ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

HUBERT GOLDSCHMIDT

Prolongements d'équations différentielles linéaires. III. La suite exacte de cohomologie de Spencer

Annales scientifiques de l'É.N.S. 4e série, tome 7, nº 1 (1974), p. 5-27

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1974_4_7_1_5_0>

Ann. scient. Éc. Norm. Sup.,
4e série, t. 7, 1974, p. 5 à 28.

PROLONGEMENTS D'ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES.

III. LA SUITE EXACTE DE COHOMOLOGIE DE SPENCER

PAR HUBERT GOLDSCHMIDT

A Henri Cartan,
à l'occasion de son
70e *anniversaire*

Un des problèmes fondamentaux de la théorie des équations aux dérivées partielles étudié par Lie et Cartan est le suivant : quand peut-on dire que deux systèmes d'équations différentielles ont les mêmes solutions? La théorie des prolongements d'équations différentielles de Cartan aborde cette question lorsque les deux systèmes d'équations différentielles sont définis sur une même variété et construit des équations qui ont les mêmes solutions : un des systèmes est obtenu à partir de l'autre en rajoutant les équations obtenues en dérivant les équations de ce système. Nous avions montré [2] que les conjectures de Cartan sur les prolongements de ce type étaient vraies pour les équations différentielles linéaires sous certaines conditions de régularité.

Ici nous considérons un problème plus général, notamment comparer les solutions de systèmes différentiels de type particulier sur des variétés X et Y dans les cas où l'on a une fibration $\rho : X \rightarrow Y$. Sous des hypothèses de régularité les questions de résolubilité locale et de la nullité de la cohomologie de Spencer de certains systèmes peuvent être réduites à celles d'autres systèmes sur X et de systèmes sur Y. Plus précisément, nous construisons une suite exacte de cohomologie de Spencer (38) reliant la cohomologie de Spencer de trois systèmes (théorème 3), ce qui nous permet de montrer que ces questions pour certains systèmes projetables sur X peuvent être ramenées à celles pour des systèmes sur Y. Ceci sera notamment le cas pour des équations de Lie; nous y reviendrons dans une prochaine publication. En fait, initialement nous avions considéré ces problèmes en vue d'applications aux équations de Lie (*cf.* [3]), mais comme nos résultats semblaient être d'un intérêt indépendant, il nous a paru préférable de les présenter séparément dans le cadre général des équations différentielles surdéterminées.

Au paragraphe 3, nous reprenons certains résultats de [2]. Le théorème de prolongement (théorème 1) est une généralisation à la fois du théorème de Cartan-Kuranishi et du théorème de prolongement (théorème 1) de [2]; sa démonstration est essentiellement la même que l'une de celles de ce dernier données dans [2]. Nous obtenons aussi la généralisation correspondante de nos résultats de [2] sur la cohomologie de Spencer (théorème 2). Nous rappelons au paragraphe 2 les notions sur les familles bornées de modules sur les anneaux de polynômes et le résultat fondamental de cette théorie (proposition 1) dû à Mumford [4], dont nous nous étions servi dans [2] et dont nous avons besoin pour démontrer les théorèmes 1 et 2.

Au paragraphe 4, pour les équations différentielles du type décrit plus haut, on se servira des théorèmes 1 et 2 et d'une suite spectrale pour construire la suite exacte de cohomologie de Spencer sous certaines hypothèses.

Nous emploierons en général la notation et la terminologie de [1] et [2].

1. Cohomologie de Spencer

Soit X une variété différentiable de dimension n dont on note T le fibré tangent. Si E est un fibré vectoriel sur X, on note E_x la fibre de E en $x \in X$ et $\mathscr{E}$ le faisceau de sections de E. Nous supposerons toujours que les fibres d'un fibré vectoriel sont de même dimension. Soient $J_k(E)$ le fibré des k-jets de sections de E et $\pi_{k+l} : J_{k+l}(E) \rightarrow J_k(E)$ la projection naturelle. On note $j_k : \mathscr{E} \rightarrow J_k(\mathscr{E})$ l'opérateur différentiel d'ordre k qui envoie une section s de E dans le k-jet $j_k(s)$ de cette section.

Un sous-fibré $R_k \subset J_k(E)$ est une *équation différentielle* d'ordre k dans E. Pour $l \geqq 0$, on associe à R_k un sous-fibré à fibre variable $(R_k)_{+l}$ de $J_{k+l}(E)$, notamment le l-ième prolongement de R_k :

$$(R_k)_{+l} = J_{k+l}(E) \cap J_l(R_k),$$

qu'on note souvent R_{k+l} si aucune confusion n'en résulte. Ici l'on a identifié $J_{k+l}(E)$ à un sous-fibré de $J_l(J_k(E))$ à l'aide de l'application naturelle

$$\lambda_l : \quad J_{k+l}(E) \rightarrow J_l(J_k(E)),$$

qui envoie $j_{k+l}(s)(x)$ dans $j_l(j_k(s))(x)$, si s est une section de E sur un voisinage de $x \in X$. Rappelons que si $(R_k)_{+l}$ est un fibré vectoriel, alors le m-ième prolongement de $(R_k)_{+l}$ est égal à $(R_k)_{+(l+m)}$.

Le complexe de Spencer :

$$(1) \qquad 0 \rightarrow \mathscr{E} \xrightarrow{j_m} J_m(\mathscr{E}) \xrightarrow{D} \mathscr{T}^* \otimes J_{m-1}(\mathscr{E}) \xrightarrow{D} \Lambda^2 \mathscr{T}^* \otimes J_{m-2}(\mathscr{E}) \xrightarrow{D} \ldots \rightarrow \Lambda^n \mathscr{T}^* \otimes J_{m-n}(\mathscr{E}) \rightarrow 0,$$

où $J_m(E) = 0$, si $m < 0$, est une suite exacte et l'opérateur D vérifie

$$(2) \qquad D(\omega \wedge u) = d\omega \wedge \pi_{m-1} u + (-1)^j \omega \wedge Du$$

pour $\omega \in \Lambda^j \mathscr{T}^*$, $u \in \Lambda \mathscr{T}^* \otimes J_m(\mathscr{E})$. Le noyau de $\pi_m : J_m(E) \rightarrow J_{m-1}(E)$ s'identifiant à $S^m T^* \otimes E$, la restriction de $-D$ à $S^m \mathscr{T}^* \otimes \mathscr{E}$ provient d'un morphisme de fibrés vectoriels δ et l'on obtient une suite exacte de fibrés vectoriels pour $m > 0$:

(3)
$$0 \to S^m T^* \otimes E \xrightarrow{\delta} T^* \otimes S^{m-1} T^* \otimes E \xrightarrow{\delta} \Lambda^2 T^* \otimes S^{m-2} T^* \otimes E \xrightarrow{\delta} \ldots \to \Lambda^n T^* \otimes S^{m-n} T^* \otimes E \to 0,$$

où
$$\delta(\omega \otimes u) = (-1)^j \omega \wedge \delta u$$

pour $\omega \in \Lambda^j T^*$, $u \in S^m T^* \otimes E$ (*cf.* [1], [2] ou [7]).

Si $R_k \subset J_k(E)$ est une équation différentielle dans E, les faisceaux $\mathscr{R}_{k+l} = (\mathscr{R}_k)_{+l}$ de sections de $(R_k)_{+l}$ se déterminent par récurrence de la manière suivante : un élément u de $J_{k+l+1}(\mathscr{E})$ appartient à $\mathscr{R}_{k+l+1}$ si et seulement si $\pi_{k+l} u \in \mathscr{R}_{k+l}$ et $Du \in \mathscr{T}^* \otimes \mathscr{R}_{k+l}$. Par restriction de (1), on obtient le complexe de Spencer :

(4)
$$0 \to \mathscr{R}_m \xrightarrow{D} \mathscr{T}^* \otimes \mathscr{R}_{m-1} \xrightarrow{D} \Lambda^2 \mathscr{T}^* \otimes \mathscr{R}_{m-2} \xrightarrow{D} \ldots \to \Lambda^n \mathscr{T}^* \otimes \mathscr{R}_{m-n} \to 0,$$

où $R_m = J_m(E)$ si $m < k$, dont on note $H^j(R_k)_{m-j}$ le groupe de cohomologie en $\Lambda^j \mathscr{T}^* \otimes \mathscr{R}_{m-j}$. Posons d'autre part, $g_m = R_m \cap S^m T^* \otimes E$; c'est un fibré à fibre variable et (3) donne par restriction un complexe

(5)
$$0 \to g_m \xrightarrow{\delta} T^* \otimes g_{m-1} \xrightarrow{\delta} \ldots \to \Lambda^j T^* \otimes g_{m-j} \xrightarrow{\delta} \ldots \to \Lambda^n T^* \otimes g_{m-n} \to 0.$$

Si le l-ième prolongement R_{k+l} de R_k est un fibré vectoriel pour $l \geqq 0$ et si les applir cations $\pi_m : R_{m+1} \to R_m$ sont de rang constant pour $m \geqq k$, alors il existe un entie, $m_1 \geqq k$ tel que $\pi_m : H^j(R_k)_{m+1} \to H^j(R_k)_m$ soit un isomorphisme pour $m \geqq m_1$. Alors $H^j(R_k)_m$ est indépendant de m, pour $m \geqq m_1$ et on notera $H^j(R_k)$, le j-ième groupe de cohomologie de Spencer de R_k, le groupe $H^j(R_k)_m$, avec $m \geqq m_1$; le groupe $H^0(R_k)$ est le faisceau de solutions de R_k. Ici, comme par la suite, on identifiera toujours deux groupes de cohomologie s'ils sont isomorphes. La condition sur R_k est vérifiée notamment si R_k est formellement intégrable, c'est-à-dire si R_{k+l} est un fibré vectoriel pour $l \geqq 0$ et l'application $\pi_{k+l} : R_{k+l+1} \to R_{k+l}$ est surjective pour $l \geqq 0$ (*cf.* [2]).

2. **Familles bornées de modules**

Soient $r = \bigoplus_{l \in \mathbf{Z}} r_l$ un fibré gradué sur X, où r_l est un fibré vectoriel à fibre variable de dimension finie, et $\delta : r \to T^* \otimes r$ une application linéaire de degré -1. On peut alors définir une application
$$\delta : \ \Lambda^j T^* \otimes r \to \Lambda^{j+1} T^* \otimes r$$

de degré -1 en posant
$$\delta(\omega \otimes u) = (-1)^j \omega \wedge \delta u \qquad \text{pour} \quad \omega \in \Lambda^j T^*, \quad u \in r.$$

Si $M_l = r_l^*$, on écrit $M = \bigoplus_{l \in \mathbf{Z}} M_l$ et on obtient une application

$$\delta^* : \quad T \otimes M \to M$$

de degré 1; on écrit $\delta^*(t \otimes m) = t.m$, si $t \in T$, $m \in M$. Rappelons d'après [2], paragraphe 2 que :

(i) la suite

$$0 \to r \xrightarrow{\delta} T^* \otimes r \xrightarrow{\delta} \Lambda^2 T^* \otimes r \xrightarrow{\delta} \ldots \to \Lambda^n T^* \otimes r \to 0 \tag{6}$$

est un complexe si et seulement si $\delta^* : T \otimes M \to M$ induit sur M une structure de ST-module;

(ii) si l'une des deux conditions de (i) est vérifiée, alors

$$0 \to \Lambda^n T \otimes M \to \ldots \xrightarrow{\delta^*} \Lambda^2 T \otimes M \xrightarrow{\delta^*} T \otimes M \xrightarrow{\delta^*} M \to 0 \tag{7}$$

est le complexe de Koszul de M; pour $x \in X$, l'homologie $H_j(M)_x$ de (7) en $\Lambda^j T_x \otimes M_x$ est $\mathrm{Tor}_j^{A_x}(M_x, \mathbf{R})$, où A_x est l'anneau ST_x. On note $H_j(M)_l$ l'homologie de (7) en $\Lambda^j T \otimes M_l$ et on a alors $H_j(M) = \bigoplus_{l \in \mathbf{Z}} H_j(M)_l$.

