

ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

PIERRE VOGEL

Cobordisme d'immersions

Annales scientifiques de l'É.N.S. 4^e série, tome 7, n° 3 (1974), p. 317-357

http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1974_4_7_3_317_0

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1974, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (<http://www.elsevier.com/locate/ansens>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

COBORDISME D'IMMERSIONS

PAR PIERRE VOGEL

INTRODUCTION

On se propose de classifier les immersions dans une variété M munies d'un morphisme strict du fibré normal dans un fibré donné ξ , et ceci modulo cobordisme (une immersion est cobordante à zéro si elle est le bord d'une immersion dans $M \times I$). On note $I(\xi, M)$ l'ensemble des classes. Le foncteur $M \mapsto I(\xi, M)$ est un foncteur homotopique contravariant en le compactifié d'Alexandrov \hat{M} de M , et l'on cherche un classifiant.

Pour ce faire, on définit un autre foncteur de la façon suivante : si X et Y sont deux espaces topologiques pointés de points base x et y , on considère les « étalements de type X dans Y » (K, α, f) où K est un espace topologique, α une application continue propre et fermée de K dans Y et f une application continue de $(K, \alpha^{-1}(y))$ dans X tels que la restriction de α à $K - f^{-1}(x)$ soit localement un homéomorphisme. Ces étalements modulo une certaine relation d'équivalence (I, § 2) forment un ensemble $J(X, Y)$ et $Y \mapsto J(X, Y)$ est un foncteur homotopique contravariant semi-exact.

Les deux foncteurs I et J sont reliés par un isomorphisme fonctoriel θ de $I(\xi, M)$ sur $J(T\xi, \hat{M})$ (th. 1, I, § 3) obtenu par épaississement des immersions et par une construction de Thom-Pontrjagin.

On est alors ramené à classifier le foncteur $J(X, ?)$. On définit (I, § 4) l'espace ΛX qui est un sous-espace du produit symétrique infini de $X \times \mathbf{R}^\infty$ et un étalement universel $\tilde{\gamma} : \widetilde{\Lambda X} \rightarrow \Lambda X$, où $\widetilde{\Lambda X}$ est l'espace ΛX où l'on a oublié de symétriser le premier facteur et $\tilde{\gamma}$ la projection canonique. Si l'on prend un élément a de $J(X, Y)$ représenté par un étalement (K, α, f) de type X dans Y tel que α soit localement injectif, on obtient une application $\varphi : Y \rightarrow \Lambda X$ de la façon suivante : on choisit une certaine application λ de K dans \mathbf{R}^∞ et, si y est un point de Y , $\varphi(y)$ est la classe d'équivalence du point de $(X \times \mathbf{R}^\infty)^\infty$ dont les coordonnées sont les images des points de $\alpha^{-1}(y)$ par l'application $f \times \lambda$. Cette application se relève en $\tilde{\varphi} : K \rightarrow \widetilde{\Lambda X}$ puisque monter dans $\widetilde{\Lambda X}$ c'est choisir un point source de α . On montre ainsi que ΛX est un classifiant (th. 2, I, 4.3)

On peut tirer de ceci une condition nécessaire et suffisante pour qu'un élément a de $I(\xi, M)$ soit représentable par un plongement; c'est que, si $\varphi : \hat{M} \rightarrow \Lambda T\xi$ classifie a , φ soit homotope à une application de \hat{M} dans le sous-espace $T\xi$ de $\Lambda T\xi$ (th. 3, I, § 5).

Au chapitre II on étudie le type d'homotopie de ΛX et l'on montre que si X est connexe il existe une équivalence d'homotopie de ΛX dans l'espace $\lim_{\rightarrow} \Omega^n (S^n \wedge X)$ (th. 4, § 3), ce qui permet de calculer les groupes $I(\xi, M)$ et $J(X, Y)$.

Enfin (chap. III et IV) on étudie l'homologie de ΛX . On définit les sous-espaces $\Lambda_n X$, $n \geq 0$, de ΛX (I, § 4) et l'on montre que la suite spectrale d'homologie de la filtration de ΛX par les sous-espaces $\Lambda_n X$ dégénère. On construit en fait un isomorphisme fonctoriel ρ_* de $H_*(\Lambda X)$ sur la somme directe des groupes $H_*(\Lambda_n X, \Lambda_{n-1} X)$ (th. 4 et 5, III, 3.3) ce qui permet de déterminer complètement l'homologie de ΛX à coefficients dans un corps (chap. IV). Si le corps est de caractéristique zéro, l'homologie de ΛX est l'algèbre de Hopf engendrée par la coalgèbre unitaire $H_*(X)$ (th. 2, IV, § 3). En caractéristique non nulle les résultats sont beaucoup plus complexes; l'expression complète de $H_*(\Lambda X)$, de la somme des groupes $H_*(\Lambda_n X, \Lambda_{n-1} X)$ et de l'isomorphisme ρ_* est donnée aux théorèmes 5, 6 et 7 (chap. IV).

CHAPITRE I

Cobordisme d'immersions

1. COBORDISME D'IMMERSIONS. — Soit q un entier positif ou nul. On appellera fibré vectoriel de dimension q sur une paire (X, A) tout triplet $\xi = (\xi', X, A)$ où (X, A) est une paire d'espaces topologiques ayant le type d'homotopie d'une paire de C. W. complexes et où ξ' est un fibré vectoriel de dimension q sur X . Ces objets et les applications fibrées linéaires et bijectives sur les fibres et respectant les bases forment une catégorie que l'on notera \mathcal{C}_q .

Soient M une variété différentiable sans bord, et ξ un fibré vectoriel de dimension q sur une paire (X, A) .

DÉFINITION. — On appellera immersion de type ξ dans M , tout triplet (V, α, f) où V est une variété différentiable compacte à bord s'immergeant par α dans M et f une application fibrée de $(v, V, \partial V)$ dans ξ (v désigne le fibré normal de α).

On dira que deux immersions de type ξ dans M , (V, α, f) et (V', α', f') sont cobordantes, s'il existe un 4-uple (W, B, β, g) où (W, B) est un cobordisme entre $(V, \partial V)$ et $(V', \partial V')$, β une immersion de W dans $M \times I$ de fibré normal v transverse au bord de $M \times I$ et induisant au-dessus de $M \times 0$ et $M \times 1$ les immersions α et α' , et g une application fibrée de (v, W, B) dans ξ prolongeant les applications f et f' .

On définit ainsi une relation d'équivalence sur les immersions de type ξ dans M et l'on désignera par $I(\xi, M)$ l'ensemble quotient. Cet ensemble est muni d'une structure de monoïde commutatif unitaire par la somme disjointe des immersions.

Remarque. — Dans la pratique ξ sera soit le fibré universel sur le classifiant d'un groupe de Lie, soit le fibré normal d'une immersion; en effet, si V est une variété différentiable compacte et α une immersion de V dans M de fibré normal v , le triplet (V, α, Id_v) définit

un élément de $I((v, V, \partial V), M)$. L'étude des éléments de $I((v, V, \partial V), M)$ donnera ainsi des renseignements sur l'immersion α .

FONCTORIALITÉ DE $I(\xi, M)$. — Il est clair que $\xi \mapsto I(\xi, M)$ est un foncteur homotopique covariant de \mathcal{C}_q dans la catégorie des monoïdes commutatifs. Il y a en plus functorialité en M .

PROPOSITION. — $I(\xi, ?)$ est un foncteur homotopique contravariant de la catégorie des variétés différentiables sans bord et des applications continues propres dans la catégorie des monoïdes commutatifs.

Démonstration. — Soient M et M' deux variétés différentiables sans bord et φ une application continue propre de M' dans M . Si (V, α, f) est une immersion de type ξ dans M , on peut trouver une application continue φ' de M' dans M homotope à φ dans une homotopie à support compact, différentiable au-dessus d'un voisinage de $\alpha(V)$ et transverse à α et à $\alpha|_{\partial V}$. Désignons par V' le produit fibré de V et de M' au-dessus de M :

$$\begin{array}{ccc} V' & \xrightarrow{\alpha'} & M' \\ \psi \downarrow & & \downarrow \varphi' \\ V & \xrightarrow{\alpha} & M \end{array}$$

V' est une variété différentiable compacte de bord $\psi^{-1}(\partial V)$ et α' est une immersion. Les applications $d\psi$ et $d\varphi'$ (partiellement définie) induisent une application fibrée g du fibré normal de α' dans le fibré normal de α . On pose alors :

$$\varphi'^*(V, \alpha, f) = (V', \alpha', f, g).$$

La classe de cobordisme de $\varphi'^*(V, \alpha, f)$ ne dépend que de la classe de cobordisme de (V, α, f) et de la classe d'homotopie de φ , et φ induit une application φ^* de $I(\xi, M)$ dans $I(\xi, M')$. On démontre alors aisément la proposition.

2. COBORDISME D'ÉTALEMENTS. — Dans toute la suite, on désignera par \underline{CW}' (resp. \underline{PC}') la catégorie des espaces topologiques pointés ayant le type d'homotopie d'un $C. W.$ complexe pointé (resp. d'un espace paracompact pointé) et des applications continues pointées.

DÉFINITION. — Soient X un espace de \underline{CW}' pointé par le point \star et (Y, B) une paire d'espaces topologiques. On appellera étalement de type X dans (Y, B) tout triplet (K, α, f) où K est un espace topologique, α une application continue propre et fermée de K dans Y , f une application continue de $(K, \alpha^{-1}(B))$ dans X , et tel que la restriction de α à $K - f^{-1}(\star)$ soit localement un homéomorphisme.

Si (K, α, f) et (K', α', f') sont deux étalements de type X dans (Y, B) , on dira qu'ils sont cobordants s'il existe un étalement de type X dans $(Y \times I, B \times I)$ induisant au-dessus de $Y \times 0$ et $Y \times 1$ les étalements (K, α, f) et (K', α', f') .

Si maintenant X et Y sont deux espaces respectivement de \underline{CW}^* et de \underline{PC}^* , on désignera par $J(X, Y)$ l'ensemble des classes de cobordisme d'étalements de type X dans Y . Cet ensemble est muni d'une structure de monoïde commutatif unitaire par la somme disjointe des étalements. On vérifie de plus que $J(X, Y)$ est un foncteur homotopique covariant en X et contravariant en Y . La functorialité en X est évidente et la functorialité en Y s'obtient de la façon suivante :

Si φ est une application continue pointée de Y' dans Y et (K, α, f) un étalement de type X dans Y , on construit le produit fibré de K et de Y' au-dessus de Y :

$$\begin{array}{ccc} K' & \xrightarrow{\alpha'} & Y' \\ \downarrow \varphi' & & \downarrow \varphi \\ K & \xrightarrow{\alpha} & Y \end{array}$$

et l'on pose

$$\varphi^*(K, \alpha, f) = (K', \alpha', f \circ \varphi').$$

3. RELATION ENTRE LES FONCTEURS I ET J . — Soient ξ un fibré vectoriel de dimension q sur une paire (X, A) , et M une variété différentiable sans bord. Si ξ est le fibré (ξ', X, A) , on désignera par $T\xi$ l'espace de Thom de ξ , quotient de $T\xi'$ par l'espace de Thom de $\xi'|_A$, et par \star le point base de $T\xi$. Enfin on désignera par \hat{M} le compactifié d'Alexandrov de M pointé par le point à l'infini.

Soit (V, α, f) une immersion de type ξ dans M de fibré normal v . On épaissit l'immersion α par une immersion β de $B(v)$, espace total du fibré en boules de v , dans M . L'espace $B(v)$ est une variété compacte à coins et Tf est une application de $(B(v), \partial B(v))$ dans $T\xi$. On désignera par $\theta(V, \alpha, f)$ l'étalement $(B(v), \beta, Tf)$ de type $T\xi$ dans \hat{M} ; θ est donc une application de $I(\xi, M)$ dans $J(T\xi, \hat{M})$.

THÉORÈME 1. — *L'application θ de $I(\xi, M)$ dans $J(T\xi, \hat{M})$ est un isomorphisme de monoïde commutatif fonctoriel en ξ et en M .*

Démonstration. — L'application θ est évidemment un morphisme de monoïde fonctoriel en ξ et en M . Il reste à montrer que θ est bijectif, ce que l'on peut, pour des raisons homotopiques, se contenter de vérifier lorsque le fibré ξ' est classifié par une application π de X dans BO_q telle que (X, BO_q, π) soit un fibré de Serre.

On supposera donc que (X, BO_q, π) est un fibré de Serre et ξ' égal à $\pi^*(\gamma_q)$, γ_q étant le fibré universel sur BO_q . On se propose alors de construire un inverse θ' de θ à l'aide d'une construction de Thom-Pontrjagin.

Choisissons un voisinage ouvert U de A dans X tel que l'inclusion de (X, A) dans (X, U) soit une équivalence d'homotopie. Si $T\xi$ est défini à l'aide d'une structure riemannienne, on désignera par ω l'ensemble des points de $T\xi$ représentés par des vecteurs de ξ' qui sont de norme strictement supérieure à $1/2$ ou qui se projettent sur U ; ω est un voisinage contractile de \star dans $T\xi$. Désignons également par E et E' les complémentaires des points base dans, respectivement, $T\xi'$ et $T\gamma_q$, et par Ω l'image réciproque de ω par l'application

canonique de E dans $T\xi$. La projection π induit une application π' de E dans E' et (E, E', π') est un fibré de Serre.

Considérons maintenant un étalement (W, β, g) de type $T\xi$ dans \hat{M} . L'espace W est compact et $W-g^{-1}(\star)$ est une variété différentiable sans bord qui s'immerge par β dans M . Choisissons une sous-variété compacte à bord W' de $W-g^{-1}(\star)$ telle $g(W-W')$ soit contenu dans ω . L'application g induit alors une application g' de $(W', \partial W')$ dans (E, Ω) .

Comme (E, E', π') est un fibré de Serre et que Ω est ouvert, il existe une homotopie h'_i de $(W', \partial W')$ dans (E, Ω) telle que

$$h'_0 = g'.$$

$\pi' \circ h'_1$ et $\pi' \circ h'_1|_{\partial W'}$ sont différentiables et transverses à BO_q .

Posons alors :

$$V = (\pi' \circ h'_1)^{-1}(BO_q).$$

V est une sous-variété différentiable compacte à bord de W' de codimension q ; l'étalement β induit une immersion α de V dans M de fibré normal v égal au fibré normal de l'inclusion de V dans W' , et par construction de V , h'_1 induit une application fibrée f de $(v, V, \partial V)$ dans (ξ', X, U) .

On obtient ainsi une immersion (V, α, f) de type (ξ', X, U) dans M , dont on vérifie que la classe de cobordisme ne dépend que de la classe de cobordisme de (W, β, g) . On définit donc une application θ'' de $J(T\xi, \hat{M})$ dans $I((\xi', X, U), M)$ et à l'aide de l'isomorphisme de $I(\xi, M)$ sur $I((\xi', X, U), M)$ déduit de l'équivalence d'homotopie de (X, A) dans (X, U) , on obtient une application θ' de $J(T\xi, \hat{M})$ dans $I(\xi, M)$.

Par des arguments standards de transversalité, on montre alors que θ et θ' sont inverses l'un de l'autre et le théorème est démontré.

4. CLASSIFICATION DU FONCTEUR $J(X, ?)$. — 4.1. L'espace ΛX . — Soit X un espace de \underline{CW}' de point base \star , que l'on supposera séparé. On désignera par \mathbf{R}^∞ la limite inductive des espaces \mathbf{R}^n , par Ω l'espace $X \times \mathbf{R}^\infty$ pointé par le point $(\star, 0)$, et par Ω^∞ la limite inductive des espaces Ω^n .

On dira que deux éléments (x, t) et (x', t') de Ω sont étrangers si l'on a l'une des trois conditions suivantes :

- (i) $t \neq t'$;
- (ii) $x = \star$;
- (iii) $x' = \star$

et l'on désignera par $E(X)$ l'ensemble des points de Ω^∞ dont les projections sur Ω sont étrangères deux à deux. On notera $E^n(X)$ l'espace $E(X) \cap \Omega^n$ et $E_n(X)$ l'espace

$$E(X) \cap (\Omega^n \times (\star \times \mathbf{R}^\infty)^\infty).$$

Soit \mathfrak{S}_∞ le groupe symétrique infini, limite inductive des groupes \mathfrak{S}_n symétriques de degré n . Par substitution des facteurs, \mathfrak{S}_∞ opère sur Ω^∞ et sur $E(X)$. On désignera par ΛX

l'espace quotient $E(X)/\mathfrak{S}_\infty$, par π la projection de $E(X)$ sur ΛX , par $\Lambda^n X$ l'espace $\pi(E^n(X))$ et par $\Lambda_n X$ l'espace $\pi(E_n(X))$.

On vérifie que $\Lambda^n X$ est isomorphe à $E^n(X)/\mathfrak{S}_n$, et que ΛX est la limite inductive des sous-espaces $\Lambda^n X$ ainsi que des sous-espaces $\Lambda_n X$. On vérifie également que les espaces ΛX , $\Lambda^n X$ et $\Lambda_n X$ sont fonctoriels en X .

4.2. *L'étalement universel $\widetilde{\Lambda X}$.* — On désignera par \mathfrak{S}'_∞ le sous-groupe de \mathfrak{S}_∞ formé des substitutions laissant fixe l'élément 1 de \mathbb{N}^* , par $\widetilde{\Lambda X}$, l'espace quotient $E(X)/\mathfrak{S}'_\infty$, par $\tilde{\pi}$ la projection de $E(X)$ sur $\widetilde{\Lambda X}$ et par $\tilde{\gamma}$ la projection de $\widetilde{\Lambda X}$ sur ΛX .

Soit $u = (x_1, t_1; x_2, t_2; \dots)$ un élément de $E(X)$. On pose

$$f(u) = x_1.$$

Cette application est compatible avec \mathfrak{S}'_∞ et induit une application \tilde{f} de $\widetilde{\Lambda X}$ dans X .

PROPOSITION. — *Le triplet $(\widetilde{\Lambda X}, \tilde{\gamma}, \tilde{f})$ est un étalement de type X dans ΛX .*

Démonstration. — Comme $\Lambda^n X$ est le quotient de $E^n(X)$ par un groupe fini, $\pi|_{E^n(X)}$ est propre et fermée. Il en résulte que $\tilde{\gamma}$ est propre et fermée au-dessus de $\Lambda^n X$. Par passage à la limite, on en déduit que $\tilde{\gamma}$ est propre et fermée.

