ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

HARRIE HENDRIKS
FRANÇOIS LAUDENBACH

Scindement d'une équivalence d'homotopie en dimension 3

Annales scientifiques de l'É.N.S. 4e série, tome 7, nº 2 (1974), p. 203-217
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1974_4_7_2_203_0>

Ann. scient. Éc. Norm. Sup.,
4e série, t. 7, 1974, p. 203 à 218.

SCINDEMENT D'UNE ÉQUIVALENCE D'HOMOTOPIE EN DIMENSION 3

PAR HARRIE HENDRIKS ET FRANÇOIS LAUDENBACH

Considérons deux variétés M et N de même dimension et une sphère S de codimension 1 plongée dans N. On dit qu'une application $f: M \to N$ est *scindée* le long de S si f est transversale sur S et si $R = f^{-1}(S)$ est une sphère. On dit que f est *scindable* le long de S si f est homotope à une application scindée. En dimension 3, Swarup ([S 3], [S 4]) a posé la question de savoir si toute application induisant un isomorphisme des groupes fondamentaux (1) est scindable le long d'une sphère donnée dans N, et il a conjecturé que toute équivalence d'homotopie est scindable. En fait cette conjecture n'est vraie que dans le cas orientable car, d'après [H 2], les hypothèses du théorème de scindement que nous établissons ici sont nécessaires, tout au moins si l'on se restreint aux variétés fermées; le problème reste d'ailleurs ouvert pour les autres variétés (2).

THÉORÈME DE SCINDEMENT. — *Soient* N *une variété fermée de dimension* 3 *et* S *une* 2-*sphère plongée dans* N *non homotope à zéro. On suppose que* $\pi_1(N)$ *ne contient aucun élément* g, *tel que* $g^2 = 1$ *et* $\omega(g) = -1$, *où* $\omega : \pi_1(N) \to \mathbf{Z}_2 = \{+1, -1\}$ *est l'homomorphisme d'orientation* (première classe de Stiefel-Whitney). *Soit* $f: M \to N$ *une application de degré* ± 1 *induisant un isomorphisme des groupes fondamentaux. Alors* f *est scindable le long de* S.

Remarques :

1° L'hypothèse sur f revient à dire que f est une équivalence d'homotopie (*voir* par exemple [L 2], appendice III).

2° L'hypothèse sur S n'est pas une vraie restriction, car si S est homotope à zéro, on voit très facilement que toute application $f: M \to N$ induisant un épimorphisme des groupes fondamentaux est scindable le long de S, sans aucune hypothèse sur N (1.1).

3° L'hypothèse sur N est invariante par équivalence d'homotopie; il revient donc au même de la faire sur M. D'autre part, d'après Hirsch-Smale [H 6], elle revient à dire

(1) Il est immédiat de constater que cette hypothèse restrictive est nécessaire pour avoir un théorème raisonnable.

(2) Ajouté sur épreuves : Swarup a généralisé le théorème au cas des variétés ouvertes et des équivalences d'homotopie propres.

que M est $\mathbf{P}^2$-insécable, c'est-à-dire qu'il n'existe aucun plongement du plan projectif dans M à fibré normal trivial.

4° En grande dimension, Cappell a donné un théorème général de scindement; lorsqu'il s'agit d'un scindement le long d'une sphère de dimension $2k$, sa condition sur π_1 (N) est qu'il n'existe aucun $g \in \pi_1$ (N) tel que $g^2 = 1$ et $\omega(g) = (-1)^k$; sans cette hypothèse, il peut aussi construire des contre-exemples [C 1], [C 2].

Il existe deux démonstrations de ce théorème; la première, très topologique, a été annoncée dans [H 4] et esquissée, voire dessinée, dans [L 2]; la seconde, que nous présentons ici, utilise un curieux phénomène relatif au groupe de cohomologie à coefficients locaux $H^2(M; \pi_2(M))$ (§ 2). Au dernier paragraphe, nous montrons comment le théorème de scindement s'applique à la comparaison des équivalences d'homotopie avec les difféomorphismes.

A plusieurs reprises, nous aurons besoin d'utiliser le langage de la chirurgie plongée, sans en redéfinir les termes; pour une application $f : M \to N$ transverse sur une sous-variété X de N, nous parlerons d'une homotopie réalisant la somme connexe de deux composantes de $f^{-1}(X)$ par un arc les joignant ou d'une homotopie réalisant la chirurgie par un disque de M dont le bord est plongé dans $f^{-1}(X)$; les définitions précises et les obstructions à la réalisation de telles opérations sont données dans le chapitre I de [L 2].

1. **Existence d'applications scindées**

1.1. Proposition. — *Toute application induisant un épimorphisme des groupes fondamentaux est scindable le long d'une sphère homotope à zéro.*

Démonstration. — Supposons d'abord que S_0 borde une boule B dans N. Par transversalité de $f : M \to N$ sur le centre de B, on peut supposer que $f^{-1}(B)$ est une réunion non vide de boules $B_1, \ldots, B_k$. Par hypothèse sur f, il existe un arc α joignant B_1 à B_2, tel que par homotopie de f on puisse réaliser la somme connexe le long de α; le résultat est une application $g : M \to N$ transversale sur S_0 telle que

$$g^{-1}(B) = (B_1 \underset{\alpha}{\#} B_2) \cup B_3 \cup \ldots \cup B_k.$$

Rappelons que la condition sur α est que la classe de $f(\alpha)$ dans $\pi_1(N - \text{int } B, \partial B)$ soit triviale. En itérant ce processus, on construit une homotopie de f jusqu'à une application scindée le long de S_0.

Si maintenant S est une sphère plongée dans N homotope à zéro, elle borde une variété contractile W. Il existe une application $h : N \to N$, homotope à l'identité telle que $h^{-1}(S) = S_0$. Si f est scindée le long de S_0, hf est scindée le long de S. Donc f est scindable le long de S. □

1.2. Excluant ce cas trivial, nous allons commencer ici la démonstration du théorème de scindement; nous ne traiterons que le cas où la sphère S sépare la variété fermée N en deux composantes N' et N'' non contractiles; si

$$N_1 = N' \bigcup_S D^3, \qquad N_2 = N'' \bigcup_S D^3,$$

on a

$$N = N_1 \underset{S}{\#} N_2 \quad \text{(somme connexe le long de S).}$$

Le cas où S ne sépare pas N peut se traiter tout à fait parallèlement avec des notations différentes.

Soient x_0 et y_0 des points-base de M et de N tels que $y_0 = f(x_0)$ et $y_0 \in S$. On a un isomorphisme de Van Kampen :

(1) $$\pi_1(N, y_0) \cong \pi_1(N', y_0) \bigstar \pi_1(N'', y_0).$$

D'après Stallings [S 2] (résolution de la conjecture de Kneser), il existe dans M une sphère R passant par x_0 telle que $M = M' \bigcup_R M''$ et que l'on ait l'égalité des sous-groupes

$$f_{\#}(\pi_1(M', x_0)) = \pi_1(N', y_0) \qquad \text{et} \qquad f_{\#}(\pi_1(M'', x_0)) = \pi_1(N'', y_0).$$

On a un isomorphisme de Van Kampen :

(2) $$\pi_1(M, x_0) \cong \pi_1(M', x_0) \bigstar \pi_1(M'', x_0)$$

et l'isomorphisme $f_{\#}$ respecte les décompositions en produit libre (1) et (2); nous dirons que f est algébriquement scindée. On pose

$$M_1 = M' \bigcup_R D^3, \qquad M_2 = M'' \bigcup_R D^3$$

et on a

$$M = M_1 \underset{R}{\#} M_2.$$

Enfin on oriente M en x_0 et N en y_0 pour que f soit de degré $+1$ en ces points.

