ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

JEAN-LOUIS KOSZUL

Homologie des complexes de formes différentielles d'ordre supérieur

Annales scientifiques de l'É.N.S. 4e série, tome 7, nº 1 (1974), p. 139-153
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1974_4_7_1_139_0>

Ann. scient. Éc. Norm. Sup.
4e série, t. 7, 1974, p. 139 à 154.

HOMOLOGIE DES COMPLEXES DE FORMES DIFFÉRENTIELLES D'ORDRE SUPÉRIEUR

PAR JEAN-LOUIS KOSZUL

Soit M une variété différentielle réelle de dimension $n > 0$. On suppose M de classe C^∞, de même que toutes les variétés, fonctions et champs de tenseurs envisagés dans la suite. Soient $\mathfrak{a}(M)$ l'algèbre de Lie sur **R** des champs de vecteurs sur M et E un fibré de tenseurs sur M. La dérivation de Lie définit une représentation linéaire de $\mathfrak{a}(M)$ dans l'espace des sections de E. Une p-cochaîne ω sur $\mathfrak{a}(M)$ à valeurs dans cet espace associe à toute suite $X_1, \ldots, X_p \in \mathfrak{a}(M)$ une section $\omega(X_1, \ldots, X_p)$ de E. On dit que ω est une forme différentielle d'ordre $\leqq k$ (à valeurs dans E) si pour tout $x \in M$, la valeur en x de la section $\omega(X_1, \ldots, X_p)$ est déterminée par les jets d'ordre k des champs X_i au point x. Pour tout entier $k \geqq 0$, les formes différentielles d'ordre $\leqq k$ à valeurs dans E forment un sous-complexe du complexe des cochaînes sur $\mathfrak{a}(M)$ à valeurs dans l'espace des sections de E. La réunion de ces sous-complexes est le complexe des formes différentielles d'ordre supérieur à valeurs dans E. Son homologie sera notée $H^*_\infty(M, E)$ (*cf.* Guillemin [2], Losyk [3]).

Cet article repose sur l'observation suivante. Dans certains cas, c'est-à-dire pour certains fibrés E, il apparaît dans $H^*_\infty(M, E)$ des classes « canoniques » dont on montre qu'elles sont toujours non nulles. L'exemple le plus simple est donné par la classe de la divergence.

Supposons M orientable. Soit v un volume sur M. La divergence (relative à v) d'un champ $X \in \mathfrak{a}(M)$ est la fonction définie par $(\operatorname{div} X)\, v = \theta(X)\, v$, $\theta(X)$ désignant la dérivation de Lie par rapport à X. C'est une forme de degré 1, d'ordre $\leqq 1$, à valeurs dans le fibré trivial $T^0_0 M$ des tenseurs de type (0, 0) sur M. Quels que soient $X, Y \in \mathfrak{a}(M)$, on a $\operatorname{div}[X, Y] = X.(\operatorname{div} Y) - Y.(\operatorname{div} X)$, autrement dit, div est un cocycle. On voit facilement que sa classe dans $H^1_\infty(M, T^0_0 M)$ est indépendante du choix de v et n'est jamais nulle.

Voici maintenant un exemple de classe représentée par un cocycle d'ordre $\leqq 2$. Soit D une connexion linéaire dans TM et, pour tout $X \in \mathfrak{a}(M)$, soit $\theta(X) D$ la dérivée de Lie de D par rapport à X. La différence de deux connexions linéaires étant une forme de degré 2 à valeurs dans TM, c'est-à-dire une section de $T^1_2 M$, $X \mapsto \theta(X) D$ est une forme de degré 1 à valeurs dans $T^1_2 M$. La formule

$$(\theta(X) D)(Y, Z) = [X, D_Y Z] - D_{[X, Y]} Z - D_Y [X, Z] \qquad (X, Y, Z \in \mathfrak{a}(M))$$

montre que c'est une forme d'ordre $\leqq 2$. Il est évident que c'est un cocycle et on vérifie que sa classe est un élément de $H^1_\infty(M, T^1_2 M)$ indépendant du choix de la connexion D. Pour $n > 0$, cette classe n'est pas nulle car il n'existe pas de connexion sur M annulée par $\theta(X)$ quel que soit X.

Pour expliquer l'origine de ces classes, on montrera qu'il existe pour tout E, un homomorphisme canonique $H(C) \to H^*_\infty(M, E)$, où C est le complexe des cochaînes sur l'algèbre de Lie des jets de champs de vecteurs nuls à l'origine sur $\mathbf{R}^n$, prenant leurs valeurs dans la fibre type de E et basiques vis-à-vis du groupe orthogonal. On déterminera toutes les classes de degré 1 qui s'obtiennent en prenant l'image de ces homomorphismes.

1. Homologie du complexe des formes différentielles équivariantes sur un espace fibré principal

Soient G un groupe de Lie et ρ une représentation linéaire continue de G dans un espace vectoriel V de dimension finie sur $\mathbf{R}$. Soit $M \times G \to M$ une loi d'opération C^∞ de G dans la variété M. On note $\Omega_G(M, V)$ le complexe des formes différentielles sur M à valeurs dans V qui sont équivariantes par rapport à G. L'homologie de $\Omega_G(M, V)$ sera notée $H^*_G(M, V)$; c'est la cohomologie équivariante de M à valeurs dans V.

Soit B un sous-groupe fermé de G. Une cochaîne c sur l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de G à valeurs dans V est dite B-basique si elle est équivariante vis-à-vis de B et si le produit intérieur de c par tout élément de l'algèbre de Lie de B est nul. Les cochaînes B-basiques forment un sous-complexe $C^*(\mathfrak{g}, B, V)$ du complexe $C^*(\mathfrak{g}, V)$ des cochaînes sur $\mathfrak{g}$ à valeurs dans V. Son homologie sera notée $H^*(\mathfrak{g}, B, V)$.

Il existe un isomorphisme canonique η du complexe $\Omega_G(B\backslash G, V)$ sur le complexe $C^*(\mathfrak{g}, B, V)$. Si $\omega \in \Omega^p_G(B\backslash G, V)$ et si ε est l'élément origine de $B\backslash G$, $\eta\omega$ est défini par

$$(\eta\omega)(a_1, \ldots, a_p) = \omega(\varepsilon a_1, \ldots, \varepsilon a_p)$$

quels que soient $a_1, \ldots, a_p \in \mathfrak{g}$. Si $c \in C^p(\mathfrak{g}, B, V)$:

$$(1.1) \qquad (\eta^{-1} c)(\varepsilon s a_1, \ldots, \varepsilon s a_p) = \rho(s)^{-1} c(s a_1 s^{-1}, \ldots, s a_p s^{-1})$$

quels que soient $s \in G$ et $a_1, \ldots, a_p \in \mathfrak{g}$.

Soit P un fibré principal de classe C^∞ de groupe G. Une restriction à B du groupe de structure de P correspond à un G-morphisme $\varphi : P \to B\backslash G$ qui définit des homomorphismes $\varphi^* : \Omega_G(B\backslash G, V) \to \Omega_G(P, V)$ et $\tilde{\varphi}^* : H^*_G(B\backslash G, V) \to H^*_G(P, V)$. Si $\xi \in P$ et si $\varphi(\xi) = \varepsilon$, le G-morphisme $s \mapsto \xi s$ de G dans P, composé avec φ, donne le G-morphisme canonique $s \mapsto \varepsilon s$ de G sur $B\backslash G$. Par conséquent,

(1.2) *le noyau de* $\tilde{\varphi}^* : H^*_G(B\backslash G, V) \to H^*_G(P, V)$ *est contenu dans le noyau de l'homomorphisme canonique* $H^*_G(B\backslash G, V) \to H^*_G(G, V)$.

Si l'espace $B\backslash G$ est contractile, deux G-morphismes de P dans $B\backslash G$ appartiennent à une famille à un paramètre de G-morphismes et définissent donc le même homomorphisme de $H^*_G(B\backslash G, V)$ dans $H^*_G(P, V)$. Il en résulte que si G a un nombre fini de composantes connexes et si B est un sous-groupe compact maximal de G, l'homomorphisme $\tilde{\varphi}^* : H_G(B\backslash G, V) \to H^*_G(P, V)$ est *canonique*, c'est-à-dire indépendant du choix de φ. Lorsque B est un sous-groupe compact maximal de G, on peut interpréter $H^*_G(B\backslash G, V)$ comme la cohomologie équivariante à valeurs dans V d'un fibré principal universel de groupe G. Plus précisément, quel que soit l'entier $n > 0$, il existe un entier N tel que, si P est N-universel, $\tilde{\varphi}^* : H^p_G(B\backslash G, V) \to H^p_G(P, V)$ soit un isomorphisme pour $p \leqq n$. Ce résultat est implicitement démontré par Van Est en passant par l'intermédiaire du complexe standard des cochaînes différentiables sur G à valeurs dans V (*cf.* [4]. p. 290, rem. et [5], p. 403, th. 2). Il n'en sera pas fait usage dans la suite.

