

ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

HELMUT A. HAMM

LÊ DŨNG TRÁNG

Un théorème de Zariski du type de Lefschetz

Annales scientifiques de l'É.N.S. 4^e série, tome 6, n° 3 (1973), p. 317-355

http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1973_4_6_3_317_0

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1973, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (<http://www.elsevier.com/locate/ansens>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

UN THÉORÈME DE ZARISKI DU TYPE DE LEFSCHETZ

PAR HELMUT A. HAMM ET LÊ DŨNG TRÁNG

0. Introduction

(0.1) Dans [25] O. Zariski a énoncé le théorème suivant :

THÉORÈME (0.1.1). — *Soit H une hypersurface projective de $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$. Soit L un hyperplan générique de $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$. Si $n > 2$, alors le groupe de Poincaré de $\mathbf{P}^n(\mathbf{C}) - H$ coïncide avec le groupe de Poincaré de $L - H \cap L$.*

Il obtenait alors le corollaire suivant :

COROLLAIRE (0.1.2). — *Soit H une hypersurface projective de $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$. Si $n > 2$, le groupe de Poincaré de $\mathbf{P}^n(\mathbf{C}) - H$ coïncide avec le groupe de Poincaré de $P - H \cap P$, où P est un plan générique de $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$.*

Ce théorème permet donc de ramener le calcul du groupe fondamental du complémentaire d'une hypersurface projective de $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ dans $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ au calcul du groupe fondamental du complémentaire d'une courbe projective plane dans le plan projectif. Ceci peut être fait grâce à un théorème de Van Kampen (*cf.* [23] et [4]).

Malheureusement la démonstration proposée par O. Zariski dans [25] n'est pas satisfaisante; en l'occurrence le mot « générique » est assez vague, bien que tout le monde devine ce qu'il veut dire.

Nous nous proposons de donner une démonstration du théorème de Zariski. Rappelons que l'on sait trouver des générateurs du groupe fondamental du complémentaire d'une hypersurface projective dans l'espace projectif qui la contient en coupant par une droite projective « générique » et que le théorème de Zariski ne fait que confirmer le fait « intuitif » que l'on obtient les relations entre les générateurs en considérant un plan projectif « générique ».

(0.2) L'utilisation de la théorie de Morse pour démontrer des théorèmes analogues à celui de Zariski a été proposée pour la première fois par R. Thom. Ainsi A. Andreotti et T. Frankel dans [1] et R. Bott dans [3] ont démontré le théorème de Lefschetz sur les sections hyperplanes d'une variété projective. Ce travail est une application de cette même idée. En fait nous démontrons une version « locale » du théorème de Zariski qui implique le théorème de Zariski.

Fixons d'abord quelques notations.

Soit $f : U \rightarrow \mathbf{C}$ une fonction complexe holomorphe sur un voisinage ouvert U de l'origine O de \mathbf{C}^n . On suppose que $f(O) = 0$. On appelle H_b l'hypersurface analytique de U définie par $f = b$.

On note B_ρ et S_ρ la boule et la sphère réelle de centre O et de rayon ρ . On note \mathring{B}_ρ , la boule ouverte, intérieur de B_ρ .

On a alors le

THÉORÈME (0.2.1). — *Il existe un ouvert de Zariski \mathfrak{H} non vide de l'espace projectif des hyperplans linéaires de \mathbf{C}^n tel que, pour tout hyperplan $L \in \mathfrak{H}$, il existe un rayon $r > 0$ assez petit pour lequel :*

(a) *l'homomorphisme*

$$\pi_i((B_\rho - H_0) \cap L, y) \rightarrow \pi_i(B_\rho - H_0, y)$$

défini par l'inclusion $(B_\rho - H_0) \cap L \subset (B_\rho - H_0)$ avec le point de base $y \in (B_\rho - H_0) \cap L$ et $0 < \rho \leq r$, est :

- (i) *bijectif si $i < n - 2$;*
- (ii) *surjectif si $i = n - 2$.*

(b) *Si u est une forme linéaire qui définit L , on note L_0 l'hyperplan affine d'équation $u = \theta$, avec $\theta \in \mathbf{C}$; alors pour tout ρ , $0 < \rho \leq r$ il existe $\theta(\rho) > 0$ tel que l'homomorphisme*

$$\pi_i((B_\rho - H_0) \cap L_0, y) \rightarrow \pi_i(B_\rho - H_0, y)$$

défini par l'inclusion $(B_\rho - H_0) \cap L_0 \subset (B_\rho - H_0)$ avec le point de base $y \in (B_\rho - H_0) \cap L_0$ et $0 < |\theta| \leq \theta(\rho)$ soit :

- (i) *bijectif si $i < n - 1$;*
- (ii) *surjectif si $i = n - 1$.*

On aurait pu énoncer ce théorème en utilisant les groupes d'homologie, en fait comme on le démontre à l'aide de la théorie de Morse on a une formulation de ce théorème en termes de CW-complexes (cf. [15]). Par ailleurs on aurait pu parler de groupes d'homotopie locaux comme

dans [6]. En fait, le lemme (4.1.3) montrera que les groupes d'homotopie $\pi_i(B_\rho - H_0, y)$ et $\pi_i((B_\rho - H_0) \cap L, y)$ dont il est question sont isomorphes aux groupes d'homotopie locaux correspondants.

(0.3) Nous allons montrer comment le théorème (0.2.1) implique le théorème de Zariski.

Soit H une hypersurface de $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ définie par $f = 0$, où f est un polynôme complexe homogène de $n + 1$ variables. Soit $C(H)$ le cône de \mathbf{C}^{n+1} défini par $f = 0$. Le théorème (0.2.1) permet de calculer le groupe fondamental de $(\mathbf{C}^{n+1} - C(H)) \cap B_\rho$, où B_ρ est la boule centrée à l'origine de \mathbf{C}^{n+1} de rayon ρ assez petit. Plus précisément, si $n + 1 \geq 4$ il existe un ouvert \mathfrak{H} de Zariski non vide de l'espace projectif des hyperplans linéaires de \mathbf{C}^{n+1} tel que, pour tout $L' \in \mathfrak{H}$, il existe r pour lequel on ait un isomorphisme

$$\pi_1((B_\rho - C(H)) \cap L', y) \rightarrow \pi_1(B_\rho - C(H), y)$$

avec $0 < \rho \leq r$, $y \in (B_\rho - C(H)) \cap L'$.

Nous choisissons comme « hyperplan générique » L de $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ l'hyperplan qui correspond à L' . Remarquons alors que $B_\rho - C(H)$ a le type d'homotopie de $S_\rho - C(H)$, car $C(H)$ est un cône de \mathbf{C}^{n+1} . De même $(B_\rho - C(H)) \cap L'$ a le type d'homotopie de $(S_\rho - C(H)) \cap L'$. D'autre part l'application canonique de $\mathbf{C}^{n+1} - \{0\}$ sur $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ induit deux fibrations différentiables $\varphi : S_\rho - C(H) \rightarrow \mathbf{P}^n(\mathbf{C}) - H$, et

$$\varphi_L : (S_\rho - C(H)) \cap L' \rightarrow (\mathbf{P}^n(\mathbf{C}) - H) \cap L$$

dont les fibres sont difféomorphes à S^1 . On a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc} \pi_1(\varphi^{-1}(x), y) & \longrightarrow & \pi_1(S_\rho - C(H), y) & \longrightarrow & \pi_1(\mathbf{P}^n(\mathbf{C}) - H, x) & \longrightarrow & 1 \\ \uparrow \text{Id} & & \uparrow i & & \uparrow \tilde{\gamma} & & \\ \pi_1(\varphi_L^{-1}(x), y) & \longrightarrow & \pi_1((S_\rho - C(H)) \cap L', y) & \longrightarrow & \pi_1((\mathbf{P}^n(\mathbf{C}) - H) \cap L, x) & \longrightarrow & 1 \end{array}$$

où les flèches verticales proviennent des diverses inclusions, où les lignes horizontales sont les suites exactes des fibrations φ et φ_L , où $y \in \varphi_L^{-1}(x) = \varphi^{-1}(x)$ et $x \in (\mathbf{P}^n(\mathbf{C}) - H) \cap L$. Comme $n + 1 \geq 4$, on obtient d'après ce qui précède que i est un isomorphisme, par conséquent $\tilde{\gamma}$ est un épimorphisme. C'est également un monomorphisme, car la flèche verticale de gauche est l'identité de $\pi_1(\varphi^{-1}(x), y)$, et on obtient le résultat cherché en chassant sur le diagramme. Le corollaire (0.1.2) du théorème de Zariski est alors immédiat. Nous remarquons que nous n'avons utilisé que la partie (a) du théorème (0.2.1), et que nous aurions pu démontrer le théorème analogue (0.1.1) aussi pour les groupes d'homotopie supérieurs.

(0.4) La démonstration du théorème (0.2.1) nous a été demandée par E. Brieskorn afin de calculer le groupe fondamental local du complémentaire du discriminant d'une déformation semi-universelle (cf. [11] remarque D de l'introduction). L'idée générale de notre démonstration est née à la suite de discussions fructueuses avec P. Deligne, F. Pham et R. Thom. Nous démontrerons une version beaucoup plus générale du théorème (0.2.1) dans [9].

1. Les bonnes stratifications

(1.1) Nous définissons les stratifications d'ensembles analytiques complexes comme H. Whitney dans [24].

Rappelons qu'un *ensemble analytique complexe local* V de \mathbf{C}^n est un ensemble (éventuellement vide) tel que pour tout point $p \in V$ il existe un voisinage Ω de p et un ensemble de fonctions holomorphes sur Ω dont l'ensemble des zéros communs est $V \cap \Omega$. Rappelons qu'on peut alors ne choisir qu'un nombre fini de telles fonctions sur Ω . Un *ensemble analytique complexe* dans l'ouvert U de \mathbf{C}^n est un sous-ensemble analytique complexe local dans U qui est fermé dans U . Ainsi un ensemble analytique complexe local est évidemment un ensemble analytique complexe dans un certain ouvert de \mathbf{C}^n . Un sous-ensemble analytique complexe d'un ensemble analytique complexe V d'un ouvert U de \mathbf{C}^n est un sous-ensemble de V qui est lui-même un ensemble analytique complexe de U . Dans la mesure où aucune confusion n'est possible on dira ensemble analytique au lieu d'ensemble analytique complexe et on notera $V \subset U \subset \mathbf{C}^n$ pour exprimer que la dénomination est relative à l'ouvert U de \mathbf{C}^n .