Montrons que la restriction de $\tilde{\gamma}$ à $\Lambda \tilde{X} - \tilde{f}^{-1}(\star)$ est localement un homéomorphisme. Soit y un élément de $\Lambda \tilde{X} - \tilde{f}^{-1}(\star)$. On peut le représenter par un élément $(x_1, t_1; x_2, t_2; \dots)$ de Ω^∞ tel que

$$\begin{aligned} \exists q \geq 1, \quad i \leq q &\Rightarrow x_i \neq \star, \\ i > q &\Rightarrow x_i = \star. \end{aligned}$$

Comme les éléments (x_i, t_i) de Ω sont étrangers deux à deux, on a

$$2 \leq i \leq q \Rightarrow t_i \neq t_1.$$

Choisissons alors deux ouverts u et u' de \mathbf{R}^∞ tels que

$$\begin{aligned} u \cap u' &= \emptyset, \\ t_1 &\in u, \\ 2 \leq i \leq q &\Rightarrow t_i \in u'. \end{aligned}$$

Choisissons également deux ouverts v et v' de X , voisinages disjoints respectivement de x_1 et du point base.

Soit alors U l'ensemble des éléments $(x'_1, t'_1; x'_2, t'_2; \dots)$ de $E(X)$ tels que

$$\begin{aligned} x'_1 &\in v, \\ i > q &\Rightarrow x'_i \in v', \\ t'_1 &\in u, \\ 2 \leq i \leq q &\Rightarrow t'_i \in u'. \end{aligned}$$

Comme les applications $\tilde{\pi}$ et $\tilde{\gamma}$ sont ouvertes, $\tilde{\pi}(U)$ et $\pi(U)$ sont ouverts, et l'on vérifie que la restriction de $\tilde{\gamma}$ à $\tilde{\pi}(U)$ est une bijection sur $\pi(U)$. On en déduit alors aisément la proposition.

4.3. *L'isomorphisme de classification* $\varepsilon : J(X, Y) \rightarrow [Y, \Lambda X]$.

THÉORÈME 2. — Soit X un espace de CW'. Alors le foncteur $J(X, ?)$ de la catégorie \overline{PC} dans la catégorie des monoïdes commutatifs unitaires est un foncteur homotopique représentable, et ΛX est un classifiant.

Démonstration. — Soit Y un espace de \overline{PC} . Désignons par ε' l'application canonique de $[Y, \Lambda X]$ dans $J(X, Y)$ déduite de l'étalement $(\widetilde{\Lambda X}, \tilde{\gamma}, f)$. On sait que ε' est fonctoriel en Y . Pour montrer que ε' est bijectif et possède donc un inverse ε , il suffit de le vérifier lorsque Y est paracompact, ce que l'on supposera.

Nous allons tout d'abord démontrer le lemme suivant :

LEMME. — Soit (K, α, f) un étalement de type X dans Y tel que α soit localement injectif. Alors l'espace des applications λ de K dans \mathbf{R}^∞ telles que l'application $\alpha \times \lambda$ de K dans $Y \times \mathbf{R}^\infty$ soit injective est un espace non vide connexe par arcs.

Démonstration du lemme. — Comme α est localement injective, propre et fermée, il existe un recouvrement ouvert $\{u_i\}_{i \in I}$ de Y tel que, pour tout i , $\alpha^{-1}(u_i)$ soit une union disjointe finie d'ouverts sur chacun desquels α est injective. Comme Y est paracompact, on peut alors trouver un recouvrement ouvert dénombrable de Y possédant la même propriété, et par suite, K est recouvert par une suite (v_1, v_2, \dots) d'ouverts telle que, pour tout n , la restriction de α à v_n soit injective.

D'autre part, α est propre et fermée et Y est paracompact; K est donc paracompact et l'on peut choisir une partition de l'unité (λ_n) subordonnée au recouvrement (v_n) . Les applications λ_n définissent une application λ de K dans \mathbf{R}^∞ , et il est clair que $\alpha \times \lambda$ est injectif. Il en résulte que l'espace E des applications λ de K dans \mathbf{R}^∞ telles que $\alpha \times \lambda$ soit injectif est non vide.

Pour la connexité par arcs de E , on va procéder comme suit :

Soient F et F' deux sous-espaces supplémentaires de \mathbf{R}^∞ de dimension infinie, et λ_0 une application de K dans F appartenant à E . Comme il existe une homotopie injective de \mathbf{R}^∞ dans F' , tout élément de E est homotope dans E à une application λ de K dans F' , et λ est homotope dans E à $\lambda_0 + \lambda$ qui est lui-même homotope à λ_0 . Le lemme est ainsi démontré.

Considérons maintenant un étalement (K, α, f) de type X dans Y . Choisissons une application g de $(K, f^{-1}(\star))$ dans X homotope à f et telle que $g^{-1}(\star)$ soit un voisinage de $f^{-1}(\star)$, et un fermé H de K dont le complémentaire est compris entre $f^{-1}(\star)$ et l'intérieur de $g^{-1}(\star)$. Alors $(H, \alpha|_H, g)$ est un étalement de type X dans Y cobordant à (K, α, f) et $\alpha|_H$ est localement injectif. Grâce au lemme et au fait que K est normal,

il existe une application λ de K dans \mathbf{R}^∞ nulle sur $K-H$ et telle que $\alpha \times \lambda$ soit injectif sur $K-g^{-1}(\star)$.

Si y est un élément de Y , $\alpha^{-1}(y) \cap H$ est un ensemble fini $\{k_1, \dots, k_n\}$ et $(g(k_1), \lambda(k_1); \dots; g(k_n), \lambda(k_n))$ est un élément de $E(X)$ dont l'image dans ΛX ne dépend que de y . Cela définit une application φ de Y dans ΛX qui est clairement continue et qui respecte les points base. Il résulte du lemme que la classe d'homotopie de φ ne dépend pas du choix de λ , et l'on vérifie qu'elle ne dépend en fait que de la classe de cobordisme de (K, α, f) , ce qui nous définit une application ε de $J(X, Y)$ dans $[Y, \Lambda X]$.

D'autre part, si h est un élément de H , $\alpha^{-1}(\alpha(h)) \cap H$ est un ensemble fini $\{h, k_2, \dots, k_n\}$, et l'on désignera par $\tilde{\varphi}(h)$ l'élément de $\widetilde{\Lambda X}$ représenté dans $E(X)$ par $(g(h), \lambda(h); g(k_2), \lambda(k_2); \dots; g(k_n), \lambda(k_n))$. L'application $\tilde{\varphi}$ est continue, et l'on a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc}
 & X & \\
 g \nearrow & & \tilde{\varphi} \nwarrow \\
 H & \xrightarrow{\tilde{\varphi}} & \Lambda X \\
 \alpha \downarrow & \varphi & \downarrow \tilde{\gamma} \\
 Y & \xrightarrow{\varphi} & \Lambda X
 \end{array}$$

On vérifie alors immédiatement que ε et ε' sont inverses l'un de l'autre.

Pour prouver le théorème, il reste à montrer que ΛX a le type d'homotopie d'un espace paracompact pointé, ce qui sera démontré ultérieurement (chap. II, th. 1).

5. IMMERSION COBORDANTE OU RÉGULIÈREMENT HOMOTOPE A UN PLONGEMENT. — Soit X un espace de \overline{CW} . L'espace ΛX contient l'espace $\Lambda^1 X$ qui contient lui-même l'espace X , et X est un sous-espace de ΛX . On vérifie d'ailleurs que les inclusions $X \subset \Lambda^1 X \subset \Lambda_1 X$ sont des équivalences d'homotopie.

THÉORÈME 3. — Soit (V, α, f) une immersion de type ξ dans une variété différentiable sans bord M représentant l'élément a de $I(\xi, M)$. Alors (V, α, f) est cobordante à une immersion (V', α', f') de type ξ dans M , où α' est un plongement, si et seulement si la classe d'homotopie $\varepsilon(\theta(u))$ est représentable par une application continue pointée de \hat{M} dans $T\xi$.

La démonstration de ce théorème résulte trivialement de la construction des applications θ et ε .

COROLLAIRE. — Soient M une variété différentiable sans bord, V une variété différentiable compacte, et α une immersion de V dans M de fibré normal v . Alors une condition nécessaire pour que α soit régulièrement homotope à un plongement est que l'image par $\varepsilon \circ \theta$ de la classe de cobordisme de (V, v, Id_v) dans $I((v, V, \partial V), M)$ soit représentée par une application continue pointée de \hat{M} dans le sous-espace $T(v, V, \partial V)$ de $\Lambda T(v, V, \partial V)$.

La démonstration est évidente.

CHAPITRE II

Le type d'homotopie de ΛX

1. LE TYPE D'HOMOTOPIE DE ΛX .

THÉORÈME 1. — Soit X un espace de CW' , alors ΛX filtré par les sous-espaces $\Lambda_n X$ a le type d'homotopie d'un C. W. complexe filtré par des sous-complexes.

Démonstration. — Pour des raisons homotopiques, il suffit de démontrer le théorème lorsque X est un complexe simplicial ordonné, pointé par un sommet x_0 , ce que nous supposerons.

Choisissons alors une triangulation de \mathbf{R}^∞ de façon que \mathbf{R}^∞ soit un complexe simplicial ordonné. On en déduit une structure de complexe simplicial ordonné sur $(X \times \mathbf{R}^\infty)^n$ [9] et donc sur $(X \times \mathbf{R}^\infty)^\infty$. On vérifie que cette structure passe au quotient et $(X \times \mathbf{R}^\infty)^\infty / \mathfrak{S}_\infty$ est également un complexe simplicial ordonné.

Soient U l'étoile ouverte de x_0 dans X et K son complémentaire. On désignera par E' l'ensemble des éléments $(x_1, t_1; x_2, t_2; \dots)$ de $(X \times \mathbf{R}^\infty)^\infty$ possédant la propriété suivante :

$$\forall i, j \in \mathbf{N}^*, \quad i \neq j, \quad t_i \neq t_j \quad \text{ou} \quad x_i \in U \quad \text{ou} \quad x_j \in U$$

et par F son complémentaire.

Il est clair que F est un sous-complexe de $(X \times \mathbf{R}^\infty)^\infty$ et, par conséquent, F/\mathfrak{S}_∞ est un sous-complexe de $(X \times \mathbf{R}^\infty)^\infty / \mathfrak{S}_\infty$. On désignera par $\Lambda' X$ le complémentaire de F/\mathfrak{S}_∞ dans $(X \times \mathbf{R}^\infty)^\infty / \mathfrak{S}_\infty$ et par $\Lambda'_n X$ l'espace $\Lambda' X \cap [(X \times \mathbf{R}^\infty)^n \times (\{x_0\} \times \mathbf{R}^\infty)^\infty] / \mathfrak{S}_\infty$. On désignera également par $\Lambda'' X$ l'ensemble $\Lambda' X$ muni de la topologie induite par la structure de complexe simplicial de $(X \times \mathbf{R}^\infty)^\infty / \mathfrak{S}_\infty$ et par $\Lambda''_n X$ l'ensemble $\Lambda'_n X$ muni de la topologie trace de celle de $\Lambda'' X$.

Enfin on désignera par f l'inclusion de ΛX dans $\Lambda' X$ et par g l'identité de $\Lambda'' X$ dans $\Lambda' X$. Il est clair que f est une application du système $(\Lambda X; \Lambda_0 X, \Lambda_1 X, \dots)$ dans le système $(\Lambda' X; \Lambda'_0 X, \Lambda'_1 X, \dots)$ et que g est une application du système $(\Lambda'' X; \Lambda''_0 X, \Lambda''_1 X, \dots)$ dans le système $(\Lambda' X; \Lambda'_0 X, \Lambda'_1 X, \dots)$.

a. f est une équivalence d'homotopie.

En effet une homotopie de X dans X , rétractant U en x_0 , induit une homotopie de $\Lambda' X$ dans $\Lambda' X$ compatible avec les inclusions de $\Lambda'_n X$ dans $\Lambda' X$ et de ΛX dans $\Lambda' X$ et rétractant $\Lambda' X$ en ΛX ; f est donc une équivalence d'homotopie entre les deux systèmes $(\Lambda X; \Lambda_0 X, \Lambda_1 X, \dots)$ et $(\Lambda' X; \Lambda'_0 X, \Lambda'_1 X, \dots)$.

b. g est une équivalence d'homotopie.

On s'inspire ici d'une démonstration de Milnor [18].

Si A est un complexe simplicial, x un point de A et a un sommet de A , on désignera par $\xi(a, x)$ la coordonnée de x suivant a .

Désignons par A' l'espace $(X \times \mathbb{R}^\infty)^\infty / \mathfrak{S}_\infty$, par B' le sous-espace F / \mathfrak{S}_∞ de A' , par A'' le complexe A' muni de la topologie simpliciale et par B'' le complexe B' muni de la topologie trace de celle de A'' . On appellera i l'identité de A'' dans A' .

Soient A_0 l'ensemble des sommets de A' et P l'ensemble des sommets de A' n'appartenant pas à B' . Si a est un élément de A_0 , on définira l'application $\beta_a : A' \rightarrow I$ par

$$\begin{aligned} a \in P &\Rightarrow \beta_a(x) = \sup \left(\xi(a, x) - \frac{1}{2} \sup_{b \in P} \xi(b, x), 0 \right), \\ a \notin P &\Rightarrow \beta_a(x) = \sup \left(\xi(a, x) - \frac{1}{2} \sup_{b \in A_0} \xi(b, x), 0 \right). \end{aligned}$$

Il est clair que les applications $\xi(a, ?)$ sont continues sur A' , et l'on vérifie que β_a est continue. Désignons par V_a l'ouvert $\beta_a^{-1}(]0, 1])$. On vérifie que $\{V_a\}$ forme un recouvrement d'ouverts de A' dont la trace sur $A' - B'$ est localement finie et tel que pour tout a de A_0 , V_a est contenu dans l'étoile ouverte de a .

Soit alors $g' : A' \rightarrow A''$ l'application qui envoie tout x de A' en le point de A'' de coordonnées barycentriques :

$$\frac{\beta_a(x)}{\sum_{b \in A_0} \beta_b(x)}.$$

On vérifie que g' est continue sur $A' - B'$ et envoie $A' - B'$ en $A'' - B''$, et que les applications $i \circ g'$ et $g' \circ i$ envoient chaque simplexe en lui-même. Les deux applications $i \circ g' |_{A' - B'}$ et $g' \circ i |_{A'' - B''}$ sont donc homotopes à l'identité dans une homotopie laissant fixe chaque simplexe.

Il en résulte que g est une équivalence d'homotopie entre les deux systèmes $(\Lambda'' X; \Lambda_0'' X, \Lambda_1'' X, \dots)$ et $(\Lambda' X; \Lambda_0' X, \Lambda_1' X, \dots)$.

c. Le type d'homotopie de $(\Lambda'' X; \Lambda_0'' X, \Lambda_1'' X, \dots)$.

Comme B'' est un sous-complexe de A'' , il existe sur $A'' - B''$ une structure de C. W. complexe compatible avec la topologie de $A'' - B''$ et telle que, pour tout simplexe σ de A'' , $\sigma \cap (A'' - B'')$ soit un sous-complexe de $A'' - B''$.

Il en résulte que $\Lambda'' X$ est muni d'une structure de C. W. complexe telle que $\Lambda_n'' X$ soit un sous-complexe de $\Lambda'' X$ et le théorème est démontré.

2. L'APPLICATION DE STABILISATION $s : S^1 \wedge \Lambda X \rightarrow \Lambda(S^1 \wedge X)$. — Par suspension de l'étalement universel sur ΛX , on obtient un étalement de type $S^1 \wedge X$ dans $S^1 \wedge \Lambda X$ classifié par l'application $s : S^1 \wedge \Lambda X \rightarrow \Lambda(S^1 \wedge X)$.

THÉORÈME 2. — Si X est connexe, l'application $\bar{s} : \Lambda X \rightarrow \Omega \Lambda(S^1 \wedge X)$ déduite de s est une équivalence d'homotopie.

Démonstration. — D'après le théorème 1, ΛX et $\Lambda(S^1 \wedge X)$ ont le type d'homotopie de C. W. complexes pointés et il en est de même de $\Omega \Lambda(S^1 \wedge X)$ [18]. Il suffit donc de

montrer que \bar{s} est une équivalence d'homotopie faible. Or, si X est connexe, ΛX est connexe et il suffit alors de vérifier que \bar{s} induit un isomorphisme sur les groupes d'homotopie.

D'autre part, si (V, α, f) est une immersion de type X (considéré comme fibré vectoriel de dimension 0 sur X) dans une variété différentiable sans bord M , l'inclusion de M dans $\mathbf{R} \times M$ induit une immersion β de V dans $\mathbf{R} \times M$ de fibré normal ν trivial et f induit une application fibrée g de $(\nu, V, \partial V)$ dans le fibré trivial θ_X de dimension 1 sur X . On obtient ainsi une application σ de $I(X, M)$ dans $I(\theta_X, \mathbf{R} \times M)$, et l'on a le diagramme commutatif suivant, dans le cas où M est égal à \mathbf{R}^n :

$$\begin{array}{ccc} I(X, \mathbf{R}^n) & \xrightarrow{\sigma} & I(\theta_X, \mathbf{R}^{n+1}) \\ \downarrow \varepsilon \circ \theta & & \downarrow \varepsilon \circ \theta \\ \pi_n(\Lambda X) & \xrightarrow[\pi_n(\bar{s})]{} & \pi_{n+1}(\Lambda(S^1 \wedge X)) \end{array}$$

Pour montrer le théorème il suffit alors de montrer que l'application

$$\sigma : I(X, \mathbf{R}^n) \rightarrow I(\theta_X, \mathbf{R}^{n+1})$$

est bijective.

a. surjectivité de σ .

Soit b un élément de $I(\theta_X, \mathbf{R}^{n+1})$. Comme X est connexe, b peut être représenté par une immersion (V, β, g) de type θ_X dans \mathbf{R}^{n+1} telle que chaque composante connexe de V ait un bord non vide.

Le fibré normal ν de β est trivialisé, il en résulte que V est stablement parallélisable donc parallélisable et, par le théorème de Smale, on en déduit que les classes d'homotopie régulière d'immersions de V dans \mathbf{R}^{n+1} s'identifient aux classes d'homotopie d'applications de V dans GL_{n+1} . Or V est de dimension homologique strictement inférieure à n , l'application canonique :

$$[V, GL_n] \rightarrow [V, GL_{n+1}]$$

est donc surjective, et β est régulièrement homotope à une immersion α de V dans \mathbf{R}^n telle que les trivialisations du fibré normal de α induites par g et par α soient égales. Il est alors clair que b appartient à l'image de σ et σ est surjectif.

b. injectivité de σ .

Soient a et a' deux éléments de $I(X, \mathbf{R}^n)$ représentés par les immersions (V, α, f) et (V', α', f') de type X dans \mathbf{R}^n et identifiés par σ . Comme X est connexe, on peut trouver un cobordisme (W, B, β, g) entre les deux immersions $\sigma(V, \alpha, f)$ et $\sigma(V', \alpha', f')$ de type θ_X dans \mathbf{R}^{n+1} tel que $(W, V \cup V')$ soit de dimension homologique strictement inférieure à $n+1$.

On vérifie alors, comme ci-dessus, à l'aide du théorème de Smale, que β est régulièrement homotope, dans une homotopie constante sur V et V' , à une immersion de W dans $\mathbf{R}^n \times I$, et les deux immersions (V, α, f) et (V', α', f') sont cobordantes. L'application σ est donc injective, ce qui achève de démontrer le théorème.

