ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

G. LASSALLE

Déploiement universel d'une application de codimension finie

Annales scientifiques de l'É.N.S. 4e série, tome 7, nº 2 (1974), p. 219-233
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1974_4_7_2_219_0>

Ann. scient. Éc. Norm. Sup.,
4e série, t. 7, 1974, p. 219 à 234.

DÉPLOIEMENT UNIVERSEL D'UNE APPLICATION DE CODIMENSION FINIE

PAR G. LASSALLE

Introduction

Soient X et Y deux variétés C^∞ de dimension finie, $\mathscr{X}$ (resp $\mathscr{Y}$) l'espace vectoriel réel des sections C^∞ du fibré TX (resp. TY) tangent à X (resp. Y), et $C^\infty(X, Y)$ l'ensemble des applications C^∞ de X dans Y muni de la topologie fine ([2], § 2). Pour toute $f \in C^\infty(X, Y)$, on considère l'espace vectoriel $\theta(f)$, tangent à f, des sections C^∞ du fibré $f^*(TY)$, ainsi que les applications linéaires t_f et ω_f à valeurs dans $\theta(f)$, définies respectivement sur $\mathscr{X}$ et $\mathscr{Y}$ par les formules :

$$t_f(\xi)(x) = d f(x)(\xi(x)), \qquad \omega_f(\eta)(x) = \eta(f(x)), \qquad x \in X, \quad \xi \in \mathscr{X}, \quad \eta \in \mathscr{Y}.$$

DÉFINITION. — On dit que $f \in C^\infty(X, Y)$ est de codimension finie si $\theta(f)/t_f(\mathscr{X})+\omega_f(\mathscr{Y})$ est de dimension finie; on appelle alors codimension de f l'entier égal à la dimension de $\theta(f)/t_f(\mathscr{X})+\omega_f(\mathscr{Y})$.

Le but de cette note est de donner une description de $C^\infty(X, Y)$ au voisinage d'une application f_0 de codimension finie, lorsque X est compacte. Le résultat est contenu dans le théorème 2 du paragraphe 3. Expliquons-le sommairement, en prenant $Y = \mathbf{R}^p$ pour simplifier : Soit $\mathscr{G}$ un supplémentaire de $t_{f_0}(\mathscr{X})+\omega_{f_0}(\mathscr{Y})$ dans $\theta(f_0)$, identifié à $\mathbf{R}^c$ par le choix d'une base $\zeta_1, \ldots, \zeta_c$, soit G l'action du groupe additif de $\mathscr{G}$ sur $C^\infty(X, Y)$ définie par la formule

$$G((t_1, \ldots, t_c), f) = f + \sum_{i=1}^{c} t_i \zeta_i,$$

et soit H l'action de $\mathrm{Diff}(X) \times \mathrm{Diff}(Y)$ sur $C^\infty(X, Y)$ définie par la formule

$$H((\varphi, \psi), f) = \psi \circ f \circ \overset{-1}{\varphi}.$$

Alors, le théorème 2 affirme que pour toute $f \in C^\infty(X, Y)$ assez proche de f_0, il existe deux points $g_1 = (t_{1,1}, \ldots, t_{1,c})$ et $g_2 = (t_{2,1}, \ldots, t_{2,c})$ de $\mathbf{R}^c$, deux difféomorphismes φ_1

et φ_2 de X, et deux difféomorphismes ψ_1 et ψ_2 de Y, dépendant continûment (et même un peu mieux) de f, et vérifiant

$$\psi_1 \circ f_0 \circ \overset{-1}{\varphi_1} + \sum_{i=1}^{c} t_{1,i}\zeta_i = \psi_2 \circ \left(f_0 + \sum_{i=1}^{c} t_{2,i}\zeta_i \right) \circ \overset{-1}{\varphi_2} = f.$$

L'idée de ce théorème est due à Sergeraert, qui l'a établi lorsque Y = **R**, en application d'un théorème de fonctions implicites de type Nash [3]. On peut en déduire les mêmes conséquences qu'en [3]; en particulier, l'application

$$(t_1, \ldots, t_c, x) \mapsto f_0(x) + \sum_{i=1}^{c} t_i \zeta_i(x)$$

de $\mathbf{R}^c \times X$ dans Y est un déploiement universel de f_0.

On suit ici la méthode utilisée par J. Mather dans l'étude des applications stables (c'est-à-dire de codimension 0) [2].

Le paragraphe 1 introduit une catégorie utile pour exprimer et démontrer le résultat. Les objets et les morphismes de cette catégorie qui serviront possèdent des propriétés analogues à celles des variétés et applications C^∞ (par exemple existence d'un fibré tangent, d'une différentielle, etc.), mais nous n'utiliserons pas systématiquement la terminologie consacrée, faute d'une théorie adéquate.

Au paragraphe 2 on déduit du théorème de division [1] le théorème 1, qui précise la proposition 1 du paragraphe 6 de [2]; en ce qu'il énonce une propriété concernant le fibré tangent à $C^\infty(X, Y)$ plutôt que ses sections : traitons $C^\infty(X, Y)$ comme une variété et $\mathcal{G}$ et $\operatorname{Diff}(X) \times \operatorname{Diff}(Y)$ comme deux groupes de Lie agissant différentiablement sur $C^\infty(X, Y)$ par G et H; l'espace tangent à $\operatorname{Diff}(X) \times \operatorname{Diff}(Y)$ en $\mathrm{id} \times \mathrm{id}$ est $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$. Le théorème 1 donne, pour toute $f \in C^\infty(X, Y)$ assez proche de f_0, un inverse à droite convenable pour l'application de $\mathcal{G} \times (\mathcal{X} \times \mathcal{Y})$ dans l'espace tangent en f à $C^\infty(X, Y)$:

$$(\gamma, \varepsilon) \mapsto dG(0, f)(\gamma) + dH(\mathrm{id} \times \mathrm{id}, f)(\varepsilon), \qquad \gamma \in \mathcal{G}, \quad \varepsilon \in \mathcal{X} \times \mathcal{Y}.$$

Enfin on achève la démonstration au paragraphe 3 à l'aide d'un système différentiel approprié : joignons f_0 à chaque application f assez proche par un arc C^∞ convenable $t \mapsto f(t)$ ($t \in [0, 1]$) et cherchons un arc C^∞ $t \mapsto (g(t), h(t))$ de $\mathcal{G} \times (\operatorname{Diff}(X) \times \operatorname{Diff}(Y))$ vérifiant l'une ou l'autre des conditions suivantes :

$$\begin{aligned} &(a) \quad G(g(t), f(t)) = H(h(t), f_0) \\ &\text{pour} \quad t \in [0, 1], \quad g(0) = 0, \quad h(0) = \mathrm{id} \times \mathrm{id}; \\ &(b) \quad G(g(t), f(t)) = H(h(t), G(g(0), f_0)) \\ &\text{pour} \quad t \in [0, 1], \quad g(1) = 0, \quad h(0) = \mathrm{id} \times \mathrm{id}. \end{aligned}$$

[car alors, (*a*) donne $\overset{-1}{g_1} = g(1)$, $(\varphi_1, \psi_1) = h(1)$, et (*b*) donne $g_2 = g(0)$, $(\varphi_2, \psi_2) = h(1)$].

