} \delta_i + \delta'_{j,i} \delta_l - \delta_{j,l} \delta'_i - \delta_{j,i} \delta'_l) \\ &= -(-1)^{i+j+l+k+2} (\alpha_{j,l} W_i + \alpha_{j,i} W_l), \end{aligned}$$

lorsque $i, j, l \in \{1, \dots, k\}$. On en déduit que $A_1 = B_1$ ce qui achève la démonstration du lemme 5'.

LEMME 6. — Soient n et p des entiers supérieurs ou égaux à 1.

Soient \mathbf{k} un symbole de hauteur n tel que $|\mathbf{k}| \geq 2$ et que $\mathbf{k}(|\mathbf{k}|) = \mathbf{k}(|\mathbf{k}|-1)$ et soit t le nombre associé à \mathbf{k} au (c) du chapitre II. Soit $\psi \in \hat{\mathcal{F}}(p, \mathbf{k})$; on désigne par ψ_1 le tableau de type (p, \mathbf{k}) défini en posant

$$\psi_1(s, m) = \begin{cases} \psi(s, m) & \text{lorsque } (s, m) \in \mathcal{C}(\mathbf{k}) \text{ et } s \leq |\mathbf{k}|-2, \\ \psi(s+1, m) & \text{lorsque } s = |\mathbf{k}|-1 \text{ et } m = \mathbf{k}(|\mathbf{k}|) \\ \text{et} \\ \psi(s-1, m) & \text{lorsque } s = |\mathbf{k}| \text{ et } m = \mathbf{k}(|\mathbf{k}|). \end{cases}$$

Soit enfin $\sigma \in G_n$. Alors on a

$$J(\sigma, \psi) - J(\sigma, \psi_1) = J(\sigma, \mathbf{t}_{|\mathbf{k}|-1, \mathbf{k}(|\mathbf{k}|-1)} \psi; \delta, m') \in \bar{\Delta}(p, \mathbf{tk}),$$

où l'on a posé

$$\delta = J^{(t)}(\sigma, \psi) \quad \text{et} \quad m' = \psi(|\mathbf{k}|, \mathbf{k}(|\mathbf{k}|))$$

[pour la notation $J(\sigma, \psi'; \delta, m)$, cf. (i) du chapitre III: ici $J(\sigma, \mathbf{t}_{|\mathbf{k}|-1, \mathbf{k}(|\mathbf{k}|-1)} \psi; \delta, m')$ n'est pas une expression jacobienne mixte de type (p, \mathbf{l}) avec $\mathbf{l} = \mathbf{tk}$ car δ est de type $(p, \mathbf{k}^{(t)})$ et l'on a $\mathbf{tk} < \mathbf{k}^{(t)}$].

Ce lemme s'obtient à partir du lemme 5 par spécialisation. On pose

$$h = n - \mathbf{k}(|\mathbf{k}|) + 2$$

et

$$\bar{\varphi}(U^m) = \begin{cases} J(\sigma, \mathbf{t}_{|\mathbf{k}|-2, \mathbf{k}(|\mathbf{k}|)} \psi) & \text{lorsque } m = 1 \\ \text{et} \\ J(\sigma, \mathbf{t}_{p(\mathbf{k}(|\mathbf{k}|)+m-1), \mathbf{k}(|\mathbf{k}|)+m-1} \psi) & \text{lorsque } 2 \leq m \leq h-1 \end{cases}$$

[où p est l'application associée à \mathbf{k} au (c) du chapitre II] et on associe $d(\psi(|\mathbf{k}|, \mathbf{k}(|\mathbf{k}|)))$ à \bar{D}_1 et $d(\psi(|\mathbf{k}|-1, \mathbf{k}(|\mathbf{k}|)))$ à \bar{D}_2 , puis $d(n-h+m)$ à \bar{D}_m lorsque $3 \leq m \leq h$.

(d) DEUXIÈME LEMME DE COMMUTATION.

LEMME 7. — Soient h un entier supérieur ou égal à 3 et \mathbf{k} le symbole de hauteur h et de longueur 2 défini en posant $\mathbf{k}(1) = h$ et $\mathbf{k}(2) = 2$.

Soit (η_3, \dots, η_h) un système de $h-2$ éléments de $\{1, h\}$. On désigne par $\psi_{i,j}$ ($1 \leq i \leq h$ et $1 \leq j \leq h$) les tableaux de type $(h-1, k)$ définis en posant

$$\left\{ \begin{array}{l} \psi_{i,j}(0, m) = m-1 \quad \text{pour } 2 \leq m \leq h, \\ \psi_{i,j}(1, m) = \eta_m \quad \text{pour } 3 \leq m \leq h, \\ \psi_{i,j}(1, 2) = i, \\ \psi_{i,j}(2, 2) = j, \end{array} \right.$$

de sorte qu'on a

$$\psi_{i,j} = \begin{bmatrix} h-1 & \eta_h & \bullet \\ h-2 & \eta_{h-1} & \bullet \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 2 & \eta_3 & \bullet \\ 1 & i & j \end{bmatrix}.$$

[Cf. (g), du chapitre III, pour la manière de représenter explicitement un tableau.]

On note ψ' le tableau $\psi' = \psi_{i,j}^{(1)}$ (pour $1 \leq i, j \leq h$).

Soit id l'élément unité du groupe G_h . Alors on a

$$\begin{aligned} & J(\text{id}, \psi')(J(\text{id}, \psi_{2,1}) - J(\text{id}, \psi_{1,2})) \\ &= \sum_{m=3}^h (-1)^m (\delta_{m,2} J(\text{id}, \psi_{m,2}) - \delta_{m,1} J(\text{id}, \psi_{m,1})), \end{aligned}$$

où l'on a posé

$$\delta_{m,m'} = \mathcal{J}(\bar{D}_h, \bar{D}_{h-1}, \dots, \bar{D}_{\hat{m}}, \dots, \bar{D}_{\hat{m}'}, \dots, \bar{D}_1; \bar{Z}_{\eta_h}^{h-1}, \bar{Z}_{\eta_{h-1}}^{h-2}, \dots, \bar{Z}_{\eta_3}^2)$$

pour $3 \leq m \leq h$ et $m' = 1$ ou $m' = 2$ (où les indices \hat{m} et \hat{m}' signifient l'omission de m et de m' dans la liste $h, \dots, 1$).

Comme pour le lemme 5, il est plus agréable, en vue de démontrer le lemme 7, de le réénoncer avec d'autres notations.

LEMME 7'. — Soit k un entier supérieur ou égal à 1 et soient

$$M = \begin{pmatrix} V_{1,1} & \cdots & V_{1,k+2} \\ \dots & \dots & \dots \\ V_{k,1} & \cdots & V_{k,k+2} \end{pmatrix}$$

et

$$N = \begin{pmatrix} W_{1,1} & \cdots & W_{1,k+2} \\ \dots & \dots & \dots \\ W_{k+2,1} & \cdots & W_{k+2,k+2} \end{pmatrix},$$

deux matrices de types respectifs $(k, k+2)$ et $(k+2, k+2)$ où les $V_{i,j}$ et les $W_{i,j}$ sont des indéterminées telles que $W_{i,j} = W_{j,i}$ lorsque $i, j \in \{1, \dots, k+2\}$. Lorsque

$$i, j \in \{1, \dots, k+2\}$$

on pose

$$\delta_{i,j} = \det \begin{pmatrix} V_{1,1} & \cdots & V_{1,\hat{j}} & \cdots & V_{1,k+2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ V_{k,1} & \cdots & V_{k,\hat{j}} & \cdots & V_{k,k+2} \\ W_{i,1} & \cdots & W_{i,\hat{j}} & \cdots & W_{i,k+2} \end{pmatrix}$$

et

$$\alpha_{i,j} = \alpha_{j,i} = \det \begin{pmatrix} V_{1,1} & \cdots & V_{1,\hat{i}} & \cdots & V_{1,\hat{j}} & \cdots & V_{1,k+2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ V_{k,1} & \cdots & V_{k,\hat{i}} & \cdots & V_{k,\hat{j}} & \cdots & V_{k,k+2} \end{pmatrix}$$

lorsqu'en outre $i < j$.

Avec ces notations on a

$$\begin{aligned} & \alpha_{k+1,k+2} \delta_{k+2,k+2} \\ &= \alpha_{k+1,k+2} \delta_{k+1,k+1} + \sum_{i=1}^k (-1)^{k+i} (\alpha_{i,k+1} \delta_{i,k+2} - \alpha_{i,k+2} \delta_{i,k+1}). \end{aligned}$$

En effet en développant les $\delta_{i,i}$ par rapport à leurs dernières lignes on voit que

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^{k+2} (-1)^{i+k} \delta_{i,i} \\ &= \sum_{1 \leq j < i \leq k+2} (-1)^{i+j} W_{i,j} \alpha_{i,j} - \sum_{1 \leq i < j \leq k+2} (-1)^{i+j} W_{j,i} \alpha_{j,i}. \end{aligned}$$

Cette expression est nulle puisque $W_{j,i} = W_{i,j}$ et que $\alpha_{j,i} = \alpha_{i,j}$.

La formule du lemme s'obtient alors en multipliant le premier membre de cette égalité par $\alpha_{k+1,k+2}$ et en utilisant l'identité

$$\alpha_{k+1,k+2} \delta_{i,i} - \alpha_{i,k+2} \delta_{i,k+1} + \alpha_{i,k+1} \delta_{i,k+2} = 0 \quad (\text{lorsque } 1 \leq i \leq k),$$

qui n'est autre que l'extension d'ordre $k-1$ du développement par rapport à sa première ligne d'un déterminant d'ordre 3 dont les deux premières lignes sont égales (cf. [11], chap. VI, n° 187, p. 179 ou [3], ex. 12).

LEMME 8. — Soient n et p des entiers supérieurs ou égaux à 1.

Soient \mathbf{k} un symbole de hauteur n tel que $|\mathbf{k}| \geq 2$ et que $\mathbf{k}(|\mathbf{k}|-1) \geq \mathbf{k}(|\mathbf{k}|)+1$ et soient χ , ρ et t les applications et le nombre associés à \mathbf{k} au (c) du chapitre II.

Soit $\psi \in \hat{\mathcal{F}}(p, \mathbf{k})$; on pose

$$n_1 = \psi(|\mathbf{k}|, \mathbf{k}(|\mathbf{k}|)) \quad \text{et} \quad n_2 = \psi(|\mathbf{k}|-1, \mathbf{k}(|\mathbf{k}|)).$$

Quels que soient m_1 et m_2 appartenant à $\{1, \dots, n\}$ on pose $\psi_{m_1, m_2} = \mathbf{c}_{m_1, m_2}^{\mathbf{k}(|\mathbf{k}|), \mathbf{k}(|\mathbf{k}|)} \psi$, de sorte que

$$\psi_{m_1, m_2}(s, m) = \begin{cases} \psi(s, m) & \text{lorsque } (s, m) \in \mathcal{C}(\mathbf{k}) \text{ et } \begin{cases} (s, m) \neq (|\mathbf{k}|, \mathbf{k}(|\mathbf{k}|)) \\ \text{et} \\ (s, m) \neq (|\mathbf{k}|-1, \mathbf{k}(|\mathbf{k}|)), \end{cases} \\ m_1 & \text{lorsque } s = |\mathbf{k}|-1 \text{ et } m = \mathbf{k}(|\mathbf{k}|) \\ \text{et} \\ m_2 & \text{lorsque } s = |\mathbf{k}| \text{ et } m = \mathbf{k}(|\mathbf{k}|). \end{cases}$$

En particulier on a $\psi_{n_2, n_1} = \psi$. Soit $\sigma \in G_n$. On pose

$$\begin{aligned} \bar{\delta}_{\mu, n_1} &= \mathcal{J}(d(n), d(n-1), \dots, d(\hat{\mu}), \dots, d(\mathbf{k}(|\mathbf{k}|)+1), d(n_2); \\ &\quad \mathbf{J}(\sigma, \mathbf{t}_{p(n), n} \psi), \mathbf{J}(\sigma, \mathbf{t}_{p(n-1), n-1} \psi), \dots, \\ &\quad \mathbf{J}(\sigma, \mathbf{t}_{|\mathbf{k}|-1, \mathbf{k}(|\mathbf{k}|)+1} \psi)) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \bar{\delta}_{\mu, n_2} &= \mathcal{J}(d(n), d(n-1), \dots, d(\hat{\mu}), \dots, d(\mathbf{k}(|\mathbf{k}|)+1), d(n_1); \\ &\quad \mathbf{J}(\sigma, \mathbf{t}_{p(n), n} \psi), \mathbf{J}(\sigma, \mathbf{t}_{p(n-1), n-1} \psi), \dots, \\ &\quad \mathbf{J}(\sigma, \mathbf{t}_{|\mathbf{k}|-1, \mathbf{k}(|\mathbf{k}|)+1} \psi)), \end{aligned}$$

lorsque $\mathbf{k}(|\mathbf{k}|)+1 \leq \mu \leq \chi(t-1)$ [où l'indice $\hat{\mu}$ signifie l'omission de μ dans la liste $\chi(t-1), \dots, \mathbf{k}(|\mathbf{k}|)+1$].

Alors il existe $\delta \in \Delta(p, \mathbf{tk})$ tel que

$$\begin{aligned} &\mathbf{J}^{(t-1)}(\sigma, \psi) \mathbf{J}^{(t)}(\sigma, \psi) (\mathbf{J}(\sigma, \psi_{n_2, n_1}) - \mathbf{J}(\sigma, \psi_{n_1, n_2})) \\ &= \mathbf{J}^{(t-1)}(\sigma, \psi) \left[\sum_{\mu=\mathbf{k}(|\mathbf{k}|)+1}^{\chi(t-1)} (-1)^{\mu-\mathbf{k}(|\mathbf{k}|)} (\bar{\delta}_{\mu, n_2} \mathbf{J}(\sigma, \psi_{\mu, n_2}) - \bar{\delta}_{\mu, n_1} \mathbf{J}(\sigma, \psi_{\mu, n_1})) \right]. \end{aligned}$$

Le lemme 8, qui généralise le lemme 7, s'obtient à partir du lemme 7' par extension d'ordre $n - \chi(t)$ (cf. [3], ex. 12). Pour le voir, on pose

$$k = \chi(t-1) - \mathbf{k}(|\mathbf{k}|)$$

et on définit une application \mathbf{m} de $\{1, \dots, k+2\}$ dans $\{1, \dots, n\}$ par les relations

$$\mathbf{m}(i) = \begin{cases} \chi(t-1) - i + 1 & \text{lorsque } 1 \leq i \leq k, \\ n_1 & \text{lorsque } i = k+1, \\ n_2 & \text{lorsque } i = k+2. \end{cases}$$

On pose ensuite

$$V_{i,j} = \mathbf{J}(\sigma, \mathbf{c}_{\mathbf{m}(j)}^{\mathbf{m}(i)} \psi) \quad (1 \leq i \leq k; 1 \leq j \leq k+2)$$

et

$$W_{i,j} = \mathbf{J}(\sigma, \mathbf{c}_{\mathbf{m}(j)}^{\mathbf{k}(|\mathbf{k}|)} \psi) \quad (1 \leq i, j \leq k+2).$$

Par application du lemme du pivot [cf. (b)] et avec les notations du lemme 7', on obtient :

$$\begin{aligned} (\mathbf{J}^{(t-1)}(\sigma, \psi))^{k-1} \mathbf{J}^{(t)}(\sigma, \psi) &= \alpha_{k+1, k+2}, \\ (\mathbf{J}^{(t-1)}(\sigma, \psi))^{k-1} \bar{\delta}_{\mu, n_h} &= \alpha_{\chi(t-1)-\mu+1, k+h}, \\ (\mathbf{J}^{(t-1)}(\sigma, \psi))^k \mathbf{J}(\sigma, \psi_{n_2, n_1}) &= \delta_{k+2, k+2}, \\ (\mathbf{J}^{(t-1)}(\sigma, \psi))^k \mathbf{J}(\sigma, \psi_{n_1, n_2}) &= \delta_{k+1, k+1} \end{aligned}$$

et

$$(\mathbf{J}^{(t-1)}(\sigma, \psi))^k \mathbf{J}(\sigma, \psi_{\mu, n_h}) = \delta_{\chi(t-1)-\mu+1, k+h},$$

où l'on a posé $h, h' \in \{1, 2\}$ et $h \neq h'$. On peut donc appliquer le lemme 7' puisque, d'après le lemme 6, on a $W_{i,j} - W_{j,i} \in \bar{\Delta}(p, \mathbf{tk})$ pour $1 \leq i, j \leq k+2$. On achève en divisant les deux membres de l'identité trouvée par $(\mathbf{J}^{(t-1)}(\sigma, \psi))^{2(k-1)}$.