DÉFINITION (1.1.1). — Soit M une sous-variété analytique d'un ouvert U de \mathbf{C}^n . Notons \bar{M} la fermeture de M dans U . On dira que M est U -stricte si \bar{M} et $\bar{M} - M$ sont des ensembles analytiques de U .

DÉFINITION (1.1.2). — On dit qu'une partition $(V_i)_{i \in I}$ d'un ensemble analytique $V \subset U \subset \mathbf{C}^n$ est une *stratification* si la partition $(V_i)_{i \in I}$ vérifie les propriétés suivantes :

- (a) chaque V_i est une sous-variété analytique connexe de U ;
- (b) chaque V_i est U -stricte;
- (c) la partition $(V_i)_{i \in I}$ est localement finie;
- (d) la partition $(V_i)_{i \in I}$ possède la *propriété de frontière*, i. e. si l'on a $V_i \cap \bar{V}_j \neq \emptyset$ avec \bar{V}_j fermeture de V_j dans U , implique $V_i \subset \bar{V}_j$.

On appelle V_i les *strates* de la stratification.

Dans [24] H. Whitney montre que tout ensemble analytique possède une stratification. Il admet aussi des strates qui ne sont pas connexes, mais ce n'est pas essentiel d'après [24], Theorem 18.11, p. 537.

Nous n'utiliserons pas la définition plus générale des stratifications concernant les espaces topologiques comme il est fait dans [21].

DÉFINITION (1.1.3). — Soit H_0 l'hypersurface définie dans un voisinage ouvert de l'origine de \mathbf{C}^n par $f = 0$. Soit $(V_i)_{i \in I} = \Sigma$ une stratification de H_0 . On dit que Σ est une *bonne stratification de H_0* en O s'il existe un voisinage ouvert Ω de O dans \mathbf{C}^n tel que, pour toute suite de points (x_n) de $\Omega - H_0$ convergente vers un point x de $H_0 \cap \Omega$ pour laquelle les hyperplans tangents $T(x_n, H_{f(x_n)})$ à $H_{f(x_n)}$ en x_n sont définis et la suite de ces hyperplans converge vers un hyperplan T , l'hyperplan T contient le plan tangent en x à la strate de Σ qui contient x . On dira aussi que Σ est une bonne stratification de H_0 dans Ω .

Remarquons qu'une stratification peut ne pas être une bonne stratification.

EXEMPLE (1.1.4). — Soit V la surface de \mathbf{C}^3 définie par

$$g = X^2 + Y^2 - 2XZ^2 = 0.$$

La partition $\{V_1, V_2\}$ de V donnée par

$$V_1 = \{(X, Y, Z) \in \mathbf{C}^3 \mid X = Y = 0\},$$

$$V_2 = \{(X, Y, Z) \in V - V_1\}.$$

Cette partition est une stratification, mais n'est pas une bonne stratification. En effet considérons une suite de points (u_n) de \mathbf{C}^3 de coordonnées x_n, y_n, z_n telles que

$$x_n = t_n^2,$$

$$y_n = t_n^2,$$

$$z_n = t_n,$$

où (t_n) est une suite de nombres réels tendant vers zéro. Comme

$$\partial g / \partial X = 2X - 2Z^2,$$

$$\partial g / \partial Y = 2Y,$$

$$\partial g / \partial Z = -4XZ,$$

la limite de la direction définie par le gradient est $(0, 0, 1)$ et la limite de $T(u_n, H_{g(u_n)})$ est l'hyperplan orthogonal à $(0, 0, 1)$ et celui-ci est donc transverse à V_1 .

Dans ce cas il faut prendre une stratification plus fine de manière évidente pour obtenir une bonne stratification.

Nous allons montrer qu'une hypersurface H_0 définie par $f=0$ avec $O \in H_0$ possède une bonne stratification en O .

(1.2) On utilise les notations de (0.2) :

THÉORÈME (1.2.1) (F. Pham). — *On peut munir l'hypersurface H_0 d'une bonne stratification en O .*

Démonstration. — Avant de commencer la démonstration de ce théorème, on va introduire une propriété importante que l'on exige souvent d'une stratification convenable (cf. [24], p. 540) :

DÉFINITION (1.2.2). — Soit $V \subset U \subset \mathbf{C}^n$ un ensemble analytique. Soit $M \subset V$ une sous-variété différentiable de U contenue dans V . On dit que V a la propriété (a) de Whitney le long de M si, pour toute suite de points (x_n) de la partie non singulière $V - \Sigma(V)$ de V convergente vers le point x de M pour laquelle la suite des espaces tangents $T(x_n, V)$ en x_n à V converge vers un espace vectoriel T , l'espace T contient $T(x, M)$.

DÉFINITION (1.2.3). — On dit qu'une stratification $(V_i)_{i \in I}$ de l'ensemble analytique $V \subset U \subset \mathbf{C}^n$ possède la propriété (a) de Whitney si, pour tout couple de strates (V_i, V_j) tel que $i \neq j$ et $V_i \subset \bar{V}_j$, l'ensemble analytique $\bar{V}_j \subset U \subset \mathbf{C}^n$ possède la propriété (a) de Whitney le long de V_i .

Dans [24], H. Whitney montre le théorème suivant :

THÉORÈME (1.2.4). — *Soit $V \subset U \subset \mathbf{C}^n$ un ensemble analytique. Supposons que W est un ouvert de la partie non singulière $V - \Sigma(V)$ de V qui soit U -strict [cf. (1.1.1)] et tel que $\bar{W} = V$. Alors il existe une stratification $(V_i)_{i \in I} = \Sigma$ de V qui possède la propriété (a) de Whitney telle que $V - W$ soit une union de strates et que les composantes connexes de W soient des strates de Σ .*

Preuve. — Ce théorème résulte immédiatement du théorème 18.11 et du lemme 19.3 de [24].

L'exemple (1.1.4) montre qu'une stratification qui vérifie la propriété (a) de Whitney n'est pas nécessairement une bonne stratification. Dans [24], H. Whitney définit une propriété (b). On ne sait pas si une stratification qui vérifie (a) et (b) est bonne pour toute fonction engendrant l'idéal de cette hypersurface.

Nous allons maintenant démontrer le théorème (1.2.1).

Considérons dans $U \times \mathbf{C}$ l'ensemble analytique G défini par $f - t^N = 0$, où N est un entier positif. D'après le théorème (1.2.4) on peut munir G d'une stratification Σ_N telle que $H_0 \times \{0\}$ soit une union de strates, que Σ_N

possède la propriété (a) de Whitney et que $G - (H_0 \times \{0\})$ soit l'union des strates de dimension complexe n . La stratification Σ_N de G induit donc une stratification S_N de H_0 . Nous allons montrer que pour N assez grand S_N est une bonne stratification en O .

Supposons que dans une boule compacte B dans $U \times \mathbf{C}$ centrée en O on ait une suite de points $(x_n = (u_n, t_n))$ de $G - (H_0 \times \{0\})$ convergente vers un point x de $B \cap (H_0 \times \{0\})$ et pour laquelle la suite des hyperplans tangents $T(x_n, H_{f(x_n)} \times \{t_n\})$ converge vers une limite T qui ne contient

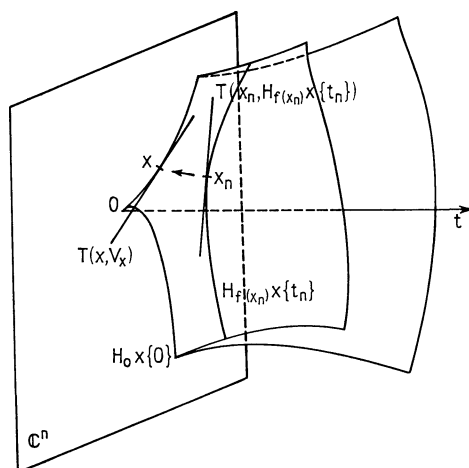


Fig. 1

pas le plan tangent $T(x, V_x)$ en x à la strate V_x de Σ_N qui contient x . Comme Σ_N possède la propriété (a) de Whitney et que l'on peut supposer que, pour la suite (x_n) , la suite $(T(x_n, G))$ converge vers \mathfrak{E} , on obtient

$$\mathfrak{E} \supset T(x, V_x).$$

Évidemment, comme $T(x_n, G) \supset T(x_n, H_{f(x_n)} \times \{t_n\})$ pour tout entier n , on obtient que

$$\mathfrak{E} \supset T.$$

Comme T est un hyperplan de \mathfrak{E} et que T ne contient pas $T(x, V_x)$, on a que

$$\mathfrak{E} = T + T(x, V_x).$$

Mais on a évidemment

$$\begin{aligned} T &\subset \mathbf{C}^n \times \{0\}, \\ T(x, V_x) &\subset \mathbf{C}^n \times \{0\}. \end{aligned}$$

Donc

$$\mathfrak{E} = \mathbf{C}^n \times \{0\}.$$

Nous allons montrer que ceci est contradictoire si B est une boule de rayon assez petit et si N est assez grand.

On sait que dans un voisinage ouvert Ω de O dans \mathbf{C}^n , on a l'inégalité de Łojasiewicz suivante (cf. [13], p. 92) pour tout $z \in \Omega$:

$$\|(\text{grad } f)(z)\| \geq |f(z)|^\theta,$$

où $1 > \theta > 0$. Supposons alors que $B \subset \Omega \times \mathbf{C}$. L'hyperplan tangent en x_n à G est orthogonal pour la forme hermitienne canonique de \mathbf{C}^{n+1} au vecteur w_n :

$$w_n = ((\text{grad } f)(u_n), N \bar{t}_n^{N-1}),$$

où $\text{grad } f$ désigne le gradient complexe de f , i. e.

$$(\text{grad } f)(z) = (\overline{\partial f / \partial z_0}(z), \dots, \overline{\partial f / \partial z_n}(z)).$$

Comme $x_n \in G$, on a

$$f(u_n) = t_n^N.$$

D'où

$$|t_n|^{N-1} = |f(u_n)|^{N-1/N}.$$

On obtient donc que

$$\frac{\|(\text{grad } f)(u_n)\|}{N |t_n|^{N-1}} \geq \frac{1}{N} \frac{|f(u_n)|^\theta}{|f(u_n)|^{N-1/N}} = \frac{1}{N} |f(u_n)|^{\theta - (N-1/N)}.$$

Donc si $\theta - \frac{N-1}{N} < 0$, i. e. $N > \frac{1}{1-\theta}$, on obtient que \mathfrak{C} est nécessairement transverse à $\mathbf{C}^n \times \{0\}$, ce qui donne la contradiction cherchée. On trouve donc bien que pour N assez grand S_N est une bonne stratification en O .