Soit K un corps et $A = \bigoplus_{l \in \mathbf{Z}} A_l$ l'anneau gradué des polynômes $K[X_1, \ldots, X_n]$, où A_l est le sous-espace des polynômes homogènes de degré l. On écrit $A_l = 0$ pour $l < 0$. On considère la catégorie des A-modules gradués et des homomorphismes de A-modules gradués de degré zéro. Si $M = \bigoplus_{l \in \mathbf{Z}} M_l$ est un A-module gradué, on note

$$H_j(M) = \bigoplus_{l \in \mathbf{Z}} H_j(M)_l$$

le j-ième groupe d'homologie de Koszul de M (*cf.* [5]) et $M(p)$ le A-module gradué

$$M(p) = \bigoplus_{l \geqq 0} M(p)_l,$$

où $M(p)_l = M_{p+l}$. Rappelons qu'une suite exacte

$$0 \to M' \to M \to M'' \to 0,$$

de A-modules donne naissance à une suite exacte

$$\ldots \to H_{j+1}(M'')_{l-1} \xrightarrow{\partial} H_j(M')_l \to H_j(M)_l \to H_j(M'')_l \xrightarrow{\partial} H_{j-1}(M')_{l+1} \to \ldots$$

d'homologie; si $t \in A_1$ l'application $t : M \to M(1)$ induit l'application nulle $H_j(M) \to H_j(M)(1)$.

DÉFINITION. — *Une famille* $\{M_\alpha\}_{\alpha \in I}$ *de* A-*modules gradués de type fini est bornée si :*

(i) *il existe des entiers* $p, q \geqq 0$ *tels que, pour tout* $\alpha \in I$, *le* A-*module gradué* $M_\alpha(p)$ *soit un quotient de* A^q;

(ii) *la famille des polynômes de Hilbert des* A-*modules* M_α, $\alpha \in I$, *est finie*;

(iii) *il existe un entier* r *tel que pour* $l \geqq r$, $\alpha \in \mathrm{I}$:

$$\dim \mathrm{M}_{\alpha, l} = \mathrm{P}_\alpha(l),$$

où P_α *est le polynôme de Hilbert de* M_α.

On dira qu'un ST-module gradué $r = \bigoplus_{l \in \mathbf{Z}} r_l$ est borné si la famille de A-modules $\{ r_x \}_{x \in \mathrm{X}}$ est bornée; ici $\mathrm{A} = \mathbf{R}[\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_n]$.

Donnons maintenant une esquisse de la démonstration de la proposition 1 de [2].

PROPOSITION 1. — *Supposons* K *algébriquement clos. Soit* $\{ \mathrm{M}_\alpha \}_{\alpha \in \mathrm{I}}$ *une famille bornée de* A-*modules gradués de type fini vérifiant les conditions* (i) *et* (iii) *de la définition d'une famille bornée. Alors il existe un entier* l_1 *qui ne dépend que de* p, q, r, n *et de la famille des polynômes de Hilbert des* A-*modules* M_α, $\alpha \in \mathrm{I}$, *tel que* $\mathrm{H}_j(\mathrm{M}_\alpha)_l = 0$ *pour* $l \geqq l_1$, $j \geqq 0$, $\alpha \in \mathrm{I}$.

Soit V l'espace projectif $\mathbf{P}_{n-1}(\mathrm{K})$ et $\mathcal{O}$ son faisceau structural. Si M est un A-module gradué de type fini, on désigne par $\tilde{\mathrm{M}}$ le $\mathcal{O}$-module cohérent qu'il détermine; rappelons que $\widetilde{\mathrm{M}(l)}$ est isomorphe à $\tilde{\mathrm{M}}(l) = \tilde{\mathrm{M}} \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{O}(l)$ et que le polynôme de Hilbert P_M de M est donné par

$$\mathrm{P}_\mathrm{M}(l) = \sum_j (-1)^j \dim \mathrm{H}^j(\mathrm{V}, \tilde{\mathrm{M}})$$

(*cf.* [6]). Nous notons $\mathrm{M}^\natural$ le A-module gradué

$$\mathrm{M}^\natural = \bigoplus_{l \in \mathbf{Z}} \mathrm{M}_l^\natural, \qquad \text{où} \quad \mathrm{M}_l^\natural = \mathrm{H}^0(\mathrm{V}, \tilde{\mathrm{M}}(l)),$$

ce qui nous donne une application $\mathrm{M} \to \mathrm{M}^\natural$.

Nous aurons besoin des trois lemmes suivants.

LEMME 1 (Serre [6], § 67). — *L'application* $\mathrm{M} \to \mathrm{M}^\natural$ *est injective si et seulement si* $\mathrm{H}_n(\mathrm{M}) = 0$.

LEMME 2 (Mumford [4], lecture 14). — *Soit* $\mathcal{F}$ *un sous-faisceau cohérent de* $\mathcal{O}^q$. *Alors il existe un entier* m_0 *qui ne dépend que de* q, n *et du polynôme de Hilbert :*

$$\mathrm{P}_{\mathcal{F}}(l) = \sum_j (-1)^j \dim \mathrm{H}^j(\mathrm{V}, \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{O}(l))$$

de $\mathcal{F}$, *tel que*

$$\mathrm{H}^j(\mathrm{V}, \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{O}(l)) = 0 \qquad \text{pour} \quad j > 0, \quad l \geqq m_0.$$

Si $t \in \mathrm{A}_1$, on note $\mathrm{M}/t\mathrm{M}$ le A-module gradué

$$\mathrm{M}/t\mathrm{M} = \bigoplus_{l \in \mathbf{Z}} (\mathrm{M}/t\mathrm{M})_l, \qquad \text{où} \quad (\mathrm{M}/t\mathrm{M})_l = \mathrm{M}_l/t\mathrm{M}_{l-1} \quad \text{pour } l \in \mathbf{Z}.$$

LEMME 3 (*cf.* [5]). — *Soit* M *un* A-*module gradué de type fini.*

(i) *S'il existe* $t \in \mathrm{A}_1$ *tel que*

(8) $$t : \mathrm{M} \to \mathrm{M}(1)$$

soit injectif, alors on a une suite exacte

$$0 \to H_j(M) \to H_j(M/tM) \to H_{j-1}(M) \to 0.$$

(ii) $H_n(M) = 0$ *si et seulement s'il existe* $t \in A_1$ *tel que l'application* (8) *soit injective.*

Démonstration. — (i) résulte de la suite exacte d'homologie obtenue à partir de la suite exacte

$$0 \to M \to M(1) \to (M/tM)(1) \to 0.$$

Maintenant en prenant $j = n+1$ et en remarquant que $H_{n+1} = 0$, on voit que $H_n(M) = 0$. Puisque $H_n(M)$ est isomorphe à l'annulateur de A_1 dans M, si $H_n(M) = 0$, alors l'idéal de A engendré par A_1 n'est pas contenu dans la réunion des idéaux premiers de A associés à M; tout élément de cet idéal qui n'appartient pas à cette réunion n'est pas un diviseur de zéro dans M, d'où (ii).

Démonstration de la proposition 1. — Supposons que $\deg P_{M_\alpha} \leqq k$, pour tout $\alpha \in I$. On procède par récurrence sur k. Si $P_{M_\alpha} = 0$ pour tout $\alpha \in I$ alors la proposition est trivialement vraie. Soit N_α le noyau de $A^q \to M_\alpha(p)$. Nous avons alors la suite exacte de $\mathcal{O}$-modules

$$0 \to \tilde{N}_\alpha \to \mathcal{O}^q \to \tilde{M}_\alpha(p) \to 0$$

et le diagramme exact et commutatif

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \to & N_{\alpha,l} & \to & A_l^q & \to & M_{\alpha,p+l} & \to 0 \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\ 0 \to & N_{\alpha,l}^\natural & \to & A_l^q & \to & M_{\alpha,p+l}^\natural & \to H^1(V, \tilde{N}_\alpha(l)) \end{array}$$

pour $l \geqq 0$. On applique le lemme 2 aux $\mathcal{O}$-modules $\tilde{N}_\alpha$ et l'on obtient un entier $m_0 \geqq 0$ qui ne dépend que de q, n et des polynômes de Hilbert P_{M_α} tel que

$$H^j(V, \tilde{N}_\alpha(l)) = 0 \qquad \text{pour} \quad j > 0, \quad l \geqq m_0, \quad \alpha \in I.$$

Donc pour $l \geqq m_0$, l'application $M_{\alpha,p+l} \to M_{\alpha,p+l}^\natural$ est surjective. D'autre part, on déduit que

$$H^j(V, \tilde{M}_\alpha(p+l)) = 0 \qquad \text{pour} \quad j > 0, \quad l \geqq m_0, \quad \alpha \in I;$$

donc $\dim M_{\alpha,p+l} = \dim M_{\alpha,p+l}^\natural$, pour $l \geqq m_0 + r$, $\alpha \in I$, d'après la condition (iii) des familles bornées. Par conséquent, $M_{\alpha,p+l} \to M_{\alpha,p+l}^\natural$ est un isomorphisme pour $l \geqq m_0 + r$, $\alpha \in I$. Le lemme 1 nous dit que $H_n(M_\alpha)_l = 0$ pour $l \geqq m_0 + p + r$, $\alpha \in I$; le lemme 3, (ii), nous donne maintenant l'existence d'un élément $t_\alpha \in A_1$ tel que

$$t_\alpha : \quad M_{\alpha,l} \to M_{\alpha,l+1}$$

soit injectif pour $l \geqq m_0 + p + r$. Considérons les A-modules $M'_\alpha = M_\alpha / t_\alpha M_\alpha$. On voit aisément que $\{ M'_\alpha \}_{\alpha \in A}$ est une famille de A-modules bornée dont les polynômes de Hilbert sont donnés par

$$P_{M'_\alpha}(l) = P_{M_\alpha}(l) - P_{M_\alpha}(l-1).$$

Il suit que le polynôme de Hilbert de M'_α est de degré inférieur à celui de M_α. De plus, on peut choisir les entiers p', q', r' des conditions (i) et (iii) des familles de A-modules bornées pour la famille $\{ M'_\alpha \}_{\alpha \in I}$ ne dépendant que de p, q, r et m_0. Si le résultat est vrai pour $\{ M'_\alpha \}_{\alpha \in I}$, il sera donc vrai aussi pour $\{ M_\alpha \}_{\alpha \in I}$ grâce au lemme 3, (i), ce qui nous permet d'obtenir le résultat voulu par récurrence sur k.

COROLLAIRE 1. — *Si* K *est algébriquement clos et*

$$0 \to M'_\alpha \to M_\alpha \to M''_\alpha \to 0$$

est une suite exacte de A-*modules gradués de type fini, pour tout* $\alpha \in I$, *alors si deux des familles de* A-*modules* $\{ M'_\alpha \}_{\alpha \in I}$, $\{ M_\alpha \}_{\alpha \in I}$, $\{ M''_\alpha \}_{\alpha \in I}$ *sont bornées, la troisième l'est aussi.*

Démonstration. — La seule difficulté est de montrer que si $\{ M_\alpha \}_{\alpha \in I}$ et $\{ M''_\alpha \}_{\alpha \in I}$ sont bornées alors $\{ M'_\alpha \}_{\alpha \in I}$ vérifie la condition (i) des familles bornées. Si $\{ M_\alpha \}_{\alpha \in I}$, $\{ M''_\alpha \}_{\alpha \in I}$ sont bornées, alors il existe un entier l_1 indépendant de α tel que

$$\dim M'_{\alpha, l} = P_{M'_\alpha}(l) \qquad \text{et} \qquad H_0(M'_\alpha)_l = 0 \qquad \text{pour} \quad l \geqq l_1,$$

d'après la proposition 1 et la suite exacte d'homologie. Ceci implique que $M'_\alpha(l_1)$ est engendré par M'_{α, l_1}; comme la dimension de M'_{α, l_1} est égale à $P_{M'_\alpha}(l_1)$, elle est bornée par un entier q' ce qui entraîne que $M'_\alpha(l_1)$ est un quotient de $A^{q'}$.

Puisque **C** est une extension de degré fini de **R**, ce corollaire reste vrai si $K = \mathbf{R}$.

3. Théorème de prolongement

Soit $R_{k+l} \subset J_{k+l}(E)$, $l \geqq 0$, une famille d'équations différentielles. Supposons que $R_{k+l+1} \subset (R_{k+l})_{+1}$, pour $l \geqq 0$. On a alors $\pi_{k+l}(R_{k+l+1}) \subset R_{k+l}$. Si $m \geqq k$, on note $R_m^{(l)}$ le sous-fibré $\pi_m R_{m+l}$ de $J_m(E)$ à fibre variable et l'on obtient une suite décroissante de sous-fibrés à fibre variable de $J_m(E)$:

$$\ldots \subset R_m^{(l+1)} \subset R_m^{(l)} \subset \ldots \subset R_m^{(0)} \subset J_m(E), \tag{9}$$

où $R_m^{(0)} = R_m$. D'après [2], paragraphe 3, si $R_\infty = \underleftarrow{\lim}\, R_{k+l}$, on a

$$\pi_m(R_\infty) = \bigcap_{l \geqq 0} R_m^{(l)} \qquad \text{pour} \quad m \geqq k. \tag{10}$$

On écrit $R_m^{(l)} = J_m(E)$ pour $m < k$.