Remarque. — On peut corriger la permutation σ en une permutation σ'_{μ, n_h} pour laquelle $\bar{\delta}_{\mu, n_h}$ devient une expression jacobienne bien formée de type (p, \mathbf{k}') . En revanche, même lorsque $J^{(t)}(\sigma, \psi)$ est une expression jacobienne régulière on ne peut, au moyen d'un changement de permutation, obtenir que les $\bar{\delta}_{\mu, n_h}$ soient des expressions jacobiniennes régulières.

Lorsque l'expression $J^{(t-1)}(\sigma, \psi)$ est différente de 0 la relation du lemme 8 s'écrit encore :

$$\begin{aligned} & J^{(t)}(\sigma, \psi)(J(\sigma, \psi_{n_2, n_1}) - J(\sigma, \psi_{n_1, n_2})) \\ &= \left[\sum_{\mu=\mathbf{k}(|\mathbf{k}|)+1}^{\chi(t-1)} (-1)^{\mu-\mathbf{k}(|\mathbf{k}|)} (\bar{\delta}_{\mu, n_2} J(\sigma, \psi_{\mu, n_2}) - \bar{\delta}_{\mu, n_1} J(\sigma, \psi_{\mu, n_1})) \right] + \delta. \end{aligned}$$

(e) LE LEMME DE RÉDUCTION (CAS COMMUTATIF).

LEMME 9. — Soient p et n des entiers supérieurs ou égaux à 1. Soient \mathbf{k} un symbole de hauteur n et de longueur supérieure ou égale à 1 et t le nombre associé à \mathbf{k} au (c) du chapitre II. Soit ψ un tableau de type (p, \mathbf{k}) . On pose $\mathbf{r}_{\mathbf{k}(|\mathbf{k}|)} \psi = (j; l)$ [où $1 \leq j \leq p$ et $l \in \mathcal{E}_n(|\mathbf{k}|)$] et on suppose que $l(s) \leq \mathbf{k}(s)$ lorsque $1 \leq s \leq |\mathbf{k}|$. Quel que soit $l' \in \mathcal{E}_n(|\mathbf{k}|)$ on définit le tableau $\psi_{l'}$ de type (p, \mathbf{k}) en posant $\psi_{l'}^{(t)} = \psi^{(t)}$ et $\mathbf{r}_{\mathbf{k}(|\mathbf{k}|)} \psi_{l'} = (j; l')$. Soit $\bar{\sigma}$ une permutation de l'ensemble $\{1, \dots, |\mathbf{k}|\}$ telle que $l(\bar{\sigma}(s)) \leq \mathbf{k}(s)$ lorsque $1 \leq s \leq |\mathbf{k}|$. Soit enfin $\sigma \in G_n$; alors il existe $\delta \in \Delta(p, \mathbf{k})$ tel que l'élément

$$J^*(\sigma, \psi^{(t)})(J(\sigma, \psi) - J(\sigma, \psi_{l' \circ \bar{\sigma}})) - \delta$$

soit combinaison linéaire des expressions de la forme $J(\sigma, \psi_{l'})$ où les $l' \in \mathcal{E}_n(|\mathbf{k}|)$ sont tels que $\Phi(l') > \Phi(l)$ (ordre usuel). [Ici $\Phi: \mathcal{E}_n(|\mathbf{k}|) \rightarrow \mathcal{S}_n(|\mathbf{k}|)$ est l'application définie au (h) du chapitre II.]

Pour le voir on désigne par τ_s ($1 \leq s \leq |\mathbf{k}| - 1$) l'élément de $G_{|\mathbf{k}|}$ défini par les relations $\tau_s(s) = s+1$, $\tau_s(s+1) = s$ et $\tau_s(s') = s'$ lorsque $s' \in \{1, \dots, |\mathbf{k}|\}$, $s' \neq s$ et $s' \neq s+1$ et on observe qu'il existe un entier h et une application

$$\mathbf{z}: \{1, \dots, h\} \rightarrow \{1, \dots, |\mathbf{k}| - 1\}$$

telle que

$$\bar{\sigma} = \tau_{\mathbf{z}(1)} \cdot \tau_{\mathbf{z}(2)} \cdot \dots \cdot \tau_{\mathbf{z}(h)}$$

et que si l'on pose

$$\bar{\sigma}_{h'} = \tau_{\mathbf{z}(1)} \cdot \tau_{\mathbf{z}(2)} \cdot \dots \cdot \tau_{\mathbf{z}(h')},$$

on ait $l(\sigma_{h'}(s)) \leq \mathbf{k}(s)$ pour tout $h' \in \{1, \dots, h\}$.

Le lemme se démontre alors par récurrence sur h' en utilisant le lemme 12 du (i) du chapitre III, le lemme 6 ci-dessus lorsque $\mathbf{z}(h') \neq r(q)$ pour tout $q, q \in \{0, \dots, t-1\}$ et le lemme 8 dans le cas contraire.

[La fonction r est celle qui a été associée à \mathbf{k} au (c) du chapitre II.]

LEMME 10. — Soient p et n des entiers supérieurs ou égaux à 1.

Soit \mathbf{k} un symbole de hauteur n et de longueur supérieure ou égale à 1 et soient $t = t_{\mathbf{k}}$ et $\lambda(\mathbf{k})$ les nombres associés à \mathbf{k} au (c) et (e) du chapitre II. Soit ψ un tableau de type (p, \mathbf{k}) .

On pose

$$\mathbf{r}_{\mathbf{k}(|\mathbf{k}|)}\psi = (j; l) \quad \text{où} \quad 1 \leq j \leq p \quad \text{et} \quad l \in \mathcal{E}_n(|\mathbf{k}|)$$

et on suppose que $l(s) \leq \mathbf{k}(s)$ lorsque $1 \leq s \leq |\mathbf{k}|$.

Quel que soit $l' \in \mathcal{S}_n(|\mathbf{k}|)$ on définit le tableau $\psi_{l'}$ de type (p, \mathbf{k}) en posant

$$\psi_{l'}^{(s)} = \psi^{(s)} \quad \text{et} \quad \mathbf{r}_{\mathbf{k}(|\mathbf{k}|)}\psi_{l'} = (j; l').$$

Soit enfin $\sigma \in G_n$. Alors il existe $\delta \in \bar{\Delta}(p, \mathbf{tk})$ tel que l'élément

$$(\mathbf{J}^{\#}(\sigma, \psi^{(s)}))^{\lambda(\mathbf{k})} \cdot (\mathbf{J}(\sigma, \psi) - \mathbf{J}(\sigma, \psi_{\Phi(l)})) - \delta$$

soit combinaison linéaire des expressions de la forme $\mathbf{J}(\sigma, \psi_{l'})$ où les $l' \in \mathcal{S}_n(|\mathbf{k}|)$ sont tels que $\Phi(l) < l' \leq \mathbf{k}$ (ordre usuel) [pour la définition de Φ , cf. (h) du chapitre II].

Ce lemme se déduit du précédent par récurrence sur $\Phi(l)$ pour l'ordre lexicographique décroissant. La restriction $l' \leq \mathbf{k}$ se déduit du lemme 9 du (h) du chapitre III.

PROPOSITION 2. — Soient n et p des entiers supérieurs ou égaux à 1 et \mathbf{k} un symbole de hauteur n . Soit $\psi' \in \hat{\mathcal{F}}'(p, \mathbf{k})$ [cf. (g), 3°, du chapitre II] et soit $\sigma \in G_n$ une permutation de l'ensemble $\{1, \dots, n\}$. On désigne par $\bar{\Delta}_{\text{dec}}(\sigma, \psi', |\mathbf{k}|)$ l'idéal de $\bar{\mathcal{A}}_n^p$ engendré par les expressions jacobiniennes :

$$\mathbf{J}(\sigma, \mathbf{t}_{s, \mathbf{k}(|\mathbf{k}|)}\psi) \quad \text{où} \quad \psi \in \hat{\mathcal{R}}_{\text{dec}}(\psi', |\mathbf{k}|)$$

[cf. (g), 3°, du chapitre II] et $1 \leq s \leq |\mathbf{k}|$. Soit $\alpha(\mathbf{k})$ et $\mu(\mathbf{k})$ les entiers associés à \mathbf{k} au (a) ci-dessus et au (e) du chapitre II.

Avec les notations du (f) du chapitre III on a

$$(\mathbf{J}^{\#}(\sigma, \psi'))^{\alpha(\mathbf{k}) + \mu(\mathbf{k})} \bar{\Delta}(p, \mathbf{k}) \subset \bar{\Delta}_{\text{dec}}(\sigma, \psi', |\mathbf{k}|).$$

La proposition 2, évidente pour $\mathbf{k} = \mathbf{e}_n$ se démontre par récurrence sur la longueur de \mathbf{k} . Elle se déduit du lemme précédent par un raisonnement analogue à celui qui permet de déduire la proposition 1 du lemme 2.

Remarque. — L'idéal $\bar{\Delta}_{\text{dec}}(\sigma, \psi', |\mathbf{k}|)$ est engendré par les expressions jacobiniennes $\mathbf{J}(\bar{\sigma}, \mathbf{t}_{s, \mathbf{k}(|\mathbf{k}|)}\psi)$ où $\bar{\sigma}$ parcourt l'ensemble $G(\sigma; \mathbf{k}(|\mathbf{k}|)+1, \dots, n)$ des permutations qui coïncident avec σ en restriction à l'ensemble $\{\mathbf{k}(|\mathbf{k}|)+1, \dots, n\}$ où $1 \leq s \leq |\mathbf{k}|$ et où ψ parcourt l'ensemble $\bar{\mathcal{R}}_{\text{en}}(\psi', |\mathbf{k}|)$ des tableaux condensés subordonnés à ψ' [cf. (g), 10°, du chapitre II et remarque 3 du (f) du chapitre III].

(f) LE LEMME DE RÉGULARISATION.

LEMME 11. — Soient p et n des entiers supérieurs ou égaux à 1. Soit \mathbf{k} un symbole de hauteur n et de longueur supérieure ou égale à 1 et soient t et $\lambda(\mathbf{k})$ les nombres associés à \mathbf{k} au (c) et (e) du chapitre II. Soit ψ un tableau condensé de type (p, \mathbf{k}) . On pose

$$\mathbf{r}_{\mathbf{k}(|\mathbf{k}|)}\psi = (j; l) \quad [\text{où} \quad 1 \leq j \leq p \quad \text{et} \quad l \in \mathcal{S}_n(|\mathbf{k}|)].$$

Soit $\tilde{\psi}$ le déploiement de ψ [cf. (g), 11°, du chapitre II : c'est un tableau de type $(p, \mathbf{u}^{\mathbf{k}(|\mathbf{k}|)-1(|\mathbf{k}|)} \mathbf{k})$].

Quel que soit $I' \in \mathcal{S}_n(|\mathbf{k}|)$ on définit le tableau $\psi_{I'}$ de type (p, \mathbf{k}) en posant

$$\psi_{I'}^{(t)} = \psi^{(t)} \quad \text{et} \quad \mathbf{r}_{\mathbf{k}(|\mathbf{k}|)} \psi_{I'} = (j; I').$$

Soit enfin $\sigma \in G_n$; alors il existe $\delta \in \bar{\Delta}(p, \mathbf{tk})$ tel que l'élément

$$(J^*(\sigma, \psi^{(t)})^{\lambda(\mathbf{k})(|\mathbf{k}|-1(|\mathbf{k}|))} ((J(\sigma, \psi))^{\mathbf{k}(|\mathbf{k}|-1(|\mathbf{k}|)+1} - (J^{(t)}(\sigma, \psi))^{\mathbf{k}(|\mathbf{k}|-1(|\mathbf{k}|)}) \cdot J(\sigma, \tilde{\psi})) - \delta,$$

soit combinaison linéaire des expressions de la forme $J(\bar{\sigma}, \psi_{I'})$ où les $\bar{\sigma}$ appartiennent à $G(\sigma; \mathbf{k}(|\mathbf{k}|)+1, \dots, n)$ et où les $I' \in \mathcal{S}_n(|\mathbf{k}|)$ sont tels que $I \leq I' \leq \mathbf{k}$ (ordre usuel) et que $\psi_{I'}$ soit un tableau condensé.

Pour le voir on applique le lemme 4 à l'expression

$$(J^{(t)}(\sigma, \psi))^{\mathbf{k}(|\mathbf{k}|-1(|\mathbf{k}|)} J(\sigma, \tilde{\psi})$$

et on développe par rapport à sa dernière colonne le déterminant ainsi obtenu ainsi que tous ses mineurs supérieurs gauches. On applique ensuite le lemme 10 à chacun des termes de la diagonale de ce déterminant sauf au dernier. On voit alors qu'il existe $\delta \in \bar{\Delta}(p, \mathbf{tk})$ tel que l'expression jacobienne

$$(J^*(\sigma, \psi^{(t)})^{\lambda(\mathbf{k})(|\mathbf{k}|-1(|\mathbf{k}|))} ((J(\sigma, \psi))^{\mathbf{k}(|\mathbf{k}|-1(|\mathbf{k}|)+1} - (J^{(t)}(\sigma, \psi))^{\mathbf{k}(|\mathbf{k}|-1(|\mathbf{k}|)}) \cdot J(\sigma, \tilde{\psi})) - \delta,$$

soit combinaison linéaire des expressions de la forme $J(\sigma, \psi_{I''})$ où les $I'' \in \mathcal{S}_n(|\mathbf{k}|)$ sont tels que $I < I'' \leq \mathbf{k}$. On achève alors la démonstration grâce à la remarque 3 du (f) du chapitre III car pour tout $I'' \in \mathcal{S}_n(|\mathbf{k}|)$ on a

$$J(\sigma, \psi_{I''}) = J(\sigma \cdot \sigma_{\psi_{I''}}, \sigma_{\psi_{I''}}^{-1} \psi_{I''}),$$

or lorsque $I'' > I$ la dernière ligne $(j; I')$ du tableau $\sigma_{\psi_{I''}}^{-1} \psi_{I''}$ est telle que $I' \geq I''$.

(g) GÉNÉRATEURS FAIBLES DE $\bar{\Delta}(p, \mathbf{k})$. — Soit A un anneau commutatif à élément unité.

DÉFINITION. — On appelle racine d'un idéal I de A l'ensemble \sqrt{I} des $a \in A$ pour lesquels il existe $h \in \mathbf{N}^*$ tel que $a^h \in I$.