On peut remarquer que S_N possède la propriété (a) et aussi — si Σ_Δ vérifie (b) — la propriété (b) de Whitney.

Nous obtenons alors facilement les propositions suivantes :

PROPOSITION (1.2.5). — *Soit Σ une bonne stratification de H_0 en O . Si E est une variété analytique complexe qui passe par O et qui est transverse à toutes les strates de dimension au moins 1, auxquelles O est adhérent, alors Σ induit une bonne stratification de $H_0 \cap E$ en O .*

PROPOSITION (1.2.6). — *Soit Σ une bonne stratification de H_0 dans un voisinage ouvert Ω de O . Si E est une variété analytique complexe transverse à toutes les traces des strates de Σ dans $H_0 \cap \Omega$, alors Σ induit une bonne stratification de $H_0 \cap E \cap \Omega$.*

(1.3) Soit $V \subset U \subset \mathbf{C}^n$ un ensemble analytique. Soit $f: V \rightarrow K$ une fonction K -analytique sur V à valeurs dans le corps K qui pourra être \mathbf{R} ou \mathbf{C} . Soit Σ une stratification de V .

DÉFINITION (1.3.1). — On dit qu'un point $x \in V$ est un *point critique de f relativement à Σ* si x est un point critique de la restriction de f à la strate V_x de Σ qui contient x . On dit que $y \in K$ est une *valeur critique de f relativement à Σ* s'il existe un point critique $x \in V$ de f relativement à Σ tel que $f(x) = y$.

On obtient alors un théorème analogue au corollaire 2.8 de [16] :

THÉORÈME (1.3.2). — Soit $V \subset U \subset \mathbf{C}^n$ un ensemble analytique. Soit Σ une stratification de V . Soit $g : V \rightarrow K$ une fonction K -analytique ou $K = \mathbf{R}$ ou \mathbf{C} . Soit $x_0 \in V$ et \dot{B}_ρ la boule ouverte de \mathbf{C}^n centrée en x_0 et de rayon ρ . Si ρ est assez petit, la restriction de g à $V \cap \dot{B}_\rho$ n'a pas de valeurs critiques dans $K - \{g(x_0)\}$ relativement à la stratification de $V \cap \dot{B}_\rho$ induite par Σ .

La démonstration repose sur le lemme suivant :

LEMME (1.3.3) (lemme des petits chemins) (cf. [16], lemme 3.1). — Soit E un ensemble semi-analytique (cf. [13]) et x un point adhérent à E . Alors il existe un chemin analytique réel $p : [0, \varepsilon[\rightarrow \bar{E}$, tel que :

- (i) $p(0) = x$;
- (ii) $p(t) \in E$, pour tout $t \in]0, \varepsilon[$.

Preuve. — D'après la définition d'un ensemble semi-analytique, on peut trouver un voisinage U de x tel que

$$U \cap E = \bigcup_{i=1}^r \{y \in U \mid h_i(y) = 0, g_{i1}(y) > 0, \dots, g_{ir}(y) > 0\},$$

où les h_i et g_{ij} sont des fonctions analytiques réelles dans U . Évidemment, il suffit de regarder le cas $r = 1$, où le lemme a été démontré par Milnor [16] sous une hypothèse sur les h_i et les g_{ij} qui n'est pas nécessaire pour sa démonstration.

2. Choix de l'hyperplan générique

Fixons une fois pour toutes une bonne stratification Σ de H_0 en O .

(2.1) Notons T_ε le « tube » fermé défini par

$$T_\varepsilon = \{z \in U \mid |f(z)| \leq \varepsilon\}.$$

On désignera par ∂T_ε le bord de T_ε :

$$\partial T_\varepsilon = \{z \in U \mid |f(z)| = \varepsilon\}.$$

Nous allons tout d'abord choisir un hyperplan $L = L_0$ défini par $u = 0$ tel que pour tout ρ non nul assez petit (i. e. pour tout ρ , $0 < \rho \leq r$, avec r assez petit) il existe $\eta(\rho) > 0$ et $\varepsilon(\rho) > 0$ tels que, pour tout η , $0 \leq |\eta| \leq \eta(\rho)$, L_η défini par $u = \eta$, soit transverse à $S_\rho \cap \partial T_\varepsilon$ quand ε , $0 < \varepsilon \leq \varepsilon(\rho)$.

Remarquons que :

LEMME (2.1.1). — *Pour tout ρ assez petit, il existe $\varepsilon(\rho) > 0$ tel que pour tout ε , $0 < \varepsilon \leq \varepsilon(\rho)$, l'ensemble $\dot{B}_\rho \cap \partial T_\varepsilon$ est une variété différentiable et S_ρ est transversale à ∂T_ε .*

Preuve. — On applique le lemme des petits chemins (1.3.3). En effet il existe une boule ouverte \dot{B} de rayon assez petit, centrée à l'origine O , telle que la restriction de f à \dot{B} n'a aucun point critique dans $\dot{B} - H_0$ [cf. théorème (1.3.2)]. Donc pour tout ρ assez petit, on a un $\varepsilon(\rho) > 0$ tel que pour tout ε , $0 < \varepsilon \leq \varepsilon(\rho)$, $\dot{B}_\rho \cap \partial T_\varepsilon$ soit une variété différentiable. Pour obtenir que S_ρ soit transversal à ∂T_ε , il suffit de considérer la fonction analytique restriction de $|f|^2$ à $S_\rho - H_0$ et constater, en utilisant le lemme des petits chemins, que cette fonction n'a aucune valeur critique dans $]0, \varepsilon(\rho)^2]$ quand $\varepsilon(\rho)$ est assez petit.

Il existe un nombre fini de strates auxquelles O est adhérent. Soient V_1, \dots, V_p ces strates. Supposons que $0 \in V_1$. Notons \mathcal{F}_i l'ensemble des limites de suites d'espaces tangents à V_i en des suites de points de V_i convergentes vers zéro.

LEMME (2.1.2). — *Les ensembles \mathcal{F}_i sont des sous-ensembles algébriques fermés des grassmanniennes $G(d_i, n)$ des d_i -plans de \mathbf{C}^n , avec $d_i = \dim V_i$ et $\dim \mathcal{F}_i \leq d_i - 1$, si $d_i \geq 1$.*

Preuve. — On procède comme pour le paragraphe 16 de [24].

COROLLAIRE (2.1.3). — *L'ensemble \mathfrak{H}_i des hyperplans de \mathbf{C}^n qui ne contiennent pas un d_i -plan dans \mathcal{F}_i est un ouvert de Zariski non vide de $\mathbf{P}^{n-1}(\mathbf{C})$ quand $d_i \geq 1$.*

Preuve. — L'ensemble des hyperplans de \mathbf{C}^n qui contiennent un d_i -plan dans \mathcal{F}_i au moins a au plus la dimension $n - d_i - 1 + d_i - 1$, i. e. $n - 2$. En effet l'ensemble des hyperplans de \mathbf{C}^n qui contiennent un d_i -plan est un sous-ensemble algébrique de $\mathbf{P}^{n-1}(\mathbf{C})$ de dimension $n - d_i - 1$ et on utilise le résultat du lemme (2.1.2) selon lequel $\dim \mathcal{F}_i \leq d_i - 1$.

Remarquons que les strates parmi V_1, \dots, V_p telles que $d_i \geq 1$, sont V_2, \dots, V_p et éventuellement V_1 , si $V_1 \neq \{0\}$. On note $\mathfrak{H}_0 = \bigcap_{d_i \geq 1} \mathfrak{H}_i$. Évidemment \mathfrak{H}_0 est un ouvert de Zariski non vide de $\mathbf{P}^{n-1}(\mathbf{C})$.

Considérons maintenant un voisinage ouvert U' de O tel que $\text{grad } f$ ne s'annule pas dans $U' - H_0$. Rappelons que $\text{grad } f$ désigne le gradient complexe de f , i. e. le champ de vecteurs dont les composantes sont les *conjuguées des dérivées partielles de f* . ($\text{grad } \varphi$ non italique désignera le gradient réel de la fonction réelle φ dans la métrique euclidienne standard de l'espace ambiant).

(2.1.3.1) Soit $\Phi' : U' - H_0 \rightarrow \mathbf{C}^n$ le morphisme qui à $z \in U' - H_0$ fait correspondre le vecteur $(\partial f / \partial X_i(z))$ dans \mathbf{C}^n : $\Phi'(z)$ est donc le vecteur conjugué de $(\text{grad } f)(z)$; et soit $\Phi : U' - H_0 \rightarrow \mathbf{P}^{n-1}(\mathbf{C})$ le morphisme induit par Φ' . Soit enfin $\text{Gr } \Phi$ le graphe de Φ et $\overline{\text{Gr } \Phi}$ la fermeture de $\text{Gr } \Phi$ dans $U' \times \mathbf{P}^{n-1}(\mathbf{C})$. On sait que $\overline{\text{Gr } \Phi}$ est muni d'une structure de sous-espace analytique de $U' \times \mathbf{P}^{n-1}(\mathbf{C})$ (cf. [24], § 16) telle que le morphisme $\pi : \overline{\text{Gr } \Phi} \rightarrow U'$, défini par la projection sur le premier facteur U' , soit un morphisme analytique. On appelle π *l'éclatement jacobien de f dans U'* , car c'est en fait l'éclatement de U' de centre l'idéal engendré par les dérivées partielles de f .

Soit $L \in \mathfrak{H}_0$ et \bar{l} la direction conjuguée à la direction orthogonale à L dans \mathbf{C}^n .

On appelle $\tilde{\Gamma} = (U' \times \{\bar{l}\}) \cap \overline{\text{Gr } \Phi}$. Si $(0, \bar{l}) \in \overline{\text{Gr } \Phi}$ alors la dimension de $\tilde{\Gamma}$ en $(0, \bar{l})$ est au moins 1. Si $(0, \bar{l}) \notin \overline{\text{Gr } \Phi}$ alors dans un voisinage ouvert U_0 de $(0, \bar{l})$ dans $U' \times \mathbf{P}^{n-1}(\mathbf{C})$ on a $\tilde{\Gamma} \cap U_0 = \emptyset$.