Soit φ un G-morphisme de P dans $B\backslash G$ et soit Q le sous-fibré principal de groupe B dans P, image réciproque de ε par φ. Pour expliciter l'homomorphisme

$$\varphi^* : \quad \Omega_G(B\backslash G, V) \to \Omega_G(P, V),$$

il est commode, et semble-t-il conforme à la nature des choses, de choisir une forme de connexion γ sur Q. Cette forme se prolonge d'une manière et d'une seule en une forme de connexion sur P qui sera notée encore γ.

(1.3) LEMME. — *Quels que soient* $\xi \in P$ *et* $u \in T_\xi P$, *on a* $\varphi^T(u) = \varphi(\xi)\gamma(u)$.

Soit en effet $s \in G$ tel que $\xi s \in Q$. On a $\varphi^T(u) = \varphi^T(us)s^{-1}$. Si u est horizontal, c'est-à-dire si $\gamma(u) = 0$, alors us est horizontal et par suite $us \in T_{\xi s} Q$. On a donc $\varphi^T(us) = 0$ et $\varphi^T(u) = 0 = \varphi(\xi)\gamma(u)$. Si u est vertical, donc de la forme ξa avec $a \in \mathfrak{g}$, alors

$$\varphi^T(u) = \varphi^T(\xi a) = \varphi(\xi) a = \varphi(\xi)\gamma(u).$$

Ce lemme permet d'expliciter l'homomorphisme $\varphi^* \circ \eta^{-1}$ de $C^*(\mathfrak{g}, B, V)$ dans $\Omega_G(B\backslash G, V)$: quels que soient $c \in C^p(\mathfrak{g}, B, V)$, $\xi \in P$ et $u_1, \ldots, u_p \in T_\xi P$, on a

$$((\varphi^* \circ \eta^{-1})c)(u_1, \ldots, u_p) = \rho(s)^{-1} c(s\gamma(u_1)s^{-1}, \ldots, s\gamma(u_p)s^{-1}),$$

où s est un élément de G tel que $\xi s \in Q$. En particulier, si $\xi \in Q$, on a

$$(1.4) \qquad ((\varphi^* \circ \eta^{-1})c)(u_1, \ldots, u_p) = c(\gamma(u_1), \ldots, \gamma(u_p)).$$

Bien que cette formule fasse intervenir la forme de connexion γ, l'homomorphisme $\varphi^* \circ \eta^{-1}$ ne dépend que du G-morphisme φ ou, ce qui revient au même, du sous-fibré Q.

2. Formes différentielles d'ordre supérieur et homomorphisme $\tilde{\psi}$

Soit n un entier > 0. On note $\mathfrak{a}$ l'algèbre de Lie des jets de champs de vecteurs à l'origine sur $\mathbf{R}^n$. Pour tout $k \geqq -1$, on note $\mathfrak{a}_k$ l'espace des applications polynomiales homogènes de degré $k+1$ de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}^n$. Chaque $\mathfrak{a}_k$ s'identifie à un sous-espace de $\mathfrak{a}$ et si l'on pose $\mathfrak{a}_k = (0)$ pour $k < -1$, on a $[\mathfrak{a}_p, \mathfrak{a}_q] \subset \mathfrak{a}_{p+q}$ quels que soient $p, q \in \mathbf{Z}$. On note $\mathfrak{g}$ la sous-algèbre de $\mathfrak{a}$ formée par les jets de champs de vecteurs nuls à l'origine. On a $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_{-1} \oplus \mathfrak{g}$ et $\mathfrak{a}_{-1} = \mathbf{R}^n$. Pour tout $k > 0$, les jets des champs de vecteurs ayant l'origine pour zéro d'ordre k forment un idéal $\mathfrak{m}_k$ de $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{g} = \mathfrak{a}_0 \oplus \mathfrak{a}_1 \oplus \ldots \mathfrak{a}_k \oplus \mathfrak{m}_{k+1}$.

On note G_k le groupe des jets d'ordre k à l'origine des difféomorphismes locaux de $\mathbf{R}^n$ laissant l'origine fixe. Pour tout $k \geqq 1$, G_k est un groupe de Lie dont l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}_k$ est canoniquement isomorphe à $\mathfrak{g}/\mathfrak{m}_k$. On identifiera dans la suite l'espace $\mathfrak{g}_k$ et le supplémentaire $\mathfrak{a}_0+\mathfrak{a}_1+\ldots+\mathfrak{a}_{k-1}$ de $\mathfrak{m}_k$ dans $\mathfrak{g}$.

L'action de Gl (n) dans $\mathbf{R}^n$ définit une représentation linéaire de G dans $\mathfrak{a}$ laissant stable chaque sous-espace $\mathfrak{a}_k$. En associant à tout élément de Gl (n) son jet à l'origine, on obtient d'autre part pour tout $k \geqq 1$, un homomorphisme injectif $\mathrm{Gl}(n) \rightarrow G_k$. Si $k = 1$, cet homomorphisme est bijectif et permet d'identifier G_1 à Gl (n). Pour $1 \leqq k \leqq r$, il existe un homomorphisme surjectif canonique $h : G_r \rightarrow G_k$. L'homomorphisme $h : G_k \rightarrow G_1$ est inverse à gauche de l'injection $G_1 \rightarrow G_k$.

On désigne dans la suite par M une variété C^∞ connexe de dimension $n > 0$. Pour tout entier $k \geqq 1$, soit P_k le fibré des repères d'ordre k de M. C'est un fibré principal de groupe G_k. Si $1 \leqq k \leqq r$, il existe un homomorphisme surjectif canonique h_P de P_r dans P_k tel que $h_P(\xi s) = h_P(\xi) h(s)$ quels que soient $\xi \in P_r$ et $s \in G_r$.

On suppose maintenant donnée une forme de connexion γ sur P_1 ou, ce qui revient au même, une connexion linéaire dans TM. Elle définit une application exponentielle (notée exp) d'un voisinage de la section nulle de TM dans M. Pour tout $\xi \in P_1$ et tout $k \geqq 1$, on pose $\xi_k = j_k(\exp \circ \xi)$ (jet d'ordre k de $\exp \circ \xi$ à l'origine de $\mathbf{R}^n$). Le jet ξ_k est un repère d'ordre k. Pour tout $s \in \mathrm{Gl}(n)$, $(\xi s)_k = \xi_k s_k$, où s_k est l'image de s dans G_k. L'application $\xi \mapsto \xi_k$ est donc un isomorphisme de P_1 sur un sous-fibré principal de P_k ayant pour groupe l'image de G_1 dans G_k. Ce sous-fibré sera noté P_k^{nor} et ses éléments seront appelés les repères *normaux* d'ordre k (pour la forme de connexion γ).

Par transport de structure, γ définit une forme de connexion sur P_k^{nor} qui se prolonge canoniquement en une forme de connexion γ_k sur le fibré P_k. Supposons $1 \leqq k \leqq r$; si h est l'homomorphisme canonique de G_r sur G_k, et si h_P est l'homomorphisme canonique de P_r sur P_k, on a $h_P(P_r^{\mathrm{nor}}) = P_k^{\mathrm{nor}}$ et $h^T \circ \gamma_r = \gamma_k \circ h_P^T$.

Soit B un sous-groupe fermé de G_1 et soit Q_1 un sous-fibré principal de groupe B dans P_1. On note Q_k^{nor} le sous-fibré de P_k^{nor} formé par les ξ_k où $\xi \in Q_1$. En identifiant G_1 à son image dans G_k, Q_k^{nor} est un sous-fibré principal de groupe B. Si la connexion γ sur P_1 prolonge une connexion sur Q_1, alors la connexion γ_k sur P_k prolonge une connexion sur Q_k^{nor}.