Dans les deux cas, si R_a^* désigne la différentielle en a de la translation à droite par a dans $\mathcal{G}$ ou dans $\operatorname{Diff}(X) \times \operatorname{Diff}(Y)$, et si on pose pour $t \in [0, 1]$ et $g \in \mathcal{G}$:

$$\zeta(t, g) = dG(g, f(t))\left(\frac{df}{dt}\right), \qquad g \cdot f(t) = G(g, f(t)),$$

il suffit, pour réaliser la première égalité, que l'arc $t \mapsto (g(t), h(t))$ satisfasse l'équation différentielle :

$$\zeta(t, g) = -dG(0, g.f(t))\left(\overset{-1}{R_g^*}\left(\frac{dg}{dt}\right)\right) + dH(\mathrm{id}\times\mathrm{id}, g.f(t))\left(\overset{-1}{R_h^*}\left(\frac{dh}{dt}\right)\right).$$

Or, pour $t \in [0, 1]$ et g assez petit, $\zeta(t, g)$ est connu, et le théorème 1 donne deux vecteurs $\gamma(t, g)$ et $(\xi(t, g), \eta(t, g))$ tels que

$$\zeta(t, g) = -dG(0, g.f(t))(\gamma(t, g)) + dH(\mathrm{id}\times\mathrm{id}, g.f(t))(\xi(t, g), \eta(t, g)).$$

On considérera donc le système différentiel :

$$\frac{dg}{dt} = R_g^*(\gamma(t, g)), \qquad \frac{dh}{dt} = R_h^*(\xi(t, g), \eta(t, g)).$$

Dans le cas où Y n'est pas un espace euclidien $\mathbf{R}^p$, la présentation est compliquée par des constructions, triviales et d'ailleurs inutiles quand $Y = \mathbf{R}^p$, destinées à munir $C^\infty(X, Y)$ d'un germe de structure d'espace vectoriel au voisinage de f_0.

Toutes les variétés considérées sont C^∞, de dimension finie, paracompactes et, sauf indication contraire, sans bord. On utilise la topologie fine sur les espaces d'applications C^∞ considérés, renvoyant à [2], paragraphe 2 pour les démonstrations, et, si V et W sont deux variétés, on désigne par $C^\infty(V, W)$ l'ensemble des applications C^∞ de V dans W muni de la topologie fine.

1. Préliminaires

Nous désignerons par $\mathscr{C}$ la catégorie dont les objets sont les ensembles de la forme $C^\infty(V, W)$ et leurs sous-ensembles (où V et W sont des variétés), et dont les morphismes, appelés aussi applications C^∞, sont définis comme suit : quels que soient la variété U et l'ensemble E d'applications C^∞ d'une variété V dans une variété W, identifions l'ensemble $\mathscr{F}(U, E)$ des applications de U dans E à un sous-ensemble de l'ensemble $\mathscr{F}(U\times V, W)$ des applications de $U\times V$ dans W.

DÉFINITION. — Soit E_i $(i = 1, 2)$ un ensemble d'applications C^∞ d'une variété V_i dans une variété W_i. On dit qu'une application φ de E_1 dans E_2 est C^∞ si, pour toute variété U, la composition à gauche par φ envoie $C^\infty(U\times V_1, W_1) \cap \mathscr{F}(U, E_1)$ continûment dans $C^\infty(U\times V_2, W_2) \cap \mathscr{F}(U, E_2)$.

Si on identifie une variété W à l'ensemble de toutes les applications du point dans W, on voit que la catégorie $\mathscr{C}$ contient la catégorie des variétés et applications C^∞ comme sous-catégorie pleine ([2], § 2, prop. 2). Nous désignerons donc par $C^\infty(E_1, E_2)$ l'ensemble des morphismes de E_1 dans E_2 [ou simplement $C^\infty(E_1)$ si $E_2 = \mathbf{R}$].

Remarquons que :

1. Les ensembles E_i étant munis de la topologie fine, toute application C^∞ de E_1 dans E_2 est continue (d'après la définition appliquée avec pour U le point).

2. Si E_1 est une variété, $C^\infty(E_1, E_2) \subset C^\infty(E_1\times V_2, W_2) \cap \mathscr{F}(E_1, E_2)$.

3. En général, il n'y a pas de produits dans $\mathscr{C}$; cependant, si $V_1 = V_2 = V$, on peut prendre pour produit de E_1 et de E_2 le sous-ensemble de $C^\infty(V, W_1 \times W_2)$ qui s'identifie canoniquement à $E_1 \times E_2$.

Voici des exemples d'applications C^∞ qui interviendront :

1. Soit, avec les notations de l'introduction, $\Theta = \bigcup_{f \in \mathscr{C}^\infty(X, Y)} \theta(f) = C^\infty(X, TY)$. On peut considérer $C^\infty(X, Y)$ comme une variété, dont Θ est le fibré tangent : on précisera ceci au lemme 1, mais on voit déjà que la projection canonique p de Θ sur $C^\infty(X, Y)$ est C^∞ ([2], § 2, prop. 2). De la structure de $C^\infty(X)$-module de chaque espace vectoriel $\theta(f)$, on déduit une application C^∞ de $C^\infty(X) \times \Theta$ dans Θ ([2], § 2, prop. 2 et 3).

Pour tout ouvert F de $C^\infty(X, Y)$, on pose $\Theta_F = \overset{-1}{p}(F)$ et on appelle section du fibré tangent à F toute application C^∞ s de F dans Θ_F telle $p.s = \mathrm{id}$. L'ensemble $\Theta(F)$ des sections du fibré tangent à F est un $C^\infty(F, C^\infty(X))$-module.

Pour toute application C^∞ $t \mapsto f(t)$ d'un intervalle I de $\mathbf{R}$ dans $C^\infty(X, Y)$, et pour tout $t_0 \in I$, on définit l'élément $\partial f/\partial t\,|_{t=t_0}$ de $\theta(f(t_0))$ par la formule

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t}\bigg|_{t=t_0}\right)(x) = \frac{\partial \varphi}{\partial t}(t_0, x) \qquad [\text{où } \varphi \text{ est l'application } (t, x) \mapsto f(t)(x)].$$

2. Les applications t et ω à valeurs dans Θ, définies respectivement sur $C^\infty(X, Y) \times \mathscr{X}$ et $C^\infty(X, Y) \times \mathscr{Y}$ par les formules

$$t(f, \xi)(x) = d f(x)(\xi(x)), \qquad \omega(f, \eta)(x) = \eta(f(x)),$$
$$x \in X, \quad f \in C^\infty(X, Y), \quad \xi \in \mathscr{X}, \quad \eta \in \mathscr{Y},$$

sont continues et

(*a*) t est C^∞ ([2], § 2, prop. 6);

(*b*) pour toute application C^∞ φ_1 d'un objet E de $\mathscr{C}$ dans F, et pour toute application C^∞ φ_2 de E dans $\mathscr{Y}$, l'application $\omega \circ (\varphi_1, \varphi_2)$ de E dans Θ est C^∞ ([2], § 2, prop. 1, X étant compacte).

3. Le lemme qui suit, trivial lorsque Y est un espace euclidien $\mathbf{R}^s$, montre que Θ est un fibré localement trivial sur $C^\infty(X, Y)$.