Supposons que $(0, \bar{l}) \in \overline{\text{Gr } \Phi}$, alors nous allons montrer que $L \in \mathfrak{H}_0$ implique que la dimension de $\tilde{\Gamma}$ en $(0, \bar{l})$ est exactement 1 et que dans un voisinage ouvert U_1 de $(0, \bar{l})$ on a

$$U_1 \cap \tilde{\Gamma} \cap \pi^{-1}(H_0) = \{(0, \bar{l})\}.$$

Supposons que $\tilde{\Gamma} \cap \pi^{-1}(H_0)$ soit au moins de dimension 1 en $(0, \bar{l})$. Soit $p : D \rightarrow \tilde{\Gamma} \cap \pi^{-1}(H_0)$ un chemin analytique défini sur un disque ouvert D de \mathbf{C} centré en O tel que $p(O) = (0, \bar{l})$. Quitte à choisir D assez petit, on peut supposer que $(\pi \circ p)(D - \{0\})$ est contenu dans une strate V_i de la bonne stratification Σ_0 que l'on s'est donné sur H_0 .

Comme, pour tout $t \in D - \{0\}$ on a $p(t) \in U' \times \{\bar{l}\}$, la direction \bar{l} est limite de gradients pour une suite de points x_n de $U' - H_0$ convergeant vers $\pi \circ p(t)$. Ceci signifie que L est limite des hyperplans tangents à $H_{f(x_n)}$ en x_n . Or Σ_0 est une bonne stratification, donc l'hyperplan L contient l'espace tangent à V_i en $\pi \circ p(t)$. Mais ceci implique que L contiendrait la limite des espaces tangents à V_i en les points $\pi \circ p(t_n)$ pour une suite

de $t_n \in D - \{0\}$ convergeant vers zéro. Ceci n'est pas possible car $L \in \mathfrak{H}_0$ et que par définition L est transverse à de telles limites.

De ceci résulte que la dimension de $\tilde{\Gamma} \cap \pi^{-1}(H_0)$ en $(0, \bar{l})$ est nulle, par conséquent, pour un voisinage ouvert V_1 de $(0, \bar{l})$ dans $U' \times \mathbf{P}^{n-1}(\mathbf{C})$, $\tilde{\Gamma} \cap V_1$ et $\Gamma = \pi(\tilde{\Gamma} \cap V_1)$ sont des courbes analytiques complexes et

$$\Gamma \cap H_0 = \{0\}.$$

(2.1.3.1) On notera Γ_L au lieu de Γ et on appelle Γ_L la *courbe polaire* de L .

Soit L un hyperplan de \mathbf{C}^n , soit u une forme linéaire qui définit L . On note L_{γ} l'hyperplan affine défini par $u = \gamma$. On obtient alors :

LEMME (2.1.4). — Soit $L \in \mathfrak{H}_0$ défini par $u = 0$. Il existe alors $r > 0$ tel que, pour tout ρ_1 et ρ_2 , $0 < \rho_1 < \rho_2 < r$, il existe $b(\rho_1, \rho_2) > 0$ et $\gamma_1(\rho_1, \rho_2) > 0$ pour lesquels on ait $\dot{B}_\rho \cap H_b$ non singulier, S_ρ transverse à H_b , L_{γ_1} transverse à S_ρ et $S_\rho \cap H_b$ pour tout γ_1 , $0 \leq |\gamma_1| \leq \gamma_1(\rho)$, et tout b , $0 \leq |b| \leq b(\rho)$.

Preuve. — Rappelons que l'on s'est donné une bonne stratification en O de H_0 .

Grâce au théorème (1.3.2) on peut choisir $r_1 > 0$ de telle sorte que, pour tout ρ , $0 < \rho \leq r_1$, S_ρ soit transverse à toutes les strates de Σ et à toutes les strates de la stratification $\Sigma(L)$ induite par Σ sur $L \cap H_0$. De plus, comme $L \in \mathfrak{H}_0$, L est transverse aux traces des strates de Σ de dimension au moins 1 dans un voisinage ouvert de Ω assez petit de O . Ainsi on peut supposer que Σ est une bonne stratification de H_0 dans Ω et, en vertu de la proposition (1.2.5), que $\Sigma(L)$ est une bonne stratification de $H_0 \cap L$ dans $\Omega \cap L$. On peut exiger que $B_{r_1} \subset \Omega$.

D'après le théorème (1.3.2) il existe un $r_2 > 0$ tel que la restriction de u à $H_0 \cap \dot{B}_{r_2}$ n'ait pas de valeurs critiques dans $\mathbf{C} - \{0\}$ relativement à la stratification de $H_0 \cap \dot{B}_{r_2}$ induite par Σ . Ainsi les hyperplans affines L_{γ_1} pour $\gamma_1 \neq 0$ assez petit sont transverses à toutes les strates de la stratification de $H_0 \cap \dot{B}_{r_2}$ induite par Σ .

Enfin on peut choisir r_3 assez petit pour que la courbe polaire Γ_L de L [cf. (2.1.3.2)] coupe transversalement les sphères S_ρ , avec $0 < \rho \leq r_3$, et que $\Gamma_L \cap S_\rho \cap H_0 = \emptyset$.

Choisissons $r = \inf(r_1, r_2, r_3)$. Soient ρ_1 et ρ_2 tels que $0 < \rho_1 < \rho_2 < r$. Il existe $\tilde{b}(\rho_1, \rho_2) > 0$ tel que pour tout b , $0 < |b| \leq \tilde{b}(\rho_1, \rho_2)$, $H_b \cap \dot{B}_{\rho_i}$ et $H_b \cap S_{\rho_i}$ ($i = 1, 2$), soient non singuliers : ceci résulte du lemme des petits chemins et du fait que S_{ρ_i} ($i = 1, 2$) est transverse à toutes les strates de la bonne stratification Σ .

Supposons alors que pour tout $\gamma_1 > 0$ et pour tout $b, 0 < b < \tilde{b}(\rho_1, \rho_2)$, il existe des nombres complexes γ_0 et b_0 tels que $0 \leq |\gamma_0| \leq \gamma_1$ et $0 < |b_0| \leq b$ pour lesquels L_{ρ_0} ne soit pas transverse à $S_\rho \cap H_{b_0}$ en un point $x_0 \in S_\rho$ avec $\rho_1 \leq \rho \leq \rho_2$.

On peut alors exhiber une suite de points (x_n) telle que :

- (a) (x_n) tend vers $x \in L_0 \cap H_0$ avec $\rho_1 \leq \|x\| \leq \rho_2$;
- (b) les suites

$$(T(x_n, L_{u(x_n)})), \quad (T(x_n, H_{f(x_n)})), \quad (T(x_n, S_{\|x_n\|})) \quad \text{et} \quad (T(x_n, H_{f(x_n)} \cap S_{\|x_n\|}))$$

convergent respectivement vers T_1, T_2, T_3 , et T_4 ;

- (c) $T(x_n, L_{u(x_n)})$ n'est pas transverse à $T(x_n, H_{f(x_n)} \cap S_{\|x_n\|})$.

Comme pour tout $\rho, \rho_1 \leq \rho \leq \rho_2, S_\rho$ est transverse à la stratification Σ, T_2 et T_3 sont transverses et

$$T_2 \cap T_3 = T_4.$$

D'autre part comme $\Gamma_L \cap S_\rho \cap H_0 = \emptyset$ pour tout $\rho, 0 < \rho \leq r$, il existe un voisinage ouvert de $B_{\rho_2} \cap H_0 - \hat{B}_{\rho_1}$ qui n'intersecte pas $\Gamma_L \cap B_{\rho_2} - \hat{B}_{\rho_1}$. Donc, pour n assez grand, $T(x_n, L_{u(x_n)})$ et $T(x_n, H_{f(x_n)})$ sont transverses. La limite de $T(x_n, L_{u(x_n)})$ est $T(x, L_0) = T_1$. Celle de $T(x_n, H_{f(x_n)})$, égale à T_2 , contient $T(x, V_x)$, où V_x est la strate de Σ qui contient x . Or T_1 est transverse à $T(x, V_x)$, donc est transverse à T_2 et la limite de $T(x_n, L_{u(x_n)}) \cap T(x_n, H_{f(x_n)})$ n'est autre que $T_1 \cap T_2$.

Mais $T_3 = \lim T(x_n, S_{\|x_n\|}) = T(x, S_{\|x\|})$ est transverse à la stratification $\Sigma(L)$, i.e. $T(x, S_{\|x\|})$ est transverse à $T(x, L_0) \cap T(x, V_x)$. L'espace T_3 est donc transverse à $T_1 \cap T_2$, i.e. T_1 est transverse à $T_2 \cap T_3 = T_4$, mais ceci contredit le fait que, pour tout $n, T(x_n, L_{u(x_n)})$ n'est pas transverse à $T(x_n, H_{f(x_n)} \cap S_{\|x_n\|})$.

(2.2) Nous allons montrer :

LEMME (2.2.1). — *Il existe un ouvert de Zariski \mathfrak{H} non vide de $\mathbf{P}^{n-1}(\mathbf{C})$ tel que, pour tout $L \in \mathfrak{H}$, il existe un voisinage ouvert V de l'origine et un $b_0 > 0$ tel que, pour tout $b, 0 < |b| < b_0$, la restriction de la forme quadratique des dérivées secondes de f à $T(x, H_b)$ en tout point x de $H_b \cap V$ où $T(x, H_b) = L$ est une forme quadratique complexe non dégénérée.*

Preuve. — On a vu dans (2.1) que, pour tout $L \in \mathfrak{H}_0$, dans un voisinage ouvert U_0 de O l'ensemble analytique $U_0 \cap \Gamma_L$ est vide ou est une courbe qui n'intersecte H_0 qu'en O . L'ensemble $U_0 \cap \Gamma_L - \{0\}$ est alors l'ensemble des points x de $U_0 - H_0$ où $T(x, H_{f(x)}) = L$. Mais on n'est

pas assuré d'avoir la non dégénérescence de la restriction de la forme quadratique des dérivées secondes de f à $T(x, H_l)$ pour $x \in U_0 \cap \Gamma_L$.