3. LE SPECTRE $\Lambda(\mathbf{S} \wedge X)$. CALCUL DE $J(X, Y)$ ET DE $I(\xi, M)$. — L'application s induit une structure de spectre sur la famille des espaces pointés $\Lambda(S^n \wedge X)$, $n \in \mathbf{N}$. Ce spectre sera noté $\Lambda(\mathbf{S} \wedge X)$. On notera également $\mathbf{S} \wedge X$ le spectre des suspensions de X .

L'application canonique de $S^n \wedge X$ dans $\Lambda(S^n \wedge X)$ induit une application α du spectre $\mathbf{S} \wedge X$ dans le spectre $\Lambda(\mathbf{S} \wedge X)$.

THÉORÈME 3. — *L'application α induit un isomorphisme sur les groupes d'homotopie.*
La démonstration résulte trivialement de la proposition suivante :

PROPOSITION. — *Soit X un espace de CW $n-1$ -connexe. Alors la paire $(\Lambda X, X)$ est $2n-1$ -connexe.*

Démonstration. — Soit p un entier strictement positif. La paire $(\Lambda_p X, \Lambda_{p-1} X)$ a le type d'homotopie d'une paire de C. W. complexes, et l'on a

$$H_*(\Lambda_p X, \Lambda_{p-1} X; \mathbf{Z}) = \tilde{H}_*(\Lambda_p X / \Lambda_{p-1} X; \mathbf{Z}).$$

Désignons par $(\mathbf{R}^\infty)^{(p)}$ l'espace $(\mathbf{R}^\infty)^p$ privé de toutes ses diagonales. Le groupe \mathfrak{S}_p opère librement sur $X^p \times (\mathbf{R}^\infty)^{(p)}$, et l'on désignera par A l'espace quotient, par B' l'ensemble des éléments de $X^p \times (\mathbf{R}^\infty)^{(p)}$ dont l'une des projections sur X est égale au point base, et par B le sous-espace B' / \mathfrak{S}_p de A . La paire (A, B) a le type d'homotopie d'une paire de C. W. complexes et A/B a le type d'homotopie de $\Lambda_p X / \Lambda_{p-1} X$. D'autre part, il est clair que (A, B) se fibre sur $(\mathbf{R}^\infty)^{(p)} / \mathfrak{S}_p$ par un fibré de Serre de fibre $pn-1$ connexe; (A, B) est donc $pn-1$ connexe, et l'on a

$$\begin{aligned} \forall p > 0, \quad \forall i < pn, \quad H_i(\Lambda_p X, \Lambda_{p-1} X; \mathbf{Z}) &= 0 \\ \Rightarrow \forall i < 2n, \quad H_i(\Lambda X, X; \mathbf{Z}) &= H(\Lambda X, \Lambda_1 X; \mathbf{Z}) = 0. \end{aligned}$$

Comme de plus le groupe $\pi_1(\Lambda X)$ est commutatif car isomorphe à $J(X, S^1)$, la paire $(\Lambda X, X)$ est $2n-1$ connexe.

COROLLAIRE 1. — *Si X est connexe et Y compact, on a*

$$J(X, Y) = \tilde{H}^0(Y, \mathbf{S} \wedge X) = \lim_{\longrightarrow} [S^n \wedge Y, S^n \wedge X] = \{Y, X\}.$$

COROLLAIRE 2. — *Soit ξ un fibré vectoriel de dimension q sur une paire (X, A) et M une variété différentiable sans bord. Alors, si q est non nul ou si (X, A) est connexe, on a*

$$I(\xi, M) = \tilde{H}^0(\hat{M}, \mathbf{S} \wedge T\xi) = \lim_{\longrightarrow} [S^n \wedge \hat{M}, S^n \wedge T\xi] = \{\hat{M}, T\xi\}.$$

COROLLAIRE 3. — *Si X est connexe, les groupes d'homotopie de X sont les groupes d'homotopie stable de X .*

La démonstration de ces corollaires résulte trivialement du fait que, si X est connexe, $\Lambda(\mathbf{S} \wedge X)$ est un Ω -spectre et que l'on a alors pour tout Y :

$$J(X, Y) = \tilde{H}^0(Y, \Lambda(\mathbf{S} \wedge X)).$$

THÉORÈME 4. — Si X est connexe, il existe une équivalence d'homotopie entre ΛX et l'espace $\lim_{\rightarrow} \Omega^n (S^n \wedge X)$, homotopiquement fonctorielle en X .

Démonstration. — Choisissons l'application s de $S^1 \wedge \Lambda X$ dans $\Lambda (S^1 \wedge X)$ de la façon suivante :

Si λ appartient à S^1 , désignons par $\|\lambda\|$ la distance de λ au point base de S^1 . On définit alors l'application s' de $S^1 \wedge E(X)$ dans $E(S^1 \wedge X)$ par

$$s'(\lambda \wedge (x_1, t_1; \dots)) = (\lambda \wedge x_1, \|\lambda\| t_1; \dots).$$

Cette application passe au quotient et définit l'application s de $S^1 \wedge \Lambda X$ dans $\Lambda (S^1 \wedge X)$ cherchée. On vérifie que s classe la suspension de l'étalement universel sur ΛX . De plus s est fonctoriel en X .

Cette application s induit une application de $\Omega^n \Lambda (S^n \wedge X)$ dans $\Omega^{n+1} \Lambda (S^{n+1} \wedge X)$ et donc une application f de ΛX dans l'espace $\lim_{\rightarrow} \Omega^n \Lambda (S^n \wedge X)$ fonctorielle en R . On a le diagramme

$$\Lambda X \xrightarrow{f} \lim_{\rightarrow} \Omega^n \Lambda (S^n \wedge X) \xleftarrow{g} \lim_{\rightarrow} \Omega^n (S^n \wedge X).$$

Or les inclusions de $\Omega^n (S^n \wedge X)$ et $\Omega^n \Lambda (S^n \wedge X)$ dans $\Omega^{n+1} (S^{n+1} \wedge X)$ et $\Omega^{n+1} \Lambda (S^{n+1} \wedge X)$ sont des cofibrations. Les espaces $\lim_{\rightarrow} \Omega^n (S^n \wedge X)$ et $\lim_{\rightarrow} \Omega^n \Lambda (S^n \wedge X)$ ont donc le type d'homotopie de C. W. complexes et l'inclusion g est une équivalence d'homotopie.

Si X est connexe f est une équivalence d'homotopie (th. 2) et l'on en déduit une équivalence d'homotopie homotopiquement fonctorielle entre ΛX et l'espace $\lim_{\rightarrow} \Omega^n (S^n \wedge X)$.

CHAPITRE III

Propriétés homotopiques et homologues du foncteur Λ

1. STRUCTURES H-ALGÈBRIQUES DE ΛX . — 1.1. *La structure de H-espace de ΛX .* — La structure de monoïde commutatif de $J(X, Y)$ induit une structure de H-espace sur ΛX . Le produit de $\Lambda X \times \Lambda X$ dans ΛX est l'application f qui classe l'étalement de type X dans $\Lambda X \times \Lambda X$: $\text{pr}_1^* (\widetilde{\Lambda X}, \tilde{\gamma}, \tilde{f}) + \text{pr}_2^* (\widetilde{\Lambda X}, \tilde{\gamma}, \tilde{f})$, pr_1 et pr_2 étant les deux projections de $\Lambda X \times \Lambda X$ dans ΛX . On vérifie que l'application ainsi construite envoie $\Lambda_p X \times \Lambda_q X$ dans $\Lambda_{p+q} X$. On a donc la proposition :

PROPOSITION. — ΛX est un H-espace homotopiquement commutatif, associatif et possédant un élément homotopiquement neutre, et tel que le produit soit compatible avec la filtration de ΛX par les sous-espaces $\Lambda_n X$. De plus la structure de H-espace de ΛX est homotopiquement fonctorielle en X .

1.2. *Le produit extérieur de $\Lambda X \wedge \Lambda X'$ dans $\Lambda (X \wedge X')$.* — Si X et X' sont deux espaces de \underline{CW} et Y et Y' deux espaces de \underline{PC} , le « smash » produit d'un étalement de type X

dans Y et d'un étalement de type X' dans Y' est un étalement de type $X \wedge X'$ dans $Y \wedge Y'$. On obtient ainsi une application fonctorielle de $J(X, Y) \times J(X', Y')$ dans $J(X \wedge X', Y \wedge Y')$ qui est classifiée par une application (que l'on appellera produit extérieur) de $\Lambda X \wedge \Lambda X'$ dans $\Lambda(X \wedge X')$. Ce produit classifie l'étalement de type $X \wedge X'$ dans $\Lambda X \wedge \Lambda X'$, « smash » produit des deux étalements universels sur ΛX et $\Lambda X'$. On vérifie que le produit ainsi construit envoie $\Lambda_p X \wedge \Lambda_q X'$ dans $\Lambda_{pq}(X \wedge X')$. On a donc :

PROPOSITION. — *Les espaces ΛX sont munis d'une famille de produits de $\Lambda X \wedge \Lambda X'$ dans $\Lambda(X \wedge X')$, qui sont homotopiquement commutatifs, associatifs et fonctoriels, qui possèdent un élément homotopiquement neutre dans ΛS^0 , et qui envoient $\Lambda_p X \wedge \Lambda_q X'$ dans $\Lambda_{pq}(X \wedge X')$. De plus ces produits sont homotopiquement distributifs à droite et à gauche par rapport aux produits des structures de H-espace.*

1.3. *Interprétation géométrique.* — Les deux produits que l'on vient de définir s'interprètent sur le foncteur I de la façon suivante :

PROPOSITION. — *Soient M une variété différentiable sans bord, ξ et ξ' deux fibrés vectoriels de dimension q sur deux paires d'espaces, (V, α, f) une immersion de type ξ dans M et (V', α', f') une immersion de type ξ' dans M . Alors l'immersion $(V + V', \alpha + \alpha', f + f')$ de type $\xi + \xi'$ dans M est classifiée par une application de \widehat{M} dans $\Lambda T(\xi + \xi') = \Lambda(T\xi \vee T\xi')$ induite par les applications classifiant (V, α, f) et (V', α', f') et par l'application de $\Lambda T\xi \times \Lambda T\xi'$ dans $\Lambda(T\xi \vee T\xi')$ déduite de la structure de H-espace de $\Lambda(T\xi \vee T\xi')$.*

PROPOSITION. — *Soient M et M' deux variétés différentiables sans bord, ξ et ξ' deux fibrés vectoriels de dimension q et q' sur des paires d'espaces, (V, α, f) une immersion de type ξ dans M et (V', α', f') une immersion de type ξ' dans M' . Alors l'immersion $(V \times V', \alpha \times \alpha', f \times f')$ de type $\xi \oplus \xi'$ dans $M \times M'$ est classifiée par une application de $\widehat{M \times M'} = \widehat{M} \wedge \widehat{M'}$ dans $\Lambda T(\xi \oplus \xi') = \Lambda(T\xi \wedge T\xi')$ induite par les applications classifiant (V, α, f) et (V', α', f') et par le produit extérieur de $\Lambda T\xi \wedge \Lambda T\xi'$ dans $\Lambda(T\xi \wedge T\xi')$.*

2. L'APPLICATION DE MULTIPLICITÉ ϕ_p . — 2.1. *L'espace $\mathfrak{S}_p(X)$.* — Désignons par $(\mathbf{R}^\infty)^{(p)}$ l'espace $(\mathbf{R}^\infty)^p$ privé de toutes ses diagonales. Si X est un espace de \underline{CW} , \mathfrak{S}_p opère sur $X^p \times (\mathbf{R}^\infty)^{(p)}$ et sur $A \times (\mathbf{R}^\infty)^{(p)}$, A étant l'ensemble des éléments de X^p dont l'une des projections sur X est égale au point base. On définit alors l'espace pointé $\mathfrak{S}_p(X)$ comme l'espace $X^p \times (\mathbf{R}^\infty)^{(p)} / \mathfrak{S}_p$ quotienté par le sous-espace $A \times (\mathbf{R}^\infty)^{(p)} / \mathfrak{S}_p$. On obtient ainsi un foncteur $\mathfrak{S}_p(?)$ de la catégorie \underline{CW} dans elle-même.

On définit également l'espace $\mathfrak{S}_p(X)$ si X n'est pas pointé, c'est l'espace $X^p \times (\mathbf{R}^\infty)^{(p)} / \mathfrak{S}_p$.

Si ξ est un fibré vectoriel de dimension q de base B et d'espace total E , alors $\mathfrak{S}_p(E)$ est l'espace total d'un fibré vectoriel de dimension pq de base $\mathfrak{S}_p(B)$. Ce fibré sera noté $\mathfrak{S}_p(\xi)$.

On vérifie que les espaces $T\mathfrak{S}_p(\xi)$ et $\mathfrak{S}_p(T\xi)$ sont canoniquement isomorphes

2.2. *L'application de multiplicité $\phi_p : \Lambda X \rightarrow \Lambda \mathfrak{S}_p(X)$.* — Soit X un espace de \underline{CW} . Le groupe $\mathfrak{S}_p \times \mathfrak{S}_\infty$ formé des substitutions de \mathbf{N}^* laissant globalement

invariant le sous-ensemble $\{1, \dots, p\}$ de \mathbf{N}^* , opère sur $E(X)$. Désignons par K_p l'espace quotient $E(X)/\mathfrak{S}_p \times \mathfrak{S}_\infty$, et par γ_p la projection de K_p sur ΛX . L'application f'_p de $E(X)$ dans $\mathfrak{S}_p(X)$ qui à $(x_1, t_1; x_2, t_2; \dots)$ de $E(X)$ associe le point base de $\mathfrak{S}_p(X)$ si l'un des points x_1, x_2, \dots, x_p est égal au point base de X et la classe d'équivalence modulo \mathfrak{S}_p de $(x_1, t_1; \dots; x_p, t_p)$ sinon, est compatible avec l'action du groupe $\mathfrak{S}_p \times \mathfrak{S}_\infty$ et définit une application f_p de K_p dans $\mathfrak{S}_p(X)$.

On vérifie que si p est non nul, (K_p, γ_p, f_p) est un étalement de type $\mathfrak{S}_p(X)$ dans ΛX , ce qui définit une application de ΛX dans $\Lambda \mathfrak{S}_p(X)$ que l'on notera φ_p et que l'on appellera l'application de multiplicité d'ordre p .

Si p est nul, (K_0, γ_0, f_0) est un étalement de type $\mathfrak{S}_0(X) = S^0$ dans l'espace $\hat{\Lambda} X$ obtenu en rajoutant un point base extérieur à ΛX , ce qui définit encore une application φ_0 de ΛX dans $\Lambda \mathfrak{S}_0 X = \Lambda S^0$ (φ_0 est la composée de l'application constante non triviale de ΛX dans S^0 et de l'inclusion de S^0 dans ΛS^0).

2.3. Interprétation géométrique. Variétés multiples d'une immersion générique. — Soient M une variété différentiable sans bord et V une variété différentiable fermée s'immergeant dans M par une immersion générique α . La variété V^p privée de toutes ses diagonales s'immerge par α^p dans M^p transversalement à la diagonale Δ , ce qui définit par image réciproque de Δ une variété compacte $\tilde{V}_p(\alpha)$ contenue dans V^p et sur laquelle opère librement le groupe \mathfrak{S}_p . On appellera p -ième variété multiple de α la variété $V_p(\alpha)$, quotient de $\tilde{V}_p(\alpha)$ par le groupe \mathfrak{S}_p .

Si λ est une application continue injective de V dans \mathbf{R}^∞ , l'application qui à $(x_1, \dots, x_p) \in \tilde{V}_p(\alpha)$ associe $(x_1, \dots, x_p; \lambda(x_1), \dots, \lambda(x_p)) \in V^p \times (\mathbf{R}^\infty)^{(p)}$ est \mathfrak{S}_p -équivariante et induit une application ψ_p de $V_p(\alpha)$ dans $\mathfrak{S}_p(V)$. On vérifie que le fibré normal ν_p de l'immersion canonique α_p de $V_p(\alpha)$ dans M est le fibré $\psi_p^*(\mathfrak{S}_p(\nu))$ où ν est le fibré normal de α . On désignera par ψ'_p l'application de ν_p dans $\mathfrak{S}_p(\nu)$.

THÉORÈME 1. — *L'immersion $(V_p(\alpha), \alpha_p, \psi'_p)$ de type $\mathfrak{S}_p(\nu)$ dans M est classifiée par la composée d'une application classifiant l'immersion (V, ν, Id_ν) de type ν dans M et de l'application φ_p de $\Lambda T \nu$ dans $\Lambda \mathfrak{S}_p(T \nu) = \Lambda T(\mathfrak{S}_p(\nu))$.*

Démonstration. — Soit $(B(\nu), \beta, g)$ l'étalement de type $T \nu$ dans \hat{M} obtenu par épaississement de α . Désignons par $B(\nu)^{(p)}$ l'espace $B(\nu)^p$ privé de toutes ses diagonales. L'image réciproque par β^p de la diagonale de M^p rencontre $B(\nu)^{(p)}$ en une variété compacte à coins \tilde{W}_p qui contient la variété $\tilde{V}_p(\alpha)$, et si l'on a choisi $B(\nu)$ suffisamment petit, \tilde{W}_p est un voisinage régulier de $\tilde{V}_p(\alpha)$. A l'aide d'une application continue injective de $B(\nu)$ dans \mathbf{R}^∞ prolongeant λ , on obtient une application g_p de $\tilde{W}_p/\mathfrak{S}_p$ dans $\mathfrak{S}_p(T \nu)$. Soit W_p la variété $\tilde{W}_p/\mathfrak{S}_p$ qui s'immerge par β_p dans M . On vérifie que l'étalement (W_p, β_p, g_p) de type $\mathfrak{S}_p(T(\nu))$ dans M représente l'image par θ de l'immersion $(V_p(\alpha), \alpha_p, \psi'_p)$ de type $\mathfrak{S}_p(\nu)$ dans M .

Le théorème résulte alors du fait qu'il existe un morphisme d'étalement de (W_p, β_p, g_p) dans (K_p, γ_p, f_p) induisant une application de \hat{M} dans ΛX qui classifie $(B(\nu), \beta, g)$, ce que l'on vérifie aisément.