LEMME 1. — *Pour toute* $f \in C^\infty(X, Y)$, *il existe un voisinage* F *de* f *et*

1. *Un homéomorphisme* Φ *de* F *sur un voisinage* E *de l'élément neutre* $O_f \in \theta(f)$ *et un homéomorphisme* $T\Phi$ *de* Θ_F *sur* $E \times \theta(f)$, C^∞ *ainsi que leurs inverses, tels que :*

(*a*) *le diagramme*

$$\begin{tikzcd} \Theta_F \arrow[r, "T\Phi"] \arrow[d, "p"'] & E \times \theta(f) \arrow[d] \\ F \arrow[r, "\Phi"] & E \end{tikzcd}$$

soit commutatif;

(*b*) $T\Phi$ *soit* $C^\infty(X)$-*linéaire sur chaque* $\theta(g)$ $(g \in F)$, *et égal à* $O_f \times \mathrm{id.}$ *sur* $\theta(f)$;

(*c*) *pour toute application* C^∞ $t \mapsto g(t)$ *d'un intervalle* I *de* **R** *dans* F, *on ait, quels que soient* $t_0 \in I$ *et* $x \in X$:

$$T\Phi\left(\left.\frac{\partial g}{\partial t}\right|_{t=t_0}\right)(x) = \left(\Phi(g(t))(x), \frac{d}{dt}(\Phi(g(t))(x))_{t=t_0}\right).$$

2. *Une suite* $m_1, \ldots, m_s$ *de sections du fibré tangent à* F *et une suite* $x_1, \ldots, x_s$ *d'applications* C^∞ *et* $C^\infty(X)$*-linéaires de* Θ_F *dans* $C^\infty(X)$, *vérifiant pour toute* $g \in F$ *et pour tout* $\xi \in \theta(g)$:

$$\xi = \sum_{i=1}^{s} x_i(\xi) . m_i(g).$$

Démonstration. — Munissons Y d'une métrique riemannienne; il existe un difféomorphisme $\eta \mapsto \delta(\eta) = (o(\eta), e(\eta))$ d'un voisinage $\mathscr{E}$ de la section nulle de TY sur un voisinage $\mathscr{U}$ de la diagonale de $Y \times Y$, tel que $o(\eta)$ soit la projection de η dans Y, et $e(\eta)$ la valeur pour $t = 1$ de la géodésique $t \mapsto \gamma(t)$ passant à l'instant $t = 0$ en $o(\eta)$ avec la vitesse η [4].

On peut prendre pour F l'ensemble des $g \in C^\infty(X, Y)$ tels que, pour tout $x \in X$, $(f(x), g(x))$ appartienne à $\mathscr{U}$, et pour Φ l'application définie par la formule

$$\Phi(g)(x) = \overset{-1}{\delta}(f(x), g(x)), \qquad x \in X, \quad g \in F;$$

Φ est un homéomorphisme, C^∞ ainsi que son inverse ([2], § 2, prop. 1), de F sur l'ensemble des sections C^∞ de $f^*(TY)$ prenant leurs valeurs dans $\mathscr{E}$.

Pour définir $T\Phi$, utilisons le diagramme commutatif d'applications C^∞ :

$$\begin{array}{ccc} TY \underset{Y}{\times} TY & \xrightarrow{\varepsilon} & T(TY) \\ {\scriptstyle p_1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle q} \\ TY & \xrightarrow{\mathrm{id}} & TY \end{array}$$

où p_1 est la première projection, q la projection canonique du fibré T (TY) tangent à TY, et ε l'application égale sur chaque produit $T_y Y \times T_y Y$ (identifié au fibré tangent à $T_y Y$) à l'application tangente à l'injection $T_y Y \to TY$; ε est un plongement de $TY \underset{Y}{\times} TY$ dans T (TY), dont l'image est égale à l'image réciproque de la section nulle de TY par l'application tangente à la projection o de TY sur Y. Identifiant $TY \underset{Y}{\times} TY$ à son image, on réalise les conditions (*a*), (*b*) et (*c*) en définissant $T\Phi$ par la formule

$$T\Phi(\xi)(x) = T\overset{-1}{\delta}(O_f(x), \xi(x)), \qquad x \in X, \quad \xi \in \Theta_F$$

(qui, pour tout x et tout ξ donne un élément de $TY \underset{Y}{\times} TY$ appartenant à $\mathscr{E} \times T_{f(x)} Y$).

Supposons enfin Y plongée dans un espace euclidien $\mathbf{R}^s$; soit e_i ($i = 1, \ldots, s$) la section C^∞ de TY dont la valeur en $y \in Y$ est la projection orthogonale du i-ième vecteur de la base canonique de $\mathbf{R}^s$ sur $T_y Y$. Définissons m_i et x_i par les formules $m_i(g) = \omega(g, e_i)$, $x_i(\xi)(x) = i$-ième coordonnée de $\xi(x)$ sur la base canonique de $\mathbf{R}^s$.

4. Rappelons le théorème de division ([2], § 4). Soient P une variété et d un entier $\geqq 0$. Pour toute application $u=(u_1, \ldots, u_d) \in C^\infty(P, \mathbf{R}^d)$, P_u désigne la fonction de $C^\infty(\mathbf{R}\times P)$:

$$(t, y) \mapsto t^d + \sum_{i=1}^{d} u_i(y)\, t^{d-i} \qquad (t \in \mathbf{R},\ y \in P).$$

THÉORÈME DE DIVISION. — *Il existe un voisinage* D *de* $C^\infty(P, \mathbf{R}^d)\times\{0\}$ *dans* $C^\infty(P, \mathbf{R}^d)\times C^\infty(\mathbf{R}\times P)$, *une application* Q *de* $C^\infty(\mathbf{R}\times P)\times D$ *dans* $C^\infty(\mathbf{R}\times P)$ *et une suite* $R_1, \ldots, R_d$ *d'applications de* $C^\infty(\mathbf{R}\times P)\times D$ *dans* $C^\infty(P)$ *vérifiant, pour toute variété compacte* N *et pour toute sous-variété* (*éventuellement à bord*) N' *de* $\mathbf{R}\times P$ *telle que la projection canonique de* N' *dans* P *soit propre :*

(*a*) Q *et les* R_i *sont* $C^\infty(P)$*-linéaires en la première variable, et quels que soient* $(f, u, s) \in C^\infty(\mathbf{R}\times P)\times D$ *et* $(t, y) \in \mathbf{R}\times P$, *on a l'égalité*

$$f(t, y) = (P_u(t, y) + s(t, y)).\,Q(f, u, s)(t, y) + \sum_{i=1}^{d} R_i(f, u, s)(y).\,t^{d-i};$$

(*b*) $\rho \circ Q$ *et les* R_i *sont continues* [*où* ρ *désigne la restriction* $C^\infty(\mathbf{R}\times P) \to C^\infty(N')$];

(*c*) *quelles que soient les applications* C^∞ $\varphi, \varepsilon, \sigma, \gamma$ *d'un objet* E *de* $\mathscr{C}$ *dans* $C^\infty(\mathbf{R}\times P)$, $C^\infty(P, R^d)$, $C^\infty(\mathbf{R}\times P)$, $C^\infty(N, \mathbf{R}\times P)$ *respectivement, telles que* (ε, σ) *prenne ses valeurs dans* D, *les applications* $e \mapsto Q(\varphi(e), \varepsilon(e), \sigma(e)) \circ \gamma(e)$ et $e \mapsto R_i(\varphi(e), \varepsilon(e), \sigma(e))$ $(i = 1, \ldots, d)$ *définies sur* E *sont* C^∞.

Démonstration. — Seule l'assertion (*c*) n'est pas explicitement prouvée dans la proposition 2 du paragraphe 4 de [2], où $Q(f, u, s)$ et $(R_1(f, u, s), \ldots, R_d(f, u, s))$ ($q_{f,u,s}$ et $h_{f,u,s}$ dans [2]) sont définis par des formules universelles [formules (8), § 4].