L'ensemble \sqrt{I} est un idéal de A tel que $I \subset \sqrt{I} = \sqrt{\sqrt{I}}$ en effet si $a, b, c \in A$ et $h, h' \in \mathbf{N}^*$ sont tels que $a^h \in I$ et $b^{h'} \in I$ on a : $(ca)^h \in I$ et $(a+b)^{h+h'} \in I$ (comme le montre la formule du binôme de Newton). Si I' désigne un second idéal de A , lorsque $I' \supset I$ on a $\sqrt{I'} \supset \sqrt{I}$ et par conséquent lorsque $\sqrt{I'} \supset I' \supset I$ on a $\sqrt{I'} = \sqrt{I}$. D'autre part lorsque I' est quelconque, on a

$$\sqrt{I} + \sqrt{I'} \sqrt{\sqrt{I} + \sqrt{I'}} = \sqrt{I + I'}$$

et

$$\sqrt{I} \cdot \sqrt{I'} \subset \sqrt{I \cdot I'} = \sqrt{I \cap I'} \sqrt{I'} = \sqrt{I \cap I'}.$$

En particulier pour tout entier $h \geq 1$ on a $\sqrt{I^h} = \sqrt{I}$ et plus généralement si $I_1 \supset I_2 \supset \dots \supset I_s$ est une suite décroissante d'idéaux de A et si h_1, h_2, \dots, h_s sont des entiers supérieurs ou égaux à 1, alors on a

$$\sqrt{I_1^{h_1} \cdot I_2^{h_2} \cdot \dots \cdot I_s^{h_s}} = \sqrt{I_1 \cdot \dots \cdot I_s} = \sqrt{I_s}.$$

De même si la suite des idéaux I_1, \dots, I_s est quelconque on a

$$\sqrt{I_1^{h_1} + \dots + I_s^{h_s}} = \sqrt{I_1 + \dots + I_s}.$$

Soit B un anneau commutatif unitaire et φ un homomorphisme de A dans B , on a $\varphi(\sqrt{I}) \cdot B \subset \sqrt{\varphi(I) \cdot B}$ et si J est un idéal de B alors $\varphi^{-1}(\sqrt{J}) = \sqrt{\varphi^{-1}(J)}$.

DÉFINITION. — On dit qu'une partie J d'un idéal I de A engendre faiblement I ou que les éléments de J sont des *générateurs faibles* de I si la racine I' de l'idéal engendré par J dans A contient I . On a alors $I' = \sqrt{I}$.

LEMME 12. — Soient A un anneau commutatif unitaire, I et I' des idéaux de A tels que $I \subset I'$, et h et \bar{h} des entiers.

Soient $a_1, \dots, a_h, \bar{a}_1, \dots, \bar{a}_{\bar{h}}$ des générateurs faibles de I' dont les \bar{h} derniers $\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_{\bar{h}}$ sont dans I . Pour tout $h' \in \{1, \dots, h\}$ on suppose qu'il existe un entier $\eta(h')$ et des éléments $a_{h',1}, \dots, a_{h',\eta(h')} \in A$ tels que $\sqrt{(a_{h',1}, \dots, a_{h',\eta(h')})} \supset a_{h'} I$. Alors quels que soient $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$ la racine de l'idéal engendré par les $\bar{a}_{h'}$, lorsque $1 \leq h' \leq \bar{h}$ et les éléments

$$b_{h'h''} = a_{h'}^\alpha \cdot a_{h''}^\beta \quad [\text{lorsque } 1 \leq h' \leq h \text{ et } 1 \leq h'' < \eta(h')]$$

contient la racine de I . Lorsque les $a_{h',h''}$ appartiennent à I et lorsque $\beta \geq 1$, ces deux racines sont égales.

Ce lemme est une conséquence directe des relations précédentes.

THÉORÈME 1. — Soient n et p des entiers supérieurs ou égaux à 1 et \mathbf{k} un symbole de hauteur n . Alors, avec les notations du (f) du chapitre III, on a

$$\sqrt{\Delta(p, \mathbf{k})} = \sqrt{\Delta_{\text{bf}}(p, \mathbf{k})} = \sqrt{\Delta_{\text{pr}}(p, \mathbf{k}) + \Delta_{\text{reg}}(p, \mathbf{k})} = \sqrt{\Delta_{\text{reg}}(p, \mathbf{k})} = \sqrt{\Delta^*(p, \mathbf{k})}.$$

Ce théorème évident lorsque $\mathbf{k} = \mathbf{e}_n$ se démontre par récurrence à la fois sur la longueur de \mathbf{k} et sur le nombre de lignes des tableaux de type (p, \mathbf{k}) [c'est-à-dire par récurrence décroissante sur $\mathbf{k} (|\mathbf{k}|)$]. Plus précisément on va démontrer le théorème pour tout symbole $\mathbf{k} \in \mathcal{S}_n - \{\mathbf{e}_n\}$ en le supposant vrai pour $t\mathbf{k}$ et en utilisant les égalités

$$\sqrt{\Delta'(p, \mathbf{k})} = \sqrt{\Delta'_{\text{bf}}(p, \mathbf{k})} = \sqrt{\Delta'_{\text{reg}}(p, \mathbf{k})} = \sqrt{\Delta^{*'}(p, \mathbf{k})},$$

évidentes lorsque \mathbf{k}' n'est pas défini et vraies en vertu de l'hypothèse de récurrence lorsque \mathbf{k}' est défini.

Tout d'abord comme il a été remarqué au (f) du chapitre III, on a

$$\Delta^*(p, \mathbf{k}) \subset \Delta_{\text{reg}}(p, \mathbf{k}) \subset \Delta_{\text{pr}}(p, \mathbf{k}) + \Delta_{\text{reg}}(p, \mathbf{k}) \subset \Delta_{\text{bf}}(p, \mathbf{k}) \subset \Delta(p, \mathbf{k}).$$

Les égalités

$$\sqrt{\overline{\Delta_{pr}(p, \mathbf{k}) + \overline{\Delta_{reg}(p, \mathbf{k})}}}} = \sqrt{\overline{\Delta_{bf}(p, \mathbf{k})}} = \sqrt{\overline{\Delta(p, \mathbf{k})}}$$

se déduisent de l'hypothèse de récurrence, de la proposition 2 ci-dessus et du lemme 12 où l'on pose $\alpha = 0$ et $\beta = 1$.

En vue de montrer l'égalité

$$\sqrt{\overline{\Delta_{reg}(p, \mathbf{k})}} = \sqrt{\overline{\Delta_{pr}(p, \mathbf{k}) + \overline{\Delta_{reg}(p, \mathbf{k})}}},$$

on introduit les idéaux auxiliaires suivants :

Quel que soit $\mathbf{m} \in \mathcal{S}^*(\mathbf{k}(|\mathbf{k}|), |\mathbf{k}|)$ [cf. (a), du chapitre II] on désigne par $\overline{\Delta_{cn}(p, \mathbf{k}, \mathbf{m})}$ l'idéal de \mathcal{A}'_n engendré par $\overline{\Delta_{reg}(p, \mathbf{k}) + \overline{\Delta(p, \mathbf{tk})}}$ et par toutes les expressions jacobiniennes $J(\sigma, \psi)$ [où $\sigma \in G_n$ et où ψ est un tableau principal et condensé dont la dernière ligne notée $(j; \mathbf{l})$ (avec $1 \leq j \leq p$ et $\mathbf{l} \in \mathcal{S}_n$) est telle que $\mathbf{v}_{\mathbf{k}(|\mathbf{k}|)+1} \mathbf{l} = \mathbf{m}$ où $\mathbf{v}_{\mathbf{k}(|\mathbf{k}|)+1} \mathbf{l} \gg \mathbf{m}$] [cf. (b), du chapitre II où est défini l'ordre usuel de $\mathcal{S}^*(\mathbf{k}(|\mathbf{k}|), |\mathbf{k}|)$ auquel $\mathbf{v}_{\mathbf{k}(|\mathbf{k}|)+1} \mathbf{l}$ appartient nécessairement].

Avec les notations du (b) du chapitre II et grâce à la remarque du (e) ci-dessus, on voit que

$$\overline{\Delta_{cn}(p, \mathbf{k}, \mathbf{m}_0)} = \overline{\Delta_{pr}(p, \mathbf{k})} + \overline{\Delta_{reg}(p, \mathbf{k})} + \overline{\Delta(p, \mathbf{tk})}.$$

D'autre part il est clair que lorsque $\mathbf{m} \in \mathcal{S}^*(\mathbf{k}(|\mathbf{k}|), |\mathbf{k}|)$ est tel que

$$\mathbf{m}(|\mathbf{m}|) = \mathbf{k}(|\mathbf{k}|)$$

on a

$$\overline{\Delta_{cn}(p, \mathbf{k}, \mathbf{m})} = \overline{\Delta_{reg}(p, \mathbf{k})} + \overline{\Delta(p, \mathbf{tk})}$$

et en particulier

$$\overline{\Delta_{cn}(p, \mathbf{k}, \mathbf{m}_0)} = \overline{\Delta_{reg}(p, \mathbf{k})} + \overline{\Delta(p, \mathbf{tk})}.$$

Pour montrer l'égalité

$$\sqrt{\overline{\Delta_{reg}(p, \mathbf{k})}} = \sqrt{\overline{\Delta_{pr}(p, \mathbf{k}) + \overline{\Delta_{reg}(p, \mathbf{k})}}},$$

il suffit donc d'établir que, quel que soit $\mathbf{m} \in \mathcal{S}^*(\mathbf{k}(|\mathbf{k}|), \mathbf{k})$ tel que

$$\mathbf{m}(|\mathbf{m}|) \leq \mathbf{k}(|\mathbf{k}|) - 1$$

on a

$$\sqrt{\overline{\Delta_{cn}(p, \mathbf{k}, \mathbf{m})}} = \sqrt{\overline{\Delta_{reg}(p, \mathbf{k})}}.$$

Pour y parvenir on procède par récurrence descendante sur l'ordre lexicographique de $\mathcal{S}^*(\mathbf{k}(|\mathbf{k}|), |\mathbf{k}|)$. Or d'après le lemme 11, le lemme 12 [où l'on a posé $\alpha = 0$ et $\beta = \mathbf{k}(|\mathbf{k}|) - 1(|\mathbf{k}|) + 1$] et les diverses hypothèses de récurrence faites, on a

$$\begin{aligned} \sqrt{\overline{\Delta_{cn}(p, \mathbf{k}, \mathbf{m})}} &= \sqrt{\sum_{\substack{\mathbf{n} \in \mathcal{S}^*(\mathbf{k}(|\mathbf{k}|), |\mathbf{k}|) \\ \mathbf{n} \gg \mathbf{m}}} \overline{\Delta_{cn}(p, \mathbf{k}, \mathbf{n})}} \\ &= \sqrt{\overline{\Delta_{reg}(p, \mathbf{k}) + \overline{\Delta(p, \mathbf{tk})}}} \\ &= \sqrt{\overline{\Delta_{reg}(p, \mathbf{k})}}. \end{aligned}$$

[Pour les notations, cf. (a) et (b) du chapitre II.]

Pour montrer l'égalité

$$\sqrt{\Delta^*(p, \mathbf{k})} = \sqrt{\bar{\Delta}(p, \mathbf{k})}$$

on reprend le raisonnement précédent, mais cette fois-ci lorsqu'on applique le lemme 12, on pose $\alpha = 1$ au lieu de $\alpha = 0$. Cette remarque achève la démonstration du théorème 1.

Remarque. — Lorsque $p = 1$ et $n \geq 1$ et lorsque $\mathbf{k} \in \mathcal{S}_n(2)$ est défini par les égalités

$$\mathbf{k}(1) = n \quad \text{et} \quad \mathbf{k}(2) = k \quad (1 \leq k \leq n),$$

le théorème 1 permet d'affirmer que pour qu'une matrice symétrique M à n lignes et n colonnes soit de rang $n-k+1$ exactement, il faut que l'un au moins de ses mineurs diagonaux de rang $n-k+1$ soit non nul. Ce fait, bien connu de nos lointains ancêtres et difficile à trouver dans la littérature pédagogique contemporaine, semble n'avoir survécu que dans la mémoire des mécaniciens (cf. [16]). Le résultat reste valable si on suppose seulement que M est diagonalisable et il se vérifie immédiatement à l'aide du polynôme caractéristique de M .

Forme relative du théorème 1. — Nous aurons à utiliser au paragraphe suivant une version relative du théorème 1 qui se déduit immédiatement de la démonstration précédente. En vue de l'établir on précise une convention faite au (g), 10°, du chapitre II.

Quel que soit $\sigma \in G_n$ et $m \in \{1, \dots, n\}$ on désigne par $G(\sigma; m, \dots, n)$ l'ensemble des permutations $\bar{\sigma} \in G_n$ qui coïncident avec σ en restriction à l'ensemble $\{m, \dots, n\}$.

LEMME 13. — Soient n et p des entiers supérieurs ou égaux à 1 et \mathbf{k} un symbole de hauteur n différent de \mathbf{e}_n .

Soient t et t' les nombres associés à \mathbf{k} au (c) du chapitre II et q un entier tel que $0 \leq q \leq t$.

Soient ψ' un tableau régulier de type $(p, \mathbf{k}^{(q)})$ et σ une permutation de l'ensemble $\{1, \dots, n\}$.

Alors la racine de l'idéal $\bar{\Delta}(p, \mathbf{tk}) + J^*(\sigma, \psi) \cdot \bar{\Delta}(p, \mathbf{k})$ est contenue dans la racine de l'idéal engendré par $\bar{\Delta}(p, \mathbf{tk})$ et par les expressions jacobiennes

$$J(\bar{\sigma}, \psi) \quad \left[\text{resp. } J(\bar{\sigma}, \psi) \prod_{q'=q}^{t'} J^{(q')}(\bar{\sigma}, \psi) \right],$$

où $\bar{\sigma}$ parcourt $G(\sigma, \chi(q)+1, \dots, n)$ et ψ l'ensemble des tableaux réguliers de type $(p, \mathbf{u}^h \mathbf{k})$ [pour $0 \leq h \leq \mathbf{k}(|\mathbf{k}|-1)$] tels que $\psi^{(q)} = \psi'$. On en déduit que modulo $\bar{\Delta}(p, \mathbf{uk})$ la racine de ce même idéal est contenue dans la racine de l'idéal engendré par les expressions jacobiennes

$$J(\bar{\sigma}, \psi) \quad \left[\text{resp. } J(\bar{\sigma}, \psi) \prod_{q'=q}^{t'} J^{(q')}(\bar{\sigma}, \psi) \right],$$

où $\bar{\sigma}$ parcourt $(G(\sigma; \chi(q)+1, \dots, n))$ et ψ l'ensemble des tableaux réguliers de type (p, \mathbf{k}) tels que $\psi^{(q)} = \psi'$.

De même la racine de l'idéal

$$\bar{\Delta}(p, \mathbf{tk}) + J^*(\sigma, \psi') \cdot \bar{\Delta}(p, \mathbf{k})$$

est faiblement engendrée par $\bar{\Delta}(p, \mathbf{tk})$ et par les expressions jacobienues $J^*(\bar{\sigma}, \psi)$ où $\bar{\sigma}$ parcourt $G(\sigma; \chi(q)+1, \dots, n)$ et ψ l'ensemble des tableaux réguliers de type $(p, \mathbf{u}^h \mathbf{k})$ [pour $0 \leq h \leq \mathbf{k}(|\mathbf{k}|-1)$] tels que $\psi^{(q)} = \psi'$. On en déduit que modulo $\bar{\Delta}(p, \mathbf{uk})$ la racine de ce même idéal est faiblement engendré par les expressions jacobienues $J^*(\bar{\sigma}, \psi)$ où $\bar{\sigma}$ parcourt $G(\sigma; \chi(q)+1, \dots, n)$ et ψ l'ensemble des tableaux réguliers de type (p, \mathbf{k}) tels que $\psi^{(q)} = \psi'$.