3. LES MORPHISMES ρ_* ET ρ^* . — Si $\mathbf{A} = (A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $\mathbf{B} = (B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont deux spectres, on posera

$$H_i(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = \lim_{\longrightarrow n} \tilde{H}_{i+n}(A_n, \mathbf{B}) = \lim_{\longrightarrow n, p} \pi_{i+n+p}(A_n \wedge B_p),$$

$$H^i(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = \lim_{\longleftarrow n} \tilde{H}^{i+n}(A_n, \mathbf{B}) = \lim_{\longleftarrow n} \lim_{\longrightarrow p} [S^p \wedge A_n, B_{i+n+p}].$$

3.1. Homologie du spectre $\Lambda(\mathbf{S} \wedge \mathbf{X})$.

THÉORÈME 2. — Soient \mathbf{X} un espace de \underline{CW} et \mathbf{E} un spectre. L'application α de $\mathbf{S} \wedge \mathbf{X}$ dans $\Lambda(\mathbf{S} \wedge \mathbf{X})$ induit un isomorphisme en homologie et l'on a

$$H_i(\Lambda(\mathbf{S} \wedge \mathbf{X}), \mathbf{E}) = \tilde{H}_i(\mathbf{X}, \mathbf{E}).$$

Démonstration. — Comme α induit un isomorphisme sur les groupes d'homotopies, $\tilde{H}_{i+p}(\mathbf{E}_p, \alpha)$ est un isomorphisme. Il en résulte que l'application

$$H_i(\mathbf{E}, \alpha) : H_i(\mathbf{E}, \mathbf{S} \wedge \mathbf{X}) \rightarrow H_i(\mathbf{E}, \Lambda(\mathbf{S} \wedge \mathbf{X}))$$

est un isomorphisme, c'est-à-dire que l'application $H_i(\alpha, \mathbf{E})$ de $H_i(\mathbf{S} \wedge \mathbf{X}, \mathbf{E})$ dans $H_i(\Lambda(\mathbf{S} \wedge \mathbf{X}), \mathbf{E})$ est un isomorphisme et le théorème est démontré.

3.2. Cohomologie du spectre $\Lambda(\mathbf{S} \wedge \mathbf{X})$.

THÉORÈME 3. — Soient \mathbf{X} un espace de \underline{CW} et \mathbf{E} un Ω -spectre. L'application α induit un isomorphisme en cohomologie et l'on a

$$H^i(\Lambda(\mathbf{S} \wedge \mathbf{X}), \mathbf{E}) = \tilde{H}^i(\mathbf{X}, \mathbf{E}).$$

Démonstration. — Soit \mathbf{A} le spectre formé par les espaces $A_n = \Lambda(S^n \wedge \mathbf{X})/S^n \wedge \mathbf{X}$. Comme A_n a le type d'homotopie d'un C. W. complexe pointé, il existe un spectre $\mathbf{B} = (B_n, b_n)$ et un morphisme de spectre $\varphi = (\varphi_n)$ de \mathbf{B} dans \mathbf{A} tels que B_n soit un C. W. complexe pointé, φ_n une équivalence d'homotopie de B_n dans A_n et que l'application b_n de $S^1 \wedge B_n$ dans B_{n+1} soit cellulaire.

Soit B_n^p le $n+p$ -ième squelette de B_n et G_{np}^i le groupe $\tilde{H}^{i+n}(B_n^p, \mathbf{E})$. L'inclusion de B_n^p dans B_n^{p+1} induit une application λ_{np} de G_{np+1}^i dans G_{np}^i et b_n induit une application μ_{np} de G_{n+1p}^i dans G_{np}^i .

Comme B_n est $2n-1$ connexe, l'inclusion de B_n^p dans B_n^{p+1} est homotope à zéro si n est strictement supérieur à p , et dans ce cas λ_{np} est nul. On en déduit :

$$\lim_{\longleftarrow p}^* \lim_{\longleftarrow n}^* G_{np}^i = 0$$

(\lim^* désignant la somme directe des foncteurs \lim et \lim^1).

Soient G^i le produit des groupes G_{np}^i et λ et μ les applications de G^i dans G^i produits des applications λ_{np} et μ_{np} . On a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \rightarrow & \varprojlim_n \varprojlim_p G_{np}^i & \rightarrow & \varprod_p \varprojlim_n G_{np}^i & \xrightarrow{1-\lambda} & \varprod_p \varprojlim_n G_{np}^i & \rightarrow & \varprojlim_n \varprojlim_p G_{np}^i & \rightarrow & 0 \\
 0 & \rightarrow & \varprod_n \varprojlim_p G_{np}^i & \rightarrow & G^i & \xrightarrow{1-\lambda} & G^i & \rightarrow & \varprod_n \varprojlim_p G_{np}^i & \rightarrow & 0 \\
 0 & \rightarrow & \varprod_n \varprojlim_p G_{np}^i & \rightarrow & G^i & \xrightarrow{1-\mu} & G^i & \rightarrow & \varprod_n \varprojlim_p G_{np}^i & \rightarrow & 0 \\
 0 & \rightarrow & \varprojlim_n^1 \varprojlim_p G_{np}^i & \rightarrow & \varprod_p \varprojlim_n G_{np}^i & \xrightarrow{1-\lambda} & \varprod_p \varprojlim_n G_{np}^i & \rightarrow & \varprojlim_n^1 \varprojlim_p G_{np}^i & \rightarrow & 0 \\
 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0
 \end{array}$$

En considérant les deux suites spectrales associées à ce double complexe, on vérifie immédiatement que le groupe $\varprojlim_n^* \varprojlim_p^* G_{np}^i$ est nul.

Or B_n est filtré par les sous-complexes B_n^p , on a donc la suite exacte [22] :

$$0 \rightarrow \varprojlim_p^1 G_{np}^{i-1} \rightarrow H^{i+n}(B_n, E) \rightarrow \varprojlim_p G_{np}^i \rightarrow 0.$$

Il en résulte que les groupes $H^i(B, E)$ et $\varprojlim_n^1 H^{i+n}(B_n, E)$ sont nuls, ainsi que les groupes $H^i(A, E)$ et $\varprojlim_n^1 \tilde{H}^{i+n}(A_n, E)$.

Considérons alors la suite exacte

$$\dots \rightarrow \tilde{H}^{i+n}(A_n, E) \rightarrow \tilde{H}^{i+n}(\Lambda(S^n \wedge X), E) \rightarrow \tilde{H}^{i+n}(S^n \wedge X, E) \rightarrow \dots$$

C'est une suite exacte de systèmes projectifs de groupes. On a donc une suite spectrale cohomologique convergeant vers zéro et dont le terme E_1^{pq} est donné par les formules

$$\begin{aligned}
 E_1^{3iq} &= \varprojlim_n^q \tilde{H}^{i+n}(A_n, E) = 0, \\
 E_1^{3i+1q} &= \varprojlim_n^q \tilde{H}^{i+n}(\Lambda(S^n \wedge X), E), \\
 E_1^{3i+2q} &= \varprojlim_n^q \tilde{H}^{i+n}(S^n \wedge X, E) = \begin{cases} \tilde{H}^i(X, E) & \text{si } q = 0, \\ 0 & \text{si } q \neq 0. \end{cases}
 \end{aligned}$$

On en déduit immédiatement que $H^i(\alpha, E)$ est un isomorphisme et le théorème est démontré.

3.3. Les isomorphismes ρ_* et ρ^* . — L'application de $E_p(X)$ dans $X^p \times (\mathbb{R}^\infty)^p$ qui à $(x_1, t_1; \dots)$ associe $(x_1, t_1; \dots; x_p, t_p)$ définit par passage au quotient une application g_p de $\Lambda_p X$ dans $\mathfrak{S}_p(X)$ qui induit une équivalence d'homotopie de $\Lambda_p X / \Lambda_{p-1} X$ sur $\mathfrak{S}_p(X)$.

Dans la suite, si Y est un espace topologique pointé, on désignera par $\hat{\Lambda} Y$ et $\hat{\Lambda}_p Y$ les espaces ΛY et $\Lambda_p Y$ pointés par un point extérieur.

Considérons alors le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \hat{\Lambda} X & \xrightarrow{\varphi_p} & \Lambda \mathfrak{S}_p(X) \\ \uparrow & & \uparrow \\ \hat{\Lambda}_p X & \xrightarrow{g_p} & \mathfrak{S}_p(X) \end{array}$$

Ce diagramme est homotopiquement commutatif et l'on en déduit le diagramme suivant également homotopiquement commutatif :

$$\begin{array}{ccccc} \mathbf{S} \wedge \hat{\Lambda} X & \xrightarrow{\mathbf{S} \wedge \varphi_p} & \mathbf{S} \wedge \Lambda(\mathfrak{S}_p(X)) & \xrightarrow{\mathbf{s}} & \Lambda(\mathbf{S} \wedge \mathfrak{S}_p(X)) \\ \uparrow & & \uparrow & & \nearrow \alpha \\ \mathbf{S} \wedge \hat{\Lambda}_p X & \xrightarrow{\mathbf{S} \wedge g_p} & \mathbf{S} \wedge \mathfrak{S}_p(X) & & \end{array}$$

Soit \mathbf{E} un spectre que l'on supposera être un Ω -spectre dans le cas cohomologique. Les applications $H_*(\alpha, \mathbf{E})$ et $H^*(\alpha, \mathbf{E})$ sont des isomorphismes et l'on a les deux diagrammes commutatifs

$$\begin{array}{ccc} H_*(\Lambda X, \mathbf{E}) & \xrightarrow{\rho_{*p}} & H_*(\Lambda_p X, \mathbf{E}) \\ \uparrow & & \uparrow \\ H_*(\hat{\Lambda} X, \mathbf{E}) & \xrightarrow{g_{p*}} & \tilde{H}_*(\mathfrak{S}_p(X), \mathbf{E}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^*(\Lambda X, \mathbf{E}) & \xrightarrow{\rho_p^*} & H^*(\Lambda_p X, \mathbf{E}) \\ \uparrow & & \uparrow \\ H^*(\hat{\Lambda} X, \mathbf{E}) & \xrightarrow{g_p^*} & \tilde{H}^*(\mathfrak{S}_p(X), \mathbf{E}) \end{array}$$

avec

$$\begin{aligned} \rho_{*p} &= H_*(\alpha, \mathbf{E})^{-1} \circ H_*(\mathbf{s}, \mathbf{E}) \circ H_*(\mathbf{S} \wedge \varphi_p, \mathbf{E}), \\ \rho_p^* &= H^*(\mathbf{S} \wedge \varphi_p, \mathbf{E}) \circ H^*(\mathbf{s}, \mathbf{E}) \circ H^*(\alpha, \mathbf{E})^{-1}. \end{aligned}$$

Il en résulte que les suites spectrales d'homologie et de cohomologie de la filtration $(\Lambda_n X)_{n \in \mathbb{N}}$ de ΛX dégèrent complètement. Si l'on désigne par $\mathfrak{S}_*(X)$ le bouquet des espaces $\mathfrak{S}_n(X)$, $n \geq 0$, par ρ_* l'application de $H_*(\Lambda X, \mathbf{E})$ dans $\tilde{H}_*(\mathfrak{S}_*(X), \mathbf{E})$ induite par les ρ_{*p} et par ρ^* l'application de $\tilde{H}^*(\mathfrak{S}_*(X), \mathbf{E})$ dans $H^*(\Lambda X, \mathbf{E})$ induite par les ρ_p^* , on en déduit :

THÉORÈME 4. — *Les applications*

$$\rho_* : H_*(\Lambda X, \mathbf{E}) \rightarrow \tilde{H}_*(\mathfrak{S}_*(X), \mathbf{E})$$

et

$$\rho^* : \tilde{H}^*(\mathfrak{S}_*(X), \mathbf{E}) \rightarrow H^*(\Lambda X, \mathbf{E})$$

sont des isomorphismes de \mathbf{Z} -modules gradués fonctoriels en X et en \mathbf{E} .

La structure de H-espace de ΛX qui est compatible avec la filtration $(\Lambda_p X)_{p \in \mathbb{N}}$, induit par l'intermédiaire des équivalences d'homotopie de $\Lambda_p X / \Lambda_{p-1} X$ sur $\mathfrak{S}_p X$, une structure de H-espace homotopiquement associatif et commutatif sur l'espace $\mathfrak{S}_*(X)$, et, si \mathbf{A} est un spectre d'anneau, $\tilde{H}_*(\mathfrak{S}_*(X), \mathbf{A})$ est une $H_*(\text{pt}, \mathbf{A})$ -algèbre.

THÉORÈME 5. — Si \mathbf{A} est un spectre d'anneau, l'application ρ_* de $H_*(\wedge X, \mathbf{A})$ dans $\tilde{H}_*(\mathfrak{S}_*(X), \mathbf{A})$ est un isomorphisme de $H_*(\text{pt}, \mathbf{A})$ -algèbres.

Démonstration. — Comme ρ_* est fonctoriel par rapport au spectre, ρ_* est un isomorphisme de $H_*(\text{pt}, \mathbf{A})$ -modules. Il reste donc à montrer que ρ_* est un morphisme d'algèbre.

Si (A_0, A_1, \dots) est une suite d'espaces topologiques pointés, on désignera par $\times A_p$ l'espace $\lim_{\substack{\longrightarrow \\ p}} (A_0 \times A_1 \times \dots \times A_n)$. Les applications φ_p induisent alors une application $\varphi : \hat{\wedge} X \rightarrow \times \wedge \mathfrak{S}_p(X)$.

Considérons le diagramme

$$\begin{array}{ccccc} S \wedge \hat{\wedge} X & \xrightarrow{S \wedge \varphi} & S \wedge (\times \wedge \mathfrak{S}_p(X)) & \xrightarrow{s} & \times \wedge (S \wedge \mathfrak{S}_p(X)) & \xleftarrow{\beta} & S \wedge \mathfrak{S}_*(X) \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ & & \wedge (S \wedge \mathfrak{S}_p(X)) & \xleftarrow{\alpha} & S \wedge \mathfrak{S}_p(X) & & \end{array}$$

$\times \wedge (S \wedge \mathfrak{S}_p(X))$ est le spectre formé par les espaces $\times \wedge (S^n \wedge \mathfrak{S}_p(X))$, et β est l'unique application de spectre rendant le diagramme commutatif pour tout p .

On vérifie que $H_*(\beta, \mathbf{A})$ est un isomorphisme et que l'on a

$$\rho_* = H_*(\beta, \mathbf{A})^{-1} \circ H_*(s, \mathbf{A}) \circ H_*(S \wedge \varphi, \mathbf{A}).$$

Or les spectres $S \wedge \hat{\wedge} X$ et $S \wedge \mathfrak{S}_*(X)$ sont des spectres d'anneau; pour montrer le théorème, il suffit alors de montrer que $\times \wedge \mathfrak{S}_p(X)$ est un H-espace, que $\times \wedge (S \wedge \mathfrak{S}_p(X))$ est un spectre d'anneau, que β et s sont des morphismes de spectres d'anneau et que φ est un morphisme de H-espaces.

a. $\times \wedge (S \wedge \mathfrak{S}_p(X))$ est un spectre d'anneau.

Soient p, q, i et j quatre entiers. Désignons par F_{pq} l'application de

$$\wedge (S^i \wedge \mathfrak{S}_p(X)) \wedge \wedge (S^j \wedge \mathfrak{S}_q(X))$$

dans $\wedge (S^{i+j} \wedge \mathfrak{S}_{p+q}(X))$ composée du produit extérieur de

$$\wedge (S^i \wedge \mathfrak{S}_p(X)) \wedge \wedge (S^j \wedge \mathfrak{S}_q(X))$$

dans $\wedge (S^{i+j} \wedge \mathfrak{S}_p(X) \wedge \mathfrak{S}_q(X))$ et de l'application déduite du produit de $\mathfrak{S}_p(X) \wedge \mathfrak{S}_q(X)$ dans $\mathfrak{S}_{p+q}(X)$ défini par la structure de H-espace de $\mathfrak{S}_*(X)$.

Soit alors F l'application de

$$\times \wedge (S^i \wedge \mathfrak{S}_p(X)) \wedge \times \wedge (S^j \wedge \mathfrak{S}_p(X))$$

dans $\times \Lambda (\mathbb{S}^{i+j} \wedge \mathfrak{S}_p(\mathbb{X}))$ telle que, si π_n est la projection de $\times \Lambda (\mathbb{S}^k \wedge \mathfrak{S}_p(\mathbb{X}))$ sur $\Lambda (\mathbb{S}^k \wedge \mathfrak{S}_n(\mathbb{X}))$, on ait

$$\pi_n \circ F(u, v) = F_{0,n}(\pi_0(u), \pi_n(v)) \cdot F_{1,n-1}(\pi_1(u), \pi_{n-1}(v)) \cdot \dots \cdot F_{n,0}(\pi_n(u), \pi_0(v)),$$

le signe \cdot désignant le produit dans $\Lambda (\mathbb{S}^{i+j} \wedge \mathfrak{S}_n(\mathbb{X}))$.

On vérifie que F induit une structure de spectre d'anneau sur $\times \Lambda (\mathbb{S} \wedge \mathfrak{S}_p(\mathbb{X}))$.

b. $\times \Lambda \mathfrak{S}_p(\mathbb{X})$ est un H-espace.

L'étude ci-dessus appliquée au cas où i et j sont nuls, montre que $\times \Lambda \mathfrak{S}_p(\mathbb{X})$ est un H-espace.

c. Compatibilité de β .

La compatibilité de β est évidente.

d. Compatibilité de s .

Désignons par \times les divers produits extérieurs et par \cdot les produits définis par les structures de H-espace.

Soient $t \mapsto \bar{t}$ l'inclusion de \mathbb{S}^i dans $\Lambda \mathbb{S}^i$ et s_i l'application de $\mathbb{S}^i \wedge (\times \Lambda \mathfrak{S}_p(\mathbb{X}))$ dans $\times \Lambda (\mathbb{S}^i \wedge \mathfrak{S}_p(\mathbb{X}))$ définie par

$$s_i(t \wedge (x_0, x_1, \dots)) = (\bar{t} \times x_0, \bar{t} \times x_1, \dots)$$

s est homotope à l'application définie par les s_i .

Considérons le diagramme

$$\begin{array}{ccccc} \times \Lambda (\mathbb{S}^i \wedge \mathfrak{S}_p(\mathbb{X})) \wedge \times \Lambda (\mathbb{S}^j \wedge \mathfrak{S}_p(\mathbb{X})) & \xrightarrow{\cdot} & \times \Lambda (\mathbb{S}^{i+j} \wedge \mathfrak{S}_p(\mathbb{X})) & \xrightarrow{\mathbb{S}^{i+j} \wedge \pi_n} & \mathbb{S}^{i+j} \wedge \Lambda \mathfrak{S}_n(\mathbb{X}) \\ \downarrow s_i \wedge s_j & & \downarrow s_{i+j} & & \downarrow s \\ \times \Lambda (\mathbb{S}^i \wedge \mathfrak{S}_p(\mathbb{X})) \wedge \times \Lambda (\mathbb{S}^j \wedge \mathfrak{S}_p(\mathbb{X})) & \xrightarrow{\cdot} & \times \Lambda (\mathbb{S}^{i+j} \wedge \mathfrak{S}_p(\mathbb{X})) & \xrightarrow{\pi_n} & \Lambda (\mathbb{S}^{i+j} \wedge \mathfrak{S}_n(\mathbb{X})) \end{array}$$

s étant l'application : $t \wedge x \rightarrow \bar{t} \times x$.

Pour montrer que s est un morphisme de spectre d'anneau, il suffit de montrer que le diagramme est homotopiquement commutatif, c'est-à-dire que, pour tout n , $s \circ (\mathbb{S}^{i+j} \wedge \pi_n) \circ \cdot$ et $\pi_n \circ \cdot \circ (s_i \wedge s_j)$ sont homotopes.