L'assertion (*c*) pour Q par exemple se ramène à ceci : « Pour toute variété Λ, pour toute $F \in C^\infty(\mathbf{R}\times P\times\Lambda)$, toute $U \in C^\infty(P\times\Lambda, \mathbf{R}^d)$, toute $S \in C^\infty(\mathbf{R}\times P\times\Lambda)$ et toute $G \in C^\infty(N\times\Lambda, \mathbf{R}\times P)$, l'application $(x, \lambda) \mapsto Q(F_\lambda, U_\lambda, S_\lambda) \circ G_\lambda(x)$ $(x \in N, \lambda \in \Lambda)$ appartient à $C^\infty(N\times\Lambda)$ et dépend continûment de (F, U, S, G) » [F_λ, etc., désignant pour tout $\lambda \in \Lambda$ l'application partielle $(t, y) \mapsto F(t, y, \lambda)$]. Or, l'égalité

$$Q(F_\lambda, U_\lambda, S_\lambda) = Q(F, U, S)_\lambda$$

valable pour tout $\lambda \in \Lambda$, montre que l'application en question est égale à $Q(F, U, S) \circ (G\times \mathrm{id})$ où $G\times\mathrm{id}$ est l'application propre de $N\times\Lambda$ dans $R\times P\times\Lambda$: $(x, \lambda) \mapsto (G(x, \lambda), \lambda)$. La question étant locale, on peut supposer que les applications $G\times\mathrm{id}$. prennent toutes leurs valeurs dans une même sous-variété à bord N' de $R\times P\times\Lambda$. telle que la projection canonique de N' dans $P\times\Lambda$ soit propre ([2], § 2, lemme 2). L'assertion résulte donc de l'assertion (*b*) appliquée à $P\times\Lambda$ et N', et de la proposition 1 du paragraphe 2 de [2].

2. Utilisation du théorème de division

Soit $f_0 \in C^\infty(X, Y)$ une application de codimension finie. Supposons donnés un espace vectoriel réel $\mathscr{G}$ de dimension finie, un voisinage F_0 de f_0, et une application d de $F_0\times\mathscr{G}$ dans Θ_{F_0} telle que :

1. le diagramme

$$\begin{array}{ccc} F_0 \times \mathcal{G} & \xrightarrow{d} & \Theta_{F_0} \\ \big\downarrow & & \big\downarrow p \\ F_0 & \xrightarrow{\text{id}} & F_0 \end{array}$$

soit commutatif;

2. d envoie $\{f\} \times \mathcal{G}$ linéairement dans $\theta(f)$ pour toute $f \in F_0$;

3. pour toute application C^∞ φ_1 d'un objet E de $\mathcal{C}$ dans F_0 et pour toute application C^∞ φ_2 de E dans $\mathcal{G}$, l'application $d \circ (\varphi_1, \varphi_2)$ de E dans Θ_{F_0} soit C^∞.

THÉORÈME 1. — *Si l'image de $\{f_0\} \times \mathcal{G}$ par d contient un supplémentaire de $t_{f_0}(\mathcal{X}) + \omega_{f_0}(\mathcal{Y})$ dans $\theta(f_0)$, il existe un voisinage $F_1 \subset F_0$ de f_0 et trois applications C^∞ l_G, l_X, et l_Y de Θ_{F_1} dans $\mathcal{G}$, $\mathcal{X}$, et $\mathcal{Y}$ respectivement, linéaires sur chaque espace vectoriel $\theta(f)$ pour $f \in F_1$, et vérifiant pour toute $f \in F_1$ et tout $\xi \in \theta(f)$:*

$$\xi = d(f, l_G(\xi)) + t(f, l_X(\xi)) + \omega(f, l_Y(\xi)).$$

Démonstration. — Il y a trois étapes.

Première étape. — Considérons un plongement $x \mapsto (t_1(x), \ldots, t_n(x))$ de X dans un espace euclidien $\mathbf{R}^n$, et, pour $q = 0, \ldots, n$, désignons par $\mathbf{R}^q$ le sous-ensemble de $\mathbf{R}^n$ d'équations $t_{q+1} = \ldots = t_n = 0$. Pour $q = 0, \ldots, n$, l'application $(\varphi, \xi) \mapsto \varphi . \xi$ de $C^\infty(\mathbf{R}^q \times Y) \times \Theta$ dans Θ définie par la formule

$$\varphi . \xi(x) = \varphi(t_1(x), \ldots, t_q(x), f(x)) . \xi(x), \qquad x \in X, \quad f \in C^\infty(X, Y), \quad \xi \in \theta(f)$$

munit chaque espace vectoriel $\theta(f)$ d'une structure de $C^\infty(\mathbf{R}^q \times Y)$-module [déduite de la structure de $C^\infty(X)$-module par l'homomorphisme d'anneaux $\varphi \mapsto \varphi \circ (t_1, \ldots, t_q, f)$) de $C^\infty(\mathbf{R}^q \times Y)$ dans $C^\infty(X)$]. Elle munit aussi $\Theta(F)$ d'une structure de $C^\infty(F, C^\infty(\mathbf{R}^q \times Y))$ module quel que soit l'ouvert F de $C^\infty(X, Y)$; en effet, quelle que soit l'application C^∞ φ_1 d'un objet E de $\mathcal{C}$ dans $C^\infty(\mathbf{R}^q \times Y)$ et quelle que soit l'application C^∞ φ_2 de E dans θ, l'application $\varphi_1 . \varphi_2$ de E dans θ est C^∞ ([2], § 2, prop. 1 et corollaire à la prop. 3).

LEMME 2. — *Pour $q = 0, \ldots, n$, il existe (dépendant de q) un voisinage F de f_0, une suite $m_1, \ldots, m_s$ de sections du fibré tangent à F, une suite $x_1, \ldots, x_s$ d'applications C^∞ de Θ_F dans $C^\infty(\mathbf{R}^q \times Y)$, linéaires sur chaque $\theta(f)$, et une application C^∞ l de Θ_F dans $\mathcal{X}$ linéaire sur chaque $\theta(f)$, vérifiant pour toute $f \in F$ et tout $\xi \in \theta(f)$:*

$$\xi = \sum_{i=1}^{s} x_i(\xi) . m_i(f) + t(f, l(\xi)).$$

Démonstration. — Procédons par récurrence descendante sur q.