Soit V un Gl (n)-module, c'est-à-dire un espace vectoriel réel de dimension finie dans lequel est donnée une représentation linéaire continue de Gl (n). On notera $P_1 V$ le fibré vectoriel de base M de fibré type V associé à P_1. Pour tout entier $k \geqq 1$, l'homomorphisme canonique $G_k \rightarrow G_1 = \mathrm{Gl}(n)$ définit sur V une structure de G_k-module. On peut considérer $P_1 V$ comme associé à P_k, l'application $P_k \times V \rightarrow P_1 V$ étant composée des applications $P_k \times V \rightarrow P_1 \times V$ et $P_1 \times V \rightarrow P_1 V$. On notera multiplicativement les applications $P_k \times V \rightarrow P_1 V$.

On sait qu'il existe un isomorphisme canonique μ du complexe $\Omega_{G_k}(P_k, V)$ sur le complexe $\Omega_k(M, P_1 V)$ des formes différentielles d'ordre $\leqq k$ sur M à valeurs dans $P_1 V$ (*cf.* [3]). Rappelons sa construction. Tout champ de vecteurs X sur M a un prolongement canonique $X^{(k)}$ sur P_k. Le champ $X^{(k)}$ est invariant par G_k et se projette sur X. Si $\omega \in \Omega_{G_k}^p(P_k, V)$ et si ξ est un repère d'ordre k au point $x \in M$, quels que soient les champs de vecteurs

$X_1, \ldots, X_p$ sur M, on a

$$((\mu\omega)(X_1, \ldots, X_p))_x = \xi\omega(X_1^{(k)}(\xi), \ldots, X_p^{(k)}(\xi)).$$

D'après le paragraphe 1, la restriction à B du groupe de structure de P_k définie par Q_k^{nor} détermine un homomorphisme $\varphi^* \circ \eta^{-1}$ de $C^*(\mathfrak{g}_k, B, V)$ dans $\Omega_{G_k}(P_k, V)$. En composant cet homomorphisme avec μ, on obtient un homomorphisme de complexes

$$\psi_k : \quad C^*(\mathfrak{g}_k, B, V) \to \Omega_k(M, P_1 V)$$

qui est caractérisé comme suit : si $c \in C^p(\mathfrak{g}_k, B, V)$ et si ξ est un repère d'ordre 1 au point x appartenant à Q_1, quels que soient $X_1, \ldots, X_p \in \mathfrak{a}(M)$, on a

$$(2.1) \qquad ((\psi_k c)(X_1, \ldots, X_p))_x = \xi\, c(\gamma_k(X_1^{(k)}(\xi_k)), \ldots, \gamma_k(X_p^{(k)}(\xi_k))).$$

Notons $H_k^*(M, P_1 V)$ l'homologie du complexe $\Omega_k(M, P_1 V)$. L'homomorphisme ψ_k définit un homomorphisme

$$\tilde{\psi}_k : \quad H^*(\mathfrak{g}_k, B, V) \to H_k^*(M, P_1 V).$$

La propriété 1.2 se traduit par

(2.2) *le noyau de* $\tilde{\psi}_k$ *est contenu dans le noyau de l'homomorphisme canonique* $H^*(\mathfrak{g}_k, B, V) \to H^*(\mathfrak{g}_k, V)$.

L'homomorphisme ψ_k dépend non seulement du sous-fibré Q_1 mais aussi de la forme de connexion γ qui détermine Q_k^{nor} à partir de Q_1. Si l'on remplace la connexion γ par une connexion γ' on obtient un nouveau sous-fibré de repères normaux $(Q_k^{\text{nor}})'$, mais les sous-fibrés Q_k^{nor} et $(Q_k^{\text{nor}})'$ correspondent à des G_k-morphismes homotopes de P_k dans $B \backslash G_k$. Il en résulte que $\tilde{\psi}_k$ est indépendant du choix de la connexion γ; il ne dépend que du sous-fibré Q_1. Du reste, si B contient un sous-groupe compact maximal de $Gl(n)$, alors G_k/G_1 étant contractile, B considéré comme sous-groupe de G_k contient un sous-groupe compact maximal de G_k. On a vu que dans ce cas, $\tilde{\varphi}^*$ est déterminé par B. *Par suite, si* B *contient un sous-groupe compact maximal de* $Gl(n)$, *l'homomorphisme* $\tilde{\psi}_k$ *est déterminé par* B.

Soit B' un sous-groupe fermé de $Gl(n)$ contenu dans B et soit Q_1' un sous-fibré principal de groupe B' dans P_1. Soit γ une forme de connexion sur P_1 prolongeant une forme de connexion sur Q_1'. L'homomorphisme $\psi_k : C^*(\mathfrak{g}_k, B, V) \to \Omega_k(M, P_1 V)$ défini par $Q_1 = Q_1' B$ et γ est composé de l'homomorphisme canonique $C^*(\mathfrak{g}_k, B, V) \to C^*(\mathfrak{g}_k, B', V)$ et de l'homomorphisme $\psi_k' : C^*(\mathfrak{g}_k, B', V) \to \Omega_k(M, P_1, V)$ défini par Q_1' et γ. Lorsqu'il s'agira comme aux paragraphes 5 et 6 de calculer l'image dans $H_k^*(M, P_1 V)$ d'une classe de $H^*(\mathfrak{g}_k, O(n), V)$ appartenant à l'image de $H^*(\mathfrak{g}_k, B, V) \to H^*(\mathfrak{g}_k, O(n), V)$, où B est un sous-groupe de $Gl(n)$ contenant $O(n)$, cette remarque permettra de limiter la restriction du groupe de structure de P_1 à B.

On désigne par $C^*(\mathfrak{g}, B, V)$ le complexe des cochaînes B-basiques sur $\mathfrak{g}$, à valeurs dans V, qui sont continues pour la topologie définie par la filtration $(\mathfrak{m}_k)$. On note $H^*(\mathfrak{g}, B, V)$ son homologie.

Soit $\Omega_\infty(M, P_1 V)$ la réunion des $\Omega_k(M, P_1 V)$; c'est le complexe des formes différentielles d'ordre supérieur sur M à valeurs dans $P_1 V$. Par passage à la limite, les homomorphismes ψ_k associés à un choix de Q et de γ définissent un homomorphisme

$$\psi : \quad C^*(\mathfrak{g}, B, V) \to \Omega_\infty(M, P_1 V).$$

Soit $H^*_\infty(M, P_1 V)$ l'homologie du complexe $\Omega_\infty(M, P_1 V)$. L'homomorphisme ψ définit un homomorphisme

$$\tilde{\psi} : \quad H^*(\mathfrak{g}, B, V) \to H^*_\infty(M, P_1 V) \tag{2.3}$$

qui est la limite des $\tilde{\psi}_k$. Il dépend en général du choix du sous-fibré Q_1. *Lorsque* $B = O(n)$, *l'homomorphisme* $\tilde{\psi}$ est *canoniquement associé à la variété* M *et au* Gl (n)*-module* V.

On remarquera que $C^0(\mathfrak{g}_k, B, V)$ et $\Omega^0_k(M, P, V)$ sont indépendants de k. Il en résulte que les homomorphismes canoniques

$$H^1(\mathfrak{g}_k, B, V) \to H^1(\mathfrak{g}, B, V) \qquad \text{et} \qquad H^1_k(M, P_1 V) \to H^1_\infty(M, P_1 V)$$

sont injectifs.

3. Champs de translation

On suppose donnée une connexion linéaire D *de torsion nulle* dans le fibré TM des vecteurs de la variété M. On note γ la forme de connexion sur P_1 définie par D et γ_k le prolongement de γ à P_k tel qu'il a été défini plus haut. Dans ce paragraphe, on va faire le calcul des valeurs de γ_k sur le champ $X^{(k)}$ auquel conduit la relation (2.1).

(3.1) Définition. — *Un champ de vecteurs* X *sur un voisinage de* $x \in M$ *est appelé un champ de translation en* x *s'il vérifie les conditions suivantes :*

(1) *la différentielle covariante* DX *de* X *est nulle au point* x;

(2) *il existe un voisinage ouvert étoilé* U *de* 0 *dans* $T_x M$ *tel que pour tout* $a \in U$, $t \mapsto X(\exp(ta))$ *soit un champ de Jacobi le long de l'arc de géodésique*

$$t \mapsto \exp(ta) \qquad (0 \leqq t \leqq 1).$$

Le champ de vecteurs initial d'une famille à un paramètre de difféomorphismes de M respectant la connexion D vérifie la condition (2) quel que soit $x \in M$; mais il ne vérifie en général pas (1).