1.3. PROPOSITION. — *Il existe une équivalence d'homotopie de degré* $+1$ $g : M \to N$, *scindée le long de* S, *telle que* $g^{-1}(S) = R$ *et que* $g_{\#} = f_{\#}$.

Démonstration. — Nous utilisons le théorème de Swarup [S 4] qui généralise un théorème de C. B. Thomas [T 1] : si (V, x_0) est une variété de dimension 3 fermée, $\mathbf{P}^2$-insécable, munie d'une orientation locale en x_0, il existe un invariant $\tau(V, x_0) \in H_3(\pi_1(V, x_0); \tilde{\mathbf{Z}})$ caractérisant le type d'homotopie orienté de (V, x_0), où $\tilde{\mathbf{Z}}$ est le système de coefficients de fibre $\mathbf{Z}$ tordu par l'homomorphisme d'orientation. Précisément, si (V', y_0) est une autre variété fermée, $\mathbf{P}^2$-insécable orientée en y_0, et si θ est un isomorphisme de $\pi_1(V, x_0)$ sur $\pi_1(V', y_0)$ respectant les homomorphismes d'orientation, il existe une application $g : (V, x_0) \to (V', y_0)$ de degré $+1$ induisant le morphisme θ si et seulement si $\theta_* \tau(V, x_0) = \tau(V', y_0)$. De plus cet invariant est additif, c'est-à-dire que, si $V = V_1 \# V_2$, on a

$$\tau(V) = \tau(V_1) + \tau(V_2)$$

en identifiant $H_3(\pi_1(V, x_0); \tilde{\mathbf{Z}})$ avec $H_3(\pi_1(V_1, x_0); \tilde{\mathbf{Z}}) \oplus H_3(\pi_1(V_2, x_0); \tilde{\mathbf{Z}})$. En réalité Swarup se restreint au cas des variétés orientables; mais V étant $\mathbf{P}^2$-insécable, on voit facilement que $\tau(V, x_0)$ ne dépend que de l'orientation locale et des facteurs indécomposables à groupe fondamental fini dans une décomposition maximale de V pour l'opération de somme connexe (une telle décomposition existe d'après Kneser [K 1]). Or un argument de nombre de Lefschetz prouve qu'une variété fermée de dimension 3 à groupe fondamental fini est orientable. Donc le théorème de Swarup se généralise immédiatement.

Dans notre situation, on a donc

$$f_{\#*}\tau(M_1)+f_{\#*}\tau(M_2) = f_{\#*}\tau(M) = \tau(N) = \tau(N_1)+\tau(N_2).$$

De plus, pour $i = 1, 2$, on a

$$f_{\#*}\tau(M_i) \in H_3(\pi_1(N_i, y_0); \tilde{\mathbf{Z}}),$$

puisque f est algébriquement scindée. On en déduit que

$$f_{\#*}\tau(M_i) = \tau(N_i).$$

La réciproque du théorème de Swarup fournit une équivalence d'homotopie orientée $g_i : M_i \to N_i$ telle que $g_{i\#} = f_\# \mid \pi_1(M_i, x_0)$. Regardant R et S comme des sphères dans M_i et N_i y bordant des boules, on peut supposer que $g_i^{-1}(S) = R$ et que $g_1 \mid R = g_2 \mid R$. On peut donc faire la « somme connexe » de g_1 et de g_2 le long de R pour construire une application scindée g de degré $+1$ telle que $g_\# = g_{1\#} \bigstar g_{2\#} = f_\#$. Signalons que cette application n'est pas unique à homotopie près. □

Remarque. — La proposition 1.3 peut se prouver sans utiliser ni l'hypothèse de $\mathbf{P}^2$-insécabilité ni le théorème de Swarup. On utilise à la place l'unicité de la sphère de Kneser (*voir* [L 2], chap. IV et V).

Si f et g étaient homotopes, le théorème de scindement serait démontré. Au paragraphe 2 nous allons étudier les obstructions qui se présentent pour construire une telle homotopie.

2. $H^2(V; \pi_2(V))$ lorsque V est $\mathbf{P}^2$-insécable

2.1. Puisque f et g induisent le même morphisme sur le groupe fondamental, la première obstruction à construire une homotopie entre f et g apparaît sur le 2-squelette; c'est une classe de cohomologie $d(f, g) \in H^2(M; \pi_2(N))$, où $\pi_2(N)$ est un système de *coefficients locaux* sur M : si $\gamma \in \pi_1(M, x_0)$ et $\sigma \in \pi_2(N, y_0)$, on définit par la formule

$$\gamma . \sigma = f_\#(\gamma) . \sigma$$

l'action de $\pi_1(M, x_0)$ sur $\pi_2(N, y_0)$. Le théorème suivant a pour conséquence immédiate que $d(f, g)$ ne dépend que de la différence des degrés de f et de g. Or ici f et g sont de degré $+1$, *donc f et g sont homotopes jusqu'au 2-squelette.*

2.2. THÉORÈME. — *Soit* V *une variété de dimension* 3 *fermée* $\mathbf{P}^2$*-insécable* (i. e. V ne contient aucun plan projectif à deux côtés). *On a les résultats suivants :*

1° $H^2(V; \pi_2(V))$ *est isomorphe à* $\mathbf{Z}$ *si et seulement si* V *admet un revêtement fini à un groupe fondamental libre; sinon* $H^2(V; \pi_2(V))$ *est nul.*

2° *Si* $h : V \to V$ *est une application de degré n induisant l'identité sur le groupe fondamental, on a*

$$d(h, \mathrm{Id}\,|\,V) = \pm \frac{(n-1)}{k_0},$$

où le signe $\pm$ *ne dépend que du choix d'une identification éventuelle de* $H^2(V; \pi_2(V))$ *avec* $\mathbf{Z}$ *et où* k_0 *est un entier ne dépendant que de* V.

DÉMONSTRATION :

2.3. PREMIÈRE PARTIE. — Notons π le groupe fondamental de V. Nous allons décrire une présentation

$$0 \to C_1 \xrightarrow{\Delta} C_0 \xrightarrow{\rho} \pi_2(V, x_0) \to 0$$

de $\pi_2(V)$ comme π-module (*voir* aussi [S 3]). On considère un système $\mathscr{S} = (S_1, \ldots, S_m)$ de sphères plongées *orientées*, mutuellement disjointes, non homotopes à zéro et non homotopes entre elles; on suppose que $\mathscr{S}$ est maximal pour cette propriété. L'existence de $\mathscr{S}$ est assurée par le théorème de Grushko [G 1] : un groupe de type fini admet une décomposition finie en produit libre de groupes indécomposables. On note $p : (\tilde{V}, y_0) \to (V, x_0)$ un revêtement universel et $\tilde{S}_i = p^{-1}(S_i)$. L'action à gauche naturelle de π sur $\tilde{V}$ ne laisse invariante aucune composante de $\tilde{S}_i$; donc $H_2(\tilde{S}_i; \mathbf{Z})$ est un π-module libre. On pose

$$C_0 = \bigoplus_{i=1}^{m} H_2(\tilde{S}_i; \mathbf{Z}).$$

Il y a un morphisme naturel $C_0 \to H_2(\tilde{V}; \mathbf{Z})$. En le composant avec l'isomorphisme de Hurewicz réciproque, on obtient un morphisme

$$\rho : \quad C_0 \to \pi_2(V, x_0).$$

La maximalité du système $\mathscr{S}$ et le « sphere theorem » [P 1] impliquent que ce morphisme est surjectif.