1. Pour $q = n$, soit i une application $\mathbf{R}$-linéaire de $C^\infty(X)$ dans $C^\infty(\mathbf{R}^n \times Y)$, qui soit C^∞, et vérifie pour toute $\varphi \in C^\infty(X)$ et pour toute f d'un voisinage $\mathcal{F}$ de f_0 :

$$\varphi = i(\varphi) \circ (t_1, \ldots, t_n, f).$$

On peut prendre pour l l'application nulle, pour F l'intersection de $\mathscr{F}$ et du voisinage de f_0 donné par le lemme 1, pour $m_1, \ldots, m_s$ les sections données par le lemme 1, et pour $x_1, \ldots, x_s$ les applications analogues données par le lemme 1 composées avec i. [Pour obtenir i, il suffit de prendre une extension e linéaire et C^∞ de C^∞ (X) dans C^∞ ($\mathbf{R}^n$) ([2], § 4, lemme 1 et § 5), et une fonction $\sigma \in C^\infty(\mathbf{R}^n \times Y)$ valant 1 au voisinage de l'image de X par l'application $x \mapsto (t_1(x), \ldots, t_n(x), f_0(x))$, dont le support se projette proprement dans $\mathbf{R}^n$ ([2], § 2, lemme 2 et § 4); on définit i par

$$i(\varphi)(t_1, \ldots, t_n, y) = e(\varphi)(t_1, \ldots, t_n).\sigma(t_1, \ldots, t_n, y).]$$

2. Supposons le lemme établi pour l'entier $q \geqq 1$. Si $e_1, \ldots, e_c$ est une base de $\mathscr{G}$, et $\eta_1, \ldots, \eta_h$ un système de générateurs du C^∞ (Y)-module $\mathscr{Y}$, on peut supposer que les sections $f \mapsto d(f, e_\alpha)$ $(\alpha = 1, \ldots, c)$ et $f \mapsto \omega(f, \eta_\beta)$ $(\beta = 1, \ldots, h)$ figurent dans la suite $m_1, \ldots, m_s$. L'hypothèse du théorème permet donc d'écrire en f_0, pour $i = 1, ..., s$:

$$t_q.m_i(f_0) = t(f_0, \xi_i) + \sum_{j=1}^{s} u_{ij}.m_j(f_0), \qquad \xi_i \in \mathscr{X}, \quad u_{ij} \in C^\infty(Y).$$

La section ε_i de Θ_F définie par

$$\varepsilon_i(f) = t_q.m_i(f) - \sum_{j=1}^{s} u_{ij}.m_j(f) - t(f, \xi_i)$$

est donc nulle en f_0. L'hypothèse de récurrence permet d'écrire, pour $i = 1, \ldots, s$:

$$t_q.m_i(f) = \sum_{j=1}^{s} u_{ij}.m_j(f) + \sum_{j=1}^{s} x_j(\varepsilon_i(f)).m_j(f) + t(f, l(\varepsilon_i(f))) + t(f, \xi_i).$$

Le déterminant de la matrice carrée à s lignes $t_q.\mathrm{Id} - (u_{ij} + x_j(\varepsilon_i(f)))$ est de la forme $P_u + s(f)$, où P_u est un polynôme unitaire de degré d en t_q à coefficients dans C^∞ (Y), et s une application C^∞ de F dans $C^\infty(\mathbf{R}^q \times Y)$, nulle en f_0. Les formules de Cramer montrent qu'il existe une suite $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ d'applications C^∞ de F dans $\mathscr{X}$ telle que, pour $i = 1, \ldots, s$, on ait, pour toute $f \in F$:

$$(P_u + s(f)).m_i(f) = t(f, \lambda_i(f)).$$

Restreignons F suffisamment pour pouvoir appliquer le théorème de division à $P_u + s(f)$ quelle que soit $f \in F$. Pour tout

$$\xi = \sum_{i=1}^{s} x_i(\xi).m_i(f) + t(f, l(\xi)) \in \theta(f), \qquad f \in F,$$

on a

$$x_i(\xi) = (P_u + s(f)).Q(x_i(\xi), u, s(f)) + \sum_{j=1}^{d} R_j(x_i(\xi), u, s(f)).t_q^{d-j},$$

donc

$$\xi = \sum_{i,j} R_j(x_i(\xi), u, s(f)).t_q^{d-j} m_i(f) + t\left(f, l(\xi) + \sum_{i=1}^{s} Q(x_i(\xi), u, s(f)).\lambda_i(f)\right).$$

On peut donc remplacer la suite $m_1, \ldots, m_s$ par la famille $t_q^{d-j} m_i$ ($i = 1, \ldots, s$, $j = 1, \ldots, d$), la suite $x_1, \ldots, x_s$ par la famille x_{ij} définie par

$$x_{ij}(\xi) = \mathrm{R}_j(x_i(\xi), u, s(p(\xi))),$$

et l'application l par l'application

$$\xi \mapsto l(\xi) + \sum_{i=1}^{s} \mathrm{Q}(x_i(\xi), u, s(p(\xi))).\lambda_i(p(\xi))$$

[qui est C^∞ d'après l'assertion (*c*) du théorème de division, puisque la multiplication $\mathrm{C}^\infty(\mathrm{X}) \times \mathscr{X} \to \mathscr{X}$ est C^∞].

Deuxième étape. — Considérons un plongement propre $y \mapsto (t_1(y), \ldots, t_n(y))$ de Y dans un espace euclidien $\mathbf{R}^n$. Avec les notations du lemme 1, pour $q = 0, \ldots, n$, l'application $(\varphi, \xi) \mapsto \varphi.\xi$ de $\mathrm{C}^\infty(\mathbf{R}^q) \times \Theta$ dans Θ définie par la formule

$$\varphi.\xi(x) = \varphi(t_1(f(x)), \ldots, t_q(f(x))).\xi(x), \qquad x \in \mathrm{X}, \quad f \in \mathrm{F}, \quad \xi \in \theta(f)$$

munit chaque espace vectoriel $\theta(f)$ d'une structure de $\mathrm{C}^\infty(\mathbf{R}^q)$-module. Elle munit aussi $\Theta(\mathrm{F})$ d'une structure de $\mathrm{C}^\infty(\mathrm{F}, \mathrm{C}^\infty(\mathbf{R}^q))$-module quel que soit l'ouvert F de $\mathrm{C}^\infty(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$, pour la même raison que dans la première étape.

LEMME 3. — *Pour $q = 0, \ldots, n$, il existe (dépendant de q) un voisinage* F *de f_0, une suite $m_1, \ldots, m_s$ de sections du fibré tangent à* F, *une suite $x_1, \ldots, x_s$ d'applications* C^∞ *de Θ_F dans $\mathrm{C}^\infty(\mathbf{R}^q)$, linéaires sur chaque $\theta(f)$, une application l de Θ_F dans $\mathscr{X}$ et une application m de Θ_F dans $\mathscr{Y}$,* C^∞ *et linéaires sur chaque $\theta(f)$, vérifiant pour toute $f \in \mathrm{F}$ et tout $\xi \in \theta(f)$* :

$$\xi = \sum_{i=1}^{s} x_i(\xi).m_i(f) + t(f, l(\xi)) + \omega(f, m(\xi)).$$

Démonstration. — Procédons par récurrence descendante sur q.

1. Pour $q = n$, soit e une extension linéaire et C^∞ de $\mathrm{C}^\infty(\mathrm{Y})$ dans $\mathrm{C}^\infty(\mathbf{R}^n)$. On peut prendre pour m l'application nulle, pour F, $m_1, \ldots, m_s$ et l le voisinage de f_0, les sections et l'application de Θ_F dans $\mathscr{X}$ donnés par le lemme 2 pour $q = 0$, et pour $x_1, \ldots, x_s$ les applications analogues données par le lemme 2 pour $q = 0$ composées avec e.

2. Dans le cas général, la démonstration donnée au lemme 2 s'applique, si on impose de plus aux éléments de $\mathscr{Y}$ qui interviennent d'avoir tous leur support contenu dans un même voisinage compact de $f_0(\mathrm{X})$ (*cf.* [2], § 2, corollaires 2 et 3 à la prop. 3).