Or, $s \circ (\mathbb{S}^{i+j} \wedge \pi_n) \circ \cdot$ est l'application

$$\begin{aligned} & (t \wedge (x_0, \dots)) \wedge (t' \wedge (x'_0, \dots)) \\ & \mapsto \overline{t \wedge t'} \times (\Lambda(\cdot)(x_0 \times x'_n) \cdot \Lambda(\cdot)(x_1 \times x'_{n-1}) \cdot \dots \cdot \Lambda(\cdot)(x_n \times x'_0)). \end{aligned}$$

Comme le produit \times est homotopiquement distributif par rapport au produit \cdot , $s \circ (\mathbb{S}^{i+j} \wedge \pi_n) \circ \cdot$ est donc homotope à l'application

$$\begin{aligned} & (t \wedge (x_0, \dots)) \wedge (t' \wedge (x'_0, x'_1, \dots)) \\ & \mapsto \overline{(t \wedge t' \times \Lambda(\cdot)(x_0 \times x'_n))} \cdot \overline{(t \wedge t' \times \Lambda(\cdot)(x_1 \times x'_{n-1}))} \cdot \dots \cdot \overline{(t \wedge t' \times \Lambda(\cdot)(x_n \times x'_0))}. \end{aligned}$$

D'autre part, $\pi_n \circ . \circ (s_i \wedge s_j)$ est l'application

$$(t \wedge (x_0, \dots)) \wedge (t' \wedge (x'_0, \dots)) \\ \mapsto F_{0,n}(\bar{t} \times x_0, \bar{t}' \times x'_0) \cdot F_{1,n-1}(\bar{t} \times x_1, \bar{t}' \times x'_1) \cdot \dots \cdot F_{n,0}(\bar{t} \times x_n, \bar{t}' \times x'_n).$$

D'après les propriétés fonctorielles du produit \times , on vérifie que les applications qui à $(t \wedge (x_0, \dots)) \wedge (t' \wedge (x'_0, \dots))$ associent $\bar{t} \wedge \bar{t}' \times \Lambda(\cdot)(x_i \times x'_{n-i})$ et $F_{i,n-i}(\bar{t} \times x_i, \bar{t}' \times x'_{n-i})$ sont homotopes. On en déduit donc que s est un morphisme de spectre d'anneau.

e. Compatibilité de φ .

L'étalement de type X dans $\Lambda X \times \Lambda X$

$$(\widetilde{\Lambda X} \times \Lambda X + \Lambda X \times \widetilde{\Lambda X}, \tilde{\gamma} \times \text{Id} + \text{Id} \times \tilde{\gamma}, \tilde{f} \circ \text{pr}_1 + \tilde{f} \circ \text{pr}_2),$$

pr_1 et pr_2 étant les deux projections sur ΛX , est classifié par le produit \cdot de $\Lambda X \times \Lambda X$ dans ΛX . Si (K_p, γ_p, f_p) est l'étalement de type $\mathfrak{S}_p(X)$ dans $\hat{\Lambda} X$ définissant l'application φ_p , il est clair que l'application $\varphi_n \circ .$ de $\Lambda X \times \Lambda X$ dans $\Lambda \mathfrak{S}_n(X)$ classifie l'étalement $(K_0 \times K_n + \dots + K_n \times K_0, \gamma_0 \times \gamma_n + \dots + \gamma_n \times \gamma_0, h_0 + \dots + h_n)$ où h_0 est le composé de $f_i \times f_{n-i}$ et du produit \cdot de $\mathfrak{S}_i(X) \wedge \mathfrak{S}_{n-i}(X)$ dans $\mathfrak{S}_n(X)$. Il est alors immédiat que φ est un morphisme de H-espace et le théorème est démontré.

3.4. *Interprétation géométrique de ρ_* .* — Soient V et M deux variétés différentiables sans bord, V étant compacte, α une immersion générique de V dans M de fibré normal v , i un entier strictement positif et A un spectre d'anneau.

Comme i est strictement positif, ρ_{*i} est nul sur $H_*(\Lambda_0 T v, A)$. Or $\Lambda_0 T v$ est contractile, ρ_{*i} définit donc une application notée $\tilde{\rho}_{*i}$ de $H_*(\Lambda T v, A)$ dans $\tilde{H}_*(\mathfrak{S}_i(T v), A)$.

On désignera par $V_i(\alpha)$ la i -ième variété multiple de α , par α_i l'immersion canonique de $V_i(\alpha)$ dans M et par ψ'_i l'application fibrée du fibré normal v_i de α_i dans $\mathfrak{S}_i(v)$ (voir 2.3). On désignera également par $B(v_i)$ l'espace total du fibré en boules de v_i , et par β_i l'immersion de $B(v_i)$ dans M.

THÉORÈME 6. — Si M est A-orientée, l'image par $(T \psi'_i)_*$ de la classe fondamentale de $(B(v_i), \partial B(v_i))$ A-orientée par β_i , est égale à l'image par $\tilde{\rho}_{*i} \circ \varphi_*$ de la classe fondamentale de (M, ∞) , φ étant une application de \hat{M} dans $\Lambda(T v)$ classifiant l'immersion (V, α, Id_v) de type v dans M.

La démonstration se fera à l'aide de trois lemmes préliminaires.

LEMME 1. — Soit X un espace de CW', et (V, α, f) une immersion de type X dans M. Alors $f_* [V, \partial V]$ est un élément de $\tilde{H}_*(X, A)$ qui ne dépend que de la classe de cobordisme de (V, α, f) .

Cela résulte du fait que $M \times I$ est A-orienté et qu'un cobordisme (W, B, β, g) entre deux immersions (V, α, f) et (V', α', f') est alors A-orienté et induit un cobordisme homologique entre $f_* [V, \partial V]$ et $f'_* [V', \partial V']$.

Si (V, α, f) représente l'élément a de $I(X, M)$, on notera $F(a)$ l'élément $f_*[V, \partial V]$. On désignera également par $F'(a)$ l'élément $\rho_{*1} \circ H_*(\varepsilon \circ \theta(a), \mathbf{A})[M, \infty]$. F et F' sont deux applications de $I(X, M)$ dans $H_*(X, \mathbf{A})$; on les supposera également définies sur $J(X, M)$ via l'isomorphisme θ .

LEMME 2. — Soient σ l'homomorphisme standard de $I(X, M)$ dans $(\theta_X, \mathbf{R} \times M)$ et Σ_* la suspension en homologie. On a alors, pour tout élément a de $I(X, M)$:

$$F(\theta \circ \sigma(a)) = \Sigma_* F(a),$$

$$F'(\theta \circ \sigma(a)) = \Sigma_* F'(a).$$

Soit (V, α, f) une immersion de type X dans M . On en déduit une immersion de $[-1, +1] \times V$ dans $\mathbf{R} \times M$ et une application g de $[-1, +1] \times V$ dans

$$S^1 \wedge X = [-1, +1] / \partial[-1, +1] \wedge X.$$

On a alors, si a est la classe de cobordisme de (V, α, f) :

$$\begin{aligned} F(\theta \circ \sigma(a)) &= g_*([-1, +1] \times V, \partial([-1, +1] \times V)) \\ &= g_*([[-1, +1], \partial[-1, +1]] \times [V, \partial V]) = \Sigma_* f_*[V, \partial V] \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$F(\theta \circ \sigma(a)) = \Sigma_* F(a).$$

D'autre part, si φ classe a , on vérifie que $\theta \circ \sigma(a)$ est classifié par l'application composée

$$\widehat{\mathbf{R} \times M} \xrightarrow{\sim} S^1 \wedge \widehat{M} \xrightarrow{S^1 \wedge \varphi} S^1 \wedge \Lambda X \xrightarrow{s} \Lambda(S^1 \wedge X).$$

On en déduit

$$\varepsilon \circ \theta \circ \sigma(a)_*[\mathbf{R} \times M, \infty] = s_*([S^1] \times \varphi_*[M, \infty]).$$

Il est alors facile de vérifier la formule

$$\tilde{\rho}_{*1} \circ (\varepsilon \circ \theta \circ \sigma(a))_*[\mathbf{R} \times M, \infty] = \Sigma_* \rho_{*1} \circ \varphi_*[M, \infty]$$

soit

$$F'(\theta \circ \sigma(a)) = \Sigma_* F'(a).$$

LEMME 3. — Les deux applications F et F' sont égales.

Soit r un entier, a un élément de $I(X, M)$ et b l'élément $(\theta \circ \sigma)^r(a)$ de $I(S^r \wedge X, \mathbf{R}^r \times M)$.

Si r est assez grand, l'application

$$[\widehat{\mathbf{R}^r \times M, S^r \wedge X}] \rightarrow [\widehat{\mathbf{R}^r \times M, \Lambda(S^r \wedge X)}]$$

est surjective, et b peut être représenté par une immersion (W, β, g) de type $S^r \wedge X$ dans $\mathbf{R}^r \times M$ telle que β soit un plongement. On vérifie alors que, si π est la rétraction canonique

de $\mathbf{R}^r \times \mathbf{M}$ sur $W/\partial W$, $\varepsilon(b)$ est classifié par l'application composée

$$\widehat{\mathbf{R}^r \times \mathbf{M}} \xrightarrow{\pi} W/\partial W \xrightarrow{g} S^r \wedge X \xrightarrow{i} \Lambda(S^r \wedge X)$$

et l'on a

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}_{*1} \circ \varepsilon(b)_* [\mathbf{R}^r \times \mathbf{M}, \infty] &= \tilde{\rho}_{*1} \circ i_* \circ g_* \circ \pi_* [\mathbf{R}^r \times \mathbf{M}, \infty] \\ &= g_* \circ \pi_* [\mathbf{R}^r \times \mathbf{M}, \infty] = g_* [W, \partial W]. \end{aligned}$$

$F'(b)$ et $F(b)$ sont donc égaux, et comme Σ_* est bijectif, les deux applications F et F' sont égales.

On peut alors démontrer le théorème :

Soit a_i la classe de cobordisme de $(B(v_i), \beta_i, T\psi'_i)$. D'après le théorème 1, a_i est classifiée par $\varphi_i \circ \varphi$. On a donc

$$(T\psi'_i)_* [B(v_i), \partial B(v_i)] = F(a_i) = F'(a_i) = \tilde{\rho}_{*1} \circ \varphi_{i*} \circ \varphi_* [M, \infty] = \tilde{\rho}_{*1} \circ \varphi_* [M, \infty]$$

et le théorème est démontré.

CHAPITRE IV

Homologie de ΛX à coefficients dans un corps

1. L'ALGÈBRE $H_*(\Lambda S^0, k)$. — Soit k un corps.

L'espace ΛS^0 est la somme disjointe des espaces $K(\mathfrak{S}_p, 1)$, on en déduit :

PROPOSITION 1. — $H_*(\Lambda S^0, k)$ et $\bigoplus_p H_*(\mathfrak{S}_p, k)$ sont deux k -modules gradués canoniquement isomorphes.

D'autre part, ΛS^0 possède deux produits, le produit défini par la structure de H-espace et le produit extérieur. Il en résulte que $H_*(\Lambda S^0, k)$ possède deux structures d'algèbre de Hopf, définie par la diagonale Δ et deux produits : le produit \cdot déduit de la structure de H-espace et le produit \times déduit du produit extérieur. On transposera ces structures sur $\bigoplus_p H_*(\mathfrak{S}_p, k)$.

On vérifie qu'il y a une unité $1 \in H_0(\mathfrak{S}_0, k)$ pour le produit \cdot et une unité $e \in H_0(\mathfrak{S}_1, k)$ pour le produit \times . De plus, si l'on dit qu'un élément de $H_n(\mathfrak{S}_p, k)$ est de dimension n et de rang p , on a, pour tous éléments homogènes x et y de $\bigoplus_p H_*(\mathfrak{S}_p, k)$:

$$\dim(x \cdot y) = \dim x + \dim y,$$

$$\text{rg}(x \cdot y) = \text{rg } x + \text{rg } y,$$

$$\dim(x \times y) = \dim x + \dim y,$$

$$\text{rg}(x \times y) = \text{rg } x \cdot \text{rg } y.$$

Les deux produits peuvent être définis de la façon suivante :

Désignons par $\mathfrak{S}(A)$ le groupe des bijections d'un ensemble A . Si A et B sont deux ensembles, on a deux applications canoniques :

$$\alpha : \mathfrak{S}(A) \times \mathfrak{S}(B) \rightarrow \mathfrak{S}(A+B),$$

$$\beta : \mathfrak{S}(A) \times \mathfrak{S}(B) \rightarrow \mathfrak{S}(A \times B),$$

ces applications définissent deux familles d'applications (définies à automorphisme intérieur près) :

$$\varphi^{pq} : \mathfrak{S}_p \times \mathfrak{S}_q \rightarrow \mathfrak{S}_{p+q},$$

$$\psi^{pq} : \mathfrak{S}_p \times \mathfrak{S}_q \rightarrow \mathfrak{S}_{pq}$$

et l'on vérifie que ces applications induisent les deux produits sur $\bigoplus_p H_*(\mathfrak{S}_p, k)$.

2. L'ALGÈBRE $\tilde{H}_*(\mathfrak{S}_*(X), k)$. — Si C_* est un k -module différentiel gradué et W_* un $k[\mathfrak{S}_n]$ -module différentiel gradué libre acyclique, on désignera par $H_*(\mathfrak{S}_n, C_*^n)$ l'homologie du complexe $W_* \otimes_{\mathfrak{S}_n} C_*^n$.

PROPOSITION 2. — Soit $\tilde{C}_*(X)$ le complexe de chaînes de l'espace pointé X . Alors $\tilde{H}_*(\mathfrak{S}_n(X), k)$ et $H_*(\mathfrak{S}_n, \tilde{C}_*(X)^n)$ sont deux k -modules gradués isomorphes.

La démonstration est évidente.

PROPOSITION 3. — Il existe un isomorphisme canonique entre $H_*(\mathfrak{S}_n, \tilde{C}_*(X)^n)$ et $H_*(\mathfrak{S}_n, \tilde{H}_*(X, k)^n)$.

Démonstration. — Considérons $\tilde{H}_*(X, k)$ comme un k -module différentiel gradué, avec une différentielle nulle. Soit s de $\tilde{C}_*(X)$ dans $\tilde{H}_*(X, k)$ une application induisant l'identité en homologie; s est unique à homotopie près. Si W_* est un $k[\mathfrak{S}_n]$ -module différentiel gradué libre acyclique, s induit une application f entre les deux doubles complexes $W_* \otimes_{\mathfrak{S}_n} \tilde{C}_*(X)^n$ et $W_* \otimes_{\mathfrak{S}_n} \tilde{H}_*(X, k)^n$. Comme f induit un isomorphisme sur les deuxièmes termes des suites spectrales, f induit un isomorphisme en homologie. Cet isomorphisme est indépendant du choix de s d'après un lemme de Steenrod [26].

Soient i un entier et $k^{(i)}$ le corps k muni de l'action de \mathfrak{S}_n suivante :

$$\sigma \in \mathfrak{S}_n, \quad t \in k \Rightarrow \sigma.t = (\text{Sgn } \sigma)^i t.$$

PROPOSITION 4. — $\bigoplus_n H_*(\mathfrak{S}_n, k^{(i)})$ est une algèbre vérifiant les formules suivantes :

$$a \in H_n(\mathfrak{S}_p, k^{(i)}), \quad b \in H_m(\mathfrak{S}_q, k^{(i)}) \Rightarrow b.a = (-1)^{nm+pq} a.b.$$

Démonstration. — Soit f l'application de $\mathfrak{S}_p \times \mathfrak{S}_q$ dans \mathfrak{S}_{p+q} définie par

$$\sigma \in \mathfrak{S}_p, \quad \tau \in \mathfrak{S}_q, \quad t \in \{1, \dots, p+q\} \Rightarrow f(\sigma, \tau)(t) = \begin{cases} \sigma(t) & \text{si } t \leq p, \\ p+\tau(t-p) & \text{si } t > p. \end{cases}$$

Choisissons des $k[\mathfrak{S}_n]$ -modules différentiels gradués libres acycliques W_n et des applications φ_{pq} de $W_p \otimes W_q$ dans W_{p+q} compatibles avec f . On définit alors la structure d'algèbre de $\bigoplus_n H_*(\mathfrak{S}_n, k^{(i)})$ par les applications de $W_p \otimes k^{(i)} \otimes W_q \otimes k^{(i)}$ dans $W_{p+q} \otimes k^{(i)}$ suivantes :

$$a \otimes b \otimes c \otimes d \mapsto \varphi_{pq}(a \otimes c) \otimes bd$$

et l'on vérifie aisément les formules.

Les éléments de $H_n(\mathfrak{S}_p, k^{(i)})$ seront dits de dimension n et de rang p . L'algèbre $\bigoplus_n H_*(\mathfrak{S}_n, k^{(i)})$ est alors une algèbre bigraduée par la dimension et le rang.

Soient u un élément de $\tilde{H}_i(X, k)$ et a un élément de $H_j(\mathfrak{S}_n, k^{(i)})$ représenté par un élément a' de W_n . Le cycle $a' \otimes u^n$ induit un élément de $H_{n+i+j}(\mathfrak{S}_n, \tilde{H}_*(X, k)^n)$ indépendant du choix de a' . Cet élément sera noté $a \wr u$. On vérifie la formule

$$u \in \tilde{H}_i(X, k), \quad a \in H_n(\mathfrak{S}_p, k^{(i)}), \quad b \in H_m(\mathfrak{S}_q, k^{(i)}) \quad (a \cdot b) \wr u = (-1)^{pim} a \wr u \cdot b \wr u.$$

Soit E un ensemble gradué par une application notée \dim de E dans \mathbb{N} . La k -algèbre unitaire graduée engendrée par E et soumise aux relations

$$\forall x, y \in E, \quad y \cdot x = (-1)^{\dim x \cdot \dim y + i} x \cdot y$$

sera appelée la $k^{(i)}$ -algèbre commutative libre engendrée par E .

PROPOSITION 5. — Si $\bigoplus_n H_*(\mathfrak{S}_n, k^{(i)})$ est la $k^{(i)}$ -algèbre commutative libre engendrée par un ensemble gradué $\{a_j^i\}_{j \in J_i}$, les éléments a_j^i étant de rang impair si la caractéristique de k est différente de 2, et si $\{u_l\}$ est une base de $\tilde{H}_*(X, k)$, u_l étant de dimension d_l , $\bigoplus_n H_*(\mathfrak{S}_n, \tilde{H}_*(X, k)^n)$ est la k -algèbre commutative libre engendrée par l'ensemble $a_j^i \wr u_l$.

Démonstration. — Soit n un entier positif ou nul. La base $\{u_l\}$ de $\tilde{H}_*(X, k)$ induit une base de $\tilde{H}_*(X, k)^n$ notée B_n . Si x est un élément de $B_n \cup -B_n$, on désignera par $O(x)$ l'orbite de x sous l'action de \mathfrak{S}_n , et l'on notera A_n l'ensemble, pour tous les éléments x de $B_n \cup -B_n$ des parties $O(x) \cup -O(x)$.