Soient $W_1, \ldots, W_r$ les composantes de $V - (S_1 \cup \ldots \cup S_m)$ dont le groupe fondamental est fini et $W'_1, \ldots, W'_r$ les autres; les *sous-variétés* $W_1, \ldots, W_r$ *sont orientables;* on choisit une orientation que l'on relève dans chaque composante de $p^{-1}(W_j)$. Soient C_1 le $\mathbf{Z}$-module libre basé sur la famille des composantes orientées de $\bigcup_{j=1}^{r} p^{-1}(W_j)$ et $\Delta : C_1 \to C_0$ le morphisme de groupe abélien qui à un générateur associe le bord orienté de son adhérence. Ce morphisme est injectif car $\tilde{V}$ est une variété ouverte. Enfin on a $\operatorname{Im}\Delta = \operatorname{Ker}\rho$, car les relations homologiques existant entre des sphères plongées mutuellement disjointes dans $\tilde{V}$ sont engendrées par les cobordismes *compacts* bordés par certaines d'entre elles. En particulier C_1 et Δ ont naturellement des structures de π-module et de π-morphisme.

Considérons la suite de cohomologie à coefficients locaux

$$H^2(V; C_0) \to H^2(V; \pi_2(V)) \to H^3(V; C_1) \to H^3(V; C_0).$$

Par dualité de Poincaré, on voit que, C_0 étant π-libre, $H^2(V; C_0)$ est nul et que $H^3(V; C_i) \cong C_i \otimes_\pi \tilde{\mathbf{Z}}$, où $\tilde{\mathbf{Z}}$ est le système de fibre $\mathbf{Z}$ tordu par l'homomorphisme d'orientation $\omega : \pi \to \{+1, -1\}$. Donc $H^2(V; \pi_2(V))$ est isomorphe à $\operatorname{Ker}(\Delta \otimes_\pi \tilde{\mathbf{Z}})$.

Il existe un isomorphisme de $C_0 \otimes_\pi \tilde{\mathbf{Z}}$ avec le groupe abélien libre G_0 ayant pour base l'ensemble des sphères orientées $S_1, \ldots, S_m$. En effet C_0 est π-libre et, pour $g \in \pi$, l'application définie par $g \otimes 1 \mapsto \omega(g)$ et par linéarité est un isomorphisme de $\mathbf{Z}[\pi] \otimes_\pi \tilde{\mathbf{Z}}$ sur $\mathbf{Z}$.

De même $C_1 \otimes_\pi \tilde{\mathbf{Z}}$ est isomorphe au groupe libre G_1 ayant pour base l'ensemble des sous-variétés orientées $W_1, \ldots, W_r$. Pour le voir, on choisit une orientation sur $\tilde{V}$. Si U_i est une composante de $p^{-1}(W_i)$, on définit $\bar{\omega}(U_i) = \pm 1$ selon que les orientations induites par $\tilde{V}$ et relevées de W_i coïncident ou non. Pour $g \in \pi$, on a $\bar{\omega}(g\,U_i) = \omega(g)\,\bar{\omega}(U_i)$. Considérons l'application $\lambda : C_1 \times \mathbf{Z} \to G_1$ définie par $\mathbf{Z}$-bilinéarité et par

$$\lambda(U_i, 1) = \bar{\omega}(U_i)\,W_i;$$

elle est bien définie parce que C_1 est $\mathbf{Z}$-libre, les U_i formant une base. Pour $g \in \pi$, on a $\lambda(g\,U_i, 1) = \lambda(U_i, \omega(g))$. On vérifie qu'elle possède les propriétés universelles faisant de G_1 un produit tensoriel $C_1 \otimes_\pi \tilde{\mathbf{Z}}$. Dans la suite, on identifie $C_i \otimes_\pi \tilde{\mathbf{Z}}$ et G_i par les isomorphismes ci-dessus.

Si on choisit des orientations locales de V au voisinage de chaque sphère $S_1, \ldots, S_m$, on a un opérateur « bord tordu » :

$$\tilde{\partial} : \quad G_1 \to G_0.$$

Pour calculer $\tilde{\partial} W_i$, on utilise la formule habituelle en chaque sphère adhérente à W_i où l'orientation de W_i coïncide avec l'orientation locale choisie; sinon, on utilise la formule opposée. En particulier si une sphère adhère à W_i par ses deux faces, elle n'apparaît pas dans $\tilde{\partial} W_i$.

La restriction de p à U_i est un revêtement d'ordre $[\pi_1(W_i) : 1]$ sur W_i. Puisque Δ est le bord usuel dans $\tilde{V}$, on vérifie facilement que

$$(\Delta \otimes_\pi \tilde{\mathbf{Z}})(W_i) = [\pi_1(W_i) : 1]\,\tilde{\partial} W_i.$$

A partir de cette formule on conclut que $\operatorname{Ker}(\Delta \otimes_\pi \tilde{\mathbf{Z}})$ est isomorphe à $\operatorname{Ker} \tilde{\partial}$, lequel est isomorphe à $\mathbf{Z}$ ou à 0 selon que $\overline{W}_1 \cup \ldots \cup \overline{W}_r$ forme un cycle ou non.

Premier cas :

$$V = \overline{W}_1 \cup \ldots \cup \overline{W}_r.$$

Pour des orientations convenables de $W_1, \ldots, W_r$, on a $\sum \tilde{\partial} W_i = 0$. Soit alors n le plus petit commun multiple des $[\pi_1(W_i) : 1]$; on a des entiers $n_1, \ldots, n_r$ tels que

$$n_1 [\pi_1(W_1) : 1] = \ldots = n_r [\pi_1(W_r) : 1] = n.$$

Alors $n_1 W_1 + \ldots + n_r W_r$ engendre $\operatorname{Ker}(\Delta \underset{\pi}{\otimes} \tilde{\mathbf{Z}})$. Simultanément, on peut prendre au-dessus de chaque $W_i\, n_i$ exemplaires de U_i et les recoller entre eux pour former un revêtement à n feuillets $\hat{p} : \hat{V} \to V$. Puisque chaque U_i est 1-connexe, $\pi_1(\hat{V})$ est libre.

Deuxième cas :

$$V \supset \overline{W}_1 \cup \ldots \cup \overline{W}_r \cup \overline{W}'_1.$$

Alors $\operatorname{Ker}(\Delta \underset{\pi}{\otimes} \tilde{\mathbf{Z}}) = 0$ et simultanément, il n'existe aucun revêtement fini de V à groupe fondamental libre. car il n'en existe pas au-dessus de W'_1. En effet $\pi_1(W'_1)$ a au moins un bout puisqu'il est infini; s'il en avait deux ou une infinité, d'après Specker [S 1] et le « sphere theorem », il existerait dans W'_1 une sphère plongée non triviale et non homotope à une sphère du bord de W'_1, contrairement à la maximalité de $\mathscr{S}$. Donc $\pi_1(W'_1)$ a exactement un bout, ce qui lui interdit d'avoir un sous-groupe libre d'indice fini (sur les bouts, *voir* [S 2]).