(3.2) Lemme. — *Quel que soit* $b \in T_x M$, *il existe un champ de vecteurs* X *défini sur un voisinage ouvert de* x *ayant les propriétés suivantes :*

(i) $X(x) = b$;

(ii) X *est un champ de translation en* x;

(iii) *Pour tout* $k \geqq 1$, *en tout point de la fibre de* P_k *au-dessus de* x, *le prolongement* $X^{(k)}$ *est horizontal pour la forme de connexion* γ_k.

Soit $\xi \in P_1$ un repère d'ordre 1 au point x et soit $\xi(t)$ un arc de courbe horizontal C^∞ dans P_1 tel que $\xi(0) = \xi$ et $p^T \xi'(0) = b$, p désignant la projection $P_1 \to M$. Soient I un intervalle ouvert contenant 0 dans $\mathbf{R}$ et U un voisinage ouvert étoilé de 0 dans $\mathbf{R}^n$ tel que exp soit définie sur $\xi(t)$ U pour tout $t \in I$ et que $\exp \circ \xi \mid U$ soit un difféomorphisme de U sur un voisinage ouvert V de x dans M. Pour tout $t \in I$, soit $f_t = ((\exp \xi(t)) \circ (\exp \xi)^{-1}$. Soit X le champ de vecteurs défini sur V par

$$X(y) = \frac{d}{dt}(f_t(y))_{t=0}.$$

Puisque $f_t(x) = \exp(\xi(t)\,0) = p\,\xi(t)$, on a $X(x) = b$. Pour tout $k \geqq 1$, la courbe $\xi_k(t) = j_k(\exp \circ \xi(t))$ est une courbe horizontale dans P_k et $\xi_k'(0) = X^{(k)}(\xi_k)$. Le vecteur $X^{(k)}(\xi_k)$ est donc horizontal. Puisque $X^{(k)}$ est invariant par G_k, il en résulte que ses valeurs sont horizontales en tout point de la fibre de P_k contenant ξ_k, c'est-à-dire en tout point de la fibre au-dessus de x. Montrons maintenant que X est un champ de translation en x. Notons ξ^0 le relèvement de $\xi : \mathbf{R}^n \to TM$ dans T (TM) tel que

$$\xi^0(a) = \frac{d}{dt}(\xi(t)\,a)_{t=1} \quad \text{pour tout } a \in \mathbf{R}^n.$$

Sur U, on a $X_0(\exp \xi) = (\exp^T) \circ \xi^0$. Par suite, quel que soit $a \in \mathbf{R}^n$, $\theta \mapsto X(\exp(\theta\xi(a)))$ est un champ de Jacobi le long de la géodésique $\theta \mapsto \exp(\theta\xi(a))$. Puisque $\xi(t)$ est un arc de courbe horizontal dans P_1, $\xi^0(a)$ est un vecteur horizontal de TM quel que soit $a \in \mathbf{R}^n$. Il en résulte que le champ de Jacobi $\theta \mapsto X(\exp.(\theta\xi(a)))$ a une dérivée covariante nulle au point $\theta = 0$. Par conséquent, la différentielle covariante de X est nulle au point x et X est un champ de translation en x.

Les germes en x des champs de vecteurs qui sont champs de translation en x forment un sous-espace vectoriel de l'espace des germes de champs de vecteurs en x.

(3.3) Proposition. — *L'application qui associe à un germe de champ de vecteurs en x sa valeur en x définit un isomorphisme de l'espace des germes de champs de translation en x sur l'espace* $T_x M$. *Si* X *est un champ de translation en x, pour tout $k \geqq 1$ et tout repère ξ d'ordre k en x, le vecteur $X^{(k)}(\xi)$ est un vecteur horizontal de* P_k.

Si X est un champ de translation en x et si $X(x) = 0$, alors X est nul sur un voisinage de x. En effet, pour tout a appartenant à un voisinage de 0 dans $T_x M$, la restriction de X à l'arc de géodésique $\rho(t) = \exp(ta)$ $(0 \leqq t \leqq 1)$ est un champ de Jacobi nul au point $t = 0$. De plus $D_{\rho'(0)}(X \circ \rho) = 0$ puisque DX est nulle au point x. Par conséquent $X \circ \rho = 0$ et $X(\exp(a)) = 0$. La surjectivité et l'horizontalité résultent du lemme 3.2.

Les notations étant celles du paragraphe 2, pour tout entier $k \geqq 1$ et tout repère ξ d'ordre 1 en $x \in M$, $\exp \circ \xi$ définit un isomorphisme f_ξ de g_k sur l'espace des jets d'ordre k de champs de vecteurs nuls en x.

(3.4) Lemme. — *Soient ξ un repère d'ordre* 1 *au point $x \in$* M, X *un champ de vecteurs défini sur un voisinage de x et* Y *un champ de translation en x ayant même valeur que* X *au* *point* x. *Pour tout* $k \geqq 1$, *on a*

$$f_\xi(\gamma_k(X^{(k)}(\xi_k))) = j_k^x(X-Y)$$

(*jet d'ordre* k *de* $X-Y$ *au point* x).

En effet, puisque $Y^{(k)}(\xi_k)$ est horizontal, $\gamma_k(X^{(k)}(\xi_k)) = \gamma_k((X-Y)^{(k)}(\xi_k))$. Or pour tout champ de vecteurs Z nul au point x, on a $f_\xi(\gamma_k(Z^{(k)}(\xi_k))) = j_k^x Z$.

Pour calculer le jet des champs de translation en x, on écrira sous une autre forme la condition (2) du 3.1. Soit U un voisinage ouvert étoilé de 0 dans $T_x M$ tel que $\exp | U$ soit un difféomorphisme de U sur un ouvert de M. On note H le champ de vecteurs sur exp (U) tel que, pour tout $a \in U$:

$$H(\exp(a)) = \frac{d}{dt}(\exp(ta))_{t=0}.$$

(3.5) PROPOSITION. — *Soit* R *le tenseur de courbure de la connexion* D. *La condition* (2) *de* 3.1 *est équivalente aux conditions*

$$(2') \qquad D_H^2 X - D_H X = R(H, X)H \quad \textit{sur} \quad \exp(U),$$

$$(2'') \qquad (\theta(X)D)(H, H) = 0 \quad \textit{sur} \quad \exp(U)$$

[$\theta(X)D$ *étant la dérivée de Lie de* D *par rapport à* X].

Supposons en effet que le champ de vecteurs X vérifie la condition (2). Soit $a \in U$ et soit $\rho(t) = \exp(ta)$ $(0 \leqq t \leqq 1)$. L'équation des champs de Jacobi entraîne que $D_{\rho'}^2(X \circ \rho) = R(\rho', X \circ \rho)\rho'$ sur $[0, 1]$. Puisque $H(\rho(t)) = t\rho'(t)$, on en déduit que $D_{H \circ \rho}(X \circ \rho) - D_{H \circ \rho}(X \circ \rho) = R(H \circ \rho, X \circ \rho)(H \circ \rho)$ sur $[0, 1]$. Pour $t = 1$, ceci donne la relation (2') au point exp (a). La réciproque se vérifie par le même calcul. On a d'autre part

$$\begin{aligned}(\theta(X)D)(Y, Z) &= [X, D_Y Z] - D_{[X, Y]}Z - D_Y[X, Z] \\ &= D_X D_Y Z - D_{D_Y Z}X - D_{[X, Y]}Z - D_Y D_X Z + D_Y D_Z X\end{aligned}$$

ou encore

$$(3.6) \qquad (\theta(X)D)(Y, Z) = D_Y D_Z X - D_{D_Y Z}X - R(Y, X)Z$$

quels que soient $X, Y, Z \in \mathfrak{a}(M)$. Puisque $D_H H = H$, la condition (2') s'écrit donc $(\theta(X)D)(H, H) = 0$.

Il existe sur exp (U) une connexion linéaire ∇ et une seule telle $\nabla_H H = H$ et que la courbure et la torsion de ∇ soient nulles. Cette connexion devient la connexion plate définie par la structure vectorielle de $T_x M$ lorsque l'on identifie U et exp (U) par le difféomorphisme $\exp | U$. Pour tout $a \in T_x M$, il existe un champ de vecteurs P_a sur exp (U) et un seul tel que $P_a(x) = a$ et $\nabla P_a = 0$. On notera ∇_a la dérivation covariante par rapport au champ P_a.