Si a est un élément de A_n , on désignera par $E(a)$ le sous k -module de $\tilde{H}_*(X, k)^n$ engendré par les éléments de a . On vérifie la formule

$$H_*(\mathfrak{S}_n, \tilde{H}_*(X, k)^n) = \bigoplus_{a \in A_n} H_*(\mathfrak{S}_n, E(a)).$$

Choisissons un ordre total sur l'ensemble d'indices de la base $\{u_l\}$ de $\tilde{H}_*(X, k)$. Si a est un élément de A_n , il existe un seul élément x de a de la forme

$$x = u_{l_1}^{r_1} \otimes \dots \otimes u_{l_p}^{r_p},$$

avec

$$\begin{aligned} r_1 + \dots + r_p &= n, \\ \forall j \in \{1, \dots, p\}, \quad r_j &> 0, \\ l_1 &< \dots < l_p. \end{aligned}$$

Soient $G(a)$ le sous-groupe de \mathfrak{S}_n , ensemble des substitutions σ telles que $\sigma.x$ soit au signe près égal à x , et $F(x)$ le k -module engendré par x . On a alors

$$H_*(\mathfrak{S}_n, E(a)) = H_*(G(a), F(x)).$$

Or $G(a)$ est égal au produit $\mathfrak{S}_{r_1} \times \dots \times \mathfrak{S}_{r_p}$. On a donc

$$H_*(\mathfrak{S}_n, E(a)) = H_*(\mathfrak{S}_{r_1}, F(u_{11})^{r_1}) \otimes \dots \otimes H_*(\mathfrak{S}_{r_p}, F(u_{1p})^{r_p}).$$

Soient l et r deux entiers. Désignons par i l'entier d_l ; $H_*(\mathfrak{S}_r, F(u_l)^r)$ est alors isomorphe en tant que k -module à $H_*(\mathfrak{S}_r, k^{(i)})$.

D'autre part, si l'on choisit sur J_i un ordre total, $H_*(\mathfrak{S}_r, k^{(i)})$ possède une base formée par les éléments de la forme

$$(a_{j_1}^i)^{s_1} \dots (a_{j_q}^i)^{s_q},$$

avec

$$\begin{aligned} s_1 \operatorname{rg} a_{j_1}^i + \dots + s_q \operatorname{rg} a_{j_q}^i &= r, \\ \forall t \in \{1, \dots, q\}, \quad s_t &> 0, \\ j_1 &< \dots < j_q, \end{aligned}$$

et, si la caractéristique de k est différente de 2 :

$$\forall t \in \{1, \dots, q\}, \quad \dim a_{j_t}^i + i \equiv 1 \pmod{2} \Rightarrow s_t = 1.$$

Il en résulte que $H_*(\mathfrak{S}_r, F(u_l)^r)$ possède une base formée par les éléments de la forme

$$[(a_{j_1}^i)^{s_1} \dots (a_{j_q}^i)^{s_q}] \wr u_l,$$

avec les mêmes conditions sur les entiers j_t et s_t que précédemment.

Or $[(a_{j_1}^i)^{s_1} \dots (a_{j_q}^i)^{s_q}] \wr u_l$ est égal au signe près à $(a_{j_1}^i \wr u_l)^{s_1} \dots (a_{j_q}^i \wr u_l)^{s_q}$. Il en résulte que, si l'on désigne par $\{v_\lambda\}$ l'ensemble $\{a_{j_t}^i \wr u_l\}$ muni de l'ordre lexicographique sur le couple (l, j) , $\bigoplus_n H_*(\mathfrak{S}_n, \tilde{H}_*(X, k)^n)$ possède une base formée par les éléments

$$v_{\lambda_1}^{s_1} \dots v_{\lambda_q}^{s_q},$$

avec

$$\begin{aligned} q &\geq 0, \\ \forall t \in \{1, \dots, q\}, \quad s_t &> 0, \\ \lambda_1 &< \dots < \lambda_q, \end{aligned}$$

et, si la caractéristique de k est différente de 2 :

$$\forall t \in \{1, \dots, q\}, \quad \dim v_{\lambda_t} \equiv 1 \pmod{2} \Rightarrow s_t = 1,$$

ce qui démontre la proposition.

3. CAS OU k EST DE CARACTÉRISTIQUE ZÉRO. — On supposera dans ce paragraphe que k est de caractéristique zéro.

PROPOSITION 6. — $\bigoplus_p H_*(\mathfrak{S}_p, k^{(i)})$ est la $k^{(i)}$ -algèbre commutative libre engendrée par le générateur canonique e de $H_0(\mathfrak{S}_1, k^{(i)})$.

Démonstration. — Comme k est de caractéristique zéro, on a

$$\begin{aligned} \bigoplus_p H_*(\mathfrak{S}_p, k^{(1)}) &= k[e]/e^2, \\ \bigoplus_p H_*(\mathfrak{S}_p, k^{(0)}) &= k[e], \end{aligned}$$

ce qui démontre la proposition.

PROPOSITION 7. — $\bigoplus_p H_*(\mathfrak{S}_p, \tilde{H}_*(X, k)^p)$ est la k -algèbre commutative libre engendrée par $\tilde{H}_*(X, k)$.

C'est une conséquence directe des propositions 5 et 6.

THÉORÈME 1. — $\tilde{H}_*(\mathfrak{S}_*(X), k)$ est la k -algèbre de Hopf graduée engendrée par la coalgèbre $\tilde{H}_*(X, k)$.

THÉORÈME 2. — Soit a la classe de $H_0(X, k)$ représentée par le point base de X . Alors $H_*(\Lambda X, k)$ est l'algèbre de Hopf graduée engendrée par la coalgèbre $H_*(X, k)$ et soumise à la relation $a = 1$.

THÉORÈME 3. — Soient $\varepsilon : H_*(X, k) \rightarrow k$ la counité de $H_*(X, k)$ et $u \mapsto \bar{u}$ la projection canonique de $H_*(X, k)$ sur $\tilde{H}_*(X, k)$. Alors ρ_* est le morphisme d'algèbre défini par

$$\forall u \in H_*(X, k), \quad \rho_*(u) = \varepsilon(u)1 + \bar{u}.$$

Démonstration des trois théorèmes. — D'après la définition de ρ_{*p} , on a

$$\forall u \in H_*(X, k), \quad \forall p \in \mathbf{N}, \quad \rho_{*p}(u) = \begin{cases} 0 & \text{si } p \geq 2, \\ \bar{u} & \text{si } p = 1, \\ \varepsilon(u)1 & \text{si } p = 0. \end{cases}$$

On en déduit immédiatement les trois théorèmes en utilisant le fait que ρ_* est un isomorphisme d'algèbre.

4. HOMOLOGIE DES GROUPES SYMÉTRIQUES. — On supposera dorénavant que k est de caractéristique p non nulle.

4.1. Générateurs de l'algèbre $\bigoplus_n H_*(\mathfrak{S}_n, k^{(i)})$. — Soient $\Lambda \subset \mathfrak{S}_l$ et $\Gamma \subset \mathfrak{S}_m$ deux groupes de substitutions. On désignera par $\Gamma \wr \Lambda$ le produit en couronne de Γ et de Λ ([20] et [26]). $\Gamma \wr \Lambda$ est un sous-groupe de \mathfrak{S}_{lm} isomorphe au produit semi-direct de Γ par Λ^m . De plus, $H_*(\Gamma \wr \Lambda, k)$ est canoniquement isomorphe à $H_*(\Gamma, H_*(\Lambda, k)^m)$.

Si u est un élément de $H_j(\Gamma, k^{(i)})$ et v un élément de $H_i(\Lambda, k)$, on désignera par $u \wr v$ l'élément de $H_{m(i+j)}(\Gamma \wr \Lambda, k)$ représenté en homologie par $u' \otimes v^m$, u' étant un représentant de u .

Choisissons une fois pour toute un p -sous-groupe de Sylow Π de \mathfrak{S}_p , et un générateur t de Π . On définit les sous-groupes G_r de \mathfrak{S}_{p^r} par

$$\begin{aligned} G_0 &= 1, \\ G_r &= \Pi \wr G_{r-1}. \end{aligned}$$

G_r est un p -sous-groupe de Sylow de \mathfrak{S}_{p^r} [26].

Le générateur t de Π définit un isomorphisme f de $\mathbf{Z}/p \mathbf{Z}$ sur Π . On appellera e_i l'image par f_* du générateur canonique de $H_i(\mathbf{Z}/p \mathbf{Z}, k)$, et l'on définit les éléments $e(j_1, \dots, j_r)$ de $H_*(G_r, k)$, par récurrence par

$$e(j_1, \dots, j_r) = e_i \wr e(j_2, \dots, j_r),$$

avec

$$l = j_1 - (p-1)(j_2 + \dots + j_r)$$

et

$$e(\emptyset) = 1.$$

Comme toutes les substitutions de G_r sont paires si p est impair, $H_*(G_r, k)$ est égal à $H_*(G_r, k^{(i)})$. Soit $\sigma^{(i)}$ l'application canonique de $H_*(G_r, k)$ dans $H_*(\mathfrak{S}_{p^r}, k^{(i)})$. On posera

$$a^{(i)}(j_1, \dots, j_r) = \sigma^{(i)}(e(j_1, \dots, j_r)).$$

PROPOSITION 8. — *L'algèbre $\bigoplus_n H_*(\mathfrak{S}_n, k^{(i)})$ est engendrée par les éléments $a^{(i)}(J)$, J parcourant l'ensemble des suites finies d'éléments de \mathbf{N} .*

Démonstration. — Cette proposition est démontrée par Nakaoka [20] dans le cas où l'action sur $k^{(i)}$ est triviale, c'est-à-dire lorsque p est égal à 2 ou lorsque i est pair. Dans le cas contraire, on va procéder comme suit :

Soit A_n le sous-groupe des substitutions paires de \mathfrak{S}_n . On vérifie que le groupe G_r est inclus dans A_{p^r} et que, si f est l'application définissant la structure d'algèbre de $\bigoplus_n H_*(\mathfrak{S}_n, k^{(i)})$ (§ 2, prop. 4), f envoie $A_l \times A_m$ dans A_{l+m} . Il en résulte que $\bigoplus_n H_*(A_n, k)$ est une algèbre qui s'envoie dans $\bigoplus_n H_*(\mathfrak{S}_n, k^{(i)})$ par un morphisme d'algèbre. Ce morphisme est surjectif car l'indice de A_n dans \mathfrak{S}_n est premier à p . Si g désigne l'inclusion de G_r dans A_{p^r} , il suffit alors de vérifier que l'algèbre $\bigoplus_n H(A_n, k)$ est engendrée par les éléments $g_*(e(J))$, J parcourant l'ensemble des suites finies de \mathbf{N} , et ceci se démontre de façon similaire à la démonstration de Nakaoka.

4.2. Relation avec les puissances réduites. — Soient X un espace topologique et Γ un groupe de permutations de degré n . Si u est un élément de $H^q(X, k)$ et c un élément de $H_j(\Gamma, k^{(q)})$, on définit la puissance réduite u^n/c qui est un élément de $H^{nq-j}(X, k)$ [25]. On montre les deux lemmes [25] :

LEMME. — Soient a un élément de $H_i(\mathfrak{S}_l, k^{(a)})$, b un élément de $H_j(\mathfrak{S}_m, k^{(a)})$ et u un élément de $H^q(X, k)$. On a la formule

$$u^{l+m}/(a \cdot b) = (-1)^{j(i+lq)} u^l/a \cdot u^m/b,$$

le produit dans le lemme de droite étant le cup produit.

LEMME. — Soient Λ et Γ deux groupes de permutations de degrés respectifs l et m , tels que toutes les substitutions de Λ soient paires si p est impair. Alors, si u est un élément de $H^q(X, k)$, a un élément de $H_i(\Lambda, k) = H_i(\Lambda, k^{(q)})$ et b un élément de $H_j(\Gamma, k^{(q-l)})$, on a la formule

$$u^{lm}/(b \wr a) = (-1)^\varepsilon (u^l/a)^m/b,$$

avec

$$\varepsilon = \frac{m(m-1)}{2} i + mij + \frac{m(m-1)}{2} liq.$$

Si β est l'homomorphisme de Bockstein et \mathcal{P}^s la puissance de Steenrod de degré $2s(p-1)$ on pose

$$St^i = \beta^\varepsilon \mathcal{P}^s \quad \text{si } i = 2s(p-1) + \varepsilon \quad \text{avec } 0 \leq \varepsilon < 2(p-1).$$

On définit également les éléments c_n et ε_n de k par

$$c_n = \begin{cases} 1 & \text{si } p = 2, \\ \left(\frac{p-1}{2}\right)!^n (-1)^{[p-1/2][n(n+1)/2]} & \text{si } p \neq 2; \end{cases}$$

$$\varepsilon_n = \begin{cases} (-1)^{s+t} & \text{si } n = 2s(p-1) + t \quad \text{avec } t = 0 \text{ ou } 1, \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

PROPOSITION 9. — Soient u un élément de $H^q(X, k)$ et $J = (j_1, \dots, j_r)$ une suite d'entiers positifs ou nuls. On a la formule

$$u^{p^r}/a^{(q)}(J) = (-1)^a c_{q_1} \dots c_{q_r} \varepsilon_{i_1} \dots \varepsilon_{i_r} St^{i_1} \dots St^{i_r} u,$$

avec

$$i_t = qp^{r-t}(p-1) - j_t,$$

$$q_t = q + i_{t+1} + \dots + i_r = qp^{r-t} - (j_{t+1} + \dots + j_r),$$

$$a = \frac{p(p-1)}{2} (q+1)(j_2 + 2j_3 + \dots + (r-1)j_r) \\ + \frac{(j_1 + \dots + j_r)(j_1 + \dots + j_r + 1)}{2} + \frac{p(p-1)}{2} rq.$$

Démonstration. — Cette proposition se montre par récurrence sur r en utilisant le lemme précédent et la formule [25] :

$$u \in H^q(X, k), \quad j \in \mathbb{N} \Rightarrow u^p/e(j) = c_q \varepsilon_i St^i u \quad \text{avec } i = q(p-1) - j.$$

4.3. *L'algèbre* $\bigoplus_n H_*(\mathfrak{S}_n, k^{(i)})$. — Soit u_q le générateur canonique de $H^q(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}, q; k)$. Si i, j, q et n sont quatre entiers, q et i étant de même parité, on définit l'application F_q de $H_j(\mathfrak{S}_n, k^{(i)})$ dans $H^{nq-j}(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}, q; k)$ par

$$a \in H_j(\mathfrak{S}_n, k^{(i)}) \Rightarrow F_q(a) = (-1)^{[j(j+1)]/2} u_q^n / a.$$

F_q est alors une application de $\bigoplus_n H_*(\mathfrak{S}_n, k^{(i)})$ dans $H^*(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}, q; k)$.

PROPOSITION 10. — *Si j est strictement inférieur à q , l'application F_q de $H_j(\mathfrak{S}_n, k^{(i)})$ dans $H^*(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}, q; k)$ est injective.*

Démonstration. — Désignons par $SP^n(S^q)$ le n -ième produit symétrique de la sphère S^q et par u le générateur canonique de $H^q(SP^n(S^q), k)$. On définit l'application G de $H_j(\mathfrak{S}_n, k^{(i)})$ dans $H^{nq-j}(SP^n(S^q), k)$ par

$$a \in H_j(\mathfrak{S}_n, k^{(i)}) \Rightarrow G(a) = (-1)^{[j(j+1)]/2} u^n / a.$$

Si f est une application continue de $SP^n(S^q)$ dans $K(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}, q)$ telle que l'image réciproque de u_q par f soit égale à u , G est égal à $f^* \circ F_q$. Comme G est un isomorphisme si j est strictement inférieur à q d'après un théorème de Steenrod [27], F_q est injective si j est strictement inférieur à q .

Soient u et v deux entiers. On définit l'élément $X(u, v)$ de k par

$$p = 2 \Rightarrow X(u, v) = \begin{pmatrix} v-1 \\ u \end{pmatrix},$$

$$p \neq 2 \Rightarrow X(u, v) = \begin{cases} (-1)^{a-t'} \begin{pmatrix} (p-1)b-1+t'' \\ a-t' \end{pmatrix} & \text{si } \begin{cases} u = 2a(p-1)+t-t'p, \\ v = 2b(p-1)+t'', \end{cases} \\ \text{avec} & \begin{matrix} t, t', t'' \in \{0, 1\} \text{ et } t't'' = 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{matrix} \end{cases}$$

On a alors les relations d'Adem :

$$a < pb, \quad St^a St^b = \sum_t X(a - pb + pt, t) St^{a+t} St^{b-t}.$$

PROPOSITION 11. — *Soient (j_1, \dots, j_r) une suite finie d'entiers positifs ou nuls et s un élément de $\{1, \dots, r\}$. On a les relations suivantes :*

(R₁) *si j_s n'est congru ni à $i(p-1)$ ni à $i(p-1)-1$ modulo $2(p-1)$, on a*

$$a^{(i)}(j_1, \dots, j_r) = 0;$$

(R₂) *$j_1 < (p-1)(j_2 + \dots + j_r) \Rightarrow a^{(i)}(j_1, \dots, j_r) = 0;$*

(R₃) *$s < r, j_s > pj_{s+1}$*

$$\Rightarrow a^{(i)}(j_1, \dots, j_r)$$

$$= \sum_t (-1)^{bt} c_t X(pt - j_s + pj_{s+1}, t) a^{(i)}(j_1, \dots, j_s - t, j_{s+1} + t, \dots, j_r),$$

avec

$$b = \frac{p(p-1)}{2} (j_{s+1} + \dots + j_r);$$

$$(R_4) \quad j_1 = (p-1)(j_2 + \dots + j_r) \Rightarrow a^{(i)}(j_1, \dots, j_r) = a^{(i)}(j_2, \dots, j_r)^p.$$

Démonstration. — D'après la proposition 10, un élément u de $H_j(\mathfrak{S}_n, k^{(i)})$ est nul si et seulement si $F_q(u)$ est nul pour tout q de la parité de i . La relation (R_1) résulte alors du fait que St^i est nul si i n'est congru ni à 0 ni à 1 modulo $2(p-1)$, (R_2) résulte du fait que $St^i u$ est nul si i est strictement supérieur à $(p-1) \dim u$, (R_3) provient des relations d'Adem et (R_4) découle de la relation

$$i = (p-1) \dim u \Rightarrow St^i u = u^p.$$

Soit $J = (j_1, \dots, j_r)$ une suite finie d'entiers positifs ou nuls. On dira que J est i -admissible si l'on a les propriétés suivantes :

- (i) j_1, \dots, j_r sont congrus à $i(p-1)$ ou à $i(p-1)-1$ modulo $2(p-1)$;
- (ii) $j_1 \leq pj_2, \dots, j_{r-1} \leq pj_r$;
- (iii) $j_1 > (p-1)(j_2 + \dots + j_r)$.