2.4. Deuxième partie. — On suppose que $\pi_2(V) \neq 0, \mathbf{Z}$; alors V est une somme connexe non triviale. On sait que tout élément de $H^2(V; \pi_2(V))$ peut être regardé comme la première obstruction $d(h, \operatorname{Id} | V)$ pour une certaine application $h : V \to V$ qui coïncide avec l'identité sur le 1-squelette. Si h_1 et h_2 sont deux telles applications, on peut supposer qu'elles coïncident sur le 2-squelette. On passe de h_1 à h_2 en modifiant h_1 sur des 3-cellules grâce à des éléments de $\pi_3(V)$. Mais puisque $\pi_1(V)$ est infini, $\tilde{V}$ est une variété ouverte et une application de S^3 dans V a toujours un degré nul. Ainsi les modifications précédentes ne changent pas le degré. On peut donc définir une application

$$\mu_V : \quad H^2(V; \pi_2(V)) \to \mathbf{Z}$$

telle que $\mu_V(d(h, \operatorname{Id} | V)) = \deg(h) - 1$. Cette formule montre en particulier que, si $H^2(V; \pi_2(V)) = 0$, on a nécessairement $\deg(h) = 1$.

Dans la suite, on suppose que $H^2(V; \pi_2(V))$ n'est pas nul. Il existe alors un revêtement fini $\hat{p} : \hat{V} \to V$ tel que $\pi_1(\hat{V})$ soit libre. Considérons le diagramme

(1)
$$\begin{tikzcd}
H^2(\hat{V}; \pi_2(\hat{V})) \arrow[r, "\mu_{\hat{V}}"] & \mathbf{Z} \\
H^2(V; \pi_2(V)) \arrow[u, "\hat{p}^*"] \arrow[ur, "\mu_V"'] &
\end{tikzcd}$$

Si $h : V \to V$ laisse le point base fixe et si $\hat{h} : \hat{V} \to \hat{V}$ est le relèvement de h qui laisse fixe la fibre base, on a évidemment les égalités

$$\hat{p}^* (d(h, \mathrm{Id} \mid V)) = d(\hat{h}, \mathrm{Id} \mid \hat{V}),$$
$$\deg(h) = \deg(\hat{h}).$$

Donc le diagramme (1) est commutatif.

Lemme. — $\mu_{\hat{V}}$ *est un isomorphisme.*

Preuve. — D'après Stallings [S 2], $\hat{V} = V_1 \# V_2 \# \ldots \# V_m$, où $\pi_1(V_j) = \mathbf{Z}$, c'est-à-dire où V_j a le type d'homotopie d'un S^2-fibré sur S^1. Puisque le lemme est invariant par équivalence d'homotopie, on peut supposer que V_j est un fibré et on y choisit une fibre orientée S_j. Cette collection de fibres constitue alors l'ensemble des 2-cellules d'une décomposition cellulaire de $\hat{V}$. Le générateur de $H^2(\hat{V}; \pi_2(\hat{V}))$ est représenté par la cochaîne cellulaire c définie par

$$c(S_j) = \mathrm{Id} \mid S_j$$

[puisque la sphère S_j est orientée, elle est paramétrée à homotopie près et $\mathrm{Id} \mid S_j$ définit bien un élément de $\pi_2(\hat{V})$].

Pour tout j, il existe une application fibrée $f_j : V_j \to V_j$ de degré k. Si S est une sphère de somme connexe entre V_i et V_j dans $\hat{V}$, le processus utilisé en 1.1 permet de déformer f_i et f_j jusqu'à ce que $f_i, f_j : S \to S$ et $f_i \mid S = f_j \mid S$, tout en conservant la propriété que f_i (resp. f_j) envoie S_i (resp. S_j) dans elle-même par une application de degré k. Ainsi on peut recoller entre elles toutes ces applications pour construire une application $f : \hat{V} \to \hat{V}$ telle que, pour tout i, $f \mid S_i : S_i \to S_i$ soit de degré k. On voit alors que

$$d(f, \mathrm{Id} \mid \hat{V}) = (k-1)[c],$$

ce qui prouve le lemme. □

Il en résulte que μ_V est un homomorphisme. Pour prouver le théorème, il reste seulement à prouver que μ_V n'est pas nul. Or $V = V_1 \# \ldots \# V_m$, où $\pi_1(V_i)$ est fini d'ordre r_i pour $i = 1, \ldots, l$ et isomorphe à $\mathbf{Z}$ pour $i = l+1, \ldots, m$. Si $i \leqq l$, il existe une application de degré $k_i r_i$ (k_i arbitraire) de S^3 sur V_i; partant de l'identité de V_i, on la modifie dans une 3-cellule grâce à cette application et on construit une application $f_i : V_i \to V_i$ de degré $k_i r_i + 1$ qui induit l'identité sur $\pi_1(V_i)$. On choisit k_i pour que $k_1 r_1 = \ldots = k_l r_l$; pour $i > l$ on choisit, comme dans le lemme, une application fibrée f_i de degré $k_1 r_1 + 1$ et on recolle entre elles toutes les f_i, $i = 1, \ldots, m$, pour construire une application $f : V \to V$ telle que

$$\mu_V(d(f, \mathrm{Id} \mid V)) = k_1 r_1.$$

On peut d'ailleurs prouver que l'entier k_0 du théorème est le plus petit commun multiple des ordres des groupes finis appartenant à une décomposition libre du groupe fondamental.

C. Q. F. D.

2.5. APPLICATION AU THÉORÈME DE SCINDEMENT. — D'après ce qui précède, on peut supposer que l'application g obtenue en 1.3 coïncide avec f sur le 2-squelette de M, dans lequel on inclut la sphère R. Par conséquent, on peut se ramener à la situation suivante (notation de 1.2) :

Il existe deux boules $B' \subset M'$ *et* $B'' \subset M''$ *telles qu'après une homotopie convenable* $f : M' \bigcup_R M'' \to N' \bigcup_S N''$ *coïncide avec l'application scindée* $g : (M, M', M'') \to (N, N', N'')$ *hors de* $B' \cup B''$.

Remarque. — La méthode utilisée pour arriver à ce résultat semble déjà fondée sur le le fait que M est $\mathbf{P}^2$-insécable. En fait, comme le montre la démonstration topologique de [H 4] (*voir* aussi [L 2], chap. V), cette hypothèse n'est nécessaire qu'à la dernière étape de la démonstration du théorème de scindement. D'ailleurs le théorème 2.2 se généralise : pour la partie libre de $H^2(V; \pi_2(V))$ le théorème est exactement le même; mais il apparaît une partie de 2-torsion correspondant aux plans projectifs de V à deux côtés. La composante de $d(f, g)$ dans le groupe de torsion peut être annulée en changeant g en une autre application scindée.