Pour le voir on procède par récurrence décroissante sur l'entier $\mathbf{k}(|\mathbf{k}|) \leq \chi(q)$, c'est-à-dire par récurrence croissante sur le nombre de lignes des tableaux ψ considérés.

Remarque. — On observera que le lemme 13 reste vrai, lorsqu'on suppose seulement que ψ' est de type $(p, \mathbf{g}_m \mathbf{k})$ [pour $m \in \{\mathbf{k}(|\mathbf{k}|)+1, \dots, n\}$].

(h) INDÉPENDANCE DES EXPRESSIONS JACOBINIENNES PRINCIPALES SUBORDONNÉES A UN MÊME PIVOT.

N.B. Dans ce paragraphe, on envisage également le cas non commutatif, non que cela serve dans la suite, mais, parce que plus simple, son étude aide à comprendre ce qui se passe dans le cas commutatif.

1° *Formalisme préparatoire.* — Soient n et p des entiers supérieurs ou égaux à 1 et \mathbf{k} un symbole de hauteur n différent de \mathbf{e}_n ; soient p, χ, r, t et t' les applications et les nombres associés à \mathbf{k} au (c) du chapitre II et soit ψ un tableau de type (p, \mathbf{k}) .

Odogrammes de \mathbf{k} . — Une application

$$c : \{0, \dots, |\mathbf{k}|\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$$

s'appelle un *odogramme* de \mathbf{k} si elle satisfait aux conditions suivantes :

$$c(|\mathbf{k}|) = \mathbf{k}(|\mathbf{k}|) \quad \text{et lorsque } s \leq |\mathbf{k}|-1,$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{si pour tout } q \text{ tel que } 1 \leq q \leq t \text{ on a } s \neq r(q-1) \text{ alors } c(s) = c(s+1) \text{ et s'il existe } q \\ \text{tel que } 1 \leq q \leq t \text{ et } s = r(q-1) \text{ alors} \\ c(s) \in \{c(s+1)\} \cup \{\chi(q)+1, \dots, \chi(q-1)\}. \end{array} \right.$$

On observera qu'un odogramme c de \mathbf{k} est un symbole de hauteur $c(0) \leq n$ et de longueur $|\mathbf{k}|$ dont le graphe est inclus dans $\mathcal{C}(\mathbf{k})$.

Signature d'un odogramme. — A tout odogramme c de \mathbf{k} on associe l'application

$$\bar{c} : \{0, \dots, |\mathbf{k}|\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$$

appelée *signature* de l'odogramme c et définie en posant

$$\bar{c}(s) = \begin{cases} \mathbf{k}(s+1) & \text{si } c(s) = c(s+1) \\ \text{et} \\ c(s) & \text{si } c(s) \neq c(s+1) \text{ ou si } s = |\mathbf{k}|. \end{cases}$$

La signature d'un odogramme c de \mathbf{k} est elle aussi un symbole de hauteur inférieure ou égale à n et de longueur $|\mathbf{k}|$ dont le graphe est inclus dans $\mathcal{C}(\mathbf{k})$.

Coupures d'un odogramme. — Soit c un odogramme de \mathbf{k} .

Tout $s \in \{1, \dots, |\mathbf{k}|\}$ tel que $c(s-1) \neq c(s)$ s'appelle une *coupure* de l'odogramme c . Pour que s soit une coupure, il faut qu'il existe un entier $q \in \{1, \dots, t\}$ tel que $s = r(q-1)+1$. Cet entier, évidemment unique, s'appelle l'*ordre* de la coupure s .

Il existe un odogramme unique c de \mathbf{k} qui n'a aucune coupure. On l'appelle l'*odogramme banal* et on le note $c_0^{\mathbf{k}}$ (ou simplement c_0 si aucune confusion n'est à craindre) : c'est l'application constante égale à $\mathbf{k}(|\mathbf{k}|)$. Pour tout odogramme c de \mathbf{k} différent de c_0 on désigne par s_c la plus grande coupure (qu'on appelle *coupure directrice* de c) et par $\mathbf{q}(c)$ l'ordre de la coupure s_c .

L'ensemble des odogrammes de \mathbf{k} sera noté $\text{Od}(\mathbf{k})$. C'est un sous-ensemble de l'ensemble $\mathcal{S}_n^{\mathbf{k}}(|\mathbf{k}|)$ [cf. (b), du chapitre II] qui possède $\prod_{s=1}^{|\mathbf{k}|} (\mathbf{k}(s-1) - (\mathbf{k}(s) + 1))$ éléments. On le munit de l'ordre induit par l'ordre du dictionnaire de rimes de $\mathcal{S}_n^{\mathbf{k}}(|\mathbf{k}|)$ défini au (b) du chapitre II. Pour cet ordre l'odogramme banal $c_0^{\mathbf{k}}$ est le plus petit élément et \mathbf{k} lui-même le plus grand élément de $\text{Od}(\mathbf{k})$.

EXEMPLE 1. — Lorsque $n = 6$ et lorsque $\mathbf{k} \in \mathcal{S}_6$ est donné par la formule $\mathbf{k} = (4, 3, 1, 1)$ [cf. (g), du chapitre III] les 18 odogrammes de \mathbf{k} sont les suivants :

| | | |
|-----------------|-----------------|-----------------|
| (1; 1, 1, 1, 1) | (2; 2, 2, 1, 1) | (3; 3, 3, 1, 1) |
| (5; 1, 1, 1, 1) | (5; 2, 2, 1, 1) | (5; 3, 3, 1, 1) |
| (6; 1, 1, 1, 1) | (6; 2, 2, 1, 1) | (6; 3, 3, 1, 1) |
| (4; 4, 1, 1, 1) | (4; 4, 2, 1, 1) | (4; 4, 3, 1, 1) |
| (5; 4, 1, 1, 1) | (5; 4, 2, 1, 1) | (5; 4, 3, 1, 1) |
| (6; 4, 1, 1, 1) | (6; 4, 2, 1, 1) | (6; 4, 3, 1, 1) |

Odogrammes tronqués. — Pour tout $s \in \{1, \dots, |\mathbf{k}|\}$ et pour tout odogramme c de \mathbf{k} on définit l'odogramme $\mathbf{t}_s c$ de $\mathbf{t}_s \mathbf{k}$ en posant

$$\mathbf{t}_s c(s') = \max(\mathbf{k}(s), c(s'))$$

pour tout $s' \in \{0, \dots, s\}$.

Profils de type \mathbf{k} . — On appelle *profil* de type \mathbf{k} toute application

$$\mathbf{p} : \{0, \dots, |\mathbf{k}|\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$$

telle que, quel que soit $s \in \{0, \dots, |\mathbf{k}|\}$ on ait $\mathbf{p}(s) \geq \mathbf{k}(s)$.

Comme on a nécessairement $\mathbf{p}(0) = n$, un profil de type \mathbf{k} s'identifie à un élément de $\mathcal{E}_n^{\mathbf{k}}(|\mathbf{k}|)$. L'ensemble des profils de type \mathbf{k} sera noté $\text{Prof}(\mathbf{k})$. Cet ensemble possède $\prod_{s=1}^{|\mathbf{k}|} (n - \mathbf{k}(s) + 1)$ éléments.

L'application

$$\mathbf{p}_0^{\mathbf{k}} : \{0, \dots, |\mathbf{k}|\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$$

définie en posant $\mathbf{p}_0^{\mathbf{k}}(s) = \mathbf{k}(s)$ pour tout $s \in \{0, \dots, |\mathbf{k}|\}$ s'appelle le *profil banal* de type \mathbf{k} . Lorsqu'aucune confusion n'est à craindre on le note simplement \mathbf{p}_0 .

Soit \mathbf{p} un profil de type \mathbf{k} : un élément s de $\{1, \dots, |\mathbf{k}|\}$ tel que $\mathbf{p}(s) = \mathbf{k}(s)$ [resp. $\mathbf{p}(s) \neq \mathbf{k}(s)$] s'appelle un *point ordinaire* (resp. un *point extraordinaire*) de \mathbf{p} .

Trajets de ψ . — Un *trajet* du tableau ψ est une application de la forme

$$\psi \circ (\text{id}, c) : \{0, \dots, |\mathbf{k}|\} \rightarrow \mathbf{N}^*,$$

où c est un odogramme de \mathbf{k} . Cette notion généralise la notion de ligne d'un tableau introduite au (g), 1°, du chapitre II.

Lorsque ψ satisfait à la condition (i) des tableaux principaux [cf. (g), 4°, du chapitre II] alors tout trajet de ψ est un élément de $\{1, \dots, p\} \times \mathcal{E}_n(|\mathbf{k}|)$ dont la restriction à $\{1, \dots, |\mathbf{k}|\}$ est inférieure ou égale au sens usuel au symbole \mathbf{k} considéré comme élément de $\mathcal{E}_n(|\mathbf{k}|)$.

La condition (ii) des tableaux principaux implique que si c est un odogramme de \mathbf{k} distinct de l'odogramme banal c_0 on a

$$\psi \circ (\text{id}, c) \neq \psi \circ (\text{id}, c_0).$$

En revanche on ne peut déduire de la condition (ii) que, si c' est un odogramme de \mathbf{k} distinct de c et de c_0 , la relation

$$\psi \circ (\text{id}, c) \neq \psi \circ (\text{id}, c').$$

Si ψ est un tableau principal (resp. régulier) alors la restriction à $\{1, \dots, |\mathbf{k}|\}$ de tout trajet de ψ est décroissante. En revanche la condition (iii) [resp. (iii')] n'implique pas que l'application $c \rightarrow \psi \circ (\text{id}, c)$ soit une application croissante.

EXEMPLE 2. — Les trajets du tableau

$$\psi = \begin{bmatrix} 5 & . & . & . & . \\ 4 & . & . & . & . \\ 3 & 4 & . & . & . \\ 2 & 4 & 3 & . & . \\ 1 & 4 & 3 & . & . \\ 1 & 4 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

[étudié au (g), du chapitre III] correspondant à chacun des 18 odogrammes du symbole $\mathbf{k} \in \mathcal{S}_6$ donné par la formule $\mathbf{k} = (4, 3, 1, 1)$ (cf. exemple précédent) sont répertoriés dans le tableau suivant. Ils ne sont pas tous distincts et ne se présentent pas dans un ordre naturel :

| | | |
|-----------------|-----------------|-----------------|
| (1; 4, 2, 1, 1) | (1; 4, 3, 1, 1) | (2; 4, 3, 1, 1) |
| (4; 4, 2, 1, 1) | (4; 4, 3, 1, 1) | (4; 4, 3, 1, 1) |
| (5; 4, 2, 1, 1) | (5; 4, 3, 1, 1) | (5; 4, 3, 1, 1) |
| (3; 4, 2, 1, 1) | (3; 4, 3, 1, 1) | (3; 4, 3, 1, 1) |
| (4; 4, 2, 1, 1) | (4; 4, 3, 1, 1) | (4; 4, 3, 1, 1) |
| (5; 4, 2, 1, 1) | (5; 4, 3, 1, 1) | (5; 4, 3, 1, 1) |

Sélecteurs de ψ .

N.B. On suppose désormais que ψ satisfait à la condition (i) des tableaux principaux [cf. (g), 4°, du chapitre II].

DÉFINITION. — Un *sélecteur* du tableau ψ associé à l'odogramme c de \mathbf{k} est une application

$$c' : \{0, \dots, |\mathbf{k}|\} \rightarrow \mathbf{N}^*$$

telle que

$$c'(0) = \psi(0, c(0))$$

et

$$c'(s) \in \{\psi(s, c(s))\} \cup \{\mathbf{k}(s)+1, \dots, n\}$$

lorsque $s \neq 0$.

Un élément s de $\{1, \dots, |\mathbf{k}|\}$ tel que $c'(s) \leq \mathbf{k}(s)$ [resp. $c'(s) \geq \mathbf{k}(s)+1$] s'appelle un *point ordinaire* (resp. *extraordinaire*) du sélecteur c' . La valeur $c'(s)$ est dite alors *ordinaire* (resp. *extraordinaire*).

Tout trajet de ψ est un sélecteur de ψ dont tous les points sont ordinaires.

Un sélecteur peut s'interpréter comme un couple $(j; l)$ où $j \in \{1, \dots, p\}$ et $l \in \mathcal{E}_n(|\mathbf{k}|)$.

L'ensemble des sélecteurs d'un tableau ψ sera noté $\text{Sel}(\psi)$.

L'ensemble des sélecteurs d'un tableau ψ associés à un odogramme c de \mathbf{k} sera noté $\text{Sel}_c(\psi)$.

On a $\text{Sel}(\psi) = \bigcup_{c \in \text{Od}(\mathbf{k})} \text{Sel}_c(\psi)$ mais on observera que les $\text{Sel}_c(\psi)$ ne forment pas une partition de $\text{Sel}(\psi)$.

Profil d'un sélecteur.

N.B. On rappelle que maintenant ψ est sensé vérifier la condition (i) des tableaux principaux.

Soit c' un sélecteur du tableau ψ associé à un odogramme c de \mathbf{k} . L'application

$$\bar{c}' : \{0, \dots, |\mathbf{k}|\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$$

définie en posant

$$\bar{c}'(s) = \begin{cases} n & \text{lorsque } n = 0 \\ \text{et} & \\ \max(\mathbf{k}(s), c(s)) & \text{lorsque } 1 \leq s \leq |\mathbf{k}|, \end{cases}$$

est un profil de type \mathbf{k} . On l'appelle le *profil du sélecteur c'* . (Notons au passage que les trajets de ψ sont les sélecteurs de profil banal).

Il est clair que la connaissance de l'odogramme c , du profil \bar{c}' et du tableau ψ suffit à déterminer complètement le sélecteur c' car c' et \bar{c}' ont mêmes points ordinaires. En outre l'application de $\text{Sel}_c(\psi)$ dans $\text{Prof}(\mathbf{k})$, qui à tout sélecteur c' associe son profil \bar{c}' , est surjective donc bijective. Ainsi à tout odogramme c et à tout profil \mathbf{p} de type \mathbf{k} , la donnée du tableau ψ permet d'associer un sélecteur unique noté $\{c, \mathbf{p}; \psi\}$.

On observera que l'application de $\text{Od}(\mathbf{k}) \times \text{Prof}(\mathbf{k})$ sur $\text{Sel}(\psi)$ ainsi définie n'est pas en général injective.

Analyseurs de ψ . — Une application

$$C = (c, c') : \{0, \dots, |\mathbf{k}|\} \rightarrow \{1, \dots, n\} \times \mathbf{N}^*$$

s'appelle un *analyseur* du tableau ψ si sa première composante c appartient à $\text{Od}(\mathbf{k})$ et sa deuxième composante c' appartient à $\text{Sel}_c(\psi)$.

L'ensemble des analyseurs de ψ sera noté $\text{An}(\psi)$.

Un analyseur de première composante c est dit *subordonné* à l'odogramme c .

L'ensemble des analyseurs subordonnés à un élément c de $\text{Od}(\mathbf{k})$ sera noté $\text{An}_c(\psi)$.