D'autre part, $\pi_m : J_{m+1}(E) \to J_m(E)$ induit une application $\pi_m : R_{m+1}^{(l)} \to R_m^{(l)}$ dont le noyau et le conoyau seront notés $g_{m+1}^{(l)}$, $h_m^{(l)}$ respectivement. On a alors les suites exactes pour $m \geqq k$:

$$0 \to g_{m+1}^{(l)} \xrightarrow{\varepsilon} R_{m+1}^{(l)} \xrightarrow{\pi_m} R_m^{(l)} \to h_m^{(l)} \to 0, \tag{11}$$

$$0 \to R_m^{(l+1)} \to R_m^{(l)} \to h_m^{(l)} \to 0, \tag{12}$$

puisque $\pi_m(R_{m+1}^{(l)}) = R_m^{(l+1)}$. De (9), on tire une suite décroissante de sous-fibrés à fibre variable de $S^m T^* \otimes E$:

$$\ldots \subset g_m^{(l+1)} \subset g_m^{(l)} \subset \ldots \subset g_m^{(0)} \subset S^m T^* \otimes E. \tag{13}$$

On pose

$$g_m^{(-1)} = S^m T^* \otimes E \qquad \text{et} \qquad g_m^{(l)} = S^m T^* \otimes E \qquad \text{pour} \quad m < k.$$

THÉORÈME 1 (théorème de prolongement). — *Soit* $R_{k+l} \subset J_{k+l}(E)$, $l \geqq 0$, *une famille d'équations différentielles. Supposons que* $R_{k+l+1} \subset (R_{k+l})_{+1}$, *pour* $l \geqq 0$, *et que* $\pi_{k+l} : R_{k+l+m} \to R_{k+l}$ *soit de rang constant, pour* $l, m \geqq 0$. *Alors il existe des entiers* $m_0 \geqq k$, $l_0 \geqq 0$ *tels que* :

(i) *l'équation* $R_{m_0}^{(l_0)}$ *dans* $J_{m_0}(E)$ *soit formellement intégrable;*

(ii) *le r-ième prolongement de* $R_{m_0}^{(l_0)}$ *soit égal à* $R_{m_0+r}^{(l_0)}$ *et à*

$$\pi_{m_0+r}(R_\infty), \qquad \textit{où} \quad R_\infty = \varprojlim R_{k+l}.$$

Démonstration. — Nos hypothèses impliquent, d'après l'exactitude des suites (11) et (12) que $R_m^{(l)}$, $g_{m+1}^{(l)}$ et $h_m^{(l)}$ sont des fibrés vectoriels pour $m \geqq k$. Démontrons d'abord le

LEMME 4. — $R_{m+1}^{(l)} \subset (R_m^{(l)})_{+1}$ *pour* $l \geqq 0$, $m \geqq k$.

Démonstration. — On a $\pi_m(R_{m+1}^{(l)}) \subset R_m^{(l)}$; d'autre part $D(\mathscr{R}_{m+l+1}) \subset \mathscr{T}^* \otimes \mathscr{R}_{m+l}$, d'où $D(\mathscr{R}_{m+1}^{(l)}) \subset \mathscr{T}^* \otimes \mathscr{R}_m^{(l)}$ et le lemme.

Revenons maintenant à la démonstration du théorème 1. Le lemme 4 implique que

$$\delta(g_{m+1}^{(l)}) \subset T^* \otimes g_m^{(l)}.$$

D'après [2], il existe donc un entier $l_1 \geqq 0$ tel que

$$g_m^{(l)} = g_m^{(l_1)} \qquad \text{pour} \quad m \geqq k+1, \quad l \geqq l_1.$$

Comme (9) est une suite décroissante de fibrés vectoriels, il existe un entier $l_0 \geqq l_1$ tel que

$$R_k^{(l)} = R_k^{(l_0)} \qquad \text{pour} \quad l \geqq l_0.$$

Comme dans [2], on démontre par récurrence sur m l'égalité

(14) $$R_m^{(l)} = R_m^{(l_0)} \qquad \text{pour} \quad l \geqq l_0, \quad m \geqq k,$$

et la surjectivité de $\pi_m : R_{m+1}^{(l_0)} \to R_m^{(l_0)}$, pour $m \geqq k$. De ce dernier fait et de l'inclusion $R_{m+1}^{(l_0)} \subset (R_m^{(l_0)})_{+1}$ donnée par le lemme 4 on déduit d'après le théorème de prolongement de Cartan-Kuranishi l'existence d'un entier $m_0 \geqq k$ tel que

$$R_{m+1}^{(l_0)} = (R_m^{(l_0)})_{+1} \qquad \text{pour} \quad m \geqq m_0$$

(*cf.* [2] et [7]). Démontrons maintenant que

(15) $$R_{m+r}^{(l_0)} = (R_m^{(l_0)})_{+r} \qquad \text{pour} \quad m \geqq m_0,$$

par récurrence sur r; si (15) est vrai pour $r-1$, on a

$$R_{m+r}^{(l_0)} = R_{m+(r-1)+1}^{(l_0)} = (R_{m+(r-1)}^{(l_0)})_{+1} = ((R_m^{(l_0)})_{+(r-1)})_{+1} = (R_m^{(l_0)})_{+r}$$

puisque $R_{m+r-1}^{(l_0)}$ est un fibré vectoriel. Les relations (10), (14) et (15) nous donnent le résultat cherché.

Remarque. — On a démontré que $\pi_m : R^{(l)}_{m+1} \to R^{(l)}_m$ est surjectif pour $l \geqq l_0$, $m \geqq k$, c'est-à-dire

$$h^{(l)}_m = 0 \quad \text{pour} \quad l \geqq l_0, \quad m \geqq k. \tag{16}$$

Si $R_{k+l} = (R_k)_{+l}$, pour $l \geqq 0$, le théorème 1 est précisément le théorème 1 de [2].

Supposons que $\pi_{k+l} : R_{k+l+m} \to R_{k+l}$ soit de rang constant pour $l, m \geqq 0$. D'après le lemme 4, le complexe de Spencer nous donne par restriction un complexe

$$0 \to \mathscr{R}^{(l)}_m \xrightarrow{D} \mathscr{T}^* \otimes \mathscr{R}^{(l)}_{m-1} \xrightarrow{D} \Lambda^2 \mathscr{T}^* \otimes \mathscr{R}^{(l)}_{m-2} \xrightarrow{D} \ldots \to \Lambda^n \mathscr{T}^* \otimes \mathscr{R}^{(l)}_{m-n} \to 0$$

dont on note $H^{j,(l)}_{m-j}$ la cohomologie en $\Lambda^j \mathscr{T}^* \otimes \mathscr{R}^{(l)}_{m-j}$. De la relation (2), on déduit l'existence de morphismes

$$\delta : \quad \Lambda^j T^* \otimes h^{(l)}_m \to \Lambda^{j+1} T^* \otimes h^{(l)}_{m-1}$$

pour $m \geqq k+1$, de fibrés vectoriels tels que

$$\delta(\omega \otimes u) = (-1)^j \omega \wedge \delta u$$

pour $\omega \in \Lambda^j T^*$, $u \in h^{(l)}_m$ et tels que le diagramme

$$\begin{tikzcd}
& 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & \mathscr{R}^{(l+1)}_m \arrow[r, "D"] \arrow[d] & \mathscr{T}^* \otimes \mathscr{R}^{(l+1)}_{m-1} \arrow[r, "D"] \arrow[d] & \Lambda^2 \mathscr{T}^* \otimes \mathscr{R}^{(l+1)}_{m-2} \arrow[r, "D"] \arrow[d] & \ldots \arrow[r] & \Lambda^n \mathscr{T}^* \otimes \mathscr{R}^{(l+1)}_{m-n} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathscr{R}^{(l)}_m \arrow[r, "D"] \arrow[d] & \mathscr{T}^* \otimes \mathscr{R}^{(l)}_{m-1} \arrow[r, "D"] \arrow[d] & \Lambda^2 \mathscr{T}^* \otimes \mathscr{R}^{(l)}_{m-2} \arrow[r, "D"] \arrow[d] & \ldots \arrow[r] & \Lambda^n \mathscr{T}^* \otimes \mathscr{R}^{(l)}_{m-n} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & h^{(l)}_m \arrow[r, "-\delta"] \arrow[d] & \mathscr{T}^* \otimes h^{(l)}_{m-1} \arrow[r, "-\delta"] \arrow[d] & \Lambda^2 \mathscr{T}^* \otimes h^{(l)}_{m-2} \arrow[r, "-\delta"] \arrow[d] & \ldots \arrow[r] & \Lambda^n \mathscr{T}^* \otimes h^{(l)}_{m-n} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
& 0 & 0 & 0 & & 0 &
\end{tikzcd} \tag{17}$$

soit commutatif, pour $m \geqq k+n$; les lignes de ce diagramme sont des complexes.

A l'aide des suites exactes (11) et (12), on obtient le diagramme commutatif et exact

$$\begin{tikzcd}
& 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & g^{(l+1)}_{m+1} \arrow[r] \arrow[d, "\varepsilon"] & g^{(l)}_{m+1} \arrow[r] \arrow[d, "\varepsilon"] & h^{(l)}_{m+1} \arrow[d, "\mathrm{id}"] & \\
0 \arrow[r] & R^{(l+1)}_{m+1} \arrow[r] \arrow[d, "\pi_m"] & R^{(l)}_{m+1} \arrow[r] \arrow[d, "\pi_m"] & h^{(l)}_{m+1} \arrow[r] \arrow[d, "0"] & 0 \\
0 \arrow[r] & R^{(l+1)}_m \arrow[r] \arrow[d] & R^{(l)}_m \arrow[r] \arrow[d] & h^{(l)}_m \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{id}"] & 0 \\
& h^{(l+1)}_m \arrow[r, "0"] \arrow[d] & h^{(l)}_m \arrow[r, "\mathrm{id}"] \arrow[d] & h^{(l)}_m \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
& 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

pour $m \geqq k$; on en tire la suite exacte

$$0 \to g_{m+1}^{(l+1)} \to g_{m+1}^{(l)} \to h_{m+1}^{(l)} \to h_m^{(l+1)} \to 0 \tag{18}$$

pour $m \geqq k$. On vérifie facilement que le diagramme

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 \longrightarrow & g_{m+1}^{(l+1)} & \longrightarrow & g_{m+1}^{(l)} & \longrightarrow & h_{m+1}^{(l)} & \longrightarrow & h_m^{(l+1)} & \longrightarrow 0 \\ & \downarrow{\scriptstyle\delta} & & \downarrow{\scriptstyle\delta} & & \downarrow{\scriptstyle\delta} & & \downarrow{\scriptstyle\delta} & \\ 0 \to & T^* \otimes g_m^{(l+1)} & \to & T^* \otimes g_m^{(l)} & \to & T^* \otimes h_m^{(l)} & \to & T^* \otimes h_{m-1}^{(l+1)} & \to 0 \end{array} \tag{19}$$

est commutatif pour $m > k$.