Soit t un champ de tenseur de type (p, q) sur exp(U). En tout point de exp (U) on a

$$(3.7) \qquad \theta(H)t = \nabla_H t + (p-q)t.$$

Le jet $j^x t$ de t au point x s'identifie à $a \to \sum_{r \geqq 0} (1/r\,!)\,(\nabla_a^r t)_x$, qui est une série formelle sur $T_x M$ à valeurs dans l'espace $\otimes_p^q T_x M$ des tenseurs de type (p, q) sur $T_x M$. La composante $a \to (1/r\,!)\,(\nabla_a^r t)_x$ de $j^x t$ sera notée t_{t+p-q}. Pour tout $i \geqq p-q$, t_i est une application polynomiale homogène de degré $i+p-q$ de $T_x M$ dans $\otimes_p^q T_x M$ et le jet de t au point x s'écrit

$$j^x t = t_{p-q} + t_{p-q+1} + \ldots .$$

Compte tenu de (3.7), on a

$$(3.8) \qquad (\theta(H)\,t_r) = r t_r, \qquad (\nabla_H t)_r = (r+q-p)\,t_r$$

pour tout r.

On a $j^x H = H_0$ = identité sur $T_x M$. Si l'on considère t comme une forme différentielle de degré p sur $\exp(U)$ à valeurs dans $\otimes^q TM$, on a

$$(t(H, \ldots, H))_r = t_r(H_0, \ldots, H_0),$$

où t_r est considéré comme application polynomiale de $T_x M$ dans $\operatorname{Hom}(\otimes^p T_x M, \otimes^q T_x M)$. En particulier,

$$(3.9) \qquad (t(H, \ldots, H))_{p-q}(a) = t_{p-q}(a, \ldots, a) = t(a, \ldots, a)$$

pour tout $a \in T_x M$.

Soit α le champ de tenseurs de type (2,1) sur $\exp(U)$ tel que $D_X Y = \nabla_X Y + \alpha(X, Y)$ quels que soient les champs de vecteurs X, Y sur $\exp(U)$. On a $j^x \alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots$. Puisque $\alpha(H, H) = D_H H - \nabla_H H = 0$, il résulte de (3.9) que $\alpha(a, a) = \alpha_1(a, a) = 0$ pour tout $a \in T_x M$. Puisque *la torsion de* D *est nulle*, le tenseur α est symétrique et par conséquent $\alpha_1 = 0$, autrement dit α est nul au point x. Il en résulte que, si X est un champ de vecteurs sur $\exp(U)$, les différentielles covariantes DX et ∇X coïncident au point x et que, par suite, X_0 est la valeur en x de DX. On a d'autre part d'après (3.6) :

$$\begin{aligned}(\theta(X)\,D)(H, H) &= (\theta(X)\,\nabla)(H, H) + (\theta(X)\,\alpha)(H, H)\\ &= \nabla_H \nabla_H X - \nabla_H X - 2\,\alpha([X, H], H).\end{aligned}$$

Compte tenu de (3.8) ceci prouve

$$(3.10) \qquad ((\theta(X)\,D)(H, H))_r = r(r+1)\,X_r + 2 \sum_{i=-1}^{i=r-2} i\,\alpha_{r-i}(X_i, H_0)$$

pour tout $r \geqq -1$. Cette relation et la proposition 3.5 donnent le résultat suivant :

(3.11) LEMME. — *Si la torsion de* D *est nulle et si* X *est un champ de translation en* x, *alors* $j^x X = X_{-1} + X_0 + \ldots$ *vérifie les conditions :*

(1) $X_0 = 0$,

(2) $r(r+1)\,X_r + 2 \sum_{i=-1}^{i=r-2} i\,\alpha_{r-i}(X_i, H_0) = 0$ *pour* $r \geqq 0$.

Ces conditions déterminent la suite X_r à partir de $X_{-1} = X(x)$. En particulier,

$$(3.12) \qquad X_1 = \alpha_2(X_{-1}, H_0).$$

Notons que l'on sait exprimer la suite α_i au moyen des valeurs en x de la courbure de D et de ses différentielles covariantes (*cf.* [1], p. 326).

4. **Calcul de** $H^1(\mathfrak{g}, O(n), V)$

On se limitera au cas où V est un $Gl(n)$-module semi-simple et où $n > 1$.

(4.1) LEMME. — $H^1(\mathfrak{sl}(n), O(n), V) = 0$.

Soit en effet c un 1-cocycle $O(n)$-basique sur $\mathfrak{sl}(n)$. Puisque $\mathfrak{sl}(n)$ est semi-simple, il existe un $u \in V$ tel que $c(a) = au$ pour tout $a \in \mathfrak{sl}(n)$. Comme c est nul sur $\mathfrak{o}(n)$, c'est donc que $u \in V^{o(n)}$. Soit $s \in O(n) - SO(n)$; puisque c est $O(n)$-basique :

$$c(s^{-1}as) = s^{-1}c(a) \qquad \text{et} \qquad c(a) = a\left(\frac{su+u}{2}\right)$$

pour tout $a \in \mathfrak{sl}(n)$. Puisque $(su+u)/2 \in V^{O(n)}$, ceci prouve que la classe de c dans $H^1(\mathfrak{sl}(n), O(n), V)$ est nulle.

(4.2) LEMME. — *Soit* $\mathfrak{g}^+$ *l'idéal de* $\mathfrak{g}$ *formé par les jets de champs de vecteurs ayant l'origine pour zéro d'ordre au moins* 2. *Si* $n > 1$, *pour tout* $p > 1$, *on a* $\mathfrak{a}_p \subset [\mathfrak{g}^+, \mathfrak{g}^+]$.

La démonstration est une vérification facile.

Pour tout $f \in \mathrm{Hom}_{Gl(n)}(\mathfrak{a}_1, V)$, soit c_f la 1-cochaîne sur $\mathfrak{g}$ à valeurs dans V définie par $c_f = f$ sur $\mathfrak{a}_1$ et $c_f \mid \mathfrak{a}_i = 0$ pour $i \neq 1$. Elle est évidemment $O(n)$-basique. C'est un cocycle. La relation $ac_f(b) - bc_f(a) = c_f([a, b])$ est vérifiée lorsque $a \in \mathfrak{a}_0$ parce que f est $Gl(n)$-équivariante. Si $a, b \in \mathfrak{g}^+$ elle est vérifiée car $\mathfrak{g}^+ V = 0$ et $c([a, b]) = 0$ (lemme 4.2). L'application $\lambda : f \mapsto c_f$ est une application linéaire injective de $\mathrm{Hom}_{Gl(n)}(\mathfrak{a}_1, V)$ dans l'espace $Z^1(\mathfrak{g}, O(n), V)$ des 1-cocycles sur $\mathfrak{g}$ à valeurs dans V qui sont $O(n)$-basiques.

Soit e la base du centre de $\mathfrak{a}_0$ égale à l'élément unité de $\mathfrak{gl}(n)$. Quels que soient $p \geqq -1$ et $a \in \mathfrak{a}_p$, on a $[e, a] = pa$. Pour tout $u \in V^{Gl(n)}$, on définit une cochaîne c_u sur $\mathfrak{g}$ à valeurs dans V en posant $c_u(e) = u$ et $c_u(a) = 0$ si $a \in \mathfrak{sl}(n) + \mathfrak{g}^+$. Il est clair que c_u est $O(n)$-basique. C'est un cocycle. La relation $ac_u(b) - bc_u(a) = c_u([a, b])$ est trivialement vérifiée si $a, b \in \mathfrak{sl}(n) + \mathfrak{g}^+$ ou si $a, b \in \mathbf{R}e$. Si $b \in \mathfrak{sl}(n) + \mathfrak{g}^+$, on a $[e, b] \in \mathfrak{sl}(n) + \mathfrak{g}^+$ et $bc_u(e) = bu = 0$ parce que $\mathfrak{g}^+ V = 0$ et que $u \in V^{Gl(n)}$. L'application $\mu : u \mapsto c_u$ est une application linéaire injective de $V^{Gl(n)}$ dans $Z^1(\mathfrak{g}, O(n), V)$.

(4.3) LEMME. — *L'espace* $Z^1(\mathfrak{g}, O(n), V)$ *est somme directe des sous-espaces* $\mathrm{Im}(\lambda)$, $\mathrm{Im}(\mu)$ *et* $d(C^0(\mathfrak{g}, O(n), V))$.