THÉORÈME 4. — $\bigoplus_n H_*(\mathfrak{S}_n, k^{(i)})$ est la $k^{(i)}$ -algèbre commutative libre engendrée par les éléments $a^{(i)}(J)$, J parcourant l'ensemble des suites finies i -admissibles d'entiers positifs ou nuls.

Démonstration. — Il résulte immédiatement des propositions 8 et 11 que $\bigoplus_n H_*(\mathfrak{S}_n, k^{(i)})$ est engendrée par les éléments $a^{(i)}(J)$ avec J i -admissible. D'autre part, il est facile de vérifier que, si q est de la parité de i , $H^*(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, q; k)$ est la k -algèbre commutative libre engendrée par les éléments $F_q(a^{(i)}(J))$, J parcourant l'ensemble des suites i -admissibles (j_1, \dots, j_r) telles que

$$\forall t \in \{1, \dots, r\}, \quad j_t < qp^{r-t}(p-1).$$

On vérifie alors aisément le théorème.

5. DÉTERMINATION DE L'ALGÈBRE $\tilde{H}_*(\mathfrak{S}_*(X), k)$. — 5.1. *L'algèbre $\tilde{H}_*(\mathfrak{S}_*(X), k)$.* — Soient W un Π -module différentiel gradué libre acyclique et W_n des \mathfrak{S}_n -modules différentiels gradués libres acycliques. On désignera par f l'application composée

$$W \otimes (W_n \otimes \tilde{C}_*(X)^n)^p \rightarrow W \otimes W_n^p \otimes \tilde{C}_*(X)^{np} \rightarrow W_{np} \otimes \tilde{C}_*(X)^{np},$$

la première flèche étant induite par des transpositions et la deuxième par une application de $W \otimes W_n^p$ dans W_{np} compatible avec l'inclusion de $\Pi \subset \mathfrak{S}_n$ dans \mathfrak{S}_{np} .

Si j est un entier et u un élément de $H_*(\mathfrak{S}_n(X), k)$, on notera $e_j \wr u$ la classe d'homologie de $f(x \otimes u'^p)$ où x est un représentant de e_j et u' un représentant de u . On vérifie que $e_j \wr u$ ne dépend que de j et de u .

Si Γ est un sous-groupe de \mathfrak{S}_n formé de substitutions paires si p est différent de 2 et si σ est l'inclusion de Γ dans \mathfrak{S}_n et σ' l'inclusion de $\Pi \wr \Gamma$ dans \mathfrak{S}_{np} , on vérifie la formule suivante :

$$u \in H_q(X, k), \quad a \in H_i(\Gamma, k) \Rightarrow e_j \wr (\sigma_*(a) \wr u) = (-1)^{([p(p-1)]/2)nqi} \sigma'_*(e_j \wr a) \wr u.$$

Si u est un élément de $H_q(\mathfrak{S}_n(X), k)$ et j un entier positif ou nul, on posera par définition :

$$a(j) \star u = c_q e_i \wr u \quad \text{avec} \quad i = j - (p-1)q.$$

Enfin, on définit par récurrence les éléments $a(j_1) \star a(j_2) \star \dots \star a(j_r) \star u$ par

$$a(j_1) \star \dots \star a(j_r) \star u = a(j_1) \star [a(j_2) \star \dots \star a(j_r) \star u].$$

THÉORÈME 5. — $\tilde{H}_*(\mathfrak{S}_*(X), k)$ est la k -algèbre commutative engendrée par les éléments $a(j_1) \star \dots \star a(j_r) \star u$, (j_1, \dots, j_r) parcourant l'ensemble des suites finies d'entiers positifs ou nuls et u l'ensemble des éléments homogènes de $\tilde{H}_*(X, k)$, et soumise aux relations suivantes :

$$(R'_0) \quad a(j_1) \star \dots \star a(j_r) \star (u+v) = a(j_1) \star \dots \star a(j_r) \star u + a(j_1) \star \dots \star a(j_r) \star v;$$

$$(R'_1) \quad \text{si } j_s \text{ n'est congru ni à } 0 \text{ ni à } -1 \text{ modulo } 2(p-1), \text{ on a}$$

$$a(j_1) \star \dots \star a(j_r) \star u = 0;$$

$$(R'_2) \quad j_1 < (p-1)(j_2 + \dots + j_r + \dim u) \Rightarrow a(j_1) \star \dots \star a(j_r) \star u = 0;$$

$$(R'_3) \quad s < r, j_s < pj_{s+1}$$

$$\Rightarrow a(j_1) \star \dots \star a(j_r) \star u = \sum_t X(pt - j_s + pj_{s+1}, t) a(j_1) \star \dots \star a(j_s - t) \star a(j_{s+1} + t) \star \dots \star a(j_r) \star u;$$

$$(R'_4) \quad j_1 = (p-1)(j_2 + \dots + j_r + \dim u)$$

$$\Rightarrow a(j_1) \star \dots \star a(j_r) \star u = (-1)^{[j(j+1)]/2} [a(j_2) \star \dots \star a(j_r) \star u]^p,$$

avec

$$j = j_2 + \dots + j_r + \dim u.$$

Démonstration. — Pour montrer (R'_0) , il suffit de montrer que l'application $u \mapsto e_j \wr u$ de $\tilde{H}_q(\mathfrak{S}_n(X), k)$ dans $\tilde{H}_{pq+j}(\mathfrak{S}_{np}(X), k)$ est linéaire. Pour cela, désignons par K_* le complexe $W_n \otimes \tilde{C}_*(X)^n$ et choisissons deux cycles u et v de K_* .

Si P est une partie de $\{1, \dots, p\}$, posons

$$x(P) = x_1 \otimes x_2 \otimes \dots \otimes x_p \quad \text{avec} \quad x_i = \begin{cases} u & \text{si } i \in P, \\ v & \text{si } i \notin P. \end{cases}$$

On a alors

$$(u+v)^p = \sum_P x(P).$$

Or, il est clair que

$$t \cdot x(P) = x(t.P).$$

Si P est une partie propre de $\{1, \dots, p\}$ l'orbite de P sous l'action de Π a p éléments. Il existe donc un cycle w de K^p tel que

$$(u+v)^p = u^p + v^p + (1+t + \dots + t^{p-1})w,$$

et, si x est un représentant de e_j dans W , on a l'égalité suivante dans $W \otimes_{\Pi} K^p$:

$$x \otimes (u+v)^p = x \otimes u^p + x \otimes v^p + (1+t + \dots + t^{p-1})x \otimes w.$$

Comme $(1 + \dots + t^{p-1})x$ est un bord, il en résulte que l'application $u \mapsto e_j \wr u$ est linéaire, ce qui montre la relation (R'_0) .

On montre ensuite par récurrence la formule suivante :

$$a(j_1) \star \dots \star a(j_r) \star u = (-1)^b c_{q_1} \dots c_{q_r} a^{(q)}(i_1, \dots, i_r) \wr u,$$

avec

$$\begin{aligned} u &\in \tilde{H}_q(X, k), \\ i_t &= j_t - p^{r-t}(p-1)q, \\ q_t &= q + j_{t+1} + \dots + j_r, \\ b &= \frac{p(p-1)}{2} q(j_2 + 2j_3 + \dots + (r-1)j_r). \end{aligned}$$

Les formules (R'_1) , (R'_2) , (R'_3) et (R'_4) sont alors conséquences directes de la proposition 11.

Soit A_* la k -algèbre commutative engendrée par les éléments $a(j_1) \star \dots \star a(j_r) \star u$, (j_1, \dots, j_r) parcourant l'ensemble des suites finies d'entiers positifs ou nuls et u l'ensemble des éléments homogènes de $\tilde{H}_*(X, k)$, et soumise aux relations (R'_i) , $i = 0, 1, 2, 3, 4$. L'algèbre A_* s'envoie par un morphisme d'algèbre f dans $\tilde{H}_*(\mathfrak{S}_*(X), k)$. Choisissons une base homogène $\{u_i\}$ de $\tilde{H}_*(X, k)$, u_i étant de dimension d_i . D'après la proposition 5 et le théorème 4, $\tilde{H}_*(\mathfrak{S}_*(X), k)$ est la k -algèbre commutative libre engendrée par les éléments $a^{(d_i)}(i_1, \dots, i_r) \wr u_i$ (i_1, \dots, i_r) parcourant l'ensemble des suites d_i -admissibles d'entiers positifs ou nuls. Il en résulte que $\tilde{H}_*(\mathfrak{S}_*(X), k)$ est la k -algèbre commutative libre engendrée par les éléments $a(j_1) \star \dots \star a(j_r) \star u_i$ avec

$$\begin{aligned} j_t &\equiv 0 \quad \text{ou} \quad -1 \pmod{2(p-1)}, \\ j_1 &\leq pj_2, \dots, j_{r-1} \leq pj_r, \\ j_1 &> (p-1)(j_2 + \dots + j_r + d_i). \end{aligned}$$

Il est alors clair que f est un isomorphisme et le théorème est démontré.

5.2. *Le produit extérieur de $\bigoplus_{n>0} H_*(\mathfrak{S}_n, k) \otimes \tilde{H}_*(\mathfrak{S}_*(X), k)$ dans $\tilde{H}_*(\mathfrak{S}_*(X), k)$.* —

Choisissons comme Π -module différentiel gradué libre acyclique le module W librement engendré par les éléments x_i de degré i , $i \geq 0$, le bord étant donné par la formule

$$dx_i = T_i x_{i-1} \quad \text{avec} \quad T_i = \begin{cases} 1+t + \dots + t^{p-1} & \text{si } i \equiv 0 \pmod{2}, \\ 1-t & \text{si } i \equiv 1 \pmod{2}. \end{cases}$$

LEMME. — Soient K_* le k -complexe de chaînes d'un complexe simplicial et φ un morphisme de complexe de $W \otimes K_*$ dans K_*^p , Π -équivariant, qui soit une approximation de la diagonale. Alors, si u est un élément de $H_q(K_*)$ représenté par un cycle u' , il existe des cycles homogènes v_j de K_* et des éléments homogènes w_j de K_*^p tels que, pour tout entier j positif ou nul, on ait

$$\varphi(x_j \otimes u') = v_j^p + T_j w_j + dw_{j+1}.$$

De plus, si St_i est l'opération homologique duale de St^i , on a

$$j+q \not\equiv 0 \pmod{p} \Rightarrow v_j = 0,$$

$$j+q = p(q-i) \Rightarrow \text{la classe d'homologie de } v_j \text{ est égale à } c_{q-i} \varepsilon_i St_i u.$$

Démonstration. — Soit W' le Π -module différentiel gradué libre engendré en dimension $-i$ par y_i , la différentielle étant donnée par

$$dy_i = (-1)^i \bar{T}_{i+1} y_{i+1},$$

\bar{T}_{i+1} étant le conjugué de T_{i+1} .

On définit l'application linéaire ψ de K_* dans $W' \otimes_{\Pi} K_*^p$ par

$$\psi(u) = \sum_i y_i \otimes \varphi(x_i \otimes u)$$

et l'on vérifie que ψ est un morphisme de complexes.

Comme $H_*(W' \otimes_{\Pi} K_*^p)$ est isomorphe à $H_*(W' \otimes_{\Pi} H_*(K_*^p))$, $H_*(W' \otimes_{\Pi} K_*^p)$ est engendré par les classes d'homologie d'éléments de la forme

$$y_i \otimes v^p \quad \text{avec} \quad dv = 0 \quad \text{ou} \quad y_0 \otimes T_0 v.$$

Si u' est un cycle de K_* , $\psi(u')$ est un cycle de $W' \otimes K^p$. Il en résulte que $\psi(u')$ est une somme d'éléments de la forme $y_i \otimes v^p$ avec $dv = 0$, $y_0 \otimes T_0 v$ et $d(y_i \otimes w)$. On en déduit alors aisément la première partie du lemme par identification et la deuxième partie résulte de la définition de St^i .

Comme le produit extérieur de $\Lambda S^0 \wedge \Lambda X$ dans ΛX envoie $\Lambda_n S^0 \wedge \Lambda_m X$ dans $\Lambda_{nm} X$, on en déduit, si n est strictement positif, une application notée \times et appelée produit extérieur de $\mathfrak{S}_n(S^0) \wedge \mathfrak{S}_*(X)$ dans $\mathfrak{S}_*(X)$. On notera également \times l'application induite en homologie.

PROPOSITION 12. — Soient u un élément de $\tilde{H}_*(\mathfrak{S}_*(X), k)$ et i un entier positif ou nul. On a les formules

$$p(i+1) \equiv 0 \pmod{2} \Rightarrow a(i) \times u = \sum_t \varepsilon_t a(i+t) \star St_t u,$$

$$p(i+1) \equiv 1 \pmod{2} \Rightarrow a(i) \times u = \sum_t \varepsilon_{2t} a(i+2t) \star St_{2t} u.$$

Démonstration. — Soient W_n des \mathfrak{S}_n -modules différentiels gradués libres acycliques. On vérifie que le produit extérieur de $\mathfrak{S}_p(S^0) \wedge \mathfrak{S}_n(X)$ dans $\mathfrak{S}_{np}(X)$ est induit par une appli-

cation $f \in \mathfrak{S}_p \times \mathfrak{S}_n$ -équivariante de $W_p \otimes W_n \otimes \tilde{C}_*(X)^n$ dans $W_{np} \otimes \tilde{C}_*(X)^{np}$ qui est une approximation de la diagonale. Soient $\Delta' : W_p \rightarrow W_p \otimes W_p$ un morphisme de complexes compatible avec la diagonale de \mathfrak{S}_p , $\varphi' : W_p \otimes W_n \otimes \tilde{C}_*(X)^n \rightarrow (W_n \otimes \tilde{C}_*(X)^n)^p$ un morphisme de complexes $\mathfrak{S}_p \times \mathfrak{S}_n$ -équivariant qui est une approximation de la diagonale de X et $g : W_p \otimes W_n^p \rightarrow W_{np}$ un morphisme de complexes compatible avec l'inclusion de $\mathfrak{S}_p \wr \mathfrak{S}_n$ dans \mathfrak{S}_{np} .

On désignera par f' l'application composée

$$\begin{array}{ccc} W_p \otimes W_n \otimes \tilde{C}_*(X)^n & \xrightarrow{\Delta' \otimes 1} & W_p \otimes W_p \otimes W_n \otimes \tilde{C}_*(X)^n \xrightarrow{1 \otimes \varphi'} W_p \otimes (W_n \otimes \tilde{C}_*(X)^n)^p \\ & \searrow^{1 \otimes T} & \searrow^{g \otimes 1} \\ & & W_p \otimes W_n^p \otimes \tilde{C}_*(X)^{np} \xrightarrow{g \otimes 1} W_{np} \otimes \tilde{C}_*(X)^{np}, \end{array}$$

où T est induit par les transpositions.

D'après le théorème des modèles acycliques, on vérifie que f' est $\mathfrak{S}_p \times \mathfrak{S}_n$ -homotope à f .

Soient Δ un morphisme de complexe de W dans $W \otimes W$ compatible avec la diagonale de Π , h un morphisme de complexes de W dans W_p compatible avec l'inclusion de Π dans \mathfrak{S}_p et φ une approximation de la diagonale de $W \otimes W_n \otimes \tilde{C}_*(X)^n$ dans $(W_n \otimes \tilde{C}_*(X)^n)^p$, $\Pi \times \mathfrak{S}_n$ -équivariante. On a le diagramme suivant, $\Pi \times \mathfrak{S}_n$ -homotopiquement commutatif :

$$\begin{array}{ccccccc} W \otimes W_n \otimes \tilde{C}_*(X)^n & \xrightarrow{\Delta \otimes 1} & W \otimes W \otimes W_n \otimes \tilde{C}_*(X)^n & \xrightarrow{1 \otimes \varphi} & W \otimes (W_n \otimes \tilde{C}_*(X)^n)^p & \xrightarrow{1 \otimes T} & W \otimes W_n^p \otimes \tilde{C}_*(X)^{np} \\ & \searrow^{h \otimes 1} & & & & & \swarrow^{g \otimes 1 \circ h \otimes 1} \\ & & W_p \otimes W_n \otimes \tilde{C}_*(X)^n & \xrightarrow{f'} & W_{np} \otimes \tilde{C}_*(X)^{np} & & \end{array}$$

Il en résulte que si u est un élément de $\tilde{H}_*(\mathfrak{S}_*(X), k)$ représenté par un élément u' de $W_n \otimes \tilde{C}_*(X)^n$, et i un entier, $a(i) \times u$ est la classe d'homologie de

$$g \otimes 1 \circ h \otimes 1 \circ 1 \otimes T \circ 1 \otimes \varphi \circ \Delta \otimes 1 (x_i \otimes u')$$

dans $W_{np} \otimes_{\mathfrak{S}_{np}} \tilde{C}_*(X)^{np}$.

On choisira comme application diagonale Δ l'application suivante :

$$\begin{aligned} \Delta x_{2i} &= \sum_j x_{2j} \otimes x_{2i-2j} - \sum_j \sum_{0 \leq k < l < p} t^k x_{2j+1} \otimes t^l x_{2i-2j-1}, \\ \Delta x_{2i+1} &= \sum_j x_{2j} \otimes x_{2i-2j+1} + \sum_j x_{2j+1} \otimes t x_{2i-2j}. \end{aligned}$$

Soit K_* le complexe $W_n \otimes_{\mathfrak{S}_n} \tilde{C}_*(X)^n$. D'après le lemme, il existe des cycles homogènes v_j de K_* et des éléments homogènes w_j de K_*^p tels que

$$\forall j \geq 0, \quad \varphi(x_j \otimes u') = v_j^p + T_j w_j + d w_{j+1}.$$

On vérifie alors la formule suivante dans $W \otimes_{\Pi} K_*^p$:

$$1 \otimes \varphi \circ \Delta \otimes 1(x_i \otimes u') = \sum_{0 \leq j \leq i} x_j \otimes (a_{ij} v_{i-j}^p + T_{ij} w_{i-j} + T'_{ij} dw_{i-j+1}),$$

avec

$$a_{ij} = \begin{cases} \frac{p(p-1)}{2} & \text{si } i \equiv 0, j \equiv 1 \pmod{2}, \\ 1 & \text{sinon;} \end{cases}$$

$$T_{ij} = \begin{cases} T_1 & \text{si } i \equiv 1, j \equiv 0 \pmod{2}, \\ T_0 & \text{sinon;} \end{cases}$$

$$T'_{ij} = \begin{cases} -(t + 2t^2 + \dots + (p-1)t^{p-1}) & \text{si } i \equiv 0, j \equiv 1 \pmod{2}, \\ t & \text{si } i \equiv 1, j \equiv 1 \pmod{2}, \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Soit

$$1 \otimes \varphi \circ \Delta \otimes 1(x_i \otimes u') = \sum_{0 \leq j \leq i} (x_j \otimes a_{ij} v_{i-j}^p + (-1)^j d(x_j \otimes T'_{ij} w_{i-j+1})).$$

On vérifie alors aisément la formule

$$a(i) \times u = \sum_j c_{q-j} \varepsilon_j a_{i+j} e_{i+p_j-(p-1)_q} \wr St_j u,$$

ce qui entraîne directement la proposition.