Posons $M_m^{(l)} = g_m^{(l)*}$ pour $m \geqq k+1$ et $N_m^{(l)} = h_m^{(l)*}$ pour $m \geqq k$, et $M_m^{(l)} = 0$ pour $m \leqq k$ et $N_m^{(l)} = 0$ pour $m < k$. Considérons les fibrés gradués

$$M^{(l)} = \bigoplus_{m \geqq 0} M_m^{(l)}, \qquad N^{(l)} = \bigoplus_{m \geqq k+1} N_m^{(l)},$$
$$N^{(l)}(-1) = \bigoplus_{m \geqq 0} N^{(l)}(-1)_m,$$

où $N_m^{(l)}$ est la composante de degré m de $N^{(l)}$ et $N^{(l)}(-1)_m = N_{m-1}^{(l)}$. D'après le paragraphe 2, $M^{(l)}$, $N^{(l)}$, $N^{(l)}(-1)$ sont des ST-modules; la suite exacte (18) nous donne la suite exacte

$$0 \to N^{(l+1)}(-1) \to N^{(l)} \to M^{(l)} \to M^{(l+1)} \to 0 \tag{20}$$

de ST-modules gradués, où les applications sont de degré zéro. Le ST-module $M^{(l)}$ quotient de $ST \otimes E^*$ est borné; en effet, comme $M_m^{(l)}$ est un fibré vectoriel pour tout m, le polynôme de Hilbert de $M_x^{(l)}$ est indépendant de x. D'après (16), on a $N^{(l)} = 0$ et $N^{(l)}(-1) = 0$ pour $l \geqq l_0$. Démontrons que $N^{(l)}$ est un ST-module borné par récurrence descendante sur l. C'est trivialement vrai pour $l \geqq l_0$. Si $N^{(l+1)}$ est un ST-module borné, alors $N^{(l+1)}(-1)$ l'est aussi. Dans la suite exacte (20), les ST-modules $N^{(l+1)}(-1)$, $M^{(l)}$, $M^{(l+1)}$ sont donc bornés; il en est donc de même pour $N^{(l)}$ d'après le corollaire 1.

Considérons le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccccccc} & 0 & & 0 & & 0 & & & & 0 & \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow & \\ 0 \to & g_{m+1}^{(l)} & \xrightarrow{-\delta} & \mathcal{T}^* \otimes g_m^{(l)} & \xrightarrow{-\delta} & \Lambda^2 \mathcal{T}^* \otimes g_{m-1}^{(l)} & \xrightarrow{-\delta} & \cdots & \to & \Lambda^n \mathcal{T}^* \otimes g_{m-n+1}^{(l)} & \to 0 \\ & \downarrow{\scriptstyle\varepsilon} & & \downarrow{\scriptstyle\varepsilon} & & \downarrow{\scriptstyle\varepsilon} & & & & \downarrow{\scriptstyle\varepsilon} & \\ 0 \to & \mathcal{R}_{m+1}^{(l)} & \xrightarrow{D} & \mathcal{T}^* \otimes \mathcal{R}_m^{(l)} & \xrightarrow{D} & \Lambda^2 \mathcal{T}^* \otimes \mathcal{R}_{m-1}^{(l)} & \xrightarrow{D} & \cdots & \to & \Lambda^n \mathcal{T}^* \otimes \mathcal{R}_{m-n+1}^{(l)} & \to 0 \\ & \downarrow{\scriptstyle\pi_m} & & \downarrow{\scriptstyle\pi_{m-1}} & & \downarrow{\scriptstyle\pi_{m-2}} & & & & \downarrow{\scriptstyle\pi_{m-n}} & \\ 0 \longrightarrow & \mathcal{R}_m^{(l)} & \xrightarrow{D} & \mathcal{T}^* \otimes \mathcal{R}_{m-1}^{(l)} & \xrightarrow{D} & \Lambda^2 \mathcal{T}^* \otimes \mathcal{R}_{m-2}^{(l)} & \xrightarrow{D} & \cdots & \longrightarrow & \Lambda^n \mathcal{T}^* \otimes \mathcal{R}_{m-n}^{(l)} & \longrightarrow 0 \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow & \\ 0 \longrightarrow & h_m^{(l)} & \xrightarrow{-\delta} & \mathcal{T}^* \otimes h_{m-1}^{(l)} & \xrightarrow{-\delta} & \Lambda^2 \mathcal{T}^* \otimes h_{m-2}^{(l)} & \xrightarrow{-\delta} & \cdots & \longrightarrow & \Lambda^n \mathcal{T}^* \otimes h_{m-n}^{(l)} & \longrightarrow 0 \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow & \\ & 0 & & 0 & & 0 & & & & 0 & \end{array}$$

pour $m \geqq k+n$. D'après la proposition 1, il existe un entier $m_1 \geqq k+n$ tel que la première et la dernière ligne de ce diagramme soient exactes pour $m \geqq m_1$ et $l \geqq 0$. On déduit que

$$\pi_{m-j} : \quad H^{j,(l)}_{m-j+1} \to H^{j,(l)}_{m-j} \quad ,$$

est un isomorphisme pour $m \geqq m_1$, $l \geqq 0$. Pour $l = l_0$, d'après le théorème 1, $H^{j,(l_0)}_{m-j}$ est égale à la cohomologie de Spencer de l'équation différentielle $R^{(l_0)}_{m_0} \subset J_{m_0}(E)$. De même, le diagramme (17) nous donne un isomorphisme

$$H^{j,(l+1)}_{m-j} \xrightarrow{\sim} H^{j,(l)}_{m-j}$$

pour $m \geqq m_1$, ce qui montre que la cohomologie $H^{j,(l)}_{m-j}$ est indépendante de l et de m, pour $l \geqq 0$ et $m \geqq m_1$. On obtient donc :

THÉORÈME 2. — *Soit* $R_{k+l} \subset J_{k+l}(E)$, $l \geqq 0$, *une famille d'équations différentielles. Supposons que* $R_{k+l+1} \subset (R_{k+l})_{+1}$ *pour* $l \geqq 0$ *et que* $\pi_{k+l} : R_{k+l+m} \to R_{k+l}$ *soit de rang constant pour* $l, m \geqq 0$. *Alors il existe un entier* $m_1 \geqq k+n$ *tel que pour* $m \geqq m_1$ *la cohomologie* H^j_{m-j} *du complexe*

$$0 \to \mathscr{R}_m \xrightarrow{D} \mathscr{T}^* \otimes \mathscr{R}_{m-1} \xrightarrow{D} \Lambda^2 \mathscr{T}^* \otimes \mathscr{R}_{m-2} \xrightarrow{D} \ldots \to \Lambda^n \mathscr{T}^* \otimes \mathscr{R}_{m-n} \to 0$$

en $\Lambda^j \mathscr{T}^* \otimes \mathscr{R}_{m-j}$ *soit isomorphe au groupe de cohomologie de Spencer* $H^j(R^{(l_0)}_{m_0})$ *de l'équation différentielle formellement intégrable* $R^{(l_0)}_{m_0} \subset J_{m_0}(E)$ *donnée par le théorème* 1. *De plus* $\pi_{m-j} : H^j_{m-j+1} \to H^j_{m-j}$ *est un isomorphisme pour* $m \geqq m_1$.

Nous avions démontré ce résultat lorsque $R_{k+l} = (R_k)_{+l}$ (proposition 8 de [2]).

Remarque. — Du fait que $M^{(l_0)}$ soit un ST-module borné et de la proposition 1, on voit qu'il existe un entier $m_0 \geqq k$ tel que la suite

$$0 \to g^{(l_0)}_{m+1} \xrightarrow{\delta} T^* \otimes g^{(l_0)}_m \xrightarrow{\delta} \Lambda^2 T^* \otimes g^{(l_0)}_{m-1}$$

soit exacte pour $m \geqq m_0$. On en déduit, à l'aide de la surjectivité de $\pi_m : R^{(l_0)}_{m+1} \to R^{(l_0)}_m$ pour $m \geqq k$ et de l'inclusion $R^{(l_0)}_{m+1} \subset (R^{(l_0)}_m)_{+1}$ que (15) est vrai pour $r = 1$ (*cf.* § 5). En fait, le théorème de Cartan-Kuranishi se démontre par le même raisonnement.

4. **Cohomologie de Spencer et fibrations**

Soit Y une variété différentiable de dimension m dont on note T_Y le fibré tangent. Soient $\rho : X \to Y$ une submersion surjective et V le sous-fibré intégrable de $T = T_X$ des vecteurs tangents aux fibres de ρ. Alors

$$0 \to V \to T \xrightarrow{\rho} \rho^{-1} T_Y \to 0$$

est une suite exacte de fibrés vectoriels sur X. Soient E et F des fibrés vectoriels sur X et Y respectivement et $\varphi : E \to F$ un morphisme de fibrés vectoriels sur ρ. On dira qu'une section s de E sur $U \subset X$ est φ-projetable si $\varphi\, s(a) = \varphi\, s(b)$, pour a, $b \in U$ avec

$\rho(a) = \rho(b)$. Alors la section φs de F sur $\rho(U)$, qui à $y \in \rho(U)$ fait correspondre $\varphi s(a)$, où $a \in U$ vérifie $\rho(a) = y$, est bien définie. On notera $\mathscr{E}_\varphi$ le faisceau de sections de E qui sont φ-projetables et $J_k(E; \varphi) \subset J_k(E)$ le fibré à fibre variable des k-jets de sections de $\mathscr{E}_\varphi$; si $\varphi : E \to \rho^{-1} F$ est surjectif, c'est un fibré vectoriel. Si $J_k(F; Y)$ est le fibré des k-jets de sections de F sur Y, on a une application

$$\varphi : \quad J_k(E; \varphi) \to J_k(F; Y). \tag{21}$$

Si K est le noyau de $\varphi : E \to \rho^{-1} F$ et si cette application est surjective, alors $J_k(K)$ est le noyau de l'application (21).

Soit $F_i(E) = F_i(E; \varphi)$ le sous-fibré à fibre variable de $\Lambda T^* \otimes E$ formé des éléments $u \in \Lambda T^* \otimes E$ tels que $\varphi(u)$ appartienne à $\rho^*(\Lambda^i T_Y^*) \wedge \Lambda T^* \otimes F$. On écrit

$$F_i^j(E) = F_i^j(E; \varphi) = F_i(E; \varphi) \cap (\Lambda^j T^* \otimes E)$$

et on obtient une filtration décroissante de $\Lambda T^* \otimes E$:

$$\Lambda T^* \otimes E = F_0(E) \supset F_1(E) \supset \ldots \supset F_m(E) \supset F_{m+1}(E),$$

où $F_1^0(E)$ est le noyau de $\varphi : E \to F$, et $F_{m+1}(E) = \Lambda T^* \otimes F_1^0(E)$, et $F_i^j(E) = F_{m+1}^j(E)$ si $j < i$. On pose $F_i(E) = F_{m+1}(E)$ si $i \geqq m+1$.

On vérifie aisément que la suite

$$0 \to F_{i+1}^{i+j}(E) \to F_i^{i+j}(E) \xrightarrow{\varphi} \Lambda^j V^* \otimes_X \Lambda^i T_Y^* \otimes_X \varphi(E) \to 0 \tag{22}$$

est exacte pour $j \geqq 0$, où φ envoie $u \in F_i^{i+j}(E)$ dans l'élément φu de

$$\Lambda^j V^* \otimes \rho^{-1}(\Lambda^i T_Y^* \otimes F)$$

donné par la formule

$$(\varphi u)(\xi_1 \wedge \ldots \wedge \xi_j \otimes \bar{\eta}_1 \wedge \ldots \wedge \bar{\eta}_i) = \varphi(u(\xi_1 \wedge \ldots \wedge \xi_j \wedge \eta_1 \wedge \ldots \wedge \eta_i))$$

avec $\xi_1, \ldots, \xi_j \in V$, $\eta_1, \ldots, \eta_i \in T$ et $\bar{\eta}_l = \rho(\eta_l) \in T_Y$, pour $1 \leqq l \leqq i$. Si $\varphi : E \to F$ est de rang constant, alors $F_i^{i+j}(E)$ est un fibré vectoriel pour $i, j \geqq 0$.

Si l'application $\varphi : E \to \rho^{-1} F$ est injective, alors $F_{m+1}(E) = 0$. Si E est le fibré trivial de rang un sur X et si cette condition est vérifiée, on écrira $F_i^j = F_i^j(E; \varphi)$ et on notera ρ l'application $F_i^{i+j} \to \Lambda^j V^* \otimes_X \Lambda^i T_Y^*$; on vérifie facilement que

$$\rho(\alpha \wedge \beta) = (\alpha \mid \Lambda^l V) \wedge \rho\beta \tag{23}$$

pour $\alpha \in \Lambda^l T^*$, $\beta \in F_j^{i+j}$.