Soit \bar{l} la direction conjuguée à la direction orthogonale à L . Soit π l'éclatement jacobien de f dans U' défini dans (2.1). On sait que $\pi^{-1}(O)$ est un sous-ensemble algébrique de $\{0\} \times \mathbf{P}^{n-1}(\mathbf{C})$. On a $\dim_{\mathbf{C}} \pi^{-1}(O) \leq n-1$.

(i) $\dim_{\mathbf{C}} \pi^{-1}(O) < n-1$. Dans ce cas $\{0\} \times \mathbf{P}^{n-1}(\mathbf{C}) - \pi^{-1}(O)$ est un ouvert de Zariski non vide. On peut alors définir

$$\{0\} \times \mathfrak{H}' = \{0\} \times (\mathbf{P}^{n-1}(\mathbf{C}) - \pi^{-1}(O)).$$

L'ouvert cherché \mathfrak{H} est alors l'ouvert de Zariski non vide des hyperplans de \mathfrak{H}_0 orthogonaux aux directions conjuguées à celles dans \mathfrak{H}' . Dans ce cas pour tout $L \in \mathfrak{H}$ on a, dans un voisinage U_1 de O assez petit, $U_1 \cap \Gamma_L = \emptyset$.

(ii) $\dim_{\mathbf{C}} \pi^{-1}(O) = n-1$. Dans ce cas $\{0\} \times \mathbf{P}^{n-1}(\mathbf{C}) = \pi^{-1}(O)$. En utilisant le paragraphe 19 de [24], les points x de $\{0\} \times \mathbf{P}^{n-1}(\mathbf{C})$ pour lesquels la partie lisse de $\overline{\text{Gr } \Phi} - \{0\} \times \mathbf{P}^{n-1}(\mathbf{C})$ vérifie la condition (a) de Whitney en x le long de $\{0\} \times \mathbf{P}^{n-1}(\mathbf{C})$ forment un ouvert de Zariski $\{0\} \times \mathfrak{H}'$ non vide de $\{0\} \times \mathbf{P}^{n-1}(\mathbf{C})$. L'ouvert cherché est alors \mathfrak{H} défini comme ci-dessus. Dans un voisinage ouvert U_2 de $(0, \bar{l}) \in \mathfrak{H}'$ dans $U' \times \mathbf{P}^{n-1}(\mathbf{C})$, $U' \times \{\bar{l}\}$ et la partie lisse de $\overline{\text{Gr } \Phi} - \{0\} \times \mathbf{P}^{n-1}(\mathbf{C})$ se coupent transversalement et $\tilde{\Gamma}_L \cap U_2 - (0, \bar{l})$ est lisse.

Exprimons en d'autres termes la transversalité de $U' \times \{\bar{l}\}$ et de la partie lisse de $\overline{\text{Gr } \Phi} - \{0\} \times \mathbf{P}^{n-1}(\mathbf{C})$. Ceci nous donnera précisément les conclusions du lemme (2.2.1).

On peut supposer que $l \in \mathbf{C}^n$ a sa première composante $l_1 \neq 0$. Considérons alors l'ouvert $U_1 \subset \mathbf{P}^{n-1}(\mathbf{C})$ image de $U'_1 = \{l \in \mathbf{C}^n \mid l_1 \neq 0\}$ et la carte $\varphi_1 : U_1 \rightarrow \mathbf{C}^{n-1}$, qui à $\bar{l} \in U_1$ fait correspondre $(l_2/l_1, \dots, l_n/l_1)$.

Considérons un point $x \in \Gamma_L$. Si Ω est un voisinage ouvert assez petit de x , Φ défini dans (2.1) et l'application constante $\Phi_{\bar{l}} : U' \rightarrow \mathbf{P}^{n-1}(\mathbf{C})$ d'image \bar{l} induisent des applications de Ω dans U_1 qui composées avec φ_1 donnent des applications $\tilde{\Phi}$ et $\tilde{\Phi}_{\bar{l}}$ de Ω dans \mathbf{C}^{n-1} . La transversalité de $\overline{\text{Gr } \Phi}$ et $U' \times \{\bar{l}\} = \text{Gr } \Phi_{\bar{l}}$ dans $U' \times \mathbf{P}^{n-1}(\mathbf{C})$ en (x, \bar{l}) équivaut à la transversalité des graphes $\text{Gr } \tilde{\Phi}$ et $\text{Gr } \tilde{\Phi}_{\bar{l}}$ de $\tilde{\Phi}$ et $\tilde{\Phi}_{\bar{l}}$ dans $\Omega \times \mathbf{C}^{n-1}$ en $(x, l_2/l_1, \dots, l_n/l_1) = u_0$. Les vecteurs normaux à $\text{Gr } \tilde{\Phi}_1$ et $\text{Gr } \tilde{\Phi}$ en u_0 sont respectivement :

- (i) e_1, \dots, e_{n-1} formant la base canonique de $\{0\} \times \mathbf{C}^{n-1}$;
- (ii) f_1, \dots, f_{n-1} définis par

$$f_i = (- (\partial \tilde{\Phi}_i / \partial x_i)(x), \dots, - (\partial \tilde{\Phi}_i / \partial x_n)(x), 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$$

qui sont les gradients des composantes de $-\tilde{\Phi}(\xi) + \gamma_i$; $\tilde{\Phi}_i$ est la $i^{\text{ème}}$ composante de $\tilde{\Phi}$ définie par $\tilde{\Phi}_i = df/\partial x_{i+1}(x)/df/\partial x_1(x)$ et l'entier 1 est à la $(i + 1)^{\text{ème}}$ place. On obtient que la transversalité des graphes en question signifie que le rang du système $\{e_1, \dots, e_{n-1}, f_1, \dots, f_{n-1}\}$ est $2n - 2$, i. e. la matrice :

$$M(x) = \begin{bmatrix} \text{Diagram 1} & \text{Diagram 2} \\ \dots & \dots \\ -(\partial \tilde{\Phi}_i / \partial x_1)(x) & \dots & -(\partial \tilde{\Phi}_i / \partial x_n)(x) & \text{Diagram 3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -(\partial \tilde{\Phi}_{n-1} / \partial x_1)(x) & \dots & -(\partial \tilde{\Phi}_{n-1} / \partial x_n)(x) & \text{Diagram 4} \end{bmatrix}$$

a le rang $2n - 2$. Mais ceci équivaut au fait que la matrice jacobienne

$$J(x) = ((\partial \tilde{\Phi}_i / \partial x_j)(x) = u_{ij})$$

a le rang $n - 1$ en x . Cette matrice jacobienne correspond à l'application Φ . Comme $\tilde{\Phi} = \varphi'_1 \Phi'$, où $\varphi'_1 : U'_1 \rightarrow \mathbf{C}^{n-1}$ est la submersion définie par $\varphi'_1(l) = (l_2/l_1, \dots, l_n/l_1)$, on trouve que $J(x)$ a le rang $n - 1$ si le noyau de la dérivée en $((df/\partial x_1)(x), \dots, (df/\partial x_n)(x))$ de φ'_1 est transverse à l'image de la dérivée en x de Φ' . Ainsi comme le noyau de la dérivée en $((df/\partial x_1)(x), \dots, (df/\partial x_n)(x))$ est engendrée par $((df/\partial x_1)(x), \dots, (df/\partial x_n)(x))$ ou (l_1^*, \dots, l_n^*) où l_i^* est le conjugué complexe de l_i , $J(x)$ a le rang $n - 1$ si et seulement si la matrice

$$\begin{bmatrix} (\partial^2 f / \partial x_1^2)(x) & \dots & (\partial^2 f / \partial x_1 \partial x_n)(x) & l_1^* \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ (\partial^2 f / \partial x_n \partial x_1)(x) & \dots & (\partial^2 f / \partial x_n^2)(x) & l_n^* \end{bmatrix}$$

a le rang n . Ceci signifie que la restriction de la forme quadratique des dérivées secondes de f à l'hyperplan orthogonal au vecteur (l_1, \dots, l_n) est non dégénérée.

3. Rappel sur la théorie de Morse à bord

Nous rappelons dans ce paragraphe les résultats sur la théorie de Morse sur les dérivées différentiables (c'est-à-dire C^∞ -différentiables et séparées) à bord. Ces résultats sont inspirés de [22] p. 257, [2] et [26]. Comme il semble que ces résultats sont bien connus des spécialistes, nous n'en donnerons pas de preuves. Nous n'utiliserons pas ici les notations des paragraphes précédents.

(3.1) Soit M une variété différentiable à bord ∂M (cf. [18]). Soit p la dimension de M . Soit $f : M \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction différentiable sur M . On note ∂f la restriction de f à ∂M et \hat{f} la restriction de f à $M - \partial M$, et on appelle point critique de f tout point critique de \hat{f} ou de ∂f .

Soit $x \in \partial M$ un point critique de ∂f . Soit U un voisinage ouvert de x dans M tel que :

(i) Nous avons une carte $\varphi : U \rightarrow B_\varepsilon^-$ sur l'ensemble B_ε^- de \mathbf{R}^p défini par $\sum_{i=1}^p x_i^2 < \varepsilon$ et $x_p \leq 0$ avec $\varphi(x) = 0$ et x_i étant les coordonnées de \mathbf{R}^p .

(ii) $f \circ \varphi^{-1}$ étant différentiable sur B_ε^- s'étend en une fonction différentiable \tilde{f} sur \dot{B}_ε défini par $\sum_{i=1}^p x_i^2 < \varepsilon$.

DÉFINITION (3.1.1). — Nous dirons que $x \in \partial M$ est un point critique correct de f si x est un point critique de ∂f , ∂f est non dégénérée en x et O n'est pas un point critique de \tilde{f} .

On remarque que cette définition ne dépend pas du choix de la carte φ et de l'extension \tilde{f} de $f \circ \varphi^{-1}$, parce que si nous avons une autre extension \tilde{f}_1 de $f \circ \varphi^{-1}$, les dérivées de \tilde{f} et \tilde{f}_1 en O sont égales.