Lorsque c parcourt l'ensemble $\text{Od}(\mathbf{k})$ les $\text{An}_c(\psi)$ forment une partition de l'ensemble $\text{An}(\psi)$. D'après ce qui précède l'ensemble $\text{An}(\psi)$ s'identifie donc à l'ensemble $\text{Od}(\mathbf{k}) \times \text{Prof}(\mathbf{k})$. Pour tout $c \in \text{Od}(\mathbf{k})$ et tout $\mathbf{p} \in \text{Prof}(\mathbf{k})$, l'unique élément de $\text{An}(\psi)$ qui correspond au couple (c, \mathbf{p}) sera noté $[c, \mathbf{p}; \psi]$.

On désigne par C_0^ψ (ou lorsqu'aucune confusion n'est à craindre, simplement par C_0) l'élément $[c_0, \mathbf{p}_0; \psi]$ de $\text{An}_{c_0}(\psi)$ et on l'appelle l'*analyseur banal* de ψ .

Analyseurs tronqués. — Pour tout $s \in \{1, \dots, |\mathbf{k}|\}$ et pour tout analyseur $C = (c, c')$ de ψ , on définit

$$\mathbf{t}_s C : \{0, \dots, s\} \rightarrow \{1, \dots, n\} \times \mathbf{N}^*,$$

comme étant l'analyseur subordonné à l'odogramme $\mathbf{t}_s c$ dont la deuxième composante $\mathbf{t}_{s,c} c'$ est le sélecteur du tableau $\mathbf{t}_{s,c(s)} \psi$ obtenu en restreignant l'analyseur c' à l'ensemble $\{0, \dots, s\}$. C'est donc un élément de $\text{An}_{\mathbf{t}_s c}(\mathbf{t}_{s,c(s)} \psi)$.

Étendard associé à un analyseur. — Soit $\sigma \in G_n$; à tout analyseur $C = (c, c')$ du tableau ψ on associe l'expression jacobienne $J(\sigma, \psi, C)$ appelé *étendard* associé à C définie en posant

$$J(\sigma, \psi, C) = \prod_{s=1}^{|\mathbf{k}|} (-1)^{\bar{c}(s-1) + \bar{c}'(s)} J_s(\sigma, \psi, C) = \prod_{s=1}^{|\mathbf{k}|} J'_s(\sigma, \psi, C),$$

où $J_s(\sigma, \psi, C)$ [resp. $J'_s(\sigma, \psi, C)$] est le mineur (resp. le cofacteur) de $J(\sigma, \mathbf{t}_{s,c(s)} \psi)$ obtenu en supprimant la ligne d'indice $c(s-1)$ et la colonne d'indice $c'(s)$ et où \bar{c} est la signature de l'odogramme c et \bar{c}' le profil du sélecteur c' .

Pour tout $s \in \{1, \dots, |\mathbf{k}|\}$, l'expression jacobienne $J_s(\sigma, \psi, C)$ s'appelle le *s-ième composant* (ou le *composant d'indice s*) de l'étendard $J(\sigma, \psi, C)$.

C'est un élément de $\bar{\Delta}(p, \mathbf{k}^{(q_{\mathbf{k}}(s))})$ [resp. de $\hat{\Delta}(p, \mathbf{k}^{(q_{\mathbf{k}}(s))})$] [où $q_{\mathbf{k}}(s)$ est l'application associée à \mathbf{k} au (f), du chapitre II].

Pour tout $s \in \{1, \dots, |\mathbf{k}|\}$ l'expression jacobienne $\prod_{s'=1}^s J_{s'}(\sigma, \psi, C)$ s'appelle le *s-ième sous-étendard* de l'étendard $J(\sigma, \psi, C)$.

Propriété des sous-étendards d'un étendard.

LEMME 14. — Pour tout $s \in \{1, \dots, |\mathbf{k}|\}$ tout $C = (c, c') \in \text{An}(\psi)$ et tout $\sigma \in G_n$ on a

$$J(\sigma, \mathbf{t}_s, c(s) \psi, \mathbf{t}_s C) = \prod_{s'=1}^s (-1)^{\bar{c}(s'-1) - \bar{c}'(s)} J_{s'}(\sigma, \psi, C) = \prod_{s'=1}^s J'_{s'}(\sigma, \psi, C).$$

Ce lemme découle directement des définitions.

REMARQUE 1. — Pour que le s -ième composant de l'étendard $J(\sigma, \psi, C)$ soit une expression jacobienne bien formée, il faut et il suffit que s soit un point ordinaire du sélecteur c' . Pour qu'en outre ce même composant soit égal à $J(\sigma, \psi^{(q_{\mathbf{k}(s)})})$ il suffit que s ne soit pas une coupure de c : cette condition est de plus nécessaire si ψ satisfait à la condition (ii) des tableaux principaux. De cette remarque découle le lemme suivant :

LEMME 15. — Soit $s \in \{1, \dots, |\mathbf{k}|\}$ et $\sigma \in G_n$.

Soit $C = (c, c')$ un analyseur de ψ .

Lorsque ψ est principal, pour que $J_s(\sigma, \psi, C)$ soit une expression jacobienne régularisable [cf. (f) du chapitre III et (g), 7°, du chapitre II] il faut et il suffit que s soit un point ordinaire de c' et que, lorsque s est une coupure de c , la restriction de la ligne $\mathbf{r}_{c(s)} \psi$ à l'ensemble $\{1, \dots, \rho(s-1)\}$ prenne ses valeurs dans $\{\mathbf{k}(s)+1, \dots, n\}$.

Composant directeur d'un étendard. — Lorsque l'analyseur C est subordonné à un odogramme c différent de l'odogramme banal le seul composant de l'étendard $J(\sigma, \psi, C)$ dont la définition fasse intervenir la dernière ligne de ψ est celui dont l'indice s est égal à la coupure directrice s_c de l'odogramme c . On l'appelle le *composant directeur* de l'étendard $J(\sigma, \psi, C)$.

Étendard banal. — Lorsque C est l'analyseur banal $C_0 = (c_0, c'_0)$ où c_0 est l'odogramme banal et c'_0 est le sélecteur de profil banal associé à c_0 , alors quel que soit $\sigma \in G_n$ on a

$$J(\sigma, \psi, C_0) = \prod_{q=1}^t J^{(q)}(\sigma, \psi)^{r^{(q)} - r^{(q-1)}} \quad (\text{étendard banal}).$$

Il est important de garder en mémoire le fait que l'étendard banal $J(\sigma, \psi, C_0)$ ne dépend pas de la dernière ligne de ψ mais seulement du tableau $\psi^{(t)}$.

L'idéal faiblement engendré par $J(\sigma, \psi, C_0)$ est égal à l'idéal faiblement engendré par le drapeau $J^{\#}(\sigma, \psi^{(t)})$ [cf. (e), du chapitre III].

LEMME 16. — Soient $\sigma \in G_n$ et $C = (c, c')$ un analyseur de ψ dont l'odogramme c est différent de c_0 et de coupure directrice s_c supérieure ou égale à 2. On suppose que ψ est principal et que la restriction de sa dernière ligne $\mathbf{r}_{\mathbf{k}(|\mathbf{k}|)} \psi$ à l'ensemble $\{1, \dots, s_c-1\}$ prend ses valeurs dans $\{\mathbf{k}(s_c)+1, \dots, n\}$. On désigne par ψ' le régularisé du tableau obtenu à partir de $\psi^{(q(c))}$ en remplaçant la ligne [resp. la ligne tronquée lorsque $c(s_c-1) = \mathbf{k}(s_c)+1$] d'indice $c(s_c-1)$ par la restriction à l'ensemble $\{0, \dots, s_c-1\}$ de $\mathbf{r}_{\mathbf{k}(|\mathbf{k}|)} \psi$.

Alors l'expression jacobienne $J = J(\sigma, \psi, C_0) \cdot J(\sigma, \psi, C)$ appartient à la racine de l'idéal engendré par $\bar{\Delta}(p, \mathbf{k})$ et par les étendards de la forme $J(\bar{\sigma}, \check{\psi}, C_0)$ où $\bar{\sigma}$ parcourt l'ensemble $\mathbf{G}(\sigma; \chi(\mathbf{q}(c)) + 1, \dots, n)$ défini au lemme 13 et $\check{\psi}$ l'ensemble des tableaux réguliers de type (p, \mathbf{k}) tels que $\check{\psi}^{(\mathbf{q}(c))} = \psi'$. [On rappelle que $\mathbf{q}(c)$ est l'ordre de la coupure directrice s_c , que C_0 est l'analyseur banal et que la notion de ligne tronquée d'un tableau a été introduite au (g), 1°, du chapitre II].

Ce lemme est conséquence immédiate du lemme 13 où l'on remplace le symbole \mathbf{k} par le symbole \mathbf{k}' (qui sous les hypothèses du présent lemme est toujours défini) et du lemme 15 en remarquant que toutes les fois que \mathbf{k}' est défini on a $\bar{\Delta}(p, \mathbf{uk}') \subset \bar{\Delta}(p, \mathbf{k})$ et en constatant que J est de la forme $J' \cdot J^*(\sigma, \psi')$ où J' est une expression jacobienne.

2° Dérivées d'une expression jacobienne bien formée.

NOTATIONS. — Si l'on pose

$$\psi' = \psi^{(t)} \quad \text{et} \quad \mathbf{r}_{\mathbf{k}(|\mathbf{k}|)}\psi = (j; l) \quad [\text{ou } j \in \{1, \dots, p\} \text{ et } l \in \mathcal{E}_n(|\mathbf{k}|)]$$

[cf. (h), du chapitre II] alors à tout couple

$$(j'; l') \in \{1, \dots, p\} \times \mathcal{E}_n(|\mathbf{k}|)$$

on associe l'ensemble $\widehat{\text{An}}\left(\psi' \left| \begin{smallmatrix} j; l \\ j'; l' \end{smallmatrix} \right.\right)$ de tous les analyseurs $C = (c, c')$ de ψ dont la deuxième composante c' s'identifie au couple $(j'; l')$.

Lorsque ψ est en outre condensable [cf. (g), 10°, du chapitre II], on pose

$$\mathbf{r}_{\mathbf{k}(|\mathbf{k}|)}\psi = (j; \mathbf{l}) \quad [\text{où cette fois-ci } \mathbf{l} \in \mathcal{S}_n(|\mathbf{k}|)];$$

alors à tout couple

$$(j'; \mathbf{l}') \in \{1, \dots, p\} \times \mathcal{S}_n(|\mathbf{k}|)$$

on associe l'ensemble $\overline{\text{An}}\left(\psi' \left| \begin{smallmatrix} j; \mathbf{l} \\ j'; \mathbf{l}' \end{smallmatrix} \right.\right)$ de tous les analyseurs $C = (c, c')$ de ψ dont la deuxième composante c' est de la forme $(j'; \mathbf{l}')$ où $\mathbf{l}' \in \mathcal{E}_n(|\mathbf{k}|)$ est tel que $\Phi(\mathbf{l}') = \mathbf{l}'$ [pour la définition de Φ , cf. (h), du chapitre II].

Lorsque $(j; l)$ appartient à $\{1, \dots, p\} \times \mathcal{E}_n(r)$ on pose

$$\widehat{\mathbf{D}}(j; l) = \frac{\partial}{\partial \widehat{Z}_i^j}.$$

Lorsque $(j; \mathbf{l})$ appartient à $\mathcal{S}_n^p(r)$ [cf. (b), du chapitre II] on pose

$$\overline{\mathbf{D}}(j; \mathbf{l}) = \frac{\partial}{\partial Z_i^j}.$$

LEMME 17. — Soient n et p des entiers supérieurs ou égaux à 1 et \mathbf{k} un symbole de hauteur n différent de \mathbf{e}_n .

Soit $\psi \in \hat{\mathcal{F}}(p, \mathbf{k})$ un tableau satisfaisant à la condition (i) des tableaux principaux [cf. (g), 1° et 4°, du chapitre II]. On pose

$$\psi' = \psi^{(t)} \quad \text{et} \quad \mathbf{r}_{\mathbf{k}(|\mathbf{k}|)}\psi = (j; l) \in \{1, \dots, p\} \times \mathcal{E}_n(|\mathbf{k}|).$$

Alors pour tout couple

$$(j'; l') \in \{1, \dots, p\} \times \mathcal{E}_n(|\mathbf{k}|)$$

et tout $\sigma \in \mathbf{G}_n$ on a

$$\hat{\mathbf{D}}(j'; \sigma l') J(\sigma, \psi) = \sum_{\mathbf{C} \in \hat{\Lambda}_n(\psi' |_{j'; l'})} J(\sigma, \psi, \mathbf{C}).$$

Lorsque ψ est en outre condensable, c'est-à-dire lorsque la restriction à $\{1, \dots, |\mathbf{k}|\}$ de sa dernière ligne est décroissante, on pose

$$\mathbf{r}_{\mathbf{k}(|\mathbf{k}|)}\psi = (j; \mathbf{l}) \quad [\text{où cette fois-ci } \mathbf{l} \in \mathcal{S}_n(|\mathbf{k}|)];$$

alors pour tout couple $(j'; l') \in \mathcal{S}_n^p(|\mathbf{k}|)$ on a

$$\bar{\mathbf{D}}(j'; \sigma l') J(\sigma, \psi) = \sum_{\mathbf{C} \in \bar{\Lambda}_n(\psi' |_{j'; l'})} J(\sigma, \psi, \mathbf{C}).$$

Ce lemme, évident lorsque $|\mathbf{k}| = 1$ se démontre (dans le cas non commutatif) par récurrence sur la longueur de \mathbf{k} en utilisant la formule donnant la dérivée d'un déterminant et le lemme 14, en remarquant que lorsque $|\mathbf{k}| \geq 1$ on a

$$\hat{\mathbf{D}}(j'; l'' m) D_{m'} = D_{m'} \hat{\mathbf{D}}(j'; l'' m)$$

et

$$\hat{\mathbf{D}}(j'; l'' m) D_m = \hat{\mathbf{D}}(j'; l'') + D_m \hat{\mathbf{D}}(j'; l'' m)$$

[pour tout $l'' \in \mathcal{E}_n(|\mathbf{k}| - 1)$, tout $j' \in \{1, \dots, p\}$ tout $m' \in \{1, \dots, n\}$ et tout $m \in \{1, \dots, n\}$ ($m \neq m'$)] [pour la notation $l'' m$, cf. (h), du chapitre II] et que pour tout tableau $\check{\psi}$ de type (p, \mathbf{m}) (où $\mathbf{m} \in \mathcal{S}_n$) on a $\hat{\mathbf{D}}(j'; l'' m). J(\sigma, \check{\psi}) = 0$ toutes les fois que $|\mathbf{m}| \leq |l''|$.

Le cas commutatif se déduit du cas non commutatif par spécialisation, à l'aide de la formule

$$\bar{\mathbf{D}}(j; \mathbf{l}) \circ \Phi = \Phi \circ \sum_{\substack{l \in \mathcal{E}_n \\ \Phi(l)=1}} \hat{\mathbf{D}}(j; l),$$

valable pour tout $j \in \{1, \dots, p\}$ et tout $\mathbf{l} \in \mathcal{S}_n$.

REMARQUE 2. — Toute expression jacobienne bien formée $J(\sigma, \psi)$, où l'on suppose ψ condensable dans le cas commutatif, peut s'écrire comme la somme d'un polynôme $P(\sigma, \psi)$ homogène de degré $\chi(t') - \chi(t) + 1$ en les variables de poids $|\mathbf{k}|$ [cf. (e), du chapitre III] et d'un polynôme $Q(\sigma, \psi)$ où ne figure aucune variable de poids supérieur ou égal à $|\mathbf{k}|$. Le polynôme $P(\sigma, \psi)$ s'appelle la *partie principale* de $J(\sigma, \psi)$.