On note $(\Lambda^i \mathscr{T}^* \otimes \mathscr{E})_\varphi$ le faisceau de sections φ-projetables de $F_i^i(E; \varphi)$; on a une application

$$\varphi : \quad (\Lambda^i \mathscr{T}^* \otimes \mathscr{E})_\varphi \to \Lambda^i \mathscr{T}_Y^* \otimes \mathscr{F}.$$

La dérivée extérieure $d_{X/Y}$ le long des fibres de ρ est un opérateur différentiel d'ordre 1 :

$$d_{X/Y} : \quad \Lambda^j \mathscr{V}^* \otimes \mathscr{F}_X \to \Lambda^{j+1} \mathscr{V}^* \otimes \mathscr{F}_X,$$

où $\mathscr{F}_X$ désigne le faisceau de sections du fibré $\rho^{-1} F$ sur X. Si u est une section de $\Lambda^j V^* \otimes \rho^{-1} F$ sur X, alors pour $y \in Y$, la restriction de u à $\rho^{-1}(y)$ est une forme différentielle de degré j à valeurs dans F_y sur $\rho^{-1}(y)$ et la restriction de $d_{X/Y} u$ à $\rho^{-1}(y)$ est la dérivée extérieure de cette forme différentielle. Si ξ est une section de V, on écrit

$$\xi . u = \langle \xi, d_{X/Y} u \rangle \qquad \text{pour} \quad u \in \mathscr{F}_X,$$

et l'on obtient la formule

$$\begin{aligned}
&\langle \xi_1 \wedge \ldots \wedge \xi_{j+1}, d_{X/Y} u \rangle \\
&\quad = \sum_{k=1}^{j+1} (-1)^{k+1} \xi_k . \langle \xi_1 \wedge \ldots \wedge \hat{\xi}_k \wedge \ldots \wedge \xi_{j+1}, u \rangle \\
&\quad + \sum_{1 \leq k < l \leq j+1} (-1)^{k+l} \langle [\xi_k, \xi_l] \wedge \xi_1 \wedge \ldots \wedge \hat{\xi}_k \wedge \ldots \wedge \hat{\xi}_l \wedge \ldots \wedge \xi_{j+1}, u \rangle
\end{aligned}$$

pour $\xi_1, \ldots, \xi_{j+1} \in \mathscr{V}$, $u \in \Lambda^j \mathscr{V}^* \otimes \mathscr{F}_X$. On a la suite exacte

$$(24) \qquad 0 \to \rho^{-1} \mathscr{F} \to \mathscr{F}_X \xrightarrow{d_{X/Y}} \mathscr{V}^* \otimes \mathscr{F}_X \to \ldots \to \Lambda^j \mathscr{V}^* \otimes \mathscr{F}_X \xrightarrow{d_{X/Y}} \Lambda^{j+1} \mathscr{V}^* \otimes \mathscr{F}_X \to \ldots,$$

où $\mathscr{F}$ est le faisceau de sections de F sur Y. On voit donc que $u \in F_i^i(\mathscr{E}; \varphi)$ appartient à $(\Lambda^i \mathscr{T}^* \otimes \mathscr{E})_\varphi$ si et seulement si $d_{X/Y}(\varphi u) = 0$.

PROPOSITION 2. — *On a* $d(\mathscr{F}_i^j) \subset \mathscr{F}_i^{j+1}$ *et le diagramme*

$$\begin{array}{ccc}
\mathscr{F}_i^{i+j} & \xrightarrow{\quad d \quad} & \mathscr{F}_i^{i+j+1} \\
\downarrow \rho & & \downarrow \rho \\
\Lambda^j \mathscr{V}^* \otimes (\Lambda^i \mathscr{T}_Y^*)_X & \xrightarrow{d_{X/Y}} & \Lambda^{j+1} \mathscr{V}^* \otimes (\Lambda^i \mathscr{T}_Y^*)_X
\end{array}$$

est commutatif.

Nous omettrons la démonstration de cette proposition.

On considère l'application (21) et les sous-fibrés à fibre variable $F_i(J_k(E; \varphi); \varphi)$ et $F_i^j(J_k(E; \varphi); \varphi)$ de $\Lambda T^* \otimes J_k(E)$ et $\Lambda^j T^* \otimes J_k(E)$ que l'on note $F_i(E; \varphi)_k$ et $F_i^j(E; \varphi)_k$ respectivement. La suite exacte (22) nous donne la suite exacte

$$(25) \qquad 0 \to F_{i+1}^{i+j}(E; \varphi)_k \to F_i^{i+j}(E; \varphi)_k \xrightarrow{\varphi} \Lambda^j V^* \otimes_X (\Lambda^i T_Y^* \otimes J_k(F; Y)).$$

PROPOSITION 3. — *Si* $\varphi : E \to \rho^{-1} F$ *est surjectif, on a*

$$(26) \qquad D(F_i^j(\mathscr{E}; \varphi)_k) \subset F_i^{j+1}(\mathscr{E}; \varphi)_{k-1}$$

et le diagramme

$$(27) \qquad \begin{array}{ccc}
F_i^{i+j}(\mathscr{E}; \varphi)_k & \xrightarrow{\quad \varphi \quad} & \Lambda^j \mathscr{V}^* \otimes (\Lambda^i \mathscr{T}_Y^* \otimes J_k(\mathscr{F}; Y))_X \\
\downarrow D & & \downarrow d_{X/Y} \otimes \pi_{k-1} \\
F_i^{i+j+1}(\mathscr{E}; \varphi)_{k-1} & \xrightarrow{\varphi} & \Lambda^{j+1} \mathscr{V}^* \otimes (\Lambda^i \mathscr{T}_Y^* \otimes J_{k-1}(\mathscr{F}; Y))_X
\end{array}$$

est commutatif.

Démonstration. — Montrons que

$$\mathrm{D}(\mathrm{F}^j_{m+1}(\mathscr{E};\varphi)_k) \subset \mathrm{F}^{j+1}_{m+1}(\mathscr{E};\varphi)_{k-1}. \tag{28}$$

Puisque $\mathrm{F}^j_{m+1}(\mathrm{E};\varphi)_k$ est engendré par les sections u de $\Lambda^j\,\mathrm{T}^* \otimes \mathrm{J}_k(\mathrm{E})$ de la forme

$$u = \omega \otimes j_k(s),$$

où ω est une forme de degré j et s une section de E vérifiant $\varphi\, s = 0$. Puisque

$$\mathrm{D}u = d\omega \otimes j_{k-1}(s),$$

d'après la formule (2), on a l'inclusion (28). Il reste à démontrer l'assertion (26) avec $j \geqq i$ et la commutativité de (27), ce que l'on fera simultanément par récurrence sur i. D'abord (26) est vrai pour $i = 0$ puisque $\mathrm{J}_k(\mathrm{E};\varphi) = \mathrm{J}_{k-1}(\mathrm{E};\varphi)_{+1}$ pour $k > 1$. Vérifions que (27) est commutatif pour $i = 0$. Si u est une section de $\Lambda^j\,\mathrm{T}^* \otimes \mathrm{J}_k(\mathrm{E};\varphi)$ de la forme

$$u = \omega \otimes j_k(s),$$

où ω est une section de $\Lambda^j\,\mathrm{T}^*$ et s une section de $\mathscr{E}_\varphi$, alors on a d'après (2) et la proposition 2 :

$$\varphi\,\mathrm{D}u = \rho(d\omega) \otimes j_{k-1}(\varphi\, s) = (d_{\mathrm{X/Y}}\,\rho\omega) \otimes j_{k-1}(s) = (d_{\mathrm{X/Y}} \otimes \pi_{k-1})\,\varphi\, u. \tag{29}$$

Comme $\Lambda^j\,\mathscr{T}^* \otimes \mathrm{J}_k(\mathscr{E};\varphi)$ est engendré sur $\mathbf{R}$ par des sections de la forme u, on a $\varphi\,\mathrm{D} = (d_{\mathrm{X/Y}} \otimes \pi_{k-1})\,\varphi$. Si le diagramme (27) est commutatif pour i, d'après les suites exactes (25), on voit que l'inclusion (26) est vraie pour $i+1$ et $j \geqq i$. Il s'agit maintenant de voir que (27) est commutatif pour $i+1$. Le faisceau $\mathrm{F}^{i+j+1}_{i+1}(\mathscr{E};\varphi)_k$ est engendré sur $\mathbf{R}$ par les sections de $\Lambda^{i+j+1}\,\mathrm{T}^* \otimes \mathrm{J}_k(\mathrm{E};\varphi)$ de la forme

$$u = \omega \otimes j_k(s)$$

et

$$u' = \omega' \otimes j_k(s'),$$

où ω est une section de F^{i+j+1}_{i+1}, ω' une section de $\Lambda^{i+j+1}\,\mathrm{T}^*$, et s, s' des sections de $\mathscr{E}_\varphi$ avec $\varphi\, s' = 0$. On a d'après (2) et la proposition 2, les relations (29) et

$$\varphi\,\mathrm{D}u' = 0 = (d_{\mathrm{X/Y}} \otimes \pi_{k-1})\,\varphi\, u'.$$

Donc $\varphi\,\mathrm{D} = (d_{\mathrm{X/Y}} \otimes \pi_{k-1})\,\varphi$.

PROPOSITION 4. — *Si* $\varphi : \mathrm{E} \to \rho^{-1}\,\mathrm{F}$ *est surjectif, alors :*

(i) *Si* $u \in \mathrm{F}^i_i(\mathscr{E};\varphi)_k$, *on a* $\pi_{k-1}\, u \in (\Lambda^i\,\mathscr{T}^* \otimes \mathrm{J}_{k-1}(\mathscr{E};\varphi))_\varphi$ *si et seulement si* $\mathrm{D}u \in \mathrm{F}^{i+1}_{i+1}(\mathscr{E};\varphi)_{k-1}$.

(ii) *Si* $u \in (\Lambda^i\,\mathscr{T}^* \otimes \mathrm{J}_k(\mathscr{E};\varphi))_\varphi$, *on a* $\mathrm{D}u \in (\Lambda^{i+1}\,\mathscr{T}^* \otimes \mathrm{J}_{k-1}(\mathscr{E};\varphi))_\varphi$ *et*

$$\varphi\,\mathrm{D}u = \mathrm{D}\varphi\, u.$$

Démonstration. — Du diagramme commutatif (27) avec $j = 0$ et de la suite exacte (26) avec $j = 1$, on déduit que si $u \in \mathrm{F}^i_i(\mathscr{E};\varphi)_k$, alors $\pi_{k-1}\, u \in (\Lambda^i\,\mathscr{T}^* \otimes \mathrm{J}_k(\mathscr{E};\varphi))_\varphi$ ou, ce qui est équivalent $(d_{X/Y} \otimes \pi_{k-1}) \varphi u = 0$, si et seulement si $Du \in F_{i+1}^{i+1}(\mathscr{E}; \varphi)_{k-1}$, d'où (i). Le faisceau $(\Lambda^i \mathscr{T}^* \otimes J_k(\mathscr{E}; \varphi))_\varphi$ est engendré sur $\mathbf{R}$ par les sections de $\Lambda^i T^* \otimes J_k(E; \varphi)$ de la forme

$$u = \rho^* \omega \otimes j_k(s)$$

et

$$u' = \omega' \otimes j_k(s'),$$

où ω est une section de $\Lambda^i T_Y^*$ sur un ouvert de Y et ω' une section de $\Lambda^i T^*$ et s, s' des sections de $\mathscr{E}_\varphi$ sur un ouvert de X avec $\varphi s' = 0$. D'après (2), on a

$$Du = \rho^* d\omega \otimes j_{k-1}(s),$$
$$Du' = d\omega' \otimes j_{k-1}(s')$$

et

$$\varphi\, Du = d\omega \otimes j_{k-1}(\varphi s) = D(\omega \otimes j_k(\varphi s)) = D\varphi u,$$
$$\varphi\, Du' = 0 = D\varphi u',$$

d'où (ii).

De la proposition 4, (ii), on déduit l'existence du diagramme commutatif

$$(30)\qquad \begin{array}{ccccccccccc} 0 \to & \mathscr{E}_\varphi & \xrightarrow{j_k} & J_k(\mathscr{E}; \varphi)_\varphi & \xrightarrow{D} & (\mathscr{T}^* \otimes J_{k-1}(\mathscr{E}; \varphi))_\varphi & \xrightarrow{D} \dots \to & (\Lambda^i \mathscr{T}^* \otimes J_{k-i}(\mathscr{E}; \varphi))_\varphi & \xrightarrow{D} \dots \\ & \downarrow \varphi & & \downarrow \varphi & & \downarrow \varphi & & \downarrow \varphi & \\ 0 \to & \mathscr{F} & \xrightarrow{j_k} & J_k(\mathscr{F}; Y) & \xrightarrow{D} & \mathscr{T}_Y^* \otimes J_{k-1}(\mathscr{F}; Y) & \xrightarrow{D} \dots \to & \Lambda^i \mathscr{T}_Y^* \otimes J_{k-i}(\mathscr{F}; Y) & \xrightarrow{D} \dots \end{array}$$

dont la première ligne est un sous-complexe de (1); on verra plus tard que c'est en fait une suite exacte.