Si nous identifions avec \mathbf{R}^p l'espace tangent de \dot{B}_ε en O , le noyau de la dérivée $D_0 \tilde{f}$ de \tilde{f} en O est l'hyperplan défini par $x_p = 0$. Cet hyperplan divise \mathbf{R}^p en deux domaines où $D_0 \tilde{f}$ ne s'annule pas et prend des signes opposés. Supposons que x soit un point critique correct de f :

DÉFINITION (3.1.2). — Si le signe de $D_0 \tilde{f}$ dans le domaine défini par $x_p > 0$ est positif, nous dirons que x est un point critique à gradient sortant de f , et si le signe de $D_0 \tilde{f}$ dans le domaine défini par $x_p > 0$ est négatif, nous dirons que x est un point critique à gradient rentrant de f .

En utilisant la métrique euclidienne canonique de \dot{B}_ε , un point critique à gradient sortant (resp. à gradient rentrant) de f correspond à un point critique correct de \tilde{f} pour lequel le gradient est de la forme $(0, \dots, 0, \alpha)$ avec $\alpha > 0$ (resp. $\alpha < 0$).

DÉFINITION (3.1.3). — Une fonction différentiable $f : M \rightarrow \mathbf{R}$ est une fonction correcte sur M si ∂f et \hat{f} n'ont que des points critiques non dégénérés et si les points critiques de ∂f sont des points critiques corrects de f .

Soit $f : M \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction différentiable sur la variété différentiable M à bord ∂M . On note M^a l'ensemble $f^{-1}(]-\infty, a])$.

Comme dans [15] (théorème 3.1, p. 12) on établit le lemme suivant dans le cas des variétés à bord :

LEMME (3.1.4). — Soit $f: M \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction différentiable sur la variété différentiable M à bord ∂M . Soit $a < b$. Supposons que $f^{-1}([a, b])$ soit compact et ne contienne aucun point critique de f . Alors M^a et M^b sont homéomorphes et de plus M^a est un rétracte par déformation de M^b et l'inclusion $M^a \subset M^b$ est une équivalence d'homotopie.

De même on a le lemme suivant :

LEMME (3.1.5). — Soit $f: M \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction différentiable sur la variété différentiable M à bord ∂M . Soit $a < b$. Supposons que $f^{-1}([a, b])$ soit compact et que $f^{-1}([a, b[)$ ne contienne aucun point critique de f . Alors $\{z \in M \mid f(z) < a\}$ est un rétracte par déformation de $\{z \in M \mid f(z) < b\}$, et les deux espaces sont difféomorphes.

Comme dans [15] nous obtenons le théorème suivant :

THÉORÈME (3.1.6). — Soit $f: M \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction différentiable et supposons que z_0 soit un point critique non dégénéré de f ayant l'indice λ . Posons $f(z_0) = c$ et supposons que pour un certain $\varepsilon_0 > 0$, $f^{-1}([c - \varepsilon_0, c + \varepsilon_0])$ soit compact et ne contienne aucun point critique de f autre que z_0 . Alors pour tout $\varepsilon > 0$ assez petit, l'ensemble $M^{c+\varepsilon}$ a le type d'homotopie de $M^{c-\varepsilon}$ auquel on aurait rattaché une cellule de dimension λ .

Démonstration. — La démonstration du théorème 3.2 de [15] et celle du lemme (3.1.4) impliquent ce théorème car l'attachement de la cellule de dimension λ a lieu dans un petit voisinage ouvert de z_0 .

Dans le cas de variétés différentiables à bord on peut rencontrer des points critiques de f sur le bord et alors :

THÉORÈME (3.1.7). — Soit $f: M \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction différentiable. Supposons que $z_0 \in \partial M$ soit un point critique de ∂f . Posons $f(z_0) = c$ et supposons que, pour un certain $\varepsilon_0 > 0$, on ait que $f^{-1}([c - \varepsilon_0, c + \varepsilon_0])$ soit compact et ne contienne aucun point critique de f autre que z_0 . Alors :

(i) Si z_0 est un point critique à gradient sortant de f , $M^{c+\varepsilon_0}$ et $M^{c-\varepsilon_0}$ sont homéomorphes et $M^{c-\varepsilon_0}$ est un rétracte par déformation de $M^{c+\varepsilon_0}$.

(ii) Si z_0 est un point critique à gradient rentrant de f , pour $\varepsilon > 0$ assez petit, $M^{c+\varepsilon}$ a le type d'homotopie de $M^{c-\varepsilon}$ auquel on aurait adjoint une cellule de dimension λ , ou λ est l'indice du point critique z_0 de ∂f .

Pour terminer ce rappel sur la théorie de Morse, il aurait fallu énoncer un théorème analogue au théorème 3.5 de [15] : nous laissons ce soin au lecteur, s'il y en a.

Afin de mieux illustrer ce qui précède, le lecteur pourra se convaincre que si l'on considère la fonction hauteur sur la couronne comprise entre deux cercles concentriques, seuls les points à gradient rentrant jouent un rôle pour déterminer le type d'homotopie de la couronne.

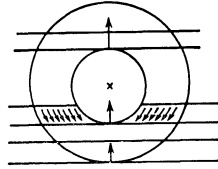


Fig. 1 bis. — Seuls les gradients rentrant jouent un rôle.

(3.2) Dans le cas auquel nous nous intéressons les variétés sont des variétés à bords anguleux (cf. [5]) et non pas seulement des variétés à bord. On aurait donc dû écrire un rappel sur la théorie de Morse, pour les variétés à bords anguleux. En fait nous n'aurons à considérer que des *coins* de nature assez élémentaire. Nous ne nous préoccupons que des variétés du type suivant que nous baptiserons *variétés à arêtes*.

DÉFINITION (3.2.1). — Soit M un espace topologique séparé. Soit $(U_\alpha, \varphi_\alpha)_{\alpha \in A}$ une famille de couples d'un ouvert U_α de M et d'un homéomorphisme φ_α de U_α sur un sous-ensemble E_α de \mathbf{R}^p telle que :

(i) E_α est ou bien un ouvert de \mathbf{R}^p , ou bien un ouvert du sous-espace de \mathbf{R}^p défini par $x_p \leq 0$, ou bien un ouvert du sous-espace de \mathbf{R}^p défini par $x_p \leq 0$ et $x_{p-1} \leq 0$;

(ii) pour tout $(\alpha, \beta) \in A^2$ tels que $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ l'application $\varphi_{\alpha, \beta} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$, qui à $z \in \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ fait correspondre $\varphi_\beta(\varphi_\alpha^{-1}(z))$, est différentiable; i. e. il existe une application d'un voisinage ouvert de $\varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ de \mathbf{R}^p dans un voisinage ouvert de $\varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ de \mathbf{R}^p qui induit $\varphi_{\alpha, \beta}$ et qui est différentiable;

(iii) pour tout ouvert U de M et tout homéomorphisme $\varphi : U \rightarrow E$ où E est un sous-ensemble de \mathbf{R}^p tels que l'application

$$\varphi_{\alpha, U} : \varphi_\alpha(U \cap U_\alpha) \rightarrow \varphi(U \cap U_\alpha),$$

pour tout α tel que $U \cap U_\alpha \neq \emptyset$, qui à $z \in \varphi_\alpha(U \cap U_\alpha)$ fait correspondre $\varphi(\varphi_\alpha^{-1}(z))$, est un difféomorphisme, (U, φ) est un couple de la famille;

(iv) $\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha = M$.

Une telle famille $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ est appelée un *atlas à arêtes* de dimension p de M . La donnée d'une telle famille est la donnée d'une structure de

variété à arêtes de dimension p sur M . On dira alors que M est une variété à arêtes de dimension p .

On appelle φ_α une *carte* de la variété à arêtes et on dit que $\varphi_{\alpha, \beta}$ est l'*application de transition* de la carte φ_α à la carte φ_β .

On procède, comme pour le cas des variétés à bord, pour définir la catégorie des variétés à arêtes, la notion de sous-variété. Un isomorphisme dans cette catégorie est encore appelé difféomorphisme.

Les points x de M , où il existe un voisinage ouvert U dans M et un difféomorphisme φ de U sur une demi-boule B^- de \mathbf{R}^p , donnée par

$$\sum_{i=1}^p x_i^2 < \varepsilon \text{ et } x_p \leq 0 \text{ tel que } \varphi(x) = 0, \text{ sont les points du bord de } M.$$

On note ∂M l'ensemble des points du bord de M .

Les points x de M , où il existe un voisinage ouvert de U dans M et un difféomorphisme φ de U sur un quart de boule de \mathbf{R}^p , défini par

$$\sum_{i=1}^p x_i^2 < \varepsilon, x_p \leq 0 \text{ et } x_{p-1} \leq 0 \text{ tel que } \varphi(x) = 0, \text{ sont les points de l'arête}$$

de M . On note γM l'ensemble des points de l'arête de M .

Les points de $M - \partial M \cup \gamma M$ sont les points de l'intérieur de M et on note $\dot{M} = M - \partial M \cup \gamma M$.

EXEMPLES (3.2.2). — Une variété C^∞ à bord M est une variété à arêtes telle que $\gamma M = \emptyset$. Les espaces M^a et M^b du lemme (3.1.4) ont une structure naturelle de variété à arêtes; ils sont difféomorphes.

(3.2.3) Reprenons les notations du paragraphe 0. Soit B une boule fermée centrée en O et contenue dans U . Soit S la sphère qui borde B . La restriction de $|f|^2$ à S a éventuellement une valeur critique en O . En utilisant le lemme des petits chemins (1.3.3) on obtient qu'il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que la restriction de $|f|^2$ à S n'ait aucune valeur critique dans $]0, \varepsilon_0^2]$. D'autre part le même lemme permet de montrer que pour un voisinage ouvert U_1 relativement compact de B il existe $\varepsilon_1 \leq \varepsilon_0$ assez petit tel que, pour tout ε , $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_1$, l'ensemble des points de U_1 où $|f| = \varepsilon$ est une variété différentiable. L'ensemble des points de U_1 où $|f| \geq \varepsilon$ est alors une variété à bord. Enfin les points de B où $|f| \geq \varepsilon$ est une variété à arêtes. Son bord est constitué des points de S où $|f| > \varepsilon$ et des points de $B - S$ où $|f| = \varepsilon$. Ses arêtes sont constituées des points de S où $|f| = \varepsilon$.

Remarquons enfin que les variétés à arêtes sont des variétés à coins de codimensions deux au plus (cf. [27]).