Troisième étape. — Le lemme 3 pour $q = 0$ donne un voisinage F_1, une suite $m_1, \ldots, m_s$ de sections, une suite $x_1, \ldots, x_s$ d'éléments de $\mathrm{C}^\infty(\Theta_{\mathrm{F}_1})$ et une application (l, m) de Θ_{F_1} dans $\mathscr{X} \times \mathscr{Y}$ telles que, pour tout $f \in \mathrm{F}_1$ et toute $\xi \in \theta(f)$:

$$\xi = \sum_{i=1}^{s} x_i(\xi).m_i(f) + t(f, l(\xi)) + \omega(f, m(\xi)).$$

Le lemme de Nakayama et l'hypothèse du théorème montrent qu'on peut supposer la suite $m_1, \ldots, m_s$ égale à la suite de sections $f \mapsto d(f, e_i)$ (où $e_1, \ldots, e_c$ est une base de $\mathscr{G}$). On peut donc prendre $l_X = l$, $l_Y = m$, et définir l_G par

$$l_G(\xi) = \sum_{i=1}^{c} x_i(\xi).e_i.$$

3. **Résultats**

Soit $f_0 \in C^\infty(X, Y)$ une application de codimension finie c, et soit $\mathscr{G}$ un supplémentaire de $t_{f_0}(\mathscr{X}) + \omega_{f_0}(\mathscr{Y})$ dans $\theta(f_0)$.

Le groupe additif de $\mathscr{G}$ opère sur $\theta(f_0)$ par addition; le transport de cette action par un homéomorphisme $\overset{-1}{\Phi}$ d'un voisinage de $O_{f_0} \in \theta(f_0)$ sur un voisinage de f_0 (*cf.* lemme 1) permet de définir un germe d'action du groupe additif de $\mathscr{G}$ sur $C^\infty(X, Y)$ au voisinage de f_0. On notera $G(g, f)$ ($g.f$ s'il n'y a pas d'ambiguïté) le résultat de l'action de g sur f : G est une application définie sur un produit $\mathscr{G}_0 \times F_0$ et à valeurs dans F_1, où $\mathscr{G}_0$ est un voisinage de $0 \in \mathscr{G}$ et F_0 et F_1 deux voisinages de f_0 assez petits et vérifiant : $\mathscr{G}_0 + \Phi(F_0) \subset \Phi(F_1)$.

Par exemple, si $Y = \mathbf{R}^p$ et qu'on identifie $\mathscr{G}$ à $\mathbf{R}^c$ par le choix d'une base $\zeta_1, \ldots, \zeta_c$:

$$(t_1, \ldots, t_c).f = f + \sum_{i=1}^{c} t_i \zeta_i.$$

De plus, pour toute application C^∞ φ_1 d'un objet E de $\mathscr{C}$ dans $\mathscr{G}_0$ (muni de la structure de variété C^∞ induite par les isomorphismes linéaires de $\mathscr{G}$ sur $\mathbf{R}^c$) et pour toute application C^∞ φ_2 de E dans F_0, l'application $G \circ (\varphi_1, \varphi_2)$ de E dans F_1 est C^∞.

Rappelons enfin l'action de $\mathrm{Diff}(X) \times \mathrm{Diff}(Y)$ sur $C^\infty(X, Y)$: le transformé de $f \in C^\infty(X, Y)$ par $h = (\varphi, \psi) \in \mathrm{Diff}(X) \times \mathrm{Diff}(Y)$ est $h.f = \psi \circ f \circ \overset{-1}{\varphi}$.

THÉORÈME 2. — *Il existe deux applications continues* (γ_1, δ_1) *et* (γ_2, δ_2) *définies sur un voisinage* F *de* f_0 *et à valeurs dans* $\mathscr{G} \times (\mathrm{Diff}(X) \times \mathrm{Diff}(Y))$, *vérifiant :*

1. $\gamma_1(f_0) = \gamma_2(f_0) = 0$; $\delta_1(f_0) = \delta_2(f_0) =$ *identité;*

2. *pour* $i = 1, 2$, γ_i *et les deux composantes de* δ_i *sont* C^∞;

3. *pour toute* $f \in F$, *les produits* $\gamma_1(f).\delta_1(f).f_0$ *et* $\delta_2(f).\gamma_2(f).f_0$ *sont définis et égaux à* f;

4. *Pour toute* $f \in F$, *les conditions*

$$\delta_1(f) = \mathrm{id}, \qquad \delta_2(f) = \mathrm{id}, \qquad f \in \gamma_1(F).f_0, \qquad f \in \gamma_2(F).f_0, \qquad f \in \mathscr{G}_0.f_0$$

sont équivalentes, et, si elles sont réalisées, $\gamma_1(f)$ *et* $\gamma_2(f)$ *sont égaux;*

5. *pour toute* $f \in F$, *les conditions*

$$\gamma_1(f) = 0, \qquad \gamma_2(f) = 0, \qquad f \in \delta_1(F).f_0, \qquad f \in \delta_2(F)\, f_0$$

sont équivalentes, et, si elles sont réalisées, $\delta_1(f)$ *et* $\delta_2(f)$ *sont égaux. De plus, il existe un voisinage* $\mathscr{H}$ *de* $\mathrm{id}\times\mathrm{id}$ *dans* $\mathrm{Diff}(X)\times\mathrm{Diff}(Y)$ *tel que* $F\cap\mathscr{H}\circ f_0$ *soit égal à* $F\cap\delta_i(F).f_0$ $(i=1, 2)$.

Démonstration. — 1. Soit TG (différentielle de G) l'application de $(\mathscr{G}_0\times\mathscr{G})\times\Theta_{F_0}$ dans Θ_{F_1} définie par

$$T\Phi(TG((g, \gamma), \xi))=(g, \gamma)+T\Phi(\xi), \qquad (g, \gamma)\in\mathscr{G}_0\times\mathscr{G}\subset E_1\times\theta(f_0), \quad \xi\in\Theta_{F_0},$$

[c'est-à-dire par transport de l'application $((g, \gamma), (s, \zeta))\mapsto(g+s, \gamma+\zeta)$ de

$$(\mathscr{G}_0\times\mathscr{G})\times(E_0\times\theta(f_0)) \quad \text{dans} \quad E_1\times\theta(f_0), \quad \text{où} \quad E_i=\Phi(F_i) \quad \text{pour} \quad i=0, 1].$$

Le lemme 1 montre :

(*a*) pour toute application C^∞ φ_1 d'un objet E de $\mathscr{C}$ dans $\mathscr{G}_0\times\mathscr{G}$ et pour toute application C^∞ φ_2 de E dans Θ_{F_0}, l'application $TG\circ(\varphi_1, \varphi_2)$ de E dans Θ_{F_1} est C^∞;

(*b*) pour toute application C^∞ $t\mapsto(g(t), f(t))$ d'un intervalle I de $\mathbf{R}$ dans $\mathscr{G}_0\times F_0$, et pour tout $t_0\in I$, les éléments

$$TG\left(\left.\frac{dg}{dt}\right|_{t=t_0}, \left.\frac{\partial f}{\partial t}\right|_{t=t_0}\right) \quad \text{et} \quad \left.\frac{\partial}{\partial t}(g.f)\right|_{t=t_0} \quad \text{de} \quad \Theta_{F_1}$$

sont égaux;

(*c*) $TG((g, \gamma), O_f)=TG((0, \gamma), 0_{g.f})$, pour tout $(g, \gamma)\in\mathscr{G}_0\times\mathscr{G}$ et toute $f\in F_0$.

2. Soit d l'application de $F_0\times\mathscr{G}$ dans Θ_{F_1} définie par

$$d(f, \gamma)=TG((0, \gamma), O_f).$$

On peut lui appliquer le théorème 1. Nous supposerons $\mathscr{G}_0$ et F_0 assez petits pour que l'application (l_G, l_X, l_Y) soit définie sur Θ_{F_1}.