Nous supposerons désormais que $\varphi : E \to \rho^{-1} F$ est surjectif. Soit $R_k \subset J_k(E; \varphi)$ une équation différentielle d'ordre k dans E. Puisque $J_k(E; \varphi)_{+l} = J_{k+l}(E; \varphi)$, le l-ième prolongement R_{k+l} de R_k est contenu dans $J_{k+l}(E; \varphi)$. On définit

$$F_i^j(R_{k+l}) = (\Lambda^j T^* \otimes R_{k+l}) \cap F_i^j(E; \varphi)_{k+l},$$
$$F_i(R_{k+l}) = (\Lambda T^* \otimes R_{k+l}) \cap F_i(E; \varphi)_{k+l},$$

et

$$(\Lambda^j \mathscr{T}^* \otimes \mathscr{R}_{k+l})_\varphi = (\Lambda^j \mathscr{T}^* \otimes \mathscr{R}_{k+l}) \cap (\Lambda^j \mathscr{T}^* \otimes J_{k+l}(\mathscr{E}; \varphi))_\varphi.$$

La première ligne de (30) nous donne par restriction un sous-complexe

$$(31)\qquad 0 \to (\mathscr{R}_{k+l})_\varphi \xrightarrow{D} (\mathscr{T}^* \otimes \mathscr{R}_{k+l-1})_\varphi \xrightarrow{D} \dots \to (\Lambda^j \mathscr{T}^* \otimes \mathscr{R}_{k+l-j})_\varphi \xrightarrow{D} \dots$$

de (4), dont on note $H_\varphi^j(R_k)_{k+l-j}$ la cohomologie en $(\Lambda^j \mathscr{T}^* \otimes \mathscr{R}_{k+l-j})_\varphi$. On a évidemment

$$H_\varphi^0(R_k)_{k+l} = H^0(R_k) \qquad \text{pour} \quad l \geqq 0.$$

DÉFINITION. — *Une équation différentielle* R_k *d'ordre* k *dans* E *est* φ-*projetable* (*ou projetable*) *si*

(i) $R_k \subset J_k(E; \varphi)$;

(ii) *pour tout* $l \geqq 0$, R_{k+l} *est un fibré vectoriel;*

(iii) *pour tout* $l \geqq 0$, *il existe une équation différentielle* $R''_{k+l} \subset J_{k+l}(F; Y)$ *telle que* $\varphi(R_{k+l,x}) = R''_{k+l,\rho(x)}$ *pour tout* $x \in X$.

Supposons que R_k soit φ-projetable. Soit R'_{k+l} le noyau de $\varphi : R_{k+l} \to R''_{k+l}$, qui est donc un fibré vectoriel. Sous ces conditions, $\varphi : (\mathscr{R}_{k+l})_{\varphi,x} \to \mathscr{R}''_{k+l,\rho(x)}$ est surjectif pour $x \in X$ et d'après la proposition 4, (ii) on voit que

$$D(\mathscr{R}''_{k+l+1}) \subset \mathscr{T}^*_Y \otimes \mathscr{R}''_{k+l} \qquad \text{pour} \quad l \geqq 0;$$

comme $\pi_{k+l}(R''_{k+l+1}) \subset R''_{k+l}$, on a

$$R''_{k+l+1} \subset (R''_{k+l})_{+1} \qquad \text{pour} \quad l \geqq 0.$$

Comme R'_k est un fibré vectoriel, on a

$$\begin{aligned} R'_{k+l} &= J_{k+l}(K) \cap J_l(R_k) \\ &= J_{k+l}(K) \cap J_l(J_k(K)) \cap J_l(R_k) \\ &= J_{k+l}(K) \cap J_l(R'_k) \\ &= (R'_k)_{+l}. \end{aligned}$$

Le diagramme

$$\begin{array}{ccccccccc} & & 0 & & 0 & & & 0 & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & & \downarrow & \\ 0 & \longrightarrow & \mathscr{R}'_{k+l} & \xrightarrow{D} & \mathscr{T}^* \otimes \mathscr{R}'_{k+l-1} & \xrightarrow{D} & \ldots \longrightarrow & \Lambda^n \mathscr{T}^* \otimes \mathscr{R}'_{k+l-n} & \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & & \downarrow & \\ 0 & \to & (\mathscr{R}_{k+l})_\varphi & \xrightarrow{D} & (\mathscr{T}^* \otimes \mathscr{R}_{k+l-1})_\varphi & \xrightarrow{D} & \ldots \to & (\Lambda^n \mathscr{T}^* \otimes \mathscr{R}_{k+l-n})_\varphi & \to 0 \\ & & \downarrow \varphi & & \downarrow \varphi & & & \downarrow \varphi & \\ 0 & \longrightarrow & \mathscr{R}''_{k+l} & \xrightarrow{D} & \mathscr{T}^*_Y \otimes \mathscr{R}''_{k+l-1} & \xrightarrow{D} & \ldots \longrightarrow & \Lambda^n \mathscr{T}^*_Y \otimes \mathscr{R}''_{k+l-n} & \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & & \downarrow & \\ & & 0 & & 0 & & & 0 & \end{array} \tag{32}$$

est commutatif et ses colonnes sont exactes. On pose $R_{k+l} = J_{k+l}(E; \varphi)$ pour $l < 0$, de sorte que l'on a ici pour $l < 0$, $R''_{k+l} = J_{k+l}(F)$ et $R'_{k+l} = J_{k+l}(K)$, où K est le noyau de $\varphi : E \to F$. Si $H^j(R_k)''_{k+l-j}$ est le groupe de cohomologie de la dernière ligne du diagramme (32) en $\Lambda^j \mathscr{T}^*_Y \otimes \mathscr{R}''_{k+l-j}$, le diagramme (32) nous donne la suite exacte

$$\ldots \to H^j(R'_k)_{k+l} \to H^j_\varphi(R_k)_{k+l} \to H^j(R_k)''_{k+l} \to H^{j+1}(R'_k)_{k+l-1} \to \ldots. \tag{33}$$

Si on prend $R_k = J_k(E; \varphi)$, alors $R'_{k+l} = J_{k+l}(K)$ et $R''_{k+l} = J_{k+l}(F; Y)$. L'exactitude du complexe de Spencer (1) et de (33) nous montre que la première ligne du diagramme (30) est exacte.

Lemme 5. — *Si les applications* $\pi_{k+l} : R'_{k+l+1} \to R'_{k+l}$, $\pi_{k+l} : R''_{k+l+r} \to R''_{k+l}$ *sont de rang constant pour* l, $r \geqq 0$, *alors il existe un entier* $l_1 \geqq 0$ *tel que*

$$\pi_{k+l} : H^j_\varphi(R_k)_{k+l+1} \to H^j_\varphi(R_k)_{k+l}$$

soit un isomorphisme pour $l \geqq l_1$.

Démonstration. — Le théorème 2 de [2] et le théorème 2 nous donnent l'existence d'un entier $l_1 \geqq 0$ tel que :

$$\pi_{k+l} : \ H^j(R_k')_{k+l+1} \to H^j(R_k')_{k+l},$$
$$\pi_{k+l} : \ H^j(R_k)''_{k+l+1} \to H^j(R_k)''_{k+l},$$

soient des isomorphismes pour $l \geqq l_1$. Du diagramme commutatif et exact

$$\begin{array}{ccccccccc}
\ldots \to & H^{j-1}(R_k)''_{k+l+2} & \to & H^j(R_k')_{k+l+1} & \to & H^j_\varphi(R_k)_{k+l+1} & \to & H^j(R_k)''_{k+l+1} & \to \ldots \\
& \downarrow \pi_{k+l+1} & & \downarrow \pi_{k+l} & & \downarrow \pi_{k+l} & & \downarrow \pi_{k+l} & \\
\ldots \to & H^{j-1}(R_k)''_{k+l+1} & \longrightarrow & H^j(R_k')_{k+l} & \longrightarrow & H^j_\varphi(R_k)_{k+l} & \longrightarrow & H^j(R_k)''_{k+l} & \longrightarrow \ldots
\end{array}$$

on déduit le résultat voulu.

Remarque. — On peut remplacer dans ce lemme l'hypothèse « $\pi_{k+l} : R''_{k+l+r} \to R''_{k+l}$ est de rang constant pour $l, r \geqq 0$ » par « $R''_{k+l} = (R''_k)_{+l}$ et $\pi_{k+l} : R''_{k+l+1} \to R''_{k+l}$ est de rang constant pour $l \geqq 0$ ».

La suite exacte

$$0 \to \Lambda^{i+j} T^* \otimes R'_{k+l} \to F_i^{i+j}(R_{k+l}) \to F_i^{i+j} \otimes_X R''_{k+l} \to 0$$

nous montre que les $F_i^j(R_{k+l})$ sont des fibrés vectoriels.

Posons

$$Z_r^{i,j}(\mathscr{R}_k)_p = \{ u \in F_i^{i+j}(\mathscr{R}_p) \mid Du \in F_{i+r}^{i+j+1}(\mathscr{R}_{p-1}) \}.$$

Si $r \leqq 0$, on a $Z_r^{i,j}(\mathscr{R}_k)_p = F_i^{i+j}(\mathscr{R}_p)$. Posons

$$E_r^{i,j}(\mathscr{R}_k)_p = Z_r^{i,j}(\mathscr{R}_k)_p / (Z_{r-1}^{i+1,j-1}(\mathscr{R}_k)_p + DZ_{r-1}^{i-r+1,j+r-2}(\mathscr{R}_k)_{p+1}).$$

Alors $E_0^{i,j}(\mathscr{R}_k)_p$ est isomorphe au faisceau de sections de

$$E_0^{i,j}(R_k)_p = F_i^{i+j}(R_p)/F_{i+1}^{i+j}(R_p).$$

D'après la suite exacte (22), on a un isomorphisme canonique

$$E_0^{i,j}(R_k)_p \simeq \Lambda^j V^* \otimes_X (\Lambda^i T_Y^* \otimes R''_p). \tag{34}$$

L'opérateur D, d'après la proposition 3, induit un opérateur différentiel

$$D : \ F_i(\mathscr{R}_p) \to F_i(\mathscr{R}_{p-1})$$

et donc un opérateur différentiel

$$d_0 : \ E_0^{i,j}(\mathscr{R}_k)_p \to E_0^{i,j+1}(\mathscr{R}_k)_{p-1}$$

qui est égal à $d_{X/Y} \otimes \pi_{p-1}$ en employant les isomorphismes (34). Le faisceau

$$E_1^{i,j}(\mathscr{R}_k)_p = Z_1^{i,j}(\mathscr{R}_k)_p / F_{i+1}^{i+j}(\mathscr{R}_p) + DF_i^{i+j-1}(\mathscr{R}_{p+1})$$

est isomorphe à la cohomologie du complexe

$$E_0^{i,j-1}(\mathscr{R}_k)_{p+1} \xrightarrow{d_0} E_0^{i,j}(\mathscr{R}_k)_p \xrightarrow{d_0} E_0^{i,j+1}(\mathscr{R}_k)_{p-1}.$$

On a une application

$$\pi_{p-1} : \quad E_r^{i,j}(\mathscr{R}_k)_p \to E_r^{i,j}(\mathscr{R}_k)_{p-1}.$$

Pour $j > 0$, l'application

$$\pi_{p-2} : \quad E_1^{i,j}(\mathscr{R}_k)_p \to E_1^{i,j}(\mathscr{R}_k)_{p-2}$$

est l'application nulle. En effet, si $u \in \Lambda^j \mathscr{V}^* \otimes (\Lambda^i \mathscr{T}_Y^* \otimes \mathscr{R}''_{p-2})_X$ est de la forme $\pi_{p-2}\, u'$ avec $u' \in \Lambda^j \mathscr{V}^* \otimes (\Lambda^i \mathscr{T}_Y^* \otimes \mathscr{R}''_p)_X$ et $(d_{X/Y} \otimes \pi_{p-1})\, u' = 0$, on peut écrire, grâce à la suite exacte, (24) $u = (d_{X/Y} \otimes \pi_{p-2})\, v$, avec $v \in \Lambda^{j-1} \mathscr{V}^* \otimes (\Lambda^i \mathscr{T}_Y^* \otimes \mathscr{R}''_{p-1})_X$. Donc pour $j > 0$ on a

$$\pi_p Z_1^{i,j}(\mathscr{R}_k)_{p+2} = F_{i+1}^{i+j}(\mathscr{R}_p) + DF_i^{i+j-1}(\mathscr{R}_{p+1}). \tag{35}$$

THÉORÈME 3. — *Supposons que* $\varphi : E \to \rho^{-1} F$ *soit surjectif. Soit* $R_k \subset J_k(E)$ *une équation différentielle* φ*-projetable.*

(i) *Si* $\pi_{k+l} : R_{k+l+1} \to R_{k+l}$ *est de rang constant pour* $l \geqq 0$, *il existe un entier* $p_0 \geqq k$ *tel que l'application*

$$H_\varphi^j(R_k)_p \to H^j(R_k)_p \tag{36}$$

soit surjective pour $p \geqq p_0$.