3. Fin de la démonstration du théorème de scindement

On part de la situation décrite en 2.5; on peut en plus supposer que $g(B')$ [resp. $g(B'')$] est réduit à un point y' de N' (resp. y'' de N''). Ainsi $f|(B', \partial B')$ et $f|(B'', \partial B'')$ représentent des éléments de $\pi_3(N, y')$ et $\pi_3(N, y'')$ respectivement. Nous allons décrire un système de générateurs simples de $\pi_3(N, y')$; en prenant pour f une combinaison de ceux-ci, $f^{-1}(S) \cap B'$ sera une réunion de sphères et de tores non noués; sur cette forme simple de la préimage, il sera possible d'effectuer de la chirurgie pour réduire $f^{-1}(S)$ à une sphère.

3.1. DESCRIPTION DE $\pi_3(N, y')$. — On sait que $\pi_1(N, y')$ est infini; le revêtement universel $\tilde{N}$ de N est une variété ouverte et $\tilde{N}$ a le type d'homotopie d'un bouquet de sphères de dimension 2 $\bigvee_{j \in J} S_j$. D'après Hilton [H 5], *l'ensemble des classes d'homotopie des* Hopf (S_j) *et des produits de Whitehead* $[S_j, S_{j'}]$, $j, j' \in J$, *engendre* $\pi_3(\bigvee S_j, \bigstar)$, *chacune des sphères du bouquet étant supposée munie d'un paramétrage pointé.*

On en déduit qu'il existe dans N une famille de sphères singulières, paramétrées pointées, (S_α, y_α), $\alpha \in A$, et d'arcs γ_α joignant le point base y' à y_α, transversaux à S, tels que

1° pour tout $\alpha \in A$, $S_\alpha \cap S = \varnothing$;

2° les classes d'homotopie de γ_α Hopf S_α et de $\gamma_\alpha [S_\alpha, \gamma_\alpha^{-1} \gamma_\beta S_\beta]$, $\alpha, \beta \in A$, engendrent $\pi_3(N, y')$.

(La condition 1° empêche de prendre pour γ_α un chemin constant et pour A l'ensemble d'indices J du théorème de Hilton : les sphères S_j doivent être décomposées en sphères ne rencontrant pas S.)

(1) Un représentant naturel $\mu_\alpha : (D^3, \partial D^3) \to (N, y')$ de γ_α Hopf S_α est construit comme suit :

– $\mu_\alpha \mid (1/2\, D^3, \partial\, 1/2\, D^3) = \text{Hopf}\,(S_\alpha, y_\alpha)$;

– $\mu_\alpha \mid (D^3 - \text{int}\, 1/2\, D^3)$ est obtenu en composant

$$D^3 - \text{int}\, 1/2\, D^3 \cong S^2 \times [0, 1] \xrightarrow{\text{proj}} [0, 1] \xrightarrow{\gamma_\alpha} N.$$

Ainsi $\mu_\alpha^{-1}(S)$ est formé de sphères parallèles dans D^3, chacune correspondant à un point d'intersection de γ_α avec S.

(2) Un représentant naturel $\mu_{\alpha,\beta} : (D^3, \partial D^3) \to (N, y')$ de $\gamma_\alpha [S_\alpha, \gamma_\alpha^{-1} \gamma_\beta S_\beta]$ est construit comme suit. D'une part sur $D^3 - \text{int}\, 1/2\, D^3$ on pose $\mu_{\alpha,\beta} = \mu_\alpha$; dans cette couronne la préimage de S est formée de sphères comme en (1). D'autre part on décompose $1/2\, D^3$ en $X \cup Y$, où X et Y sont deux tores pleins dont l'intersection est un tore troué; soient $\psi_X : (X, \partial X) \to (D^2, S^1)$ et $\psi_Y : (Y, \partial Y) \to (D^2, S^1)$ les trivialisations « canoniques » de ces deux tores pleins, c'est-à-dire que les préimages de deux points distincts de D^2 par ψ_X (resp. par ψ_Y) ont un nombre d'enlacement nul dans D^3. On définit alors :

– $\mu_{\alpha,\beta} \mid X \cap Y = \{ y_\alpha \}$;

– $\mu_{\alpha,\beta} \mid X = S_\alpha \circ \psi_X$;

– $\mu_{\alpha,\beta} \mid Y = (\gamma_\alpha^{-1} \gamma_\beta S_\beta) \circ \psi_Y$.

On voit que $\mu_{\alpha,\beta}^{-1}(S) \cap X$ est vide et que $\mu_{\alpha,\beta}^{-1}(S) \cap Y$ est formé de tores deux à deux parallèles et parallèles à ∂Y; il y en a autant que de points d'intersection de $\gamma_\alpha^{-1} \gamma_\beta$ avec S.

3.2. Forme simple. — Soit $f : (M' \bigcup_R M'', x_0) \to (N' \bigcup_S N'', y_0)$ une application pointée transversale sur S, où $x_0 \in R$ et $y_0 \in S$. On dira que f a une forme simple s'il existe des boules $B'_1, \ldots, B'_{n_1}$ dans M′ et des boules $B''_1, \ldots, B''_{n_2}$ dans M″ vérifiant les conditions suivantes :

1° $R \subset f^{-1}(S)$ et $f^{-1}(S) - R$ est contenu dans la réunion des boules B'_i et B''_j;

2° pour tout i et tout j,

$$f(\partial B'_i) = \{ y' \} \in N' \qquad \text{et} \qquad f(\partial B''_j) = \{ y'' \} \in N'';$$

3° dans chaque boule, la préimage de S est une union de sphères et de tores non noués deux à deux parallèles.

D'après 3.1, on peut toujours mettre f sous une forme simple. Pour prouver le théorème de scindement, il suffit de décrire un processus d'élimination des composantes sphériques distinctes de R et un processus de transformation des composantes toriques en composantes sphériques, chacun de ces deux processus fournissant une nouvelle application de forme simple. Nous décrivons ces processus pour les composantes de $f^{-1}(S) \cap M'$.

3.3. Élimination des sphères. — Supposons que $(f^{-1}(S) - R) \cap M'$ contienne une sphère Σ joignable à R par un arc γ tel que $\text{int}\, \gamma \cap f^{-1}(S) = \emptyset$. $f(\gamma)$ représente un chemin de N′ d'extrémités dans S. Puisque $f_{\#}$ induit un épimorphisme

$$\pi_1(\mathrm{M}' - \bigcup \mathrm{B}'_i,\ x_0) \to \pi_1(\mathrm{N}',\ y_0),$$

on peut choisir γ pour que la classe de $f(\gamma)$ dans $\pi_1(\mathrm{N}', \mathrm{S})$ soit triviale. On peut alors réaliser la somme connexe de R avec Σ le long de γ par une homotopie de f. En fait, puisque Σ borde une boule B, $\Sigma \underset{\gamma}{\#} \mathrm{R}$ est isotope à R et l'opération précédente a pour effet d'éliminer Σ et de faire passer dans M″ toutes les composantes de $f^{-1}(\mathrm{S})$ intérieures à B. Le résultat est donc une nouvelle application de forme simple pour laquelle la préimage de S a moins de composantes.