La formule d'Euler permet d'obtenir les identités

$$P(\sigma, \psi) = \frac{1}{\chi(t') - \chi(t) + 1} \sum_{\substack{j' \in \{1, \dots, p\} \\ l' \in \mathcal{E}_n(|\mathbf{k}|)}} \hat{Z}_{\sigma l'}^{j'} \sum_{C \in \widehat{\text{An}}(\psi' |_{j'; l'})} J(\sigma, \psi, C),$$

dans le cas non commutatif et

$$P(\sigma, \psi) = \frac{1}{\chi(t') - \chi(t) + 1} \sum_{\substack{j' \in \{1, \dots, p\} \\ l' \in \mathcal{E}_n(|\mathbf{k}|)}} \bar{Z}_{\sigma l'}^{j'} \sum_{C \in \overline{\text{An}}(\psi' |_{j'; l'})} J(\sigma, \psi, C),$$

dans le cas commutatif [ici, comme dans le lemme 17 on écrit ψ sous la forme $\psi = (\psi'; j, \mathbf{l})$ ou $\psi = (\psi'; j, \mathbf{l})$ selon le cas envisagé (cf. (g), 3°, du chapitre II)].

Malheureusement les polynômes $Q(\sigma, \psi)$ sont beaucoup plus pénibles à décrire et pourtant il serait fort intéressant de savoir les manipuler avec aisance.

LEMME 18 (cas non commutatif). — Soient n et p des entiers supérieurs ou égaux à 1 et \mathbf{k} un symbole de hauteur n différent de \mathbf{e}_n . Soient $\psi' \in \mathcal{F}'(p, \mathbf{k})$ un tableau régulier [cf. (g), 8°, du chapitre II] et ψ un tableau de type (p, \mathbf{k}) subordonné à ψ' .

Soient

$$\mathbf{r}(h, \psi') = (j(h, \psi'); \mathbf{l}(h, \psi')) \in \overline{\mathcal{L}}(\psi', |\mathbf{k}|) \quad [1 \leq h \leq v'(p, \mathbf{k})]$$

les lignes associées à ψ' au (g), 8°, du chapitre II.

Alors quels que soient h et $h' \in \{1, \dots, v'(p, \mathbf{k})\}$ et $\sigma \in G_n$ on a

$$\hat{\mathbf{D}}(j(h, \psi'); \sigma \mathbf{l}(h, \psi')) J(\sigma, (\psi'; j(h, \psi'), \mathbf{l}(h, \psi'))) = J(\sigma, \psi, C_0)$$

[étendard banal défini à partir du tableau ψ (subordonné à ψ') (qu'on a choisi arbitrairement) et

$$\hat{\mathbf{D}}(j(h', \psi'); \sigma \mathbf{l}(h', \psi')) J(\sigma, (\psi'; j(h', \psi'), \mathbf{l}(h', \psi'))) = 0 \quad \text{lorsque } h' \neq h.$$

(Ici, bien que les lignes $\mathbf{l}(h, \psi')$ et $\mathbf{l}(h', \psi')$ soient décroissantes on les considère comme des éléments de $\mathcal{E}_n(|\mathbf{k}|)$).

Pour le voir on applique le lemme 17.

Les ensembles $\widehat{\text{An}}\left(\psi' \left| \begin{array}{l} j(h, \psi'); \mathbf{l}(h, \psi') \\ j(h', \psi'); \mathbf{l}(h', \psi') \end{array} \right. \right)$ ne peuvent posséder d'analyseurs dont le sélecteur ait un profil non banal : en effet la restriction à $\{1, \dots, |\mathbf{k}|\}$ d'un tel sélecteur n'est pas inférieure ou égale [pour l'ordre usuel de $\mathcal{E}_n(|\mathbf{k}|)$] à \mathbf{k} considéré comme élément de $\mathcal{E}_n(|\mathbf{k}|)$. Or on a toujours $\mathbf{l}(h', \psi') \leq \mathbf{k}$ [ordre usuel sur $\mathcal{E}_n(|\mathbf{k}|)$] lorsque $1 \leq h' \leq v'(p, \mathbf{k})$.

De même les ensembles $\widehat{\text{An}}\left(\psi' \left| \begin{array}{l} j(h, \psi'); \mathbf{l}(h, \psi') \\ j(h', \psi'); \mathbf{l}(h', \psi') \end{array} \right. \right)$ ne peuvent posséder d'analyseurs dont le sélecteur $(j; \mathbf{l})$ (de profil banal) soit associé à un odogramme non banal : la condition (ii) des tableaux principaux implique en effet que $(j; \mathbf{l}) \notin \overline{\mathcal{L}}(\psi', |\mathbf{k}|)$. (cf. la rubrique « trajets de ψ'' » ci-dessus).

Enfin pour que les ensembles $\widehat{\text{An}}\left(\psi' \left| \begin{array}{l} j(h, \psi'); \mathbf{l}(h, \psi') \\ j(h', \psi'); \mathbf{l}(h', \psi') \end{array} \right. \right)$ possèdent l'analyseur banal, il faut et il suffit que $h = h'$. Ceci achève la démonstration du lemme.

Le cas commutatif est plus délicat à décrire. Nous commencerons par traiter à titre d'exercice un cas particulier où la situation est analogue à celle rencontrée au lemme 18.

DÉFINITION. — On dira qu'un tableau régulier $\psi \in \tilde{\mathcal{F}}(p, n)$ [cf. (g), 5°, du chapitre II] est *complètement régulier* s'il est vide, ou si, lorsqu'il est de type (p, \mathbf{k}) (pour $\mathbf{k} \in \mathcal{S}_n$), il vérifie la condition suivante :

$$\psi(s, m) \geq \chi(q_{\mathbf{k}}(s)+1)+1$$

pour tout $(s, m) \in \mathcal{C}(\mathbf{k})$ tel que $1 \leq s \leq r(t'-1)$ [où $q_{\mathbf{k}}(s)$ est l'application associée à \mathbf{k} au (f), du chapitre II].

Exemple. — Le tableau ψ étudié au (g), du chapitre III est complètement régulier.

N.B. On observera qu'il existe des couples (p, \mathbf{k}) (où $p \in \mathbb{N}^*$ et où \mathbf{k} est un symbole) pour lesquels aucun tableau de type (p, \mathbf{k}) n'est complètement régulier.

LEMME 19 (cas commutatif spécial). — *Sous les hypothèses et avec les notations du lemme 18, si l'on suppose en outre que ψ' est complètement régulier, alors quels que soient h et $h' \in \{1, \dots, v'(p, \mathbf{k})\}$ et $\sigma \in G_n$. On a*

$$\overline{\mathbf{D}}(j(h, \psi'); \sigma \mathbf{l}(h, \psi')) \mathbf{J}(\sigma, (\psi'; j(h, \psi'), \mathbf{l}(h, \psi'))) = \mathbf{J}(\sigma, \psi, C_0)$$

(étendard banal) et

$$\overline{\mathbf{D}}(j(h', \psi'); \sigma \mathbf{l}(h', \psi')) \mathbf{J}(\sigma, (\psi'; j(h', \psi'), \mathbf{l}(h', \psi'))) = 0 \quad \text{lorsque } h' \neq h.$$

Pour le voir on applique le lemme 17.

Les ensembles $\overline{\text{An}}\left(\psi' \left| \begin{array}{l} j(h, \psi'); \mathbf{l}(h, \psi') \\ j(h', \psi'); \mathbf{l}(h', \psi') \end{array} \right. \right)$ ne peuvent posséder d'analyseurs dont le sélecteur ait un profil non banal : en effet si l' désigne la restriction à $\{1, \dots, |\mathbf{k}|\}$ d'un tel sélecteur, on n'a pas $\Phi(l') \leq \mathbf{k}$ pour l'ordre usuel de \mathcal{S}_n [pour la définition de Φ , cf. (h), du chapitre II].

Or dans \mathcal{S}_n on a toujours $\mathbf{l}(h', \psi') \leq \mathbf{k}$ lorsque un $1 \leq h' \leq v'(p, \mathbf{k})$.

De même les ensembles $\overline{\text{An}}\left(\psi' \left| \begin{array}{l} j(h, \psi'); \mathbf{l}(h, \psi') \\ j(h', \psi'); \mathbf{l}(h', \psi') \end{array} \right. \right)$ ne peuvent posséder d'analyseurs dont le sélecteur $(j; \mathbf{l})$ (de profil banal) soit associé à un odogramme non banal : en effet on a vu sous la rubrique « trajets de ψ » ci-dessus qu'alors $\Phi(\mathbf{l}) = \mathbf{l}$ et que la condition (ii) des tableaux principaux implique que $(j; \mathbf{l}) \notin \overline{\mathcal{L}}(\psi', |\mathbf{k}|)$.

Enfin pour que les ensembles $\overline{\text{An}}\left(\psi' \left| \begin{array}{l} j(h, \psi'), \mathbf{l}(h, \psi') \\ j(h', \psi'), \mathbf{l}(h', \psi') \end{array} \right. \right)$ possèdent l'analyseur banal, il faut et il suffit que $h = h'$, ce qui achève la démonstration du lemme.

LEMME 20 (cas commutatif général). — Soient n et p des entiers supérieurs ou égaux à 1 et \mathbf{k} un symbole de hauteur n différent de \mathbf{e}_n .

Soient $\psi' \in \overline{\mathcal{F}}'(p, \mathbf{k})$ un tableau régulier [cf. (g), 8°, du chapitre II] et ψ un tableau de type (p, \mathbf{k}) subordonné à ψ' .

Soient

$$\mathbf{r}(h, \psi') = (j(h, \psi'); \mathbf{I}(h, \psi')) \in \overline{\mathcal{L}}(\psi', |\mathbf{k}|) \quad [1 \leq h \leq v'(p, \mathbf{k})]$$

les lignes associées à ψ' au (g), 8° du chapitre II.

Alors quel que soit $\sigma \in G_n$ il existe un polynôme à coefficients entiers $\overline{\mathbf{P}}(\sigma, \psi')$ homogène de degré $v' = v'(p, \mathbf{k})$ en les variables $\mathbf{J}(\sigma, (\psi'; j(h, \psi'), \mathbf{I}(h, \psi')), \mathbf{C})$

$$\left[\text{où } h \in \{1, \dots, v'\} \text{ et } \mathbf{C} \in \bigcup_{1 \leq h, h' \leq v'} \overline{\mathbf{A}}_n \left(\psi' \left| \begin{array}{l} j(h, \psi'); \mathbf{I}(h, \psi') \\ j(h, \psi'); \mathbf{I}(h', \psi') \end{array} \right. \right) \right]$$

dont chaque monôme possède un facteur de la forme $\mathbf{J}(\sigma, (\psi'; j(h, \psi'), \mathbf{I}(h, \psi')), (c, c'))$ où l'analyseur (c, c') est subordonné à un odogramme $c \neq c_0$ [de coupure $s_c \geq 2$ telle que $\mathbf{q}(c) \geq 1$] et dont le composant directeur $\mathbf{J}_{s_c}(\sigma, (\psi'; j(h, \psi'), \mathbf{I}(h, \psi')), (c, c'))$ soit égal au signe près à une expression jacobienne régulière de la forme $\mathbf{J}(\sigma, \psi'')$ [où $\psi'' \in \tilde{\mathcal{F}}(p, \mathbf{k}^{(\mathbf{q}(c))})$ est strictement plus grand que $\psi^{(\mathbf{q}(c))}$ pour l'ordre lexicographique de $\tilde{\mathcal{F}}(p, \mathbf{k}^{(\mathbf{q}(c))})$ [cf. (g), 6°, du chapitre II]] tels que

$$\begin{aligned} \mathcal{J} \left(\overline{\mathbf{D}}(j(1, \psi'); \sigma \mathbf{I}(1, \psi')), \overline{\mathbf{D}}(j(2, \psi'); \sigma \mathbf{I}(2, \psi')), \dots, \right. \\ \left. \overline{\mathbf{D}}(j(v', \psi'); \sigma \mathbf{I}(v', \psi')); \mathbf{J}(\sigma, (\psi'; j(1, \psi'), \mathbf{I}(1, \psi')), \right. \\ \left. \mathbf{J}(\sigma, (\psi'; j(2, \psi'), \mathbf{I}(2, \psi')), \dots, \right. \\ \left. \mathbf{J}(\sigma, (\psi'; j(v', \psi'), \mathbf{I}(v', \psi'))) \right) = (\mathbf{J}(\sigma, \psi, \mathbf{C}_0))^{v'} + \overline{\mathbf{P}}(\sigma, \psi'), \end{aligned}$$

où $\mathbf{J}(\sigma, \psi, \mathbf{C}_0)$ est l'étendard banal défini à partir du tableau ψ (subordonné à ψ' qu'on a choisi arbitrairement).

Pour le voir quels que soient h et $h' \in \{1, \dots, v'\}$ et $(c, \mathbf{p}) \in \text{Od}(\mathbf{k}) \times \text{Prof}(\mathbf{k})$ on pose

$$\mathbf{J} \left(\begin{array}{c|c} \psi' & h \\ \hline (c, \mathbf{p}) & h' \end{array} \right) = \begin{cases} \mathbf{J}(\sigma, (\psi'; j(h, \psi'), \mathbf{I}(h, \psi')), [c, \mathbf{p}; (\psi'; j(h, \psi'), \mathbf{I}(h, \psi'))]) \\ \text{(c'est un étendard) lorsque} \\ \{c, \mathbf{p}; (\psi'; j(h, \psi'), \mathbf{I}(h, \psi'))\} = \{(j(h', \psi'); \mathbf{I}(h', \psi'))\} \\ \text{et 0 dans le cas contraire} \end{cases}$$

(où les opérations $\{c, \mathbf{p}; \psi\}$ et $[c, \mathbf{p}; \psi]$ ont été respectivement définies aux rubriques « profil d'un sélecteur » et « analyseurs de ψ »).

Pour tout $(c, \mathbf{p}) \in \text{Od}(\mathbf{k}) \times \text{Prof}(\mathbf{k})$ on désigne par $\mathbf{M}(c, \mathbf{p})$ la matrice carrée à v' lignes et colonnes dont le terme d'indice de ligne h et d'indice de colonne h' est égal à $\mathbf{J} \left(\begin{array}{c|c} \psi' & h \\ \hline (c, \mathbf{p}) & h' \end{array} \right)$.

Cette matrice a au plus un terme non nul dans chaque ligne.

Si M désigne la matrice dont le terme d'indice de ligne h et d'indice de colonne h' est égal à

$$\overline{\mathbf{D}}(j(h', \psi'); \sigma \mathbf{l}(h', \psi')) \mathbf{J}(\sigma, (\psi'; j(h, \psi'), \mathbf{l}(h, \psi')))$$

il est clair d'après le lemme 17 qu'on a

$$M = \sum_{(c, \mathbf{p}) \in \text{Od}(\mathbf{k}) \times \text{Prof}(\mathbf{k})} M(c, \mathbf{p}),$$

or on a

$$M(c_0, \mathbf{p}_0) = \mathbf{J}(\sigma, \psi, C_0) \cdot \mathbf{I}_{v'}$$

(où $\mathbf{I}_{v'}$ désigne la matrice unité à v' lignes et colonnes).