(ii) *Si* $\pi_{k+l} : R'_{k+l+1} \to R'_{k+l}$, $\pi_{k+l} : R''_{k+l+r} \to R''_{k+l}$ *sont de rang constant pour* $l, r \geqq 0$, *alors il existe un entier* $p_1 \geqq k$ *tel que l'application* (36) *soit injective pour* $p \geqq p_1$.

(iii) *Avec les hypothèses de* (i) *et* (ii), *il existe un entier* $p_2 \geqq k$ *tel que*

$$H_\varphi^j(R_k)_p \simeq H^j(R_k)$$

et tel que l'on ait une suite exacte

$$\ldots \to H^{j-1}(R_k)''_{p+1} \to H^j(R'_k) \to H^j(R_k) \to H^j(R_k)''_p \to \ldots \tag{37}$$

pour $p \geqq p_2$.

(iv) *Si* $\pi_{k+l} : R'_{k+l+1} \to R'_{k+l}$, $\pi_{k+l} : R_{k+l+1} \to R_{k+l}$, $\pi_{k+l} : R''_{k+l+r} \to R''_{k+l}$ *sont de rang constant pour* $l, r \geqq 0$, *alors il existe des entiers* $m_0, m_1 \geqq k$, $l_0 \geqq 0$ *donnés par les théorèmes* 1 *et* 2 *tels que les équations différentielles* $R'^{(l_0)}_{m_0} \subset J_{m_0}(K)$, $R''^{(l_0)}_{m_0} \subset J_{m_0}(F; Y)$ *soient formellement intégrables et vérifient*

$$H^j(R'_k) \simeq H^j(R'^{(l_0)}_{m_0}),$$
$$H^j(R_k)''_p \simeq H^j(R''^{(l_0)}_{m_0})$$

pour $p \geqq m_1$ *et tels que l'on ait une suite exacte*

$$\ldots \to H^j(R'^{(l_0)}_{m_0}) \to H^j(R_k) \to H^j(R''^{(l_0)}_{m_0}) \to H^{j+1}(R'^{(l_0)}_{m_0}) \to \ldots. \tag{38}$$

Démonstration. — (i) Soit $p_0 \geqq k$ un entier tel que $\pi_p : H^j(R_k)_{p+1} \to H^j(R_k)_p$ soit un isomorphisme pour $p \geqq p_0$. Prenons $p \geqq p_0$, $j > 0$ et $u \in \Lambda^j \mathscr{T}^* \otimes \mathscr{R}_p$ avec $Du = 0$; il existe donc $u' \in \Lambda^j \mathscr{T}^* \otimes \mathscr{R}_{p+2j+1}$ tel que $Du' = 0$ et $\pi_p u' = u$. D'après (35), on peut écrire :

$$\pi_{p+1} u' = v + Dw,$$

où $v \in F_j^j(\mathscr{R}_{p+1})$ et $w \in \Lambda^{j-1}\mathscr{T}^* \otimes \mathscr{R}_{p+2}$, avec $Dv = 0$. La proposition 4, (i), nous dit que $\pi_p v \in (\Lambda^j \mathscr{T}^* \otimes \mathscr{R}_p)_\varphi$. On a donc

$$u = \pi_p v + D\pi_{p+1} w,$$

ce qu'il fallait montrer.

(ii) Soit $p_1 = k+l_1+2n-1$, où $l_1 \geqq 0$ est l'entier donné par le lemme 5. Prenons $p \geqq k+l_1$, $j > 0$ et $u \in (\Lambda^j \mathscr{T}^* \otimes \mathscr{R}_{p+2j-1})_\varphi$ vérifiant $Du = 0$ et $u = Dv$ avec $v \in \Lambda^{j-1}\mathscr{T}^* \otimes \mathscr{R}_{p+2j}$. Il s'agit de montrer que la classe de cohomologie $[u] \in H_\varphi^j(\mathscr{R}_k)_{p+2j-1}$ de u est nulle. D'après (35) il existe $w \in F_{j-1}^{j-1}(\mathscr{R}_{p+2})$, $w' \in \Lambda^{j-2}\mathscr{T}^* \otimes \mathscr{R}_{p+3}$ tels que

$$\pi_{p+2} v = w + Dw'.$$

Pour $j = 1$, on prendra ici $w = v$ et $w' = 0$. Alors

$$Dw = \pi_{p+1} u \in (\Lambda^j \mathscr{T}^* \otimes \mathscr{R}_{p+1})_\varphi.$$

Donc, d'après la proposition 4, (i), on a

$$\pi_{p+1} w \in (\Lambda^{j-1}\mathscr{T}^* \otimes \mathscr{R}_{p+1})_\varphi$$

et la classe de $\pi_p u$ dans $H_\varphi^j(\mathscr{R}_k)_p$ est nulle. Donc $[u] = 0$ d'après le lemme 5.

(iii) Soit p_2 un entier $\geqq \sup(p_0, p_1)$ tel que

$$H^j(R'_k)_p \simeq H^j(R'_k),$$
$$H^j(R_k)_p \simeq H^j(R_k)$$

pour $p \geqq p_2 - n$. La suite exacte (33), (i) et (ii) nous donnent le résultat voulu.

(iv) Les théorèmes 1 et 2 et la suite exacte (37) nous donnent les conclusions de (iv).

Remarques. — (i) On peut remplacer l'hypothèse « $\pi_{k+l} : R''_{k+l+r} \to R''_{k+l}$ est de rang constant pour $l, r \geqq 0$ » par « $R''_{k+l} = (R''_k)_{+l}$ et $\pi_{k+l} : R''_{k+l+1} \to R''_{k+l}$ est de rang constant pour $l \geqq 0$ ».

(ii) Si X, Y sont des variétés analytiques réelles, E, F des fibrés vectoriels analytiques $\varphi : E \to F$, $\rho : X \to Y$ des applications analytiques, et R_k une équation différentielle analytique, et si l'on considère les groupes de cohomologie de Spencer H_ω^j obtenus à partir des sections analytiques des fibrés, alors $H_\omega^1(R'^{(l_0)}_{m_0}) = 0$ et la suite exacte (38) nous montre que l'application

$$\varphi : \quad H_\omega^0(R_k)_x \to H_\omega^0(R''^{(l_0)}_{m_0})_{\rho(x)}$$

est surjective pour tout $x \in X$.

5. **Des exemples**

Supposons que $\varphi : E \to \rho^{-1} F$ soit surjectif et de noyau K. Fixons $x \in X$; notons pour le moment T^*, T_Y^*, E, F, K les fibres de ces fibrés vectoriels en x ou en $\rho(x)$, et considérons T_Y^* comme un sous-espace de T^* via l'inclusion ρ^*. Soit

$$(\Lambda^i T^* \otimes S^k T^* \otimes E)_\varphi = (\Lambda^i T^* \otimes S^k T^* \otimes K) + (\Lambda^i T_Y^* \otimes S^k T_Y^* \otimes E),$$

le sous-espace de $\Lambda^i T^* \otimes S^k T^* \otimes E$, de sorte que l'on a des suites exactes

$$0 \to \Lambda^i T^* \otimes S^k T^* \otimes K \to (\Lambda^i T^* \otimes S^k T^* \otimes E)_\varphi \xrightarrow{\varphi} \Lambda^i T_Y^* \otimes S^k T_Y^* \otimes F \to 0$$

telles que le diagramme

$$\begin{array}{ccc}
0 & & 0 \\
\downarrow & & \downarrow \\
S^k T^* \otimes K & \xrightarrow{\delta} & T^* \otimes S^{k-1} T^* \otimes K \\
\downarrow & & \downarrow \\
(S^k T^* \otimes E)_\varphi & \xrightarrow{\delta} & (T^* \otimes S^{k-1} T^* \otimes E)_\varphi \\
\downarrow \varphi & & \downarrow \varphi \\
S^k T_Y^* \otimes F & \xrightarrow{\delta} & T_Y^* \otimes S^{k-1} T_Y^* \otimes F \\
\downarrow & & \downarrow \\
0 & & 0
\end{array}$$

soit commutatif.

Soit g_k un sous-espace de $S^k T^* \otimes E$; notons $(g_k)_{+1}$, le premier prolongement de g_k, le sous-espace de $S^{k+1} T^* \otimes E$ tel que $\delta((g_k)_{+1}) \subset T^* \otimes g_k$ et tel que la suite

$$0 \to (g_k)_{+1} \xrightarrow{\delta} T^* \otimes g_k \xrightarrow{\delta} \Lambda^2 T^* \otimes S^{k-1} T^* \otimes E$$

soit exacte. On a $(S^{k+1} T^* \otimes E)_\varphi \subset ((S^k T^* \otimes E)_\varphi)_{+1}$. Si g_k est un sous-espace de $(S^k T^* \otimes E)_\varphi$, on pose $g'_k = (S^k T^* \otimes K) \cap g_k$ et $g''_k = \varphi(g_k) \subset S^k T_Y^* \otimes F$.

Fixons $k \geqq 1$; pour tout $l \geqq 0$, soit g_{k+l} un sous-espace de $(S^{k+l} T^* \otimes E)_\varphi$. Supposons que $g_{k+l+1} \subset (g_{k+l})_{+1}$, pour $l \geqq 0$ et posons $g_{k-l} = (S^{k-l} T^* \otimes E)_\varphi$, pour $l > 0$. Alors $g'_{k+l+1} \subset (g'_{k+l})_{+1}$ et $g''_{k+l+1} \subset (g''_{k+l})_{+1}$, où $(g''_{k+l})_{+1} \subset S^{k+l+1} T_Y^* \otimes F$. Le diagramme

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
0 & \to & g'_{k+l+1} & \xrightarrow{\delta} & T^* \otimes g'_{k+l} & \xrightarrow{\delta} & \Lambda^2 T^* \otimes g'_{k+l-1} & \xrightarrow{\delta} & \Lambda^3 T^* \otimes g'_{k+l-2} \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
0 & \to & g_{k+l+1} & \xrightarrow{\delta} & T^* \otimes g_{k+l} & \xrightarrow{\delta} & \Lambda^2 T^* \otimes g_{k+l-1} & \xrightarrow{\delta} & \Lambda^3 T^* \otimes g_{k+l-2} \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & g''_{k+l+1} & \xrightarrow{\delta} & T^* \otimes g''_{k+l} & \xrightarrow{\delta} & \Lambda^2 T^* \otimes g''_{k+l-1} & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & & 0 & &
\end{array} \tag{39}$$

est commutatif et ses colonnes sont exactes. On note $H^i(g')_{k+l+1-i}$ la cohomologie de la première ligne en $\Lambda^i T^* \otimes g'_{k+l+1-i}$ et $H^i(g)_{k+l+1-i}$ la cohomologie de la seconde ligne en $\Lambda^i T^* \otimes g_{k+l+1-i}$.

D'abord, nous avons le lemme suivant dont nous laissons la démonstration au lecteur.

LEMME 6. — *Pour* $k \geqq 1$:

$$S^{k+1} T_Y^* = (T^* \otimes S^k T_Y^*) \cap S^{k+1} T^*,$$

où $S^{k+1}T_Y^*$, $S^{k+1}T^*$ *et* $T^* \otimes S^k T_Y^*$ *sont considérés comme des sous-espaces de* $T^* \otimes S^k T^*$, *les deux premiers grâce aux applications injectives* $\delta : S^{k+1}T_Y^* \to T_Y^* \otimes S^k T_Y^*$ *et* $\delta : S^{k+1}T^* \to T^* \otimes S^k T^*$.