LEMME 4. — *On peut supposer que* $l_X(\xi)$ *et* $l_Y(\xi)$ *sont nuls pour tout* ξ *appartenant à l'image de* d.

Démonstration. — Soit u l'application de Θ_{F_1} dans Θ_{F_1} définie par la formule [où $T_2\Phi(\xi)$ désigne la seconde composante de $T\Phi(\xi)$] :

$$u(\xi)=d(p(\xi), l_G(T_2\Phi(\xi))).$$

On voit (en composant avec $T\Phi$) que u est C^∞, envoie chaque $\theta(f)$ linéairement dans lui-même, et [parce que $\mathscr{G}$ est un supplémentaire de $t_{f_0}(\mathscr{X})+\omega_{f_0}(\mathscr{Y})$] laisse fixe tout $\xi\in d(F_0\times\mathscr{G})$. Il suffit donc de remplacer l_X, l_Y, et l_G respectivement par $l_X\circ(\mathrm{id.}-u)$, $l_Y\circ(\mathrm{id.}-u)$, et $l_G\circ(\mathrm{id.}-u)+l_G\circ T_2\Phi$.

3. Supposons $E_0=\Phi(F_0)$ ouvert et symétrique, et posons

$$E'=\frac{1}{2}E_0, \qquad F'=\overset{-1}{\Phi}(E').$$

Joignant f_0 à chaque $f \in F'$ par l'arc $\tau \mapsto \overset{-1}{\Phi}(\tau(\Phi(f)))$, nous allons appliquer le théorème 1 à $(\partial/\partial\tau)\, g\,.\, \overset{-1}{\Phi}(\tau(\Phi(f)))\,|_{\tau=t}$.

Plus précisément, soit ρ une fonction de $C^\infty(Y)$ valant 1 au voisinage de $f_0(X)$ et à support compact. Supposons E_1 équilibré et assez petit pour que $f \in F_1$ implique $f(X) \subset \overset{-1}{\rho}(1)$, et choisissons un voisinage ouvert $\mathscr{G}'$ de $0 \in \mathscr{G}$, d'adhérence compacte contenue dans $\mathscr{G}_0 \cap (1/2)\, E_0$, et une fonction σ de $C^\infty(\mathbf{R} \times \mathscr{G})$ comprise entre 0 et 1, valant 1 sur $[0, 1] \times \mathscr{G}'$ et à support compact contenu dans $]-2, +2[\times \mathscr{G}_0$.

Soit, pour tout $(f, t, g) \in F' \times]-2, +2[\times \mathscr{G}_0$, $\zeta(f, t, g)$ l'élément de Θ_{F_1} défini par

$$\zeta(f, t, g) = \frac{\partial}{\partial\tau}(\overset{-1}{\Phi}(\sigma(\tau, g).(\tau\Phi(f)+g)))\Big|_{\tau=t},$$

et soient γ, ξ et η les applications de F' dans

$$C^\infty([-2, +2[\times \mathscr{G}_0, \mathscr{G}),$$
$$C^\infty(]-2, +2]\times \mathscr{G}_0 \times X, TX) \quad \text{et} \quad C^\infty(]-2, +2[\times \mathscr{G}_0 \times Y, TY)$$

définies respectivement par

$$\begin{aligned} \gamma(f)(t, g) &= l_G(\zeta(f, t, g)), \\ \xi(f)(t, g, x) &= l_X(\zeta(f, t, g))(x), \\ \eta(f)(t, g, y) &= \rho(y).\, l_Y(\zeta(f, t, g))(y). \end{aligned}$$

LEMME 5. — *Les applications* γ, ξ, *et* η *sont* C^∞.

Démonstration. — En effet :

(*a*) l'application Ψ de E dans $C^\infty(]-2, +2[\times \mathscr{G}_0 \times X, TY \underset{Y}{\times} TY)$ définie par

$$\Psi(e)(t, g, x) = \frac{\partial}{\partial\tau}(\sigma(\tau, g).(\tau e(x)+g(x)))\Big|_{\tau=t} \qquad (e \in E')$$

est C^∞ (car σ est à support compact : *cf*. [2], § 2, corollaire 3 à la prop. 3);

(*b*) l'application de

$$C^\infty(]-2, +2[\times \mathscr{G}_0 \times X, TY) \cap \mathscr{F}(]-2, +2[\times \mathscr{G}_0, \Theta_{F_1})$$

dans

$$C^\infty(]-2, +2[\times \mathscr{G}_0 \times X, TY \underset{Y}{\times} TY) \cap \mathscr{F}(]-2, +2[\times \mathscr{G}_0, E_1 \times \theta(f_0))$$

obtenue en composant à gauche par $T\,\Phi$ est bijective et C^∞ ainsi que son inverse; de même, l'application de

$$C^\infty(]-2, +2[\times \mathscr{G}_0 \times X, TY) \cap \mathscr{F}(]-2, +2[\times \mathscr{G}_0, \Theta_{F_1})$$

dans

$$C^\infty(]-2, +2[\times \mathscr{G}_0 \times X, TX) \cap \mathscr{F}(]-2, +2[\times \mathscr{G}_0, \mathscr{X})$$

obtenue en composant à gauche par l_X est C^∞, ainsi que les deux applications analogues obtenues en composant à gauche par l_G et l_Y.

Ce dernier point résulte de la remarque suivante, facile à vérifier :

Soit φ une application C^∞ de $E_1 \subset C^\infty(V_1, W_1)$ dans $E_2 \subset C^\infty(V_2, W_2)$; quelle que soit la variété U, l'application de

$$C^\infty(U \times V_1, W_1) \cap \mathscr{F}(U, E_1) \qquad \text{dans} \quad C^\infty(U \times V_2, W_2) \cap \mathscr{F}(U, E_2)$$

obtenue en composant à gauche par φ est également C^∞.

4. On peut maintenant achever la démonstration : Considérons, sur $]-2, +2[\times \mathscr{G}_0 \times X$ et sur $]-2, +2[\times \mathscr{G}_0 \times Y$ respectivement, les systèmes différentiels :

$$S_X(f): \quad \frac{dg}{dt} = -\gamma(f)(t, g), \qquad \frac{dx}{dt} = -\xi(f)(t, g, x);$$

$$S_Y(f): \quad \frac{dg}{dt} = -\gamma(f)(t, g), \qquad \frac{dy}{dt} = \quad \eta(f)(t, g, y).$$

Quelle que soit $f \in F'$, les seconds membres sont des fonctions C^∞ sur $]-2, +2[\times \mathscr{G}_0 \times X$ et $]-2, +2[\times \mathscr{G}_0 \times Y$, à supports compacts d'après la construction faite en 3. Les solutions $t \mapsto (g(t), x(t))$ et $t \mapsto (g(t), y(t))$ sont donc définies sur $]-2, +2[$.

Le difféomorphisme $D_X(f)$ [resp. $D_Y(f)$] de $\mathscr{G}_0 \times X$ (resp. $\mathscr{G}_0 \times Y$) qui transforme tout point α en la valeur pour $t = 1$ de la solution passant en α pour $t = 0$ dépend de f de manière C^∞ d'après les théorèmes généraux concernant les systèmes différentiels ([2], § 7, lemme 2).

D'autre part, les seconds membres de $S_X(f_0)$ et $S_Y(f_0)$ sont nuls sur $[0, 1] \times \mathscr{G}'$.