D'autre part pour tout $\mathbf{p} \in (\text{Prof}(\mathbf{k}) - \{\mathbf{p}_0\})$ les termes non nuls de la matrice $M(c_0, \mathbf{p})$ sont tous situés strictement au-dessus de la diagonale principale. En effet si l désigne la restriction à $\{1, \dots, |\mathbf{k}|\}$ d'un sélecteur de profil non banal d'un tableau principal ψ dont la dernière ligne est notée $(j; \mathbf{l})$, alors $\Phi(l)$ est strictement plus grand que \mathbf{l} pour l'ordre usuel de $\mathcal{S}_n(|\mathbf{k}|)$.

La condition (ii) des tableaux principaux implique que pour tout $c \in (\text{Od}(\mathbf{k}) - \{c_0\})$ la matrice $M(c, \mathbf{p}_0)$ est identiquement nulle.

En outre pour tout odogramme c admettant la coupure $s = 1$ ou plus généralement une coupure d'ordre 0 et pour tout $\mathbf{p} \in \text{Prof}(\mathbf{k})$, cette même condition implique que la matrice $M(c, \mathbf{p})$ est identiquement nulle.

Soit maintenant un odogramme $c \neq c_0$ et un profil $\mathbf{p} \neq \mathbf{p}_0$ tels que la matrice $M(c, \mathbf{p}_0)$ ne soit pas identiquement nulle. Soit s_c la coupure directrice de c : d'après ce qu'on vient de voir on a nécessairement $s_c \geq 2$ et $q(c) \geq 1$.

Quel que soit $s \in \{s_c, \dots, \mathbf{k}(|\mathbf{k}|)\}$ on a nécessairement $\mathbf{p}(s) = \mathbf{k}(s)$. Pour tout $h \in \{1, \dots, v'\}$ la restriction à l'ensemble $\{1, \dots, s_c - 1\}$ du sélecteur

$$\{c, \mathbf{p}; (\psi'; j(h, \psi'), \mathbf{l}(h, \psi'))\}$$

est par conséquent supérieure strictement à $\mathbf{t}_{s_c-1} \mathbf{l}(h, \psi')$. Sur $\{1, \dots, v'\}$ on considère la relation d'équivalence définie en posant $h \equiv h'$ lorsque $\mathbf{s}^{s_c-1} \mathbf{l}(h, \psi') = \mathbf{s}^{s_c-1} \mathbf{l}(h', \psi')$ (pour la définition de l'opérateur s , cf. (d), du chapitre II); grâce à l'ordre du dictionnaire de rimes qui a été adopté pour l'ensemble $\mathcal{L}(\psi', |\mathbf{k}|)$ et à la convention du (g), 8°, du chapitre II, les classes d'équivalence de cette relation sont des intervalles d'entiers (dont le nombre d'élément n'est d'ailleurs pas constant). On décompose la matrice $M(c, \mathbf{p})$ en blocs au moyen de la partition ainsi définie tant sur l'ensemble des lignes que sur l'ensemble des colonnes de $M(c, \mathbf{p})$. On constate alors aisément que les blocs non diagonaux de $M(c, \mathbf{p})$ sont identiquement nuls et que les blocs diagonaux sont des matrices carrées dont seule une colonne est différente de 0. Soit h' l'indice de cette colonne. Tous les termes de cette colonne sont des étendards dont tous les composants restent constants (lorsqu'on fait varier l'indice de ligne h) à l'exception du composant directeur. Le lemme 15 appliqué à $s = s_c$ montre que, lorsque $h \geq h'$, ce composant directeur est, au signe près, égal à une expression jacobienne $\mathbf{J}(\sigma, \psi'')$ [où $\psi'' \in \tilde{\mathcal{F}}(p, \mathbf{k}^{(a(c))})$] est strictement plus grand que $\psi^{(a(c))}$ pour l'ordre lexicographique de $\tilde{\mathcal{F}}(p, \mathbf{k}^{(a(c))})$ [cf. (g), 6°, du chapitre II].

En résumé, modulo l'idéal engendré par des étendards dont les composants directeurs sont, au signe près, construits à partir d'un tableau ψ'' satisfaisant aux conditions qui viennent d'être dites, la matrice M est une matrice triangulaire supérieure dont les éléments diagonaux sont tous égaux à l'étendard banal $J(\sigma, \psi, C_0)$. On achève la démonstration du lemme 20 en calculant le déterminant de la matrice M .

THÉORÈME 2. — Soient n et p des entiers supérieurs ou égaux à 1 et \mathbf{k} un symbole de hauteur n différent de \mathbf{e}_n . [On rappelle que la notation $\Delta_n(\mathbf{I})$ a été définie au (a) du chapitre III.]

Alors quels que soient $\sigma \in G_n$ et $\psi' \in \overline{\mathcal{F}'}(p, \mathbf{k})$ [cf. (g), 8°, du chapitre II], le drapeau jacobien $J^*(\sigma, \psi')$ appartient à l'image réciproque \mathcal{S} dans \mathcal{A}_n^p de l'idéal

$$\sqrt{\Delta_{v'(p, \mathbf{k})}(\overline{\Delta}(p, \mathbf{k})/\overline{\Delta}(p, \mathbf{tk}))}.$$

Ce théorème, évident lorsque $\overline{\mathcal{F}'}(p, \mathbf{k})$ est vide [c'est-à-dire lorsque $\mathbf{k}(|\mathbf{k}|) = n$] se démontre [lorsque $\overline{\mathcal{F}'}(p, \mathbf{k})$ est non vide] par récurrence décroissante sur l'ordre lexicographique défini sur cet ensemble au (g), 6°, du chapitre II.

On observe tout d'abord que, lorsque ψ' est l'élément maximal de $\overline{\mathcal{F}'}(p, \mathbf{k})$, le polynôme $\overline{P}(\sigma, \psi')$ calculé au lemme 20 est identiquement nul.

Dans ce cas le théorème est donc une conséquence immédiate du lemme 20.

On vérifie ensuite que pour tous les autres tableaux ψ' l'appartenance de $J^*(\sigma, \psi')$ à \mathcal{S} résulte du lemme 20, du lemme 16 et de l'hypothèse de récurrence. Cette remarque achève la démonstration du théorème 2.

(i) STRATES D'UN ANNEAU. — Soient v , un entier positif ou nul; A , un anneau commutatif à élément unité et I , un idéal de A .

DÉFINITION. — On appelle *v-réducteur* de l'idéal I tout élément $a \in A$ pour lequel il existe des éléments a_1, \dots, a_v de I tels que l'idéal $a.I$ soit inclus dans l'idéal engendré par a_1, \dots, a_v .

On appelle *v-transporteur* de l'idéal I , l'idéal de A engendré par les v -réducteurs de I . Cet idéal sera noté $\mathcal{T}_v(I)$.

Il est clair que $\mathcal{T}_0(I)$ est l'annulateur de I et qu'on a les inclusions

$$\mathcal{T}_0(I) \subset \mathcal{T}_1(I) \subset \dots \subset \mathcal{T}_v(I).$$

En outre on a $I \subset \mathcal{T}_1(I)$. D'autre part si v' est un entier et si a est un v -réducteur et b un v' -réducteur de I , alors quel que soit $c \in A$, l'élément $c.a$ est un v -réducteur et l'élément $a+b$ un $(v+v')$ -réducteur de I , mais il n'est pas vrai en général, même lorsque $v' \leq v$ que $a+b$ soit un v -réducteur de I .

DÉFINITION. — On appelle *v-strate* de A tout couple (I, I') d'idéaux de type fini de A , tels que $I \subset \sqrt{I'} \subset \sqrt{\mathcal{T}_v(I)} \cap \sqrt{\Delta_v(I)}$ [pour la définition de l'idéal $\Delta_v(I)$, cf. (a), chap. III]. Lorsqu'en outre $\sqrt{I'} \neq \sqrt{I}$ on dit que la v -strate (I, I') est *effective*.

L'une des raisons qui motivent l'introduction de cette définition est la proposition suivante :

PROPOSITION 3 (cf. Tougeron [15]). — *On suppose que A est l'anneau $\mathbb{Z}[X_1, X_2, \dots]$ des polynômes à coefficients entiers et à une infinité dénombrable d'indéterminées X_i ($i \in \mathbb{N}^*$). Soit K un corps commutatif de caractéristique 0 et soit (I, I') une v-strate de A. On désigne par $V(I)$ [resp. par $V(I')$] l'ensemble des suites*

$$x = (x_1, x_2, \dots) \in K^{\mathbb{N}} = \varprojlim_{n \in \mathbb{N}} K^n,$$

telles que $P(x_1, x_2, \dots) = 0$ pour tout $P \in I$ (resp. pour tout $P \in I'$).

Soient P_1, \dots, P_r un système de polynômes engendrant I et Q_1, \dots, Q_s un système de polynômes engendrant I' et soit n la borne supérieure des indices des variables X_m figurant dans les P_i et les Q_j .

Désignons par A_n , l'anneau $K[X_1, \dots, X_n]$;

par Π_n , la projection canonique de $K^{\mathbb{N}}$ sur K^n ;

par I_n (resp. I'_n) l'idéal engendré dans A_n par les P_1, \dots, P_r (resp. par les Q_1, \dots, Q_s), considérés comme polynômes à n indéterminées à coefficients dans K , et enfin

par $V(I_n)$ [resp. par $V(I'_n)$], le sous-ensemble de K^n des zéros communs à P_1, \dots, P_r (resp. Q_1, \dots, Q_s).

Alors le couple (I_n, I'_n) est une v-strate de A_n et la sous-variété $V(I_n) - V(I'_n)$ de $K^n - V(I'_n)$ est lisse et de codimension v . Pour que cette sous-variété soit non vide, il faut et il suffit que la v-strate (I_n, I'_n) soit effective; enfin l'ensemble $V(I) - V(I')$ est l'image réciproque par Π_n de la sous-variété $V(I_n) - V(I'_n)$ (provariété algébrique de codimension v sans singularités)

Commentaire

La condition $I \subset \sqrt{I'}$ exprime que $V(I') \subset V(I)$.

La condition $\sqrt{I'} \subset \sqrt{\mathcal{F}_v(I)}$ exprime que la codimension dans $K^{\mathbb{N}}$ de la provariété $V(I) - V(I')$ est inférieure ou égale à v .

La condition $\sqrt{I'} \subset \sqrt{\Delta_v(I)}$ exprime que $V(I) - V(I')$ est contenue dans une provariété lisse de codimension supérieure ou égale à v .

La conjonction de ces deux dernières conditions exprime donc que $V(I) - V(I')$ est une sous-variété lisse de codimension v de la provariété $K^{\mathbb{N}}$.

Démonstration de la proposition 3. — Tout d'abord il est clair que (I_n, I'_n) est une v-strate de A_n . Comme

$$V(I) = \Pi_n^{-1}(V(I_n)) \quad \text{et} \quad V(I') = \Pi_n^{-1}(V(I'_n))$$

il suffit de montrer qu'en tout point $x \in V(I_n) - V(I'_n)$ l'ensemble $V(I_n)$ est défini localement par l'annulation de v fractions rationnelles dont les différentielles en x sont linéai-

rement indépendants. Or en un tel point on sait par hypothèse qu'il existe un v -réducteur $a \in \sqrt{\mathcal{F}_v(I_n)}$ tel que $a(x) \neq 0$ et par conséquent qu'il existe v polynômes

$$a_1, a_2, \dots, a_v \in I_n$$

tels que pour tout $b \in I_n$ il existe $b_1, b_2, \dots, b_v \in A_n$ satisfaisant à la relation

$$b = \sum_{i=1}^v a_i \frac{b_i}{a}.$$

D'autre part, par hypothèse également, il existe des éléments $c_1, c_2, \dots, c_v \in I_n$ dont les différentielles en x sont linéairement indépendantes. On en déduit que les $a_1/a, a_2/a, \dots, a_v/a$ engendrent l'image de I_n dans le localisé de A_n en a et ont leurs différentielles linéairement indépendantes en x , ce qui achève la démonstration.

Stratification relative. — Il est clair que si (J, J') est une v -strate de A et que si I' est un idéal de A tel que $I \subset \sqrt{I'} \subset \sqrt{J'}$, alors (J, I') est également une v -strate de A .

LEMME 21. — Soient μ et v des entiers supérieurs ou égaux à 1.

Soient I et J des idéaux de l'anneau commutatif unitaire A tels que $J \subset I$.

Soit a un élément de $\sqrt{\Delta_v(J)}$ pour lequel il existe des entiers p et r supérieurs ou égaux à 1 tels que

$$a^p = \alpha_0 + \sum_{i=1}^r \alpha_i \delta_i,$$

où $\alpha_0 \in I$ et $\alpha_i \in A$ lorsque $1 \leq i \leq r$ et où les δ_i sont des μ -jacobiens de la forme

$$\delta_i = \mathcal{J}(d_{i,1}, \dots, d_{i,\mu}; a_{i,1}, \dots, a_{i,\mu})$$

pour des éléments $a_{i,m}$ de I et des dérivations $d_{i,m}$ de A qui appliquent J dans I ($1 \leq i \leq r$ et $1 \leq m \leq \mu$). Alors a appartient à $\sqrt{\Delta_{\mu+v}(I)}$.

En effet par hypothèse, il existe des entiers q et s supérieurs ou égaux à 1 tels que

$$a^q = \beta_0 + \sum_{j=1}^s \beta_j \varepsilon_j$$

où $\beta_0 \in J$, où $\beta_j \in A$ pour $1 \leq j \leq s$ et où les ε_j sont des v -jacobiens de la forme

$$\varepsilon_j = \mathcal{J}(d_{j,\mu+1}, \dots, d_{j,\mu+v}; a_{j,\mu+1}, \dots, a_{j,\mu+v})$$

pour des dérivations $d_{j,\mu+n}$ de A et des éléments $a_{j,\mu+n}$ de J ($1 \leq n \leq v$ et $1 \leq j \leq s$).

Pour tout $i \in \{1, \dots, r\}$ et tout $j \in \{1, \dots, s\}$ on pose

$$\delta'_{i,j} = \mathcal{J}(d_{i,1}, \dots, d_{i,\mu}, d_{j,\mu+1}, \dots, d_{j,\mu+v}; a_{i,1}, \dots, a_{i,\mu}, a_{j,\mu+1}, \dots, a_{j,\mu+v})$$

et on remarque qu'en vertu de la règle de Laplace et de l'hypothèse faite sur les $d_{i,m}$ on a

$$\delta_i \varepsilon_j = \delta'_{i,j} + \gamma_{i,j},$$

où les $\gamma_{i,j}$ appartiennent à I . On en conclut que a^{p+q} appartient à $\Delta_{\mu+v}(I)$.

LEMME 22. — Soient μ et ν des entiers supérieurs ou égaux à 1, soient I et J des idéaux de l'anneau commutatif unitaire A tels que $J \subset I$. Soit a un élément de $\sqrt{\mathcal{F}_\nu(J)}$ pour lequel il existe des entiers p et r supérieurs ou égaux à 1 tels que $a^p = \sum_{i=1}^r \alpha_i$, où les α_i sont des éléments de A pour lesquels il existe des éléments $a_{i,m}$ de I ($1 \leq m \leq \mu$) tels que lorsque $1 \leq i \leq r$, l'idéal $\alpha_i \cdot I$ soit contenu dans l'idéal J_i engendré par J et par les $a_{i,m}$ ($1 \leq m \leq \mu$). Alors on a

$$a \in \sqrt{\mathcal{F}_{\mu+\nu}(I)}.$$

En effet par hypothèse il existe des entiers q et s supérieurs ou égaux à 1 tels que $a^q = \sum_{j=1}^s \beta_j$, où les β_j sont des ν -réducteurs de J lorsque $1 \leq j \leq s$. Pour tout $i \in \{1, \dots, r\}$ et $j \in \{1, \dots, s\}$ il est clair que $\alpha_i \beta_j$ est un $(\mu+\nu)$ -réducteur de I . On en conclut que a^{p+q} appartient à $\mathcal{F}_{\mu+\nu}(I)$.