Le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \to & g''_{k+l+1} & \xrightarrow{\delta} & T_Y^* \otimes g''_{k+l} & \xrightarrow{\delta} & \Lambda^2 T_Y^* \otimes g''_{k+l-1} \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 \to & g''_{k+l+1} & \xrightarrow{\delta} & T^* \otimes g''_{k+l} & \xrightarrow{\delta} & \Lambda^2 T^* \otimes g''_{k+l-1} \end{array}$$

nous donne une application de la cohomologie $H^1(g'')_{k+l}$ de la première ligne en $T_Y^* \otimes g''_{k+l}$ dans celle de la seconde en $T^* \otimes g''_{k+l}$. Le lemme 6 implique que cette application, qui est visiblement injective, est en fait un isomorphisme. En effet, si $u \in T^* \otimes g''_{k+l}$ satisfait à $\delta u = 0$, alors

$$u \in (T^* \otimes S^{k+l}T_Y^* \otimes F) \cap \delta(S^{k+l+1}T^* \otimes F),$$

d'où $u = \delta v$, avec $v \in S^{k+l+1}T_Y^* \otimes F$. Donc v appartient à $(g''_{k+l})_{+1}$ et $u \in T_Y^* \otimes g''_{k+l}$ avec $\delta u = 0$. Le diagramme (39) nous donne donc

LEMME 7. — *Pour* $l \geqq 0$, *on a une suite exacte*

$$0 \to H^1(g')_{k+l} \to H^1(g)_{k+l} \to H^1(g'')_{k+l} \to H^2(g')_{k+l-1}.$$

On a $g_{k+l+1} = (g_{k+l})_{+1}$ si et seulement si $H^1(g)_{k+l} = 0$; si $g_{k+l+1} = (g_{k+l})_{+1}$ pour tout $l \geqq 0$, on écrira $H^i(g_k)_{k+l} = H^i(g)_{k+l}$.

COROLLAIRE 2. — *Si* $g'_{k+l+1} = (g'_{k+l})_{+1}$ *et* $H^2(g')_{k+l-1} = 0$, *alors* $g_{k+l+1} = (g_{k+l})_{+1}$ *si et seulement si* $g''_{k+l+1} = (g''_{k+l})_{+1}$.

Si l'on prend $g_{k+l} = (S^{k+l}T^* \otimes E)_\varphi$, alors $g'_{k+l} = S^{k+l}T^* \otimes K$ et $g''_{k+l} = S^{k+l}T_Y^* \otimes F$. D'où $H^1(g')_{k+l} = H^2(g')_{k+l-1} = H^1(g'')_{k+l} = 0$ pour $l \geqq 0$ et

COROLLAIRE 3. — *Pour* $k \geqq 1$, $(S^{k+1}T^* \otimes E)_\varphi = ((S^k T^* \otimes E)_\varphi)_{+1}$.

Revenons maintenant aux fibrés sur X et Y. On a donc un sous-fibré $(S^k T^* \otimes E)_\varphi$ de $S^k T^* \otimes E$ tel que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} 0 & & 0 \\ \downarrow & & \downarrow \\ (S^k T^* \otimes E)_\varphi & \xrightarrow{\varphi} & S^k T_Y^* \otimes F \\ \downarrow{\scriptstyle \varepsilon} & & \downarrow{\scriptstyle \varepsilon} \\ J_k(E;\varphi) & \xrightarrow{\varphi} & J_k(F;Y) \\ \downarrow{\scriptstyle \pi_{k-1}} & & \downarrow{\scriptstyle \pi_{k-1}} \\ J_{k-1}(E;\varphi) & \xrightarrow{\varphi} & J_{k-1}(F;Y) \\ \downarrow & & \downarrow \\ 0 & & 0 \end{array}$$

soit commutatif et exact.

Nous montrons maintenant comment on peut obtenir des équations différentielles vérifiant les hypothèses du théorème 3.

PROPOSITION 5. — *Supposons que* $\varphi : E \to \rho^{-1} F$ *soit surjectif. Soient* $R_{k+l} \subset J_{k+l}(E; \varphi)$, $R''_{k+l} \subset J_{k+l}(F; Y)$ *des équations différentielles pour* $l \geqq 0$.

(i) *Supposons que* $\varphi(R_{k+l,x}) = R''_{k+l,\rho(x)}$ *pour* $l \geqq 0$ *et tout* $x \in X$. *Soient* $R'_{k+l} \subset J_{k+l}(K)$ *l'équation différentielle noyau de* $\varphi : R_{k+l} \to R''_{k+l}$ *et* $g'_k \subset S^k T^* \otimes K$ *le noyau de* $\pi_k : R'_k \to J_{k-1}(K)$. *Alors si* $R_{k+l+1} \subset (R_{k+l})_{+1}$, *on a*

$$(40)\qquad \begin{cases} R'_{k+l+1} \subset (R'_{k+l})_{+1}, \\ R''_{k+l+1} \subset (R''_{k+l})_{+1}. \end{cases}$$

Si $R_{k+l+1} \subset (R_{k+l})_{+1}$, $R'_{k+l} = (R'_k)_{+l}$ *et* $H^2(g'_k)_{k+l-1} = 0$ *pour tout* $l \geqq 0$ *et si* R'_k *est formellement intégrable et* $\pi_k : R'_k \to J_{k-1}(K)$ *est surjectif, alors* R_k *est formellement intégrable et* $R_{k+l} = (R_k)_{+l}$ *pour tout* $l \geqq 0$ *si et seulement si* R''_k *est formellement intégrable et* $R''_{k+l} = (R''_k)_{+l}$ *pour tout* $l \geqq 0$.

(ii) *Si* $R''_{k+l+1} \subset (R''_{k+l})_{+1}$ *et si* $R_{k+l} \subset J_{k+l}(E; \varphi)$ *est l'image inverse de* R''_{k+l} *par l'application* $\varphi : J_{k+l}(E; \varphi) \to J_{k+l}(F; Y)$ *pour tout* $l \geqq 0$, *alors* $\varphi(R_{k+l,x}) = R''_{k+l,\rho(x)}$ *pour tout* $x \in X$ *et* $R_{k+l+1} \subset (R_{k+l})_{+1}$. *De plus,* R_k *est formellement intégrable et* $R_{k+l} = (R_k)_{+l}$ *pour tout* $l \geqq 0$ *si et seulement si* R''_k *est formellement intégrable et* $R''_{k+l} = (R''_k)_{+l}$ *pour tout* $l \geqq 0$.

Démonstration. — (i) Si $R_{k+l+1} \subset (R_{k+l})_{+1}$, des suites exactes

$$(41)\qquad 0 \to \mathscr{R}'_{p,x} \to (\mathscr{R}_p)_{\varphi,x} \xrightarrow{\varphi} (\mathscr{R}''_p)_{\rho(x)} \to 0$$

($p \geqq k$ et $x \in X$) et de la proposition 4, (ii), on déduit (40). Écrivons $R'_p = J_p(K)$, $R_p = J_p(E; \varphi)$, $R'_p = J_p(F; Y)$ pour $p < k$. Notons g'_p, g_p, g''_p les sous-fibrés à fibre variable de $S^p T^* \otimes K$, $(S^p T^* \otimes E)_\varphi$, $S^p T^*_Y \otimes F$ noyaux de $\pi_p : R'_p \to R'_{p-1}$, $\pi_p : R_p \to R_{p-1}$, $\pi_p : R''_p \to R''_{p-1}$ respectivement. Des suites exactes

$$0 \to R'_p \to R_p \xrightarrow{\varphi} \rho^{-1} R''_p \to 0$$

et de la surjectivité de $\pi_{k+l} : R'_{k+l} \to R'_{k+l-1}$ pour $l \geqq 0$, on déduit l'exactitude de la suite

$$0 \to g'_p \to g_p \xrightarrow{\varphi} \rho^{-1} g''_p \to 0$$

pour $p \geqq k$. Supposons que $R_{k+l+1} \subset (R_{k+l})_{+1}$; alors $g_{k+l+1} \subset (g_{k+l})_{+1}$ et le diagramme

$$\begin{tikzcd} & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\ 0 \arrow[r] & g_{k+l+1} \arrow[r] \arrow[d, "\varepsilon"] & (g_{k+l})_{+1} \arrow[d, "\varepsilon"] & \\ 0 \arrow[r] & R_{k+l+1} \arrow[r] \arrow[d, "\pi_{k+l}"] & (R_{k+l})_{+1} \arrow[d, "\pi_{k+l}"] & \\ 0 \arrow[r] & R_{k+l} \arrow[r] & R_{k+l} \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

est commutatif et exact. Si $\pi_{k+l} : R_{k+l+1} \to R_{k+l}$ est surjectif, on voit donc que $R_{k+l+1} = (R_{k+l})_{+1}$ si et seulement si $g_{k+l+1} = (g_{k+l})_{+1}$. Donc R_k est formellement intégrable et $R_{k+l} = (R_k)_{+l}$ pour $l \geqq 0$ si et seulement si $R_{k+l+1} \subset (R_{k+l})_{+1}$, $g_{k+l+1} = (g_{k+l})_{+1}$ et $\pi_{k+l} : R_{k+l+1} \to R_{k+l}$ est surjectif pour tout $l \geqq 0$. On a évidemment des critères analogues pour les R'_{k+l} et les R''_{k+l}. Si $\pi_{k+l} : R'_{k+l+1} \to R'_{k+l}$ est surjectif, alors $\pi_{k+l} : R_{k+l+1} \to R_{k+l}$ est surjectif si et seulement si $\pi_{k+l} : R''_{k+l+1} \to R''_{k+l}$ est surjectif. Le résultat suit maintenant grâce au corollaire 2.

(ii) Sous ces hypothèses, on a $R'_{k+l} = J_{k+l}(K)$ pour tout l et $g'_k = S^k T^* \otimes K$. D'après la proposition 4, (ii) et l'exactitude de (41), on a $R_{k+l+1} \subset (R_{k+l})_{+1}$. On voit facilement que les autres conditions de (i) sont remplies et alors (i) implique (ii).

Sous les hypothèses de (i), si R_k est formellement intégrable et $R_{k+l} = (R_k)_{+l}$ pour $l \geqq 0$, le théorème 3 et la suite exacte (38) nous donnent une suite exacte

$$\ldots \to H^j(R'_k) \to H^j(R_k) \to H^j(R''_k) \to H^{j+1}(R'_k) \to \ldots .$$

En particulier, si les hypothèses de (ii) sont aussi vérifiées, on a $H^0(R'_k) = \mathscr{K}$ et $H^j(R'_k) = 0$ pour $j > 0$. Si $\varphi : E \to \rho^{-1} F$ est un isomorphisme, alors $\varphi : J_k(E; \varphi) \to \rho^{-1} J_k(F; Y)$ l'est aussi et on a des isomorphismes

$$H^j(R_k)_x \xrightarrow{\sim} H^j(R''_k)_{\rho(x)}$$

pour $j \geqq 0$ et tout $x \in X$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] H. Goldschmidt, *Existence theorems for analytic linear partial differential equations* (*Ann. of Math.*, vol. 86, 1967, p. 246-270).

[2] H. Goldschmidt, *Prolongations of linear differential equations. I. A conjecture of Élie Cartan* (*Ann. scient. Éc. Norm. Sup.*, 4e série, tome 1, 1968, p. 417-444).

[3] H. Goldschmidt, *On the Spencer cohomology of a Lie equation* (*Proc. Sympos. Pure Math.*, vol. 23, Amer. Math. Soc., Providence, R. I., 1973, p. 379-385).

[4] D. Mumford, *Lectures on curves on an algebraic surface* (*Ann. of Math. Studies*, no 59, Princeton University Press, Princeton, N. J., 1966).

[5] D. G. Quillen, *Formal properties of over-determined systems of linear partial differential equations* (*Ph. D. thesis*, Harvard University, 1964).

[6] J.-P. Serre, *Faisceaux algébriques cohérents* (*Ann. of Math.*, vol. 61, 1955, p. 197-278).

[7] D. C. Spencer, *Overdetermined systems of linear partial differential equations* (*Bull. Amer. Math. Soc.*, vol. 75, 1969, p. 179-239).

(Manuscrit reçu le 4 juin 1973.)

H. Goldschmidt,
Université Scientifique et Médicale de Grenoble,
Université de Nice,
Parc Valrose, 06100 Nice.