3.4. Chirurgie d'un tore. — Supposons que $(f^{-1}(\mathrm{S}) - \mathrm{R}) \cap \mathrm{M}'$ contienne un tore T joignable à R par un chemin γ tel que $\operatorname{int} \gamma \cap f^{-1}(\mathrm{S}) = \varnothing$. Il existe une boule B′ de M′ contenant $(f^{-1}(\mathrm{S}) - \mathrm{R}) \cap \mathrm{M}'$; et telle que $f(\partial \mathrm{B}') = \{y'\}$; le tore T y borde un tore plein non noué V (T). Puisque f a une forme simple et que T est directement joignable à R, il existe un 2-disque Δ plongé dans $\mathrm{B}' - \operatorname{int} \mathrm{V}(\mathrm{T})$, tel que $\operatorname{int} \Delta \cap f^{-1}(\mathrm{S}) = \varnothing$ et que $\partial\Delta$ soit un « générateur » de T. On a $f(\Delta, \partial\Delta) \subset (\mathrm{N}', \mathrm{S})$. La chirurgie de T par le disque Δ le transforme en une sphère; mais l'obstruction à réaliser cette chirurgie par une homotopie de f est que $f(\Delta)$ soit trivial dans $\pi_2(\mathrm{N}', \mathrm{S})$. Pour effectuer sur T une chirurgie réalisable par une homotopie de f, on cherche un disque Δ' dans M′ vérifiant les conditions suivantes :

(*a*) $\partial\Delta = \partial\Delta'$;

(*b*) $f(\Delta')$ est trivial dans $\pi_2(\mathrm{N}', \mathrm{S})$;

(*c*) $\operatorname{int} \Delta' \cap f^{-1}(\mathrm{S}) = \varnothing$;

(*d*) Δ' est *plongé.*

Cherchons d'abord tous les disques singuliers de $\mathrm{M}' - \operatorname{int} \mathrm{V}(\mathrm{T})$ vérifiant les trois premières conditions. Soit x_1 un point de base dans M′, $x_1 \in \partial\Delta$; on peut supposer que $f(x_1) = y_0$. Considérons le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
\pi_2(\mathrm{M}', x_1) \arrow[rr, dashed] & & \pi_2(\mathrm{N}', y_0) \arrow[dd] \\
& \pi_2(\mathrm{M}' - \operatorname{int} \mathrm{V}(\mathrm{T}), x_1) \arrow[ul, "\rho"'] \arrow[ur, "\varphi"] \arrow[d, hook, "j"] & \\
& \pi_2(\mathrm{M}' - \operatorname{int} \mathrm{V}(\mathrm{T}), \mathrm{T}, x_1) \arrow[uul, "\rho'"] \arrow[r, "\varphi'"] & \pi_2(\mathrm{N}', \mathrm{S}, y_0)
\end{tikzcd}$$

Dans ce diagramme j est le monomorphisme induit par l'inclusion; φ et φ' sont des épimorphismes induits par f. Les morphismes ρ et ρ' sont induits par une application de M′ dans elle-même, homotope à l'identité, rétractant B′ sur x_1; en particulier $\rho'([\Delta]) = 0$. Ce sont aussi des épimorphismes. On a $\rho' j = \rho$, $\varphi' j = \varphi \bmod \pi_2(\mathrm{S})$ et φ se factorise par ρ. Ces affirmations sont justifiées par le fait que l'application $g : (\mathrm{M}', \mathrm{R}) \to (\mathrm{N}', \mathrm{S})$, définie par $g \mid \mathrm{M}' - \mathrm{B}' = f \mid \mathrm{M}' - \mathrm{B}'$ et $g(\mathrm{B}') = \{y'\}$, est une équivalence d'homotopie.

Paramétrons Δ et notons $[\Delta]$ sa classe d'homotopie; il existe $\omega \in \pi_2(\mathrm{M}'-\operatorname{int} \mathrm{V}(\mathrm{T}), x_1)$ tel que

$$\varphi'([\Delta]) = \varphi(\omega) \bmod \pi_2(\mathrm{S}).$$

Posons $u = -\rho(\omega)$. Soit Δ' un disque singulier paramétré de $\mathrm{M}'-\operatorname{int} \mathrm{V}(\mathrm{T})$, tel que $\partial\Delta' = \partial\Delta$ (égalité des bords orientés). *Alors si* $\rho'([\Delta']) = u$ *on a* $\varphi'([\Delta']) = 0$.

Pour trouver le disque de chirurgie, il reste à prouver que l'équation $\rho'([\Delta']) = u$ admet une solution plongée; c'est ce qu'affirme le lemme suivant. Le résultat de la chirurgie est une nouvelle application de forme simple pour laquelle la préimage de S a moins de composantes toriques.

LEMME. — *On suppose que* M' *est* $\mathbf{P}^2$*-insécable. Alors, pour tout* $u \in \pi_2(\mathrm{M}', x_1)$, *il existe un disque paramétré* Δ', *plongé dans* $\mathrm{M}'-\operatorname{int} \mathrm{V}(\mathrm{T})$, *tel que* $\partial\Delta' = \partial\Delta$ *et* $\rho'([\Delta']) = u$.

Remarque. — C'est le seul point de la démonstration où la condition de $\mathbf{P}^2$-insécabilité soit *nécessaire* [H 2].

Preuve. — Le fait important, découlant du « sphere theorem », est que $\pi_2(\mathrm{M}', x_1)$ est engendré comme $\pi_1(\mathrm{M}', x_1)$-module par des sphères plongées. Soient Σ une sphère plongée paramétrée, Δ' un disque plongé paramétré tel que $\partial\Delta' = \partial\Delta$ et α un arc joignant Δ' à Σ. On choisit une orientation de M' au voisinage de Δ' pour que α parte de Δ' du côté des normales positives. On transporte cette orientation le long de α' jusqu'à Σ et on suppose que α arrive en Σ du côté des normales positives. La somme connexe $\Delta'' = \Delta' \mathop{\#}_{\alpha} \Sigma$ est un disque immergé naturellement paramétré et on a l'égalité

$$\rho'([\Delta'']) = \rho'([\Delta']) + \alpha . [\Sigma].$$

Pour prouver le lemme, il reste à plonger Δ'' sans changer $\rho'([\Delta''])$. On remarque que $\mathrm{V}(\mathrm{T}) \cup \Delta'$ admet un voisinage régulier difféomorphe à D^3. Donc il existe une isotopie de α, à extrémité fixe, jusqu'à ce que $\operatorname{int} \alpha \cap (\mathrm{V}(\mathrm{T}) \cup \Delta') = \varnothing$. Ensuite les intersections de Σ avec $\operatorname{int} \alpha \cup \mathrm{V}(\mathrm{T}) \cup \Delta'$ peuvent fuir par l'extrémité libre de ce chemin épaissi. Au cours de ces isotopies la classe $\rho'([\Delta''])$ est restée inchangée. □

Par application des processus 3.3 et 3.4, on finit par éliminer toutes les composantes parasites de la préimage de S, ce qui achève de prouver le théorème de scindement.

4. Difféomorphismes des sommes connexes

Considérons la classe $\mathscr{C}$ des variétés fermées de dimension 3 $\mathbf{P}^2$-insécables satisfaisant à la conjecture de Poincaré (toute 3-sous-variété compacte contractile est une vraie boule). Cette classe est stable pour l'opération de somme connexe (*voir* [L 2], App. I). On définit une sous-classe $\mathscr{C}_0$ de la façon suivante :

Une variété N *appartient à* $\mathscr{C}_0$ *si, quels que soient la variété* $\mathrm{M} \in \mathscr{C}$ *et une équivalence d'homotopie* $f : \mathrm{M} \to \mathrm{N}$, *alors* f *est homotope à un difféomorphisme.*

La classe $\mathscr{C}_0$ n'est pas vide : elle contient les variétés $\mathbf{P}^2$-irréductibles suffisamment grandes (*voir* [W 1] dans le cas orientable et [H 1] dans le cas non-orientable).

4.1. THÉORÈME. — *La classe $\mathscr{C}_0$ contient les* S^2*-fibrés sur* S^1 *et est stable pour l'opération de somme connexe.*

Démonstration. — Si $\pi_1(M) \cong \mathbf{Z}$ et si $M \in \mathscr{C}$, d'après Stallings [S 2], M est difféomorphe à un S^2-fibré sur S^1. Pour la première partie, il s'agit donc de montrer que toute auto-équivalence d'homotopie f d'un tel fibré est homotope à un difféomorphisme. D'après le théorème de scindement, f est scindable le long d'une fibre et, si f est scindée, le résultat est facile à déduire du théorème de Cerf ($\Gamma_4 = 0$) [C 3].

Pour la seconde partie, on considère $N = N_1 \# N_2$, où $N_1, N_2 \in \mathscr{C}_0$, et $f : M \to N$ une équivalence d'homotopie, où $M \in \mathscr{C}$. D'après le théorème de scindement, il existe des équivalences d'homotopie $f_1 : M_1 \to N_1$ et $f_2 : M_2 \to N_2$ telles que $M \cong M_1 \# M_2$ et que f_1 et f_2 se recollent en une application scindée, notée $f_1 \# f_2$, homotope à f. Les variétés M_1 et M_2 appartiennent à $\mathscr{C}$; donc, par hypothèse pour $i = 1, 2$, il existe une application $h_i : M_i \times [0, 1] \to N_i$ telle que $h_i \mid M_i \times \{ 0 \} = f_i$ et que $h_i \mid M_i \times \{ 1 \}$ soit un difféomorphisme. Il reste à choisir h_i pour que l'on puisse recoller h_1 et h_2 pour construire une homotopie h entre $f_1 \# f_2$ et un difféomorphisme.

Soit y_i un point-base dans N_i. On sait que $f_i^{-1}(y_i)$ est réduit au centre x_i de la sphère de somme connexe. Si h_i est transversale sur y_i, $h_i^{-1}(y_i)$ contient un arc α joignant $M_i \times \{ 0 \}$ à $M_i \times \{ 1 \}$ et éventuellement des courbes germées $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$. Il n'y a aucune obstruction à réaliser par une homotopie de h_i (rel. $M_i \times \partial [0, 1]$) la somme connexe de $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ avec α. Ainsi $h_i^{-1}(y_i)$ est réduit à un arc, qui d'ailleurs est isotope à $x_i \times [0, 1]$. Si B_i est une petite boule centrée en y_i, on a une boule $B_i' = f_i^{-1}(B_i)$ centrée en x_i et $h_i^{-1}(B_i) = B_i' \times [0, 1]$. Quitte à faire une nouvelle isotopie de h_i, on peut supposer que pour tout t, $h_i \mid B_i' \times \{ t \} = f_i \mid B_i'$. Dans ces conditions, on peut recoller h_1 et h_2.

C. Q. F. D.

4.2. Si P est une propriété telle que $M = M_1 \# M_2$ vérifie P si et seulement si M_1 et M_2 vérifient P, on peut introduire la classe $\mathscr{C}(P)$: $M \in \mathscr{C}(P)$ si $M \in \mathscr{C}$ et vérifie P. On définit $\mathscr{C}_0(P)$ comme suit : $N \in \mathscr{C}_0(P)$ si pour toute équivalence d'homotopie $f : M \to N$, où $M \in \mathscr{C}(P)$, f est homotope à un difféomorphisme. Alors la démonstration ci-dessus prouve que $\mathscr{C}_0(P)$ est stable pour l'opération de somme connexe.

Par exemple, prenons pour P la propriété suivante : le revêtement universel satisfait à la conjecture de Poincaré. La classe $\mathscr{C}_0(P)$ contient les variétés $\mathbf{P}^2$-irréductibles suffisamment grandes, les S^2-fibrés sur S^1 et $\mathbf{P}^3$. En effet, d'après Livesay [L 3], si M vérifie P et si $\pi_1(M) = \mathbf{Z}_2$, on a $M \cong \mathbf{P}^3$. De plus si $f : \mathbf{P}^3 \to \mathbf{P}^3$ est une équivalence d'homotopie, f est homotope soit à l'identité si $\deg f = +1$ soit à l'application « inverse » (pour la loi de groupe) si $\deg f = -1$. En effet, si $\deg f = +1$, on peut supposer que

$$f \mid \mathbf{P}^2 = (\mathbf{P}^2 \subsetneq \mathbf{P}^3), \qquad \text{puisque} \quad \pi_2(\mathbf{P}^3) = 0;$$

la première obstruction $d(f, \mathrm{Id}) \in \pi_3(\mathbf{P}^3) \cong \mathbf{Z}$ et on a $d(f, \mathrm{Id}) = \deg f - 1 = 0$. Un raisonnement analogue donne le résultat si $\deg f = -1$. Remarquer que l'on ne sait pas si $\mathbf{P}^3$ appartient à $\mathscr{C}_0$, car un revêtement à deux feuillets d'une variété satisfaisant à la conjecture de Poincaré n'y satisfait peut-être pas.

4.3. Si $N \in \mathscr{C}_0$, toute auto-équivalence d'homotopie est homotope à un difféomorphisme de N. Il est naturel de se demander si celui-ci est unique à isotopie près, c'est-à-dire si tout difféomorphisme de N homotope à l'identité est isotope à l'identité. Ceci a été prouvé pour les sommes connexes de $S^1 \times S^2$ dans [L 1]. Maintenant, grâce à [H 3], on a le théorème suivant :

THÉORÈME — *Soit* $N = N_1 \# \ldots \# N_q$ *où* N_i *est soit une variété* $\mathbf{P}^2$*-irréductible suffisamment grande, soit un fibré sur* S^1 *de fibre* S^2. *Si f est un difféomorphisme de* N *homotope à l'identité, alors f est isotope à l'identité.*

Démonstration. — On écrit $N = N_0 \# N_1 \# \ldots \# N_q$, où N_0 est une sphère S^3; on peut supposer que N_i est « connecté » à N_0 par une sphère S_i. Pour $1 \leqq i \leqq k$, N_i est un S^2-fibré sur S^1 et S'_i est une fibre; pour $i \geqq k+1$, N_i est $\mathbf{P}^2$-irréductible et suffisamment grande. Si $q > 2$, deux des sphères considérées ne sont jamais parallèles et, d'après [L 2], théorème III 1.4 et lemme V 4.2, $f \mid S_1 \cup \ldots \cup S_q \cup S'_1 \cup \ldots \cup S'_k$ est isotope à $\mathrm{Id} \mid S_1 \cup \ldots \cup S_q \cup S'_1 \cup \ldots \cup S'_k$. Si $q = 2$, S_1 est parallèle à S_2 et l'argument invoqué est insuffisant; il faut encore remarquer que, si $f \mid S_1 = \mathrm{Id} \mid S_1$, et si f échangeait les côtés de S_1, f ne serait pas homotope à l'identité (raisonner sur le groupe fondamental comme ci-dessous). On peut donc supposer que $f = f_0 \# f_1 \# \ldots \# f_q$, où f_0 est un difféomorphisme de S^3 coïncidant avec l'identité sur q boules et où, pour $i \geqq 1$, f_i est un difféomorphisme de N_i coïncidant avec l'identité sur une boule B_i et sur S'_i si $i \leqq k$. On a

$$\pi_1(N) \cong \pi_1(N_1, B_1) \bigstar \ldots \bigstar \pi_1(N_q, B_q).$$

Puisque f est homotope à l'identité, $f_\#$ est une conjugaison intérieure. Mais aucune conjugaison intérieure autre que l'identité ne laisse invariant tous les facteurs d'un produit libre. Donc pour tout $i \geqq 1$, f_i induit l'identité sur $\pi_1(N_i, B_i)$. D'après le théorème de Cerf [C 3] ($\pi_0(\mathrm{Diff}(D^3 \bmod S^2)) = 0$) appliqué à f_i pour $i \leqq k$ et d'après le théorème de Waldhausen [W 1] appliqué à f_i pour $i \geqq k+1$, f est isotope à une composition de difféomorphismes $H_{S_i}(\alpha_i)$ et $H_{S'_i}(\alpha'_i)$ de rotation parallèlement à chaque sphère S_i et S'_i (ils commutent tous) : α_i est une application $([0, 1], \partial [0, 1]) \to (SO(3), \mathrm{Id})$; le difféomorphisme $H_{S_i}(\alpha_i)$ est à support dans un voisinage tubulaire de S_i, difféomorphe à $S^2 \times [0, 1]$, où il est défini par la formule

$$H_{S_i}(\alpha_i)(x, t) = (\alpha_i(t).x, t).$$

On voit facilement que, pour $1 \leqq i \leqq k$, $H_{S_i}(\alpha_i)$ est isotope à l'identité et que $H_{S_q}(\alpha_q)$ est isotope à

$$H_{S_1}(\alpha_q) \circ \ldots \circ H_{S_k}(\alpha_q) \circ H_{S_{k+1}}(\alpha_q) \circ \ldots \circ H_{S_{q-1}}(\alpha_q).$$

On peut donc supposer dans ce qui précède que $\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \alpha_q$ sont triviales. D'autre part, $S'_1, \ldots, S'_k, S_{k+1}, \ldots, S_{q-1}$ forment une base de $\pi_2(N)$ comme $\pi_1(N)$-module libre; donc d'après [H 3],

$$H_{S'_1}(\alpha'_1) \circ \ldots \circ H_{S'_k}(\alpha'_k) \circ H_{S_{k+1}}(\alpha_{k+1}) \circ \ldots \circ H_{S_{q-1}}(\alpha_{q-1})$$

n'est homotope à l'identité que si les classes de $\alpha'_1, \ldots, \alpha'_k, \alpha_{k+1}, \ldots, \alpha_{q-1}$ sont toutes triviales dans $\pi_1(\mathrm{SO}(3))$ et, dans ce cas, le difféomorphisme est clairement isotope à l'identité.

C. Q. F. D.

BIBLIOGRAPHIE

[C 1] S. CAPPELL, *A splitting theorem for manifolds and surgery groups* (*Bull. Amer. Math. Soc.*, vol. 77, 1971, p. 281-286).

[C 2] S. CAPPELL, *Splitting obstructions for Hermitian forms and manifolds with* $\mathbf{Z}_2 \subset \pi_1$, (*Bull. Amer. Math. Soc.*, vol. 79, 1973, p. 909-913).

[C 3] J. CERF, *Sur les difféomorphismes de la sphère de dimension* 3 ($\Gamma_4 = 0$) (*Lect. Notes in Math.*, n° 53, Springer, 1968).

[G 1] I. GRUSHKO, *On the bases of a free product of groups* (*Mat. Sbornik*, vol. 8, 1940, p. 169-182).

[H 1] W. HEIL, *On* $\mathbf{P}^2$*-irreducible* 3*-manifolds* (*Bull. Amer. Math. Soc.*, vol. 75, 1969, p. 772-775).

[H 2] H. HENDRIKS, *Une obstruction pour scinder une équivalence d'homotopie en dimension* 3 (à paraître).

[H 3] H. HENDRIKS, *Applications de la théorie d'obstruction en dimension* 3 (*C. R. Acad. Sc.*, Paris, t. 276, série A, 1973, p. 1101-1104).

[H 4] H. HENDRIKS et F. LAUDENBACH, *Scindement d'une équivalence d'homotopie en dimension* 3 (*C. R. Acad. Sc.*, Paris, t. 276, série A, 1973, p. 1275-1278).

[H 5] P. J. HILTON, *On the homotopy groups of the union of spheres* (*J. London Math. Soc.*, vol., 30, 1955, p. 154-171).

[H 6] M. HIRSCH et S. SMALE, *On involutions of the* 3*-sphere* (*Amer. J. Math.*, vol. 81, 1959, p. 893-900).

[K 1] KNESER, *Geschlossene Flächen in dreidimensionalen Mannigfaltigkeiten* (*J. B. Deutsch. Math. Verein*, vol. 38, 1929, p. 248-260).

[L 1] F. LAUDENBACH, *Sur les* 2*-sphères d'une variété de dimension* 3 (*Ann. of Math.*, vol. 97, 1973, p. 57-81).

[L 2] F. LAUDENBACH, *Topologie de la dimension* 3 : *homotopie et isotopie*, (*Astérisque*, vol. 12, 1974).

[L 3] G. LIVESAY, *Fixed point free involutions on the* 3*-sphere* (*Ann. of Math.*, vol. 72, 1960, p. 603-611).

[P 1] C. PAPAKYRIAKOPOULOS, *On Dehn's lemma and the asphericity of knots* (*Ann. of Math.*, vol. 66, 1957, p. 1-26).

[S 1] E. SPECKER, *Die erste Cohomologiegruppe von Ueberlagerungen und Homotopie-Eigenschaften dreidimensionaler Mannigfaltigkeiten* (*Comment. Math. Helv.*, vol. 23, 1949, p. 303-333).

[S 2] J STALLINGS, *Group theory and three dimensional manifolds*, Yale University Press, 1971.

[S 3] G. A. SWARUP, *On embedded spheres in* 3*-manifolds* (*Math. Ann.*, vol. 203, 1973, p. 89-102).

[S 4] G. A. SWARUP, *On a theorem of C. B. Thomas* (*J. London Math. Soc.*, vol. 8, 1974, p. 13-21).

[T 1] C. B. THOMAS, *The oriented homotopy type of compact* 3 *manifolds* (*Proc. London Math. Soc.*, vol. 19, 1969, p. 31-44).

[W 1] F. WALDHAUSEN, *On irreducible* 3*-manifolds which are sufficiently large* (*Ann. of Math.*, vol. 87, 1968, p. 56-88).

(Manuscrit reçu le 8 octobre 1973.)

H. HENDRIKS
et
F. LAUDENBACH,
Centre de Mathématiques
de l'École Polytechnique,
17, rue Descartes,
75230 Paris-Cedex 05.