PROPOSITION 4. — Soient μ et ν des entiers supérieurs ou égaux à 1, soit (J, J') une ν -strate de l'anneau commutatif unitaire A et soient I et I' des idéaux de A satisfaisant aux relations $J \subset I \subset \sqrt{I'} \subset \sqrt{J'}$ et tels que $(I/J), (I'/J)$ soit une μ -strate de l'anneau A/J . Si l'idéal J est tel que toute dérivation de l'anneau A/J se relève en une dérivation de A alors (I, I') est une $(\mu+\nu)$ -strate de A .

Cette proposition est une conséquence directe des lemmes 21 et 22.

Remarque. — Lorsque A est l'anneau $\mathbb{Z}[X_1, X_2, \dots]$ des polynômes à coefficients entiers et à une infinité dénombrable d'indéterminées X_i ($i \in \mathbb{N}^*$), pour tout idéal J de A , toute dérivation de l'anneau A/J se relève en une dérivation de A . Cette assertion provient du fait que les dérivations de A (resp. de A/J) sont déterminées par les valeurs qu'elles prennent sur les X_i (resp. sur les images des X_i dans A/J) et du fait que pour une dérivation de A ces valeurs peuvent être choisies arbitrairement. Cette remarque cesse d'être vraie si l'on remplace $\mathbb{Z}[X_1, X_2, \dots]$ par l'un de ses quotients.

THÉORÈME 3. — Soient n et p des entiers supérieurs ou égaux à 1; soient \mathbf{k} un symbole de hauteur n et $\nu(p, \mathbf{k})$ l'entier de Boardman associé au couple (p, \mathbf{k}) au (e) du chapitre II. Alors le couple $(\bar{\Delta}(p, \mathbf{k}), \bar{\Delta}'(p, \mathbf{k}))$ est une $\nu(p, \mathbf{k})$ -strate de l'anneau $\bar{\mathcal{A}}_n^p$.

Lorsque le symbole \mathbf{k} est tel que

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{k}(s) = n - p \quad \text{pour } 1 \leq s \leq |\mathbf{k}| \\ \text{ou que} \\ n - p + 1 \leq \mathbf{k}(1), \end{array} \right.$$

la $\nu(p, \mathbf{k})$ -strate $(\bar{\Delta}(p, \mathbf{k}), \bar{\Delta}'(p, \mathbf{k}))$ est effective.

La première partie de ce théorème, évidente lorsque $\mathbf{k} = \mathbf{e}_n$, se démontre par récurrence sur la longueur de \mathbf{k} à l'aide des propositions 2 et 4 et des théorèmes 1 et 2 du présent

chapitre, compte tenu de l'égalité

$$v(p, \mathbf{k}) = v(p, \mathbf{tk}) + v'(p, \mathbf{k}),$$

valable quel que soit $\mathbf{k} \in (\mathcal{S}_n - \{e_n\})$.

En effet le théorème 1 affirme que modulo $\bar{\Delta}(p, \mathbf{k})$, l'idéal $\bar{\Delta}'(p, \mathbf{k})$ est faiblement engendré par les expressions jacobiniennes régulières $J^*(\sigma, \psi')$ [où $\sigma \in G_n$ et $\psi' \in \bar{\mathcal{F}}'(p, \mathbf{k})$: cf. (g), 8°, du chapitre II]. La proposition 2 ci-dessus et le lemme du (g), 8°, du chapitre II permettent d'affirmer que les expressions correspondantes $(J^*(\sigma, \psi'))^{\alpha(\mathbf{k}) + \mu(\mathbf{k})}$ [où les nombres $\alpha(\mathbf{k})$ et $\mu(\mathbf{k})$ ont été définis respectivement au (a) ci-dessus et au (e), du chapitre II] sont des $v'(p, \mathbf{k})$ -réducteurs de l'idéal $\bar{\Delta}(p, \mathbf{k})/\bar{\Delta}(p, \mathbf{tk})$ et ceci quels que soient $\sigma \in G_n$ et $\psi' \in \bar{\mathcal{F}}'(p, \mathbf{k})$.

Pour achever la démonstration de la première partie du théorème, il suffit donc de montrer que les $J^*(\sigma, \psi')$ appartiennent à l'image réciproque dans $\bar{\mathcal{A}}_n^p$ de l'idéal $\sqrt{\Delta_{v'(p, \mathbf{k})}(\bar{\Delta}(p, \mathbf{k})/\bar{\Delta}(p, \mathbf{tk}))}$. Or c'est précisément ce qu'affirme le théorème 2.

Lorsque le symbole \mathbf{k} est tel que

$$\begin{cases} \mathbf{k}(s) = n - p & \text{pour } 1 \leq s \leq |\mathbf{k}| \\ \text{ou} \\ n - p + 1 \leq \mathbf{k}(1), \end{cases}$$

en vue de montrer que la $v(p, \mathbf{k})$ -strate $(\bar{\Delta}(p, \mathbf{k}), \bar{\Delta}'(p, \mathbf{k}))$ est effective, on considère le tableau ψ de type (p, \mathbf{k}) défini en posant

$$\psi(s, m) = \begin{cases} p - n + m & \text{lorsque } s = 0 \text{ et } m \in \{\mathbf{k}(1) + 1, \dots, n\} \\ p & \text{lorsque } s = 0 \text{ et } m = n - p = \mathbf{k}(1), \\ p - n + \mathbf{k}(1) & \text{lorsque } s = 0, \\ \text{que } \mathbf{k}(1) \geq n - p + 1 & \text{et que } m \in \{\mathbf{k}(|\mathbf{k}|), \dots, \mathbf{k}(1)\} \\ \text{et} \\ m & \text{lorsque } s \neq 0 \text{ et } (s, m) \in \mathcal{C}(\mathbf{k}). \end{cases}$$

Soit φ l'application de $\bar{\mathcal{A}}_n^p$ dans \mathbf{Z} définie en posant

$$\varphi(\bar{Z}_m^{p-n+m}) = 1 \quad \text{lorsque } m \in \{\mathbf{k}(1) + 1, \dots, n\}$$

ainsi que

$$\varphi(\bar{Z}_{\mathbf{m}_m}^{n-p+\mathbf{k}(1)}) = 1 \quad \text{lorsque } m \in \{\mathbf{k}(|\mathbf{k}|) + 1, \dots, \mathbf{k}(1)\}$$

[où l'on a posé $\mathbf{m}_m = \overbrace{(m, \dots, m)}^{p(m)+1 \text{ fois}}$] et $\varphi(\bar{Z}_j^j) = 0$ pour tous les autres couples

$$(j; \mathbf{l}) \in \{1, \dots, p\} \times \mathcal{S}_n.$$

Il est clair que l'idéal engendré par $\varphi(\bar{\Delta}(p, \mathbf{k}))$ est égal à $\{0\}$ (qui dans \mathbf{Z} est égal à sa propre racine) et que $\varphi(J^{(t)}(\text{id}, \psi)) = 1$.

On en déduit que $\bar{\Delta}'(p, \mathbf{k})$ n'est pas contenu dans la racine de $\bar{\Delta}(p, \mathbf{k})$ ce qui achève la démonstration du théorème 3.

COROLLAIRE (Boardman). — Lorsque A, B et D sont de l'un des types décrits au (j) du chapitre II, soient p et n les entiers qui ont servi à définir ces anneaux et soient \mathbf{k} un symbole de hauteur n et $v(p, \mathbf{k})$ l'entier de Boardman associé au couple (p, \mathbf{k}) au (2) du chapitre II. Alors le couple $(\Delta^{\mathbf{k}}(B; \mathcal{D}), \Delta'^{\mathbf{k}}(B; \mathcal{D}))$ [cf. (c) du chapitre III] est une $v(p, \mathbf{k})$ -strate de l'anneau A .

Lorsque le symbole \mathbf{k} est tel que

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{k}(s) = n - p \quad \text{pour } 1 \leq s \leq |\mathbf{k}| \\ \text{ou que} \\ n - p + 1 = \mathbf{k}(1). \end{array} \right.$$

La $v(p, \mathbf{k})$ -strate $(\Delta^{\mathbf{k}}(B; \mathcal{D}), \Delta'^{\mathbf{k}}(B; \mathcal{D}))$ est effective.

Ce corollaire se déduit immédiatement du théorème 3 par spécialisation [cf. (e) du chapitre III].

Remarque. — La proposition 1 du (a) du présent chapitre permet, grâce à un raisonnement par récurrence analogue à celui utilisé pour démontrer le théorème 1 [cf. (g)], d'établir que, pour tout symbole $\mathbf{k} \in \mathcal{S}_n$ ($n \in \mathbb{N}^*$) et tout $p \in \mathbb{N}^*$, l'idéal $\bar{\Delta}(p, \mathbf{k})$ est faiblement engendré par les expressions jacobiennes bien formées de type $(p, \mathbf{t}, \mathbf{k})$ pour $1 \leq s \leq |\mathbf{k}|$ (resp. par les drapeaux jacobiens qui leur sont associés). Ainsi modulo $\bar{\Delta}(p, \mathbf{k})$, l'idéal $\bar{\Delta}'(p, \mathbf{k})$ est, lorsque \mathbf{k}' est défini, engendré par les expressions jacobiennes formées à partir de tableaux ψ' ordonnés non triviaux de type (p, \mathbf{k}') (resp. par les drapeaux jacobiens qui leur sont associés) [cf. proposition 1 du (h) du chapitre III]. Lorsque ψ' est un tel tableau, la proposition 2 du présent chapitre permet d'affirmer que, quel que soit $\sigma \in G_n$, l'idéal $(J^*(\sigma, \psi'))^{\alpha(\mathbf{k}) + \mu(\mathbf{k})} \bar{\Delta}(p, \mathbf{k})$ est contenu dans l'idéal engendré par $\bar{\Delta}(p, \mathbf{tk})$ et par les expressions jacobiennes $J(\sigma, \psi)$ où ψ parcourt l'ensemble des tableaux de type (p, \mathbf{k}) dont la dernière ligne est astreinte à vérifier les conditions imposées aux dernières lignes des tableaux principaux de type (p, \mathbf{k}) . Malheureusement, même lorsqu'on suppose les lignes de ψ' décroissantes si ce dernier prend des valeurs inférieures ou égales à $\mathbf{k}(|\mathbf{k}|) - 1$, l'ensemble des tableaux ψ répondant à la question, possède plus de $v'(p, \mathbf{k})$ éléments [cf. lemme 1 du (g), 7°, du chapitre II]. Aussi, pour pouvoir appliquer la méthode qui nous a permis de démontrer le théorème 3, faut-il être en mesure de ne considérer que des tableaux ψ' prenant des valeurs supérieures ou égales à $\mathbf{k}(|\mathbf{k}|)$. C'est ce qu'autorise le lemme 11 du (f) du présent chapitre puisqu'il permet d'établir que l'idéal $\bar{\Delta}'(p, \mathbf{k})$ est faiblement engendré par $\bar{\Delta}(p, \mathbf{k})$ et par les expressions jacobiennes régulières de type (p, \mathbf{k}') . Mais alors pour obtenir une famille de générateurs faibles de $\bar{\Delta}(p, \mathbf{k})$, le mécanisme de récurrence impose, en plus des expressions jacobiennes régulières de type $(p, \mathbf{t}, \mathbf{k})$ [où $1 \leq s \leq \mathbf{k}(|\mathbf{k}|)$] de prendre en compte toutes les expressions jacobiennes régulières de type $(p, \mathbf{u}^h \mathbf{k})$ pour $0 \leq h \leq N(\mathbf{k})$ [cf. (d) du chapitre II]. Cette constatation fonde les définitions données au (f) du chapitre III sous la rubrique « idéaux d'expressions jacobiennes bien formées ». Enfin le fait que les tableaux réguliers de type (p, \mathbf{k}') ne prennent que des valeurs supérieures ou égales à $\mathbf{k}(|\mathbf{k}|) + 1$ permet à la démonstration du lemme 20 du présent chapitre d'aboutir. Ces difficultés techniques non plus que les complications rencontrées au cours de la démonstration du lemme 20 n'ont pas été évoquées dans [10].

BIBLIOGRAPHIE

- [1] V. J. ARNOLD, *Singularities of Smooth Maps (Uspehi Mat. Nauk.*, vol. 23, n° 1, (139), 1968, p. 3-44 (Russian) translated in AMS translations).
- [2] M. BOARDMAN, *Singularities of Differentiable Maps (Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, vol. 33, 1967, p. 21-57).
- [3] BOURBAKI, *Éléments de mathématique, Algèbre*, chap. III, ex. 10, 11, 12 et 14, Act. Sci. et Ind., Paris, Hermann, 1948, p. 114 à 116.
- [4] J. DIEUDONNÉ et J. B. CARREL, *Invariant Theory, Old and New*, Reprinted from Advances in Mathematics; Academic Press, New York and London, 1970.
- [5] K. HENTZELT, *Zur Theorie der Polynomideale und Resultanten (Math. Ann.*, vol. 88, 1923, p. 53-79).
- [6] G. HERMANN, *Die Frage der endlich vielen Schritte in der Theorie der Polynomideale (Math. Ann.*, vol. 95, 1926, p. 736-788).
- [7] H. LEVINE, *Singularities of Differentiable Mappings (Lecture Notes, Bonn, 1959)*.
- [8] J. MATHER, *On Thom-Boardman Singularities [Dynamical Systems, M. M. PEIXOTO, Ed.; Proc. of a Symposium, University of Bahia, Brasil (July 26-August 14, 1971), Academic Press, New York-London, 1973, p. 233-248]*.
- [9] B. MORIN, *Formes canoniques des singularités d'une application différentiable (C. R. Acad. Sc. Paris*, t. 260, 1965, p. 5662-5665 et 6503-6506).
- [10] B. MORIN, *Computing Determinants (Remarks on M. Boardman's Theorem) Mim. Inst. for Advanced Study, Princeton, 1968 : tirage épuisé.*
- [11] TH. MUIR, *A Treatise on the Theory of Determinants*, Dover publications Inc., New York, 1969.
- [12] E. NOETHER, *Eliminationstheorie und allgemeine Idealtheorie, (Math. Ann.*, vol. 90, 1923, p. 227-261).
- [13] PLATONIS, *Omnia quæ extant opera. XXVI De Republica, VII*, Ed. Henri Estienne, Genève, t. II, 1578.
- [14] R. THOM, *Les singularités des applications différentiables (Ann. Inst. Fourier*, t. 6, 1955-1956, p. 43 à 87).
- [15] J. C. TOUGERON, *Idéaux de fonctions différentiables I (Ann. Inst. Fourier*, t. 18, 1968, p. 177-240).
- [16] L. I. SEDOV, *A course in continuum mechanics*, vol. 1, *Basic equations and analytical techniques*, p. 57-58, Wolters-Noordhoff, Groningen, Pays-Bas, 1971.
- [17] H. WHITNEY, *Singularities of Mappings of Euclidean Spaces (Symposium internacional de Topologia Algebraica, La Universidad Nacional Autónoma, Mexico, 1958, p. 285-301)*.

(Manuscrit reçu le 7 juillet 1973,
révisé le 22 mai 1974.)

Bernard MORIN,
Département de Mathématique,
Université de Strasbourg,
7, rue René-Descartes,
67084 Strasbourg.