Soit A_p l'algèbre de Hopf graduée des opérations homologiques stables modulo p ; A_p est engendrée par les opérations St_i de degré $-i$. On désignera par P_* l'élément de A_p défini par

$$P_* = \begin{cases} \sum_i St_i & \text{si } p = 2, \\ \sum_i (-1)^i St_{2i(p-1)} & \text{si } p \neq 2. \end{cases}$$

P_* est un élément inversible de A_p et l'on désignera par \bar{P}_* son inverse et par \bar{P}_i la composante de degré $-i$ de \bar{P} .

PROPOSITION 13. — Soient u un élément de $\tilde{H}_*(\mathfrak{S}_*(X), k)$ et i un entier positif ou nul. On a les formules

$$a(i) \times u = \begin{cases} \sum_t a(i+t) \star P_t u & \text{si } pi \equiv 0 \pmod{2}, \\ \sum_t a(i+t) \star (P_t u - P_{t-1} \beta u) & \text{si } pi \equiv 1 \pmod{2}; \end{cases}$$

$$a(i) \star u = \begin{cases} \sum_t a(i+t) \times \bar{P}_t u & \text{si } pi \equiv 0 \pmod{2}, \\ \sum_t a(i+t) \times (\bar{P}_t u + \beta \bar{P}_{t-1} u) & \text{si } pi \equiv 1 \pmod{2}. \end{cases}$$

Démonstration. — C'est une conséquence triviale de la proposition 12.

Remarque. — La structure de A_p -module de $H_*(\mathfrak{S}_p, k)$ est bien connue, elle se détermine en fonction du A_p -module $H_*(\Pi, k)$, et le produit extérieur est distributif, *via* la diagonale, par rapport au produit \cdot . Ces propriétés ainsi que la proposition 13 permettent de déterminer complètement le produit extérieur de $\bigoplus_{n>0} \tilde{H}_*(\mathfrak{S}_n(S^0), k) \otimes \tilde{H}_*(\mathfrak{S}^*(X), k)$ dans $\tilde{H}_*(\mathfrak{S}_*(X), k)$ en fonction de la structure de coalgèbre et de A_p -module de $\tilde{H}_*(X, k)$, ainsi que la structure algébrique complète de $H_*(\Lambda S^0, k)$ canoniquement isomorphe à $\tilde{H}_*(\mathfrak{S}_*(S^0), k)$.

6. DÉTERMINATION DE L'ALGÈBRE $H_*(\Lambda X, k)$. — Soit \hat{X} l'espace topologique X pointé par un point extérieur. L'espace $\Lambda \hat{X}$ est alors la somme topologique des espaces $\Lambda_n \hat{X} - \Lambda_{n-1} \hat{X}$. Si f est l'application de $\Lambda \hat{X}$ dans $\mathfrak{S}_*(\hat{X})$ qui, sur $\Lambda_n \hat{X} - \Lambda_{n-1} \hat{X}$ est égale à la projection canonique de $\Lambda_n \hat{X}$ sur $\mathfrak{S}_n(\hat{X})$, on vérifie que f est une équivalence d'homotopie de $\Lambda \hat{X}$ sur le complémentaire du point base dans $\mathfrak{S}_*(\hat{X})$, et induit un isomorphisme d'algèbre de Hopf de $H_*(\Lambda \hat{X}, k)$ sur $\tilde{H}_*(\mathfrak{S}_*(\hat{X}), k)$ compatible avec le produit extérieur.

On a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} H_*(\Lambda \hat{X}, k) & \xrightarrow{\pi_*} & H_*(\Lambda X, k) \\ \downarrow \hat{\rho}_* & & \downarrow \rho_* \\ \tilde{H}_*(\mathfrak{S}_*(\hat{X}), k) & \xrightarrow{\pi'_*} & \tilde{H}_*(\mathfrak{S}_*(X), k) \end{array}$$

où les applications horizontales sont induites par la projection canonique de \hat{X} sur X .

On vérifie que π'_* est surjectif. Comme ρ_* et $\hat{\rho}_*$ sont des isomorphismes, il en résulte que π_* est surjectif.

THÉORÈME 6. — Soit a l'élément de $H_0(X, k)$ induit par le point base de X . Alors $H_*(\Lambda X, k)$ est le quotient de l'algèbre de Hopf $\tilde{H}_*(\mathfrak{S}_*(\hat{X}), k)$ par les relations suivantes :

- (i) $a = 1$;
- (ii) pour toute suite (i_1, \dots, i_r) d'entiers positifs ou nuls :

$$i_r \neq 0 \Rightarrow a(i_1) \star \dots \star a(i_r) \star a = 0.$$

De plus le produit extérieur dans $H_*(\Lambda X, k)$ est induit par le produit extérieur dans $\tilde{H}_*(\mathfrak{S}_*(\hat{X}), k)$.

Démonstration. — La relation (i) est évidente.

On vérifie que le sous-espace de $H_*(\Lambda \hat{X}, k)$ engendré par les éléments

$$a(i_1) \star \dots \star a(i_r) \star a \quad \text{avec } i_r \neq 0$$

est égal au sous-espace engendré par les éléments

$$a(i_1) \times \dots \times a(i_r) \times a \quad \text{avec } i_r \neq 0.$$

La relation (ii) est alors conséquence du fait que

$$i \neq 0 \Rightarrow \pi_*(a(i) \times a) = a(i) \times 1 = 0,$$

ce que l'on démontre de la façon suivante :

On a

$$a(i) \times 1 = a(i) \times 1^p.$$

Comme le produit \times est distributif par rapport au produit \cdot , on vérifie que

$$a(i) \times 1^p = \begin{cases} (a(j) \times 1)^p & \text{si } i = pj, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

ce qui entraîne que $a(i) \times 1$ est nul si i est strictement positif.

Soit A_* l'algèbre engendrée par $H_*(\Lambda \hat{X}, k)$ et soumise aux relations (i) et (ii). On vérifie que A_* et $\tilde{H}_*(\mathfrak{S}_*(X), k)$ sont deux algèbres isomorphes. Si X est fini, π_* induit alors un isomorphisme d'algèbre de A_* sur $H_*(\Lambda X, k)$, et l'on en déduit le théorème pour X quelconque, par functorialité.

7. L'ISOMORPHISME ρ_* DE $H_*(\Lambda X, k)$ SUR $H_*(\mathfrak{S}_*(X), k)$. — 7.1. Étude de ρ_{*1} .

PROPOSITION 14. — Soient X et Y deux C. W. complexes et f un revêtement fini de Y sur X . Alors, si φ est une application continue de X dans $\Lambda \hat{Y}$ classifiant l'étalement (Y, f, Id_Y) de type \hat{Y} dans \hat{X} , \hat{X} et \hat{Y} étant les espaces X et Y pointés par des points extérieurs, l'application $\rho_{*1} \circ \varphi_*$ de $H_*(X, k)$ dans $H_*(Y, k)$ est égale à l'application de transfert du revêtement f .

Démonstration. — Désignons par T l'application $\rho_{*1} \circ \varphi_*$ et par T' l'application de transfert; T et T' sont fonctoriels, et l'on peut même définir T et T' de $H_*(X, A, k)$ dans $H_*(Y, B, k)$, A étant un sous-complexe de X et B le complexe $f^{-1}(A)$. Pour démontrer la proposition, il suffit de le faire lorsque X et Y sont finis, ce que l'on supposera.

Soit r un entier. On vérifie que les deux diagrammes suivants sont commutatifs :

$$\begin{array}{ccc} H_*(Y, k) & \xrightarrow{\Sigma^r} & H_*(Y \times I^r, Y \times \partial I^r, k) & H_*(Y, k) & \xrightarrow{\Sigma^r} & H_*(Y \times I^r, Y \times \partial I^r, k) \\ \uparrow T & & \uparrow T & \uparrow T' & & \uparrow T' \\ H_*(X, k) & \xrightarrow{\Sigma^r} & H_*(X \times I^r, X \times \partial I^r, k) & H_*(X, k) & \xrightarrow{\Sigma^r} & H_*(X \times I^r, X \times \partial I^r, k) \end{array}$$

On procède alors comme au théorème 6 (III, 3.4). On montre que pour r assez grand, l'étalement $(Y \times I^r, f \times \text{Id}, \text{Id})$ de type $Y \times I^r / Y \times \partial I^r$ dans $X \times I^r / X \times \partial I^r$ est cobordant à un plongement et que, dans ce cas, les applications T et T' de $H_*(X \times I^r, X \times \partial I^r, k)$ dans $H_*(Y \times I^r, Y \times \partial I^r, k)$ sont égales. Il en résulte que les applications T et T' sont égales dans tous les cas, ce qui démontre la proposition.

7.2. Détermination de l'isomorphisme ρ_* . — L'application ρ_* est un isomorphisme d'algèbre de $H_*(\Lambda X, k)$ dans $\tilde{H}_*(\mathfrak{S}_*(X), k)$ que nous allons déterminer. Il suffira pour cela de calculer les éléments $\rho_*(a(i_1) \times \dots \times a(i_r) \times u)$, i_1, \dots, i_r étant des entiers positifs ou nuls et u un élément de $H_*(X, k)$.

Soit r un entier positif. On choisira une numération de $\{1, \dots, p\}^r$, ce qui définit une action de Π^r sur $\{1, \dots, p^r\}$ et une application continue σ de $K(\Pi^r, 1)$ dans le sous-espace $K(\mathfrak{S}_{p^r}, 1)$ de ΛS^0 . On désignera par \hat{X} l'espace X pointé par un point extérieur.

On vérifie qu'on a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccc} E \times X & \xrightarrow{h} & K & \xrightarrow{f} & \mathfrak{S}_n(\hat{X}) \xrightarrow{\mathfrak{S}_n(\pi)} \mathfrak{S}_n(X) \\ \downarrow \alpha \times 1 & & \downarrow g & \downarrow \gamma & \\ K(\Pi^r, 1) \times X & \xrightarrow{g} & \Lambda \hat{X} & \xrightarrow{\pi} & \Lambda X \end{array}$$

où (K, γ, f) est l'étalement de type $\mathfrak{S}_n(\hat{X})$ dans $\Lambda \hat{X}$ définissant l'application φ_n , g le produit extérieur de σ et de l'inclusion de X dans $\Lambda \hat{X}$, π la projection canonique de \hat{X} sur X et $\alpha : E \rightarrow K(\Pi^r, 1)$ le revêtement défini par l'action de Π^r sur l'ensemble des parties de $\{1, \dots, p^r\}$ de cardinal n .

Si i_1, \dots, i_r sont des entiers positifs ou nuls et u un élément de $H_*(X, k)$, on vérifie alors la formule suivante :

$$\rho_{*n}(a(i_1) \times \dots \times a(i_r) \times u) = \mathfrak{S}_n(\pi)_* \circ f_* \circ h_*(T(e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_r}) \otimes u),$$

où T est l'application de transfert du revêtement α .

Soient F une composante connexe de E définie par un sous-groupe H de Π^r , β la restriction de α à F et T' le transfert de $H_*(K(\Pi^r, 1), k)$ dans $H_*(F, k)$. Si H est distinct de Π^r , son indice est divisible par p et $\beta_* \circ T'$ est nul. Comme H est un facteur direct de Π^r , β_* est injectif et donc T' est nul.

Si n est différent de 0 et de p^r on vérifie qu'il n'y a pas de sous-revêtement trivial dans E et donc T est nul. Il en résulte dans ce cas :

$$\rho_{*n}(a(i_1) \times \dots \times a(i_r) \times u) = 0.$$

Si n est égal à 0 ou à p^r , E est le revêtement trivial de $K(\Pi^r, 1)$, et l'on vérifie les formules suivantes :

$$\rho_{*0}(a(i_1) \times \dots \times a(i_r) \times u) = \begin{cases} 0 & \text{si } i_1 + \dots + i_r \neq 0, \\ \varepsilon(u) 1 & \text{si } i_1 + \dots + i_r = 0; \end{cases}$$

$$\rho_{*p^r}(a(i_1) \times \dots \times a(i_r) \times u) = a(i_1) \times \dots \times a(i_r) \times \bar{u}.$$

ε étant la counité de $H_*(X, k)$ et $u \mapsto \bar{u}$ la projection canonique de $H_*(X, k)$ sur $\tilde{H}_*(X, k)$. On a donc le théorème suivant :

THÉORÈME 7. — Soit X un espace de $C. W^r$. Alors, si ε est la counité de $H_*(X, k)$ et $u \mapsto \bar{u}$ la projection canonique de $H_*(X, k)$ sur $\tilde{H}_*(X, k)$, l'isomorphisme d'algèbre ρ_*

de $H_*(\Lambda X, k)$ sur $\tilde{H}_*(\mathfrak{S}_*(X), k)$ est caractérisé par les égalités (i) et (ii) ou (i) et (iii) suivantes :

- (i) $\forall u \in H_*(X, k), \rho_*(u) = \bar{u} + \varepsilon(u) 1$;
- (ii) $\forall u \in H_*(X, k), i_1 + \dots + i_r > 0 \Rightarrow \rho_*(a(i_1) \times \dots \times a(i_r) \times u) = a(i_1) \times \dots \times a(i_r) \times \bar{u}$;
- (iii) $\forall u \in H_*(X, k), i_1 + \dots + i_r > 0 \Rightarrow \rho_*(a(i_1) \star \dots \star a(i_r) \star u) = a(i_1) \star \dots \star a(i_r) \star \bar{u}$.

Démonstration. — Les égalités (i) et (ii) viennent d'être démontrées et les égalités (iii) s'en déduisent immédiatement grâce aux formules de la proposition 13.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] J. ADEM, *The relations on Steenrod powers of cohomology classes. Algebraic Geometry and Topology*, Princeton University Press, 1956, p. 191-238.
- [2] M. F. ATIYAH, *Immersions and embeddings of manifolds (Topology, vol. 1, 1961, p. 125-132)*.
- [3] H. CARTAN, *Espaces avec groupes d'opérateurs (Séminaire de topologie algébrique de l'École Normale Sup., Paris, 1951)*.
- [4] H. CARTAN et S. EILENBERG, *Homological algebra*, Princeton University Press, 1956.
- [5] A. DOLD, *Homology of symmetric products and other functors of complexes (Ann. of Math., vol. 68, 1958, p. 54-80)*.
- [6] A. DOLD, *Sur les opérations de Steenrod (Colloque international du C. N. R. S., Topologie algébrique et géométrie différentielle, Lille, 1959)*.
- [7] A. DOLD, *Relations between ordinary and extraordinary cohomology (Notes, Aarhus Colloquium on Algebraic Topology, Aarhus, 1962)*.
- [8] S. EILENBERG et S. MACLANE, *Acyclic models (Amer. J. Math., vol. 15, 1953, p. 189-199)*.
- [9] S. EILENBERG et N. E. STEENROD, *Foundations of Algebraic Topology*, Princeton Math. ser., n° 15.
- [10] S. EILENBERG et J. ZILBER, *On products on complexes (Amer. J. Math., vol. 15, 1953, p. 200-204)*.
- [11] A. GRAMAIN, *Sur les immersions de codimension 1 qui sont des bords (Thèse, Faculté des Sciences d'Orsay, 1969)*.
- [12] A. HAEFLIGER, *Plongements différentiables de variétés dans variétés (Comm. Math. Helv., vol. 36, 1961, p. 47-82)*.
- [13] M. HIRSCH, *Immersions of manifolds (Trans. Amer. Math. Soc., vol. 93, 1959, p. 242-276)*.
- [14] W. C. HSIANG et C. T. C. WALL, *Orientability of manifolds for generalized homology theories (Trans. Amer. Math. Soc., vol. 118, 1965, p. 352-359)*.
- [15] A. LIULEVICIUS, *A theorem in homological algebra and stable homotopy of projective spaces (Trans. Amer. Math. Soc., vol. 109, 1963, p. 540-552)*.
- [16] J. W. MILNOR, *On the immersion of n -manifolds in $(n+1)$ -space (Comm. Math. Helv., vol. 30, 1956, p. 275-284)*.
- [17] J. W. MILNOR, *The Steenrod algebra and its dual (Ann. of Math., vol. 67, 1958, p. 150-171)*.
- [18] J. W. MILNOR, *On spaces having the homotopy type of a CW-complex (Trans. Amer. Math. Soc., vol. 90, 1959, p. 272-280)*.
- [19] M. NAKAOKA, *Cohomology mod p of symmetric products of spheres (J. Inst. Polyt., Osaka City University, vol. 10, 1959, p. 67-89)*.
- [20] M. NAKAOKA, *Homology of the infinite symmetric group (Ann. of Math., vol. 73, 1961, p. 229-257)*.
- [21] V. POENARU, *Sur la théorie des immersions (Topology, vol. 1, 1962, p. 81-100)*.
- [22] L. SIEBENMANN, *Le fibré tangent, fascicule II*, Centre de Mathématiques de l'École Polytechnique, Paris, 1969.
- [23] S. SMALE, *The classification of immersions of spheres in euclidian spaces (Ann. of Math., vol. 69, 1959, p. 327-344)*.
- [24] E. H. SPANIER, *Algebraic topology*, Mc Graw-Hill Book Company, New York, 1966.

- [25] N. E. STEENROD, *Homology groups of symmetric groups and reduced power operation. Cyclic reduced powers of cohomology classes* (*Proc. Nat. Acad. Sci., U. S. A.*, vol. 39, 1953, p. 213-223).
- [26] N. E. STEENROD, *Cohomology operations derived from the symmetric group* (*Comm. Math. Helv.*, vol. 31, 1957, p. 195-218).
- [27] N. E. STEENROD, *Cohomology operations and obstructions to extending continuous functions* (*Colloquium lecture notes*, Princeton University, 1957).
- [28] N. E. STEENROD et D. B. A. EPSTEIN, *Cohomology operations*, Princeton University Press, 1962.
- [29] R. E. STONG, *Cobordism of maps* (*Topology*, vol. 5, 1966, p. 245-258).
- [30] R. E. STONG, *Notes on cobordism theory*, Princeton University Press, 1968.
- [31] R. THOM, *Quelques propriétés globales des variétés différentiables* (*Comm. Math. Helv.*, vol. 28, 1954, p. 17-86).
- [32] R. THOM, *La classification des immersions* (*Séminaire Bourbaki*, n° 157, décembre 1957).
- [33] R. WELLS, *Cobordism groups of immersions* (*Topology*, vol. 5, 1966, p. 281-294).
- [34] G. W. WHITEHEAD, *Generalized homology theories* (*Trans. Amer. Math. Soc.*, vol. 102, 1962, p. 227-283).

(Manuscrit reçu le 18 octobre 1972,
révisé le 19 octobre 1973.)

Pierre VOGEL,
61, avenue Alexandre Goupil,
44700 Orvault.