Il est clair que $\mathrm{Im}(\lambda) \cap \mathrm{Im}(\mu) = (0)$. Montrons que tout cobord appartenant à $\mathrm{Im}(\lambda) + \mathrm{Im}(\mu)$ est nul. Soit $v \in C^0(\mathfrak{g}, 0(n), V) = V^{O(n)}$ tel que $dv \in \mathrm{Im}(\lambda) + \mathrm{Im}(\mu)$. Puisque dv est nulle sur $\mathfrak{a}_1$, $dv \in \mathrm{Im}(\mu)$. Soit u l'élément de $V^{Gl(n)}$ tel que $dv = c_u$. On a $u = c_u(e) = (dv)(e) = ev \in eV$. Puisque V est un $Gl(n)$-module simple, $V^{Gl(n)} \cap eV = (0)$, donc $u = 0$ et $dv = 0$. Il reste à montrer que tout $c \in Z^1(\mathfrak{g}, O(n), V)$ est cohomologue à un élément de $\mathrm{Im}(\lambda) + \mathrm{Im}(\mu)$. Puisque $\mathfrak{g}^+ V = 0$, on a $c([\mathfrak{g}^+, \mathfrak{g}^+]) = (0)$, donc pour tout $p > 1$, $c(\mathfrak{a}_p) = (0)$ d'après le lemme 4.2. Soit f la restriction de c à $\mathfrak{a}_1$. Pour tout $a \in \mathfrak{a}_0$ et tout $b \in \mathfrak{a}_1$, on a $af(b) = f([a, b])$. Ceci montre que f est équivariante par rapport à la composante connexe neutre $\mathrm{Gl}(n)^0$ de $\mathrm{Gl}(n)$. Puisque c est $\mathrm{O}(n)$-équivariant, il en résulte que $f \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{Gl}(n)}(\mathfrak{a}_1, \mathrm{V})$. Posons $c' = c - \lambda(f)$. On a $c' \in \mathrm{Z}^1(\mathfrak{g}, \mathrm{O}(n), \mathrm{V})$ et $c'(\mathfrak{a}_p) = (0)$ pour tout $p \geqq 1$. D'après le lemme 4.1, il existe un élément $v \in \mathrm{V}^{\mathrm{O}(n)}$ tel que $c' - dv$ soit nul sur $\mathfrak{sl}(n) + \mathfrak{g}^+$. Posons $c'' = c' - dv \in \mathrm{Z}^1(\mathfrak{g}, \mathrm{O}(n), \mathrm{V})$. Pour tout $a \in \mathfrak{sl}(n)$, on a $ac''(e) = ec''(a) + c''([a, e]) = 0$, donc $c''(e) \in \mathrm{V}^{\mathfrak{sl}(n)}$. Puisque V est un $\mathrm{Gl}(n)$-module semi-simple, $\mathrm{V}^{\mathfrak{sl}(n)}$ est somme directe de $\mathrm{V}^{\mathfrak{gl}(n)}$ et de $e\,\mathrm{V}^{\mathfrak{sl}(n)}$. Puisque $c''(e) \in \mathrm{V}^{\mathrm{O}(n)}$, la composante de $c''(e)$ dans $e\,\mathrm{V}^{\mathfrak{sl}(n)}$ appartient à $\mathrm{V}^{\mathrm{O}(n)} \cap e\,\mathrm{V}^{\mathfrak{sl}(n)} = \mathrm{V}^{\mathrm{O}(n)} \cap \mathrm{V}^{\mathfrak{sl}(n)}$. Il existe donc un élément $w \in \mathrm{V}^{\mathrm{O}(n)} \cap \mathrm{V}^{\mathfrak{sl}(n)}$ tel que $c''(e) - ew \in \mathrm{V}^{\mathfrak{gl}(n)}$. Le cocycle $c''' = c'' - dw$ est $\mathrm{O}(n)$-basique, nul sur $\mathfrak{sl}(n) + \mathfrak{g}^+$ et $c'''(e) \in \mathrm{V}^{\mathfrak{gl}(n)}$. Puisque e est invariant par $\mathrm{O}(n)$, on a $c'''(e) \in \mathrm{V}^{\mathrm{Gl}(n)}$ et $c''' = \mu(c'''(e))$, ce qui achève la démonstration.

(4.4) COROLLAIRE. — $\mathrm{H}^1(\mathfrak{g}, \mathrm{O}(n), \mathrm{V})$ *est canoniquement isomorphe à*

$$\mathrm{V}^{\mathrm{Gl}(n)} \times \mathrm{Hom}_{\mathrm{Gl}(n)}(\mathfrak{a}_1, \mathrm{V}).$$

(4.5) COROLLAIRE. — *Pour tout* $k > 1$, $\mathrm{H}^1(\mathfrak{g}_k, \mathrm{O}(n), \mathrm{V}) \to \mathrm{H}^1(\mathfrak{g}, \mathrm{O}(n), \mathrm{V})$ *est un isomorphisme et pour tout* $k \geqq 1$, $\mathrm{H}^1(\mathfrak{g}_k, \mathrm{O}(n), \mathrm{V}) \to \mathrm{H}^1(\mathfrak{g}_k, \mathrm{V})$ *est injectif.*

Lorsque $n > 1$, le $\mathrm{Gl}(n)$-module $\mathfrak{a}_1$ est somme directe de deux sous-modules simples : le module $\mathrm{S}\,\mathfrak{a}_1$ des formes bilinéaires symétriques sur $\mathfrak{a}_{-1} = \mathbf{R}^n$ à valeurs dans $\mathbf{R}^n$ dont la contraction est nulle et le module isomorphe à $(\mathfrak{a}_{-1})^*$, ensemble des formes bilinéaires $(x, y) \mapsto f(x)\,y + f(y)\,x$ où $x, y \in \mathfrak{a}_{-1}$ et $f \in (\mathfrak{a}_{-1})^*$. Si V est un module simple, les seuls cas où $\mathrm{H}^1(\mathfrak{g}, \mathrm{O}(n), \mathrm{V}) \neq (0)$ sont donc :

(1) V est isomorphe à $\mathbf{R}$ muni de la structure de $\mathrm{Gl}(n)$-module trivial,

(2) V est isomorphe à $(\mathfrak{a}_{-1})^*$,

(3) V est isomorphe à $\mathrm{S}\,\mathfrak{a}_1$.

Les commutants de ces modules simples étant formés par les homothéties, dans chacun de ces cas $\dim \mathrm{H}^1(\mathfrak{g}, \mathrm{O}(n), \mathrm{V})$ est de dimension 1. On notera que

$$\mathrm{H}^1(\mathfrak{g}_1, \mathrm{O}(n), \mathrm{V}) \to \mathrm{H}^1(\mathfrak{g}, \mathrm{O}(n), \mathrm{V})$$

est surjective si V est isomorphe à $\mathbf{R}$ et que c'est l'application nulle si V est isomorphe à $(\mathfrak{a}_{-1})^*$ ou $\mathrm{S}\,\mathfrak{a}_1$.

Lorsque $n = 1$, si V est simple, les seuls cas où $\mathrm{H}^1(\mathfrak{g}, \mathrm{O}(n), \mathrm{V}) \neq (0)$ s'obtiennent pour V isomorphe à $\mathbf{R} = \mathfrak{a}_0$, $\mathfrak{a}_1 = (\mathfrak{a}_{-1})^*$ ou $\mathfrak{a}_2$.

5. La classe de divergence

Les notations étant celles du paragraphe précédent, soit $c_n = \mu(ne)$. La restriction de c_n à $\mathfrak{a}_0 = \mathfrak{gl}(n)$ est la trace. Puisque c_n est nul sur $\mathfrak{g}^+$, c'est l'image d'un cocycle appartenant à $\mathrm{C}^1(\mathfrak{g}_1, \mathrm{O}(n), \mathbf{R})$ que l'on note encore c_n. Soit M une variété C^∞ de dimension n. On va calculer l'image dans $\mathrm{H}^1_1(\mathrm{M}, \mathrm{P}_1\,\mathbf{R})$ de la classe $\mathfrak{c}_n$ de c_n dans $\mathrm{H}^1(g_1, \mathrm{O}(n), \mathbf{R})$ par l'homomorphisme canonique $\tilde{\psi}$ [*cf.* (2.3)]. Soit B le sous-groupe de $\mathrm{Gl}(n)$ formé par les matrices de déterminant ± 1. Le cocycle c_n est visiblement B-basique. D'après la remarque de la fin du paragraphe 2, pour calculer $\tilde{\psi}\,\mathfrak{c}_n$, on peut donc utiliser l'homomorphisme ψ défini par un sous-fibré Q_1 de groupe B dans P_1. Il en existe toujours puisque $B \supset O(n)$; le choix de Q_1 équivaut au choix d'une forme différentielle impaire de rang maximal en tout point de M. Soit γ une forme de connexion sur P_1, prolongement d'une forme de connexion sur Q_1 et soit D la connexion linéaire dans TM définie par γ. On supposera γ choisie en sorte que la torsion de D soit nulle. Soit x un point de M. On utilisera la connexion D pour identifier les jets de champs de vecteurs en x à des séries formelles sur $T_x M$ à valeurs dans $T_x M$ (*cf.* § 3).