On désire démontrer un théorème analogue au lemme (3.1.4). Pour cela on doit définir la notion de point critique d'une fonction $f: M \rightarrow \mathbf{R}$

quand M est une variété à arêtes. Nous procédons comme dans (1.3), en considérant la stratification au sens de Thom (cf. [21]) de M par \dot{M} , ∂M et γM . Notons \dot{f} , ∂f resp. γf la restriction de f à \dot{M} , ∂M resp. γM .

DÉFINITION (3.2.4). — Une fonction $f: M \rightarrow \mathbf{R}$ sur une variété à arêtes a un point critique $x \in M$ si la restriction de f à la strate \dot{M} , ∂M ou γM qui contient x a un point critique en x . On dit que $y \in \mathbf{R}$ est une valeur critique s'il existe un point critique x de M tel que $f(x) = y$.

Nous avons le théorème suivant :

THÉORÈME (3.2.5). — Soit M une variété à arêtes. Soit $f: M \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction différentiable sur M . Supposons que, pour $a \leq b$, $f^{-1}([a, b])$ soit compact et f n'ait aucun point critique dans $f^{-1}([a, b])$. Alors $M^a = \{x \in M \mid f(x) \leq a\}$ et M^b sont homéomorphes et de plus M^a est un rétracte par déformation de M^b de telle sorte que l'inclusion $M^a \subset M^b$ soit une équivalence d'homotopie.

REMARQUE (3.2.6). — Le lemme (3.1.5) et les théorèmes (3.1.6) et (3.1.7) sont aussi vrais si M est une variété à arêtes. La définition des points critiques extérieurs et intérieurs n'a pas à être modifiée. Pour la démonstration, on utilise de plus la démonstration du théorème (3.2.5). Nous utiliserons aussi la notion de « fonction correcte » dans le cas d'une variété à arêtes. La définition suivante nous suffira : si $f: M \rightarrow \mathbf{R}$ est une fonction différentiable sur une variété à arêtes, nous appellerons f une fonction correcte si γf n'a pas de point critique et les conditions de la définition (3.1.3) sont satisfaites.

Parfois, il nous faut aussi regarder des cas où $f^{-1}([a, b])$ n'est pas compact.

LEMME (3.2.7). — Soit N une variété différentiable à bord, $g: N \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction différentiable et $M = \{z \in N \mid g(z) > 0\}$. Soit $f: M \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction différentiable, $a < b$, et supposons que :

- (i) $f^{-1}([a, b])$ est relativement compact dans N ;
- (ii) f n'a pas de point critique dans $f^{-1}([a, b])$;
- (iii) il existe un voisinage ouvert U de $\overline{f^{-1}([a, b])} - M$ dans N tel que g n'a pas de point critique dans $U \cap M$ et que, pour chaque $\varepsilon > 0$, la restriction de f à $g^{-1}(\varepsilon) \cap U$ n'a pas de point critique dans $f^{-1}[a, b]$;

Alors $M^a = \{z \in M \mid f(z) \leq a\}$ et M^b sont difféomorphes et de plus M^a est un rétracte par déformation de M^b , de sorte que l'inclusion $M^a \subset M^b$ est une équivalence d'homotopie.

La démonstration est analogue à celle du théorème (3.2.5).

4. Démonstration de la partie (a) de (0.2.1)

L'ensemble de ce paragraphe est consacré à la démonstration de la partie (a) du théorème (0.2.1).

(4.1) On reprend les notations du paragraphe 0. On considère l'ouvert de Zariski non vide \mathfrak{U} ; cf. le lemme (2.2.1). Soit $L \in \mathfrak{U}$. En utilisant le lemme (2.2.1), la proposition (2.2.2) et le fait que π est propre, il existe un voisinage ouvert Ω de O dans U tel que l'ensemble Γ_L^* des points x de $\Omega - H_0$ où $T(x, H_{f(x)}) = L$ soit vide ou une courbe analytique. De plus la restriction de la forme quadratique des dérivées secondes de f à $T(x, H_{f(x)})$ en tout point $x \in \Gamma_L^*$ est non dégénéré, pourvu que Ω soit assez petit. La courbe Γ_L est la fermeture de Γ_L^* dans Ω . De plus, si le germe de Γ_L en O est vide, on convient de choisir Ω de sorte que $\Gamma_L^* = \emptyset$; sinon on choisit Ω tel que Γ_L^* soit régulier et $\Gamma_L \cap H_0 = \{0\}$ (ceci est possible, parce que $\dim \Gamma_L \cap H_0 < \dim \Gamma_L$, donc $\Gamma_L \cap H_0$ est constitué d'un nombre fini de points).

Dans la suite nous montrerons que si $\Gamma_L^* = \emptyset$, en fait $L - H_0$ est un rétracte par déformation de $\mathbf{C}^n - H_0$.

On considère une forme linéaire u qui définit L et on note L_{r_1} l'hyperplan affine d'équation $u = r_1$.

On a une bonne stratification Σ de H_0 en O . On peut supposer que Σ soit une bonne stratification dans Ω .

On peut supposer, quitte à choisir un ouvert Ω plus petit, que tous les L_{r_1} soient transverses à Σ dans $\Omega - \{0\}$.

Nous voulons préciser maintenant le choix du nombre r en ce qui concerne la partie (a) du théorème (0.2.1). Pour cela, une définition donnée par Prill [19] sera utile :

DÉFINITION (4.1.1). — Soit X un espace topologique, Y un sous-espace, $y \in X$. Un voisinage V de y dans X est appelé « bon voisinage » (par rapport à Y) s'il y a un système fondamental $\{V_\alpha\}$ de voisinages de y dans X tel que chaque $V_\alpha - Y$ est un rétracte par déformation de $V - Y$.

Dans cette définition, nous voulons admettre aussi des voisinages qui ne sont pas ouverts.

Il est facile de voir que les V_α sont aussi de bons voisinages et que le type d'homotopie de $V - Y$ ne dépend pas du bon voisinage V (cf. [19], p. 377). S'il y a donc un bon voisinage V tel que $V - Y$ est connexe et non vide, on peut regarder les groupes d'homotopie de $V - Y$ comme des groupes d'homotopie locaux de $X - Y$ en y (bien définis à un isomorphisme près).

Nous voulons démontrer que pour $r > 0$ suffisamment petit, B_r est un bon voisinage de O dans \mathbf{C}^n par rapport à H_0 . Pour la démonstration, nous avons besoin d'une version plus forte du lemme (2.1.1).

LEMME (4.1.2). — Si $r > 0$ est suffisamment petit, on a $B_r \subset U$ et il y a un voisinage U' de $H_0 \cap B_r - \{0\}$ dans U tel que, pour tout $\varepsilon > 0$, $\partial T_\varepsilon \cap U'$ soit une variété différentiable qui coupe chaque S_ρ , $0 < \rho \leq r$, transversalement, et il y a un voisinage U'' de $H_0 \cap L \cap B_r - \{0\}$ dans $L \cap U$ tel que, pour tout $\varepsilon > 0$, $\partial T_\varepsilon \cap U''$ soit une variété différentiable, transverse à chaque $S_\rho \cap L$, $0 < \rho \leq r$, dans L .

Preuve. — Il suffit de démontrer l'existence de U' ; celle-ci est prouvée dans [7], § 2.16.

LEMME (4.1.3). — Soit $r > 0$ choisi comme dans le lemme (4.1.2). Alors B_r (resp. $B_r \cap L$) est un bon voisinage de O dans \mathbf{C}^n (resp. L) par rapport à H_0 (resp. $H_0 \cap L$).

Preuve. — Nous voulons appliquer le lemme (3.2.7), en remplaçant N par U , g par $|f|^2$, f par l'application $z \mapsto \|z\|^2$, a par ρ^2 et b par r^2 ($0 < \rho < r$). Les hypothèses (i) et (ii) du lemme (3.2.7) sont satisfaites; l'hypothèse (iii) aussi, d'après le lemme (4.1.2); alors $B_\rho - H_0$ est un rétracte par déformation de $B_r - H_0$. De la même manière on montre que $B_r \cap L$ est un bon voisinage.

Nous montrerons la partie (a) du théorème (0.2.1) avec r choisi comme dans le lemme (4.1.2); mais d'après le lemme (4.1.3), il suffit de regarder des $\rho > 0$ suffisamment petits, et non pas tous les ρ avec $0 < \rho < r$.

Ce qui suit est vrai pour tout $\rho > 0$ fixe suffisamment petit.

On peut remplacer l'étude de $B_\rho - H_0$ par celle de $B_\rho - \hat{T}_\varepsilon$, où $\hat{T}_\varepsilon = T_\varepsilon - \partial T_\varepsilon$.

LEMME (4.1.4). — Le nombre $\rho > 0$ étant donné, l'inclusion de $B_\rho - \hat{T}_\varepsilon$ dans $B_\rho - H_0$ est une équivalence d'homotopie pour $\varepsilon > 0$ assez petit.

Preuve. — Si nous remplaçons dans le lemme (3.1.5) M par B_ρ , f par $-|f|^2$, a par $-\varepsilon^2$ et b par O , les hypothèses sont satisfaites quand $\varepsilon > 0$ est suffisamment petit, d'après le lemme (2.1.1); alors $B_\rho - T_\varepsilon$ est un rétracte par déformation de $B_\rho - H_0$. Mais comme $B_\rho - \hat{T}_\varepsilon$ est une variété à arêtes, l'inclusion de $B_\rho - \hat{T}_\varepsilon$ dans $B_\rho - H_0$ est aussi une équivalence d'homotopie.

Soit $\rho > 0$ assez petit fixé, $\gamma_1(\rho) > 0$ et $\varepsilon > 0$ assez petits, et notons \mathfrak{C}_c (resp. $\mathring{\mathfrak{C}}_c$) l'ensemble des points $z \in \mathbf{C}^n$ où $|u(z)| \leq c$ resp. $|u(z)| < c$; posons $\partial \mathfrak{C}_c = \mathfrak{C}_c - \mathring{\mathfrak{C}}_c$. On obtient alors

LEMME (4.1.5). — L'inclusion de $(B_\rho - \hat{T}_\varepsilon) \cap L$ dans $(B_\rho - \hat{T}_\varepsilon) \cap \mathfrak{C}_{\eta(\rho)}$ donne des isomorphismes

$$\pi_i((B_\rho - \hat{T}_\varepsilon) \cap L, y) \rightarrow \pi_i((B_\rho - \hat{T}_\varepsilon) \cap \mathfrak{C}_{\eta(\rho)}, y)$$

pour $i \leq n - 3$ et avec $y \in (B_\rho - \hat{T}_\varepsilon) \cap L$ et un épimorphisme

$$\pi_{n-2}((B_\rho - \hat{T}_\varepsilon) \cap L, y) \rightarrow \pi_{n-2}((B_\rho - \hat{T}_\varepsilon) \cap \mathfrak{C}_{\eta(\rho)}, y).$$

Preuve. — Remarquons que, d'après l'exemple (3.2.3), l'espace $B_\rho - \hat{T}_\varepsilon$ est une variété à arêtes. Considérons la fonction σ , restriction de $|u|^2$ à cette variété $M = B_\rho - \hat{T}_\varepsilon$. Soit $\partial\sigma$ la restriction de σ à ∂M .