Soit F un voisinage de f_0 contenu dans F' et tel que, pour toute $f \in F'$, les solutions de $S_X(f)$ [resp. $S_Y(f)$] issues pour $t = 0$ d'un point de $\{0\} \times X$ (resp. $\{0\} \times Y$) et les solutions aboutissant pour $t = 1$ en un point de $\{0\} \times X$ (resp. $\{0\} \times Y$) soient à valeurs dans $\mathscr{G}' \times X$ (resp. $\mathscr{G}' \times Y$) pour tout $t \in [0, 1]$.

Il résulte de la définition de t et ω, de l'égalité donnée par le théorème 1, et des propriétés (*b*) et (*c*) de TG, que pour toute solution $t \mapsto (g(t), x(t))$ de $S_X(f)$ issue pour $t = 0$ d'un point de $\{0\} \times X$ ou aboutissant pour $t = 1$ en un point de $\{0\} \times X$, l'application $t \mapsto (g(t), (g(t) . f(t))(x(t)))$ est une solution de $S_Y(f)$ lorsque f appartient à F' [si $f(t) = \overset{-1}{\Phi}(t\,\Phi(f))$].

Comme le champ $\gamma(f)$ est indépendant de x et y, $D_X(f)$ [resp. $D_Y(f)$] transforme toute variété de la forme $\{g\} \times X$ (resp. $\{g\} \times Y$) en une variété de la même forme. Les propriétés 1, 2 et 3 du théorème 2 sont donc réalisées en prenant

$$\gamma_1(f) = \overset{-1}{g_1}, \qquad \delta_1(f) = (\varphi_1, \psi_1), \qquad \gamma_2(f) = g_2, \qquad \delta_2(f) = (\varphi_2, \psi_2),$$

où g_i, φ_i et ψ_i ($i = 1, 2$) sont définis par les diagrammes commutatifs suivants :

$$\begin{tikzcd} \{0\}\times X \arrow[r, "D_X(f)"] & \{g_1\}\times X \arrow[d] \\ X \arrow[u] \arrow[r, "\varphi_1"'] & X \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \{g_2\}\times X \arrow[r, "D_X(f)"] & \{0\}\times X \arrow[d] \\ X \arrow[u] \arrow[r, "\varphi_2"'] & X \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} \{0\}\times Y \arrow[r, "D_Y(f)"] & \{g_1\}\times Y \arrow[d] \\ Y \arrow[u] \arrow[r, "\psi_1"'] & Y \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \{g_2\}\times Y \arrow[r, "D_Y(f)"] & \{0\}\times Y \arrow[d] \\ Y \arrow[u] \arrow[r, "\psi_2"'] & Y \end{tikzcd}$$

et la propriété 4 est conséquence du lemme 4.

5. Pour réaliser la propriété 5, il suffit de rétrécir F convenablement.

LEMME 6. — *Il existe un voisinage* $\mathscr{H}_0$ *de* $\mathrm{id}\times\mathrm{id}$ *dans* $\mathrm{Diff}(X)\times\mathrm{Diff}(Y)$ *tel que, pour tout* $(g, h)\in\mathscr{G}_0\times\mathscr{H}_0$, *l'égalité* $g.f_0 = h.f_0$ *implique* $g = 0$.

Démonstration. — Soit V un voisinage relativement compact de $\overset{-1}{\rho}(1)$ dans Y, et soit $\mathscr{H}_1$ un voisinage de $\mathrm{id}\times\mathrm{id}$ dans $\mathrm{Diff}(X)\times\mathrm{Diff}_{Y-V}(Y)$ tel que, pour tout $h\in\mathscr{H}_1$, il existe une application C^∞ $t\mapsto h(t)$ définie sur un intervalle I de $\mathbf{R}$ contenant $[0, 1]$, à valeurs dans $\mathrm{Diff}(X)\times\mathrm{Diff}_{Y-V}(Y)$, et vérifiant

$$h(0) = \mathrm{id}\times\mathrm{id}, \qquad h(1) = h, \qquad h(t).f_0\in F \quad \text{pour tout } t\in I.$$

Il existe un voisinage $\mathscr{H}_0$ de $\mathrm{id}\times\mathrm{id}$ dans $\mathrm{Diff}(X)\times\mathrm{Diff}(Y)$ tel que toute fonction de la forme $h_0.f_0$ ($h_0\in\mathscr{H}_0$) soit aussi de la forme $h.f_0$ ($h\in\mathscr{H}_1$) ([5], th. 5).

Pour montrer que $\mathscr{H}_0$ convient, considérons l'application C^∞ de I dans F_1 :

$$\tau\mapsto f(\tau) = \gamma_2(h(\tau).f_0).f_0 = \delta_2(h(\tau).f_0)^{-1}.h(\tau).f_0;$$

pour tout $t\in I$, $\partial f/\partial\tau\,|_{\tau=t}$ appartient à l'image de d (d'après la première définition), et à $t_{f(t)}(\mathscr{X})+\omega_{f(t)}(\mathscr{Y})$ (d'après la seconde définition); $f(t)$ étant de même codimension que f_0 (d'après la seconde définition), le théorème 1 montre que $\partial f/\partial\tau\,|_{\tau=t}$ est nul; donc $f(0) = f_0$ et $f(1) = \gamma_2(h.f_0).f_0$ sont égales, d'où $\gamma_2(h.f_0) = 0$. Comme $\delta_2(g.f_0) = \mathrm{id}$ (d'après 4), f_0 et $g.f_0$ sont égales, d'où $g = 0$.

Soit alors $\mathscr{H}$ un voisinage symétrique de $\mathrm{id}\times\mathrm{id}$ dans $\mathrm{Diff}(X)\times\mathrm{Diff}(Y)$ tel que $\mathscr{H}.\mathscr{H}$ soit inclus dans $\mathscr{H}_0$, et supposons F assez petit pour que $\delta_1(F)$ et $\delta_2(F)$ soient inclus dans $\mathscr{H}$. Soit $f\in F$: d'après la construction de γ_1 et de γ_2, les conditions $\gamma_1(f) = 0$ et $\gamma_2(f) = 0$ sont équivalentes; pour $i = 1, 2$, $\gamma_i(f) = 0$ implique $f\in\delta_i(F).f_0$, qui implique $f\in\mathscr{H}.f_0$; enfin $f = h.f_0$, avec $h\in\mathscr{H}$, implique $\gamma_2(f).f_0 = \delta_2(f)^{-1}.h.f_0$, donc $\gamma_2(f) = 0$, d'après le lemme 6, ce qui achève la démonstration.

BIBLIOGRAPHIE

[1] J. MATHER, *Stability of* C^∞ *mappings*. I. *The division theorem* (*Annals of Maths*, vol. 87, 1968 p. 89-104).

[2] J. MATHER, *Stability of* C^∞ *mappings*. II. *Infinitesimal stability implies stability* (*Annals of Maths*, vol. 89, 1969, p. 251-291).

[3] F. SERGERAERT, *Un théorème de fonctions implicites sur certains espaces de Fréchet et quelques applications* (*Ann. scient. Éc. Norm. Sup.*, t. 5, 1972, p. 599-660).
[4] S. LANG, *Introduction to differentiable manifolds*, Interscience.
[5] J. CERF, *Topologie de certains espaces de plongement* (*Bull. Soc. math. Fr.*, t. 89, 1961, p. 227-380).

(Manuscrit reçu le 8 octobre 1973.)

G. LASSALLE,
Faculté des Sciences d'Orsay,
Département de Mathématiques,
91405 Orsay.