Soient X un champ de vecteurs sur M et Y un champ de translation en x tels que $X(x) = Y(x)$. D'après 3.11, on a $Y_0 = 0$ et par suite $j_1^x(X-Y) = X_0$. Soit ξ un repère d'ordre 1 au point x appartenant à Q_1. Si l'on identifie $\mathbf{R}^n$ et $T_x M$ par l'isomorphisme ξ, on a $\gamma(X^{(1)}(\xi)) = j_1^x(X-Y) = X_0$ (lemme 3.4) et par conséquent $c_n(\gamma(X^{(1)}(\xi))) = \operatorname{Tr} X_0$. Compte tenu de (2.1), on voit donc que

$$((\psi\, c_n)(X))_x = \xi \operatorname{Tr} X_0. \tag{5.1}$$

Soit DX la différentielle covariante de X. On a $(DX)(a) = D_a X = X_0(a)$ pour tout $a \in T_x M$, donc $\operatorname{Tr} X_0 = \operatorname{Tr}(DX)_x$. En identifiant les sections de $P_1\,\mathbf{R}$ et les fonctions numériques sur M, la relation (5.1) s'énonce comme suit :

(5.2) PROPOSITION. — *La classe* $\tilde{\psi}\,\mathfrak{c}_n \in H_1^1(M, P_1\,\mathbf{R})$ *est la classe du cocycle* $X \to \operatorname{Tr}(DX)$ *où* D *est une connexion linéaire sans torsion dans* TM *telle qu'il existe sur* M *une forme différentielle impaire de rang maximum invariante par transport parallèle.*

Si M est orientable et si D est une connexion linéaire vérifiant cette condition, il existe sur M une forme volume v telle que la differentielle covariante Dv soit nulle. En notant div la divergence relative à v, on a

$$\begin{aligned}(\operatorname{div} X)\, v(Y_1, \ldots, Y_n) &= (\theta(X)\, v)(Y_1, \ldots, Y_n)\\ &= X.v(Y_1, \ldots, Y_n) - \sum_i v(Y_1, \ldots, [X, Y_i], \ldots, Y_n)\\ &= \sum_i v(Y_1, \ldots, D_{Y_i} X, \ldots, Y_n) = (\operatorname{Tr}(DX))\, v(Y_1, \ldots, Y_n)\end{aligned}$$

quels que soient les champs de vecteurs $X, Y_1, \ldots, Y_n$ sur M. Par conséquent

$$(\tilde{\psi}\,\mathfrak{c}_n)(X) = \operatorname{div} X.$$

On notera que $\tilde{\psi}\,\mathfrak{c}_n$, de même que son image dans $H_\infty^1(M, P_1\,\mathbf{R})$, n'est jamais nulle [*cf.* (2.2) et (4.5)].

6. Classes de degré 1 et d'ordre 2

Des notations étant celles du paragraphe 4, soit f l'application identique de $\mathfrak{a}_1$ dans $\mathfrak{a}_1$. Le cocycle $\lambda(f) \in Z^1(\mathfrak{g}, O(n), \mathfrak{a}_1)$ étant nul sur $\mathfrak{a}_p$ pour tout $p > 1$, c'est l'image d'un cocycle $c \in Z^1(\mathfrak{g}_2, O(n), \mathfrak{a}_1)$. Soit M une variété C^∞ de dimension n. On va calculer l'image dans $H_2^1(M, P_1\,\mathfrak{a}_1)$ de la classe $\tilde{c}$ de c dans $H^1(\mathfrak{g}_2, O(n), \mathfrak{a}_1)$ par l'homomorphisme canonique $\tilde{\psi}$ défini au paragraphe 2. Il est clair que c est $Gl(n)$-basique. On peut donc prendre l'homomorphisme ψ défini par le sous-fibré $Q_1 = P_1$ et une forme de connexion γ sur P_1 dont la torsion est nulle. D'après (2.1), pour tout champ de vecteurs X sur M, tout point $x \in M$ et tout repère ξ d'ordre 1 au point x, on a

$$((\psi c)(X))_x = \xi c(\gamma_2(X^{(2)}(\xi_2))).$$

Soit Y un champ de translation en x tel que $Y(x) = X(x)$. Si l'on identifie les jets de champs de tenseurs en x à des séries formelles sur $T_x M$ à valeurs tensorielles au moyen de la connexion linéaire D définie par γ, on obtient $j_2^x(X-Y) = X_0 + X_1 - Y_1$. En identifiant $\mathbf{R}^n$ et $T_x M$ par l'isomorphisme ξ, on a d'après (3.4) :

$$\gamma_2(X^{(2)}(\xi_2)) = j_2^x(X-Y) = X_0 + X_1 - Y_1,$$
$$\xi c(\gamma_2(X^{(2)}(\xi_2)) = c(\gamma_2(X^{(2)}(\xi_2)) = X_1 - Y_1.$$

Compte tenu de (3.10) et (3.12) :

$$X_1 - Y_1 = X_1 - \alpha_2(X_{-1}, H_0) = \frac{1}{2}((\theta(X)D)(H, H))_1$$

ce qui, avec (3.9), donne $X_1 - Y_1 = (1/2)((\theta(X)D)_x$ et $(\psi c)(X) = (1/2)\theta(X)D$. En résumé :

(6.1) PROPOSITION. — *La classe* $\tilde{\psi}\tilde{c} \in H_2^1(M, P_1\mathfrak{a}_1)$ *est la classe du cocycle* $X \mapsto (1/2)\theta(X)D$, *où* D *est une connexion linéaire de torsion nulle dans* TM.

Soit q la contraction qui à une forme bilinéaire symétrique $\beta \in \mathfrak{a}_1$ associe la forme linéaire $q\beta$ définie par $(q\beta)(x) = \mathrm{Trace}(y \mapsto \beta(x, y))$. La cochaîne $q \circ c$ est un cocycle sur $\mathfrak{g}_2$ dont la classe $\widetilde{q \circ c}$ est une base de $H^1(\mathfrak{g}_2, O(n), (\mathfrak{a}_{-1})^*)$. Il est clair que la forme $\psi(q \circ c)$ s'obtient en composant la forme ψc et la contraction des tenseurs de type (2, 1) sur les tenseurs de type (1, 0).

(6.2) PROPOSITION. — *Soit* D' *une connexion linéaire dans le fibré vectoriel* Λ^nTM. *La forme* $X \mapsto \theta(X)D'$, *considérée comme forme de degré* 1 *à valeurs dans le fibré* TM* *est un cocycle appartenant à la classe* $2\tilde{\psi}(\widetilde{q \circ c})$.

Supposons d'abord que D' soit la connexion définie par la connexion D introduite plus haut. Soient $X, Y, X_1, \ldots, X_n$ des champs de vecteurs sur M. On a

$$\begin{aligned}(\theta(X)D')_Y(X_1 \wedge \ldots \wedge X_n) &= \sum_i X_1 \wedge \ldots \wedge (\theta(X)D)(Y, X_i) \wedge \ldots \wedge X_n \\ &= t(X, Y)(X_1 \wedge \ldots \wedge X_n),\end{aligned}$$

où $t(X, Y)$ est la trace de $Z \mapsto (\theta(X)D)(Y, Z)$. Dans ce cas $2\psi(q \circ c)$ est donc le cocycle $X \mapsto \theta(X)D'$. Toute autre connexion linéaire dans Λ^nTM étant de la forme $D' + \nu$ où ν est une forme différentielle scalaire de degré 1, la classe du cocycle $X \mapsto \theta(X)D'$ dans $H_2^1(M, P_1(\mathfrak{a}_{-1})^*) = H_2^1(M, TM^*)$ est indépendante du choix de D' et coïncide avec $2\tilde{\psi}(\widetilde{q \circ c})$.

Notons que les classes $\tilde{\psi}\tilde{c}$ et $\tilde{\psi}(\widetilde{q \circ c})$, de même que leurs images dans $H^1(M, P_1\mathfrak{a}_1)$ et $H^1(M, TM^*)$ ne sont jamais nulles [*cf.* (2.2) et (4.5)].