Remarquons que

$$\begin{aligned} \partial M &= (S_\rho - T_\varepsilon) \cup (\hat{B}_\rho \cap \partial T_\varepsilon), \\ \gamma M &= S_\rho \cap \partial T_\varepsilon. \end{aligned}$$

L'hyperplan L_0 est transverse à $\hat{B}_\rho \cap \partial T_\varepsilon$, à S_ρ et à $S_\rho \cap \partial T_\varepsilon$ [on regarde $f|U \cap L_0$ et on applique le lemme (2.1.4)]. Il en résulte qu'il existe $\eta_0 > 0$ assez petit tel que, pour tout η , $0 \leq |\eta| \leq \eta_0$, on ait que L_η est transverse à ∂M et γM . En procédant comme pour la démonstration du théorème (3.2.5) on obtient alors que $(B_\rho - \hat{T}_\varepsilon) \cap \mathfrak{C}_{\eta_0}$ est une fibration triviale sur le disque de \mathbf{C} de rayon η_0 et de centre O et dont les fibres sont diffeomorphes à $(B_\rho - \hat{T}_\varepsilon) \cap L$. Il en résulte que $(B_\rho - \hat{T}_\varepsilon) \cap \mathfrak{C}_{\eta_0}$ et $(B_\rho - \hat{T}_\varepsilon) \cap L$ ont le même type d'homotopie.

D'après (2.1.4), on a, pour tout $\eta \in \mathbf{C}$, $0 \leq |\eta| \leq \eta(\rho)$, que L_η est transverse à S_ρ et $S_\rho \cap \partial T_\varepsilon$. Donc les seuls points critiques de σ , dont les valeurs sont comprises entre η_0^2 et $\eta(\rho)^2$, sont sur $\Gamma_L \cap \partial T_\varepsilon$. Quitte à modifier σ dans un voisinage compact de ses points critiques sur $\Gamma_L \cap \partial T_\varepsilon$, nous allons montrer que l'on a une fonction $\tilde{\sigma}$ sur M , correcte sur $M - L$ [cf. (3.2.6)], telle que l'ensemble des points de M où $\tilde{\sigma} \leq \eta_0^2$ coïncide avec $(B_\rho - \hat{T}_\varepsilon) \cap \mathfrak{C}_{\eta_0}$, que l'ensemble des points de M où $\tilde{\sigma} \leq \eta(\rho)^2$ coïncide avec $(B_\rho - \hat{T}_\varepsilon) \cap \mathfrak{C}_{\eta(\rho)}$ et que l'ensemble des points critiques x tels que $\eta_0^2 \leq \tilde{\sigma}(x) \leq \eta(\rho)^2$ ont un indice au moins égal à $n - 1$. Nous verrons que ceci entraîne bien le lemme (4.1.5).

Nous allons tout d'abord calculer l'indice de σ en un point critique de σ sur $\partial T_\varepsilon \cap \hat{B}_\rho$ où σ ne s'annule pas.

LEMME (4.1.6). — Un point $x \in \partial T_\varepsilon \cap \hat{B}_\rho$ est un point critique de la restriction de σ à $\partial T_\varepsilon \cap \hat{B}_\rho$ si et seulement s'il existe un nombre réel λ tel que

$$(\text{grad } \sigma)(x) = \lambda (\text{grad } |f|^2)(x),$$

ou $\text{grad } \sigma$ désigne le gradient réel de la fonction réelle σ .

Preuve. — Par définition on doit avoir

$$D_x(\partial\sigma) = 0;$$

— i. e. pour tout vecteur tangent $v \in T(x, \partial T_\varepsilon)$ en x à ∂T_ε on a

$$D_x(\partial\sigma).v = D_x(\sigma).v = 0.$$

Or v est tangent en x à ∂T_ε si et seulement si

$$D_x(|f|^2).v = 0.$$

Ceci implique donc qu'il existe $\lambda \in \mathbf{R}$ tel que

$$D_x\sigma = \lambda D_x|f|^2.$$

Or $D_x\sigma = \operatorname{Re} \langle v, \operatorname{grad} \sigma \rangle$, où $\langle x, y \rangle$ est le produit hermitien de x et y et $\operatorname{Re} \langle x, y \rangle$ la forme bilinéaire réelle associée à ce produit hermitien et notre lemme en résulte.

Notons $\operatorname{grad} f$ le gradient complexe de f défini par

$$D_x f.v = \langle v, (\operatorname{grad} f)(x) \rangle.$$

On obtient alors en un point critique x de $\partial\sigma$ où $u(x) \neq 0$:

$$(4.1.7) \quad (\operatorname{grad} \sigma)(x) = 2u(x)(\operatorname{grad} u)(x),$$

— où u est la forme bilinéaire qui définit L .

En effet, le gradient complexe du logarithme de u est bien défini car $u(x) \neq 0$: ce gradient est alors le gradient d'une détermination du logarithme de u dans un voisinage de x et on vérifie que ce gradient ne dépend pas de la détermination choisie. Dans ce cas si $p : [0, \varepsilon[\rightarrow \mathbf{C}^n$ est un chemin différentiable tel que $p(0) = x$ et $\frac{dp}{dt}(0) = v$ on a

$$\left(\frac{d}{dt} \sigma \circ p \right) (0) = D_x \sigma.v.$$

Or

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \sigma(p(t)) &= \frac{d}{dt} |u(p(t))|^2 = 2|u(p(t))|^2 \frac{d}{dt} \operatorname{Log} |u(p(t))| \\ &= 2|u(p(t))|^2 \operatorname{Re} \frac{d}{dt} \operatorname{Log} u(p(t)) \\ &= 2|u(p(t))|^2 \operatorname{Re} \left\langle \frac{d}{dt} p(t), (\operatorname{grad} \operatorname{Log} u)(p(t)) \right\rangle. \end{aligned}$$

D'où

$$D_x \sigma.v = \operatorname{Re} \langle v, \operatorname{grad} \sigma \rangle = 2|u(x)|^2 \operatorname{Re} \langle v, (\operatorname{grad} \operatorname{Log} u)(x) \rangle.$$

Comme

$$(\operatorname{grad} \operatorname{Log} u)(x) = \frac{(\operatorname{grad} u)(x)}{u(x)},$$

— on obtient l'égalité annoncée.

De même

$$(4.1.8) \quad (\text{grad } |f|^2)(x) = 2f(x) (\text{grad } f)(x).$$

LEMME (4.1.9). — Soit $x \in \partial T_\varepsilon \cap \dot{B}_\rho$ un point critique de la restriction de σ à $\partial T_\varepsilon \cap \dot{B}_\rho$ ou $\sigma(x) \neq 0$. Soit H_x le hessien de $\partial\sigma$ en x , alors, pour tout vecteur $v \in T(x, \partial T_\varepsilon)$ tangent en x à ∂T_ε , on a

$$H_x(v) = 2|\langle v, (\text{grad } u)(x) \rangle|^2 - 2\lambda |\langle v, (\text{grad } f)(x) \rangle|^2 - 2\lambda \text{Re} \left(\bar{f}(x) \sum_{i,j} (\partial^2 f / \partial X_i \partial X_j)(x) v_i v_j \right),$$

où v_i est la $i^{\text{ème}}$ composante de v dans \mathbf{C}^n , et λ est défini par

$$u(x) \text{grad } u(x) = \lambda f(x) \text{grad } f(x).$$

Preuve. — Soit $p : [0, \varepsilon[\rightarrow \partial T_\varepsilon$ un chemin différentiable tel que

$$\begin{cases} p(0) = x, \\ \left(\frac{d}{dt} p \right)(0) = v. \end{cases}$$

Alors

$$H_x(v) = \left(\frac{d^2}{dt^2} \sigma \circ p \right)(0).$$

Mais comme pour $\sigma(x) \neq 0$ on a

$$(\text{grad } \sigma)(x) = 2u(x) \text{grad } u(x),$$

on obtient

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \sigma(p(t)) &= \text{Re} \left\langle \frac{d}{dt} p(t), 2u(p(t)) \text{grad } u(p(t)) \right\rangle, \\ \frac{d^2}{dt^2} \sigma(p(t)) &= 2 \left| \left\langle \frac{d}{dt} p(t), (\text{grad } u)(p(t)) \right\rangle \right|^2 \\ &\quad + 2 \text{Re} \left\langle \frac{d^2}{dt^2} p(t), u(p(t)) (\text{grad } u)(p(t)) \right\rangle \\ &\quad + 2 \text{Re} \left(\bar{u}(p(t)) \sum_{i,j} (\partial^2 u / \partial X_i \partial X_j)(p(t)) \frac{dp_i}{dt}(t) \frac{dp_j}{dt}(t) \right). \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} \left(\frac{d^2}{dt^2} \sigma \circ p \right)(0) &= 2|\langle v, \text{grad } u(x) \rangle|^2 \\ &\quad + 2 \text{Re} \left\langle \frac{d^2}{dt^2} p(0), u(x) (\text{grad } u)(x) \right\rangle \\ &\quad + 2 \text{Re} \left(\bar{u}(x) \sum_{i,j} (\partial^2 u / \partial X_i \partial X_j)(x) v_i v_j \right). \end{aligned}$$

Mais x étant un point critique de $\partial\sigma$ où $\sigma(x) \neq 0$:

$$u(x) \text{grad } u(x) = \lambda f(x) \text{grad } f(x).$$

Mais

$$|f(p(t))|^2 = \varepsilon^2.$$

D'où

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d^2}{dt^2} |f(p(t))|^2 = 2 \left| \left\langle \frac{d}{dt} p(t), (\text{grad } f)(p(t)) \right\rangle \right|^2 \\ &\quad + 