REMARQUE 1. — Soit $\Omega_k(\mathrm{M}, \Lambda^q \mathrm{TM}^*)$ le complexe des formes différentielles d'ordre $\leqq k$ sur M dont les valeurs sont des formes différentielles (d'ordre 0) de degré q sur M. Si $\omega \in \Omega_k^p(\mathrm{M}, \Lambda^q \mathrm{TM}^*)$, la différentiation extérieure, appliquée aux valeurs de ω, donne une forme $d'\omega \in \Omega_{k+1}^p(\mathrm{M}, \Lambda^{q+1}\mathrm{TM}^*)$ (*cf.* [2], [3]). On définit ainsi un homomorphisme de complexes $d' : \Omega_k(\mathrm{M}, \Lambda^q \mathrm{TM}^*) \to \Omega_{k+1}(\mathrm{M}, \Lambda^{q+1}\mathrm{TM}^*)$ donc un homomorphisme canonique $\mathrm{H}_k^*(\mathrm{M}, \Lambda^q \mathrm{TM}^*) \to \mathrm{H}_{k+1}^*(\mathrm{M}, \Lambda^{q+1}\mathrm{TM}^*)$.

Appliquant ceci au cocycle $\psi\, c_n \in \Omega_1^1(\mathrm{M}, \Lambda \circ \mathrm{TM}^*)$ défini au paragraphe 5, on obtient un cocycle $d'(\psi\, c_n) \in \Omega_2^1(\mathrm{M}, \mathrm{TM}^*)$. Quels que soient les champs de vecteurs X, Y sur M, on a

$$((d'(\psi\, c_n))(\mathrm{X}))(\mathrm{Y}) = \mathrm{Y}.((\psi\, c_n)(\mathrm{X})) = \mathrm{Y}.\mathrm{Tr}(\mathrm{DX}),$$

où D est, comme au paragraphe 5, une connexion linéaire dont la courbure est en tout point de trace nulle. Si $\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_n$ est une base de sections de TM sur un ouvert W de M et si $\omega_1, \ldots, \omega_n$ est la base de sections de TM* duale de (X_i), on a sur W

$$\begin{aligned}\mathrm{Y}.\mathrm{Tr}(\mathrm{DX}) &= \sum_i \mathrm{Y}.\omega_i(\mathrm{D}_{\mathrm{X}_i}\mathrm{X}) = \sum_{ij}(\mathrm{D}_\mathrm{Y}\omega_i)(\mathrm{X}_j)\,\omega_j(\mathrm{D}_{\mathrm{X}_i}\mathrm{X}) + \sum_i \omega_i(\mathrm{D}_\mathrm{Y}\mathrm{D}_\mathrm{X}\mathrm{X}) \\ &= \sum_i \omega_i(\mathrm{D}_\mathrm{Y}\mathrm{D}_{\mathrm{X}_i}\mathrm{X} - \mathrm{D}_{\mathrm{D}_\mathrm{Y}\mathrm{X}_i}\mathrm{X}).\end{aligned}$$

Compte tenu de (3.6), on obtient

$$\mathrm{Y}.\mathrm{Tr}(\mathrm{DX}) = \mathrm{Trace}(\mathrm{Z} \mapsto (\theta(\mathrm{X})\,\mathrm{D})(\mathrm{Y}, \mathrm{Z})),$$

ce qui prouve que $d'(\psi\, c_n) = 2\,\psi\,(q \circ c)$.

REMARQUE 2. — Soit $\mathrm{C}^*(\mathfrak{a}, \mathbf{R})$ le complexe des cochaînes continues sur $\mathfrak{a}$ à valeurs dans le $\mathfrak{a}$-module trivial $\mathbf{R}$. La décomposition $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_{-1} + \mathfrak{g}$ définit sur $\mathrm{C}^*(\mathfrak{a}, \mathbf{R})$ une bigraduation, l'espace des éléments de bidegré (p, q) étant

$$\mathrm{C}^q(\mathfrak{g}, \mathbf{R}) \otimes \mathrm{C}^p(\mathfrak{a}_{-1}, \mathbf{R}) = \mathrm{C}^q(\mathfrak{g}, \Lambda^p(\mathfrak{a}_{-1})^* \qquad (cf.\ [2] \text{ et } [3]).$$

Puisque $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{a}_{-1}$ sont des sous-algèbres de $\mathfrak{a}$, l'opérateur d de $\mathrm{C}^*(\mathfrak{a}, \mathbf{R})$ est somme de deux composantes d' et d'' de types respectifs (1, 0) et (0, 1). Sur $\mathrm{C}^*(\mathfrak{g}, \Lambda^p(\mathfrak{a}_{-1})^*)$, d'' coïncide avec l'opérateur $(-1)^p d$, où d est l'opérateur du complexe des cochaînes sur $\mathfrak{g}$ à valeurs dans $\Lambda^p(\mathfrak{a}_{-1})^*$. Si une cochaîne $c \in \mathrm{C}^*(\mathfrak{g}, \Lambda^p(\mathfrak{a}_{-1})^*)$ est nulle sur $\mathfrak{a}_r$ pour $r > k$, alors $d'c$ est nulle sur $\mathfrak{a}_r$ pour $r > k+1$. D'autre part, si c est O (n)-basique, il en est de même de $d'c$. Puisque $d'd'' + d''d' = 0$, pour tout p et tout k, d' est un homomorphisme du complexe $\mathrm{C}^*(\mathfrak{g}_k, \mathrm{O}(n), \Lambda^p(\mathfrak{a}_{-1})^*)$ dans le complexe $\mathrm{C}^*(\mathfrak{g}_{k+1}, \mathrm{O}(n), \Lambda^{p+1}(\mathfrak{a}_{-1})^*)$. On vérifie que le diagramme

$$\begin{array}{ccc}\mathrm{C}^*(\mathfrak{g}_k, \mathrm{O}(n), \Lambda^p(\mathfrak{a}_{-1})^*) & \xrightarrow{d'} & \mathrm{C}^*(\mathfrak{g}_{k+1}, \mathrm{O}(n), \Lambda^{p+1}(\mathfrak{a}_{-1})^*) \\ \psi\downarrow & & \psi\downarrow \\ \Omega_k(\mathrm{M}, \Lambda^p\mathrm{TM}^*) & \xrightarrow{d'} & \Omega_{k+1}(\mathrm{M}, \Lambda^{p+1}\mathrm{TM}^*)\end{array}$$

dans lequel les homomorphismes ψ sont définis par une métrique riemannienne sur M est un diagramme commutatif. En passant à la limite sur k, on obtient donc un homomorphisme du complexe $\mathrm{C}^*(\mathfrak{a}, \mathrm{O}(n), \mathbf{R})$ dans le complexe $\mathrm{L} = \bigoplus_{p,q} \Omega_\infty^q(\mathrm{M}, \Lambda^p\mathrm{TM}^*)$

dont l'opérateur bord se définit en combinant les opérateurs d et d'. On sait que l'homologie de L est canoniquement isomorphe à l'homologie du « complexe diagonal » de Gelfand-Fuks (*cf.* [2] et [3]); les homomorphismes ψ donnent ainsi un homomorphisme canonique de $H^* (\mathfrak{a}, O(n), \mathbf{R})$ dans l'homologie du complexe diagonal. Cet homomorphisme a été défini par Bott et Haefliger en utilisant une méthode beaucoup plus directe.

BIBLIOGRAPHIE

[1] M. Atiyah, R. Bott et V. K. Patodi, *On the Heat Equation and the Index Theorem* (*Invent. Math.*, vol. 19, 1973, p. 279-330).

[2] V. W. Guillemin, *Cohomology of Vector fields on a manifold* (*Advances in Math.*, vol. 10, n° 2, 1973, p. 192-220).

[3] M. V. Losyk, *Cohomologies of the Lie algebra of vector fields with coefficients in a trivial unitary representation* (*Funkt. Anal.*, vol. 6, n° 1, 1972, p. 24-36).

[4] W. T. Van Est, *On the algebraic cohomology concepts in Lie groups* (*Indag. Math.*, vol. 17, n° 3, 1955, p. 286-294).

[5] W. T. Van Est, *A generalisation of the Cartan-Leray Spectral Sequence I.* (*Indag. Math.*, vol. 20, n° 4, 1958, p. 399-413).

(Manuscrit reçu le 10 décembre 1973.)

J.-L. Koszul
Laboratoire de Mathématiques pures,
associé au C. N. R. S.,
B. P. n° 116,
38402 Saint-Martin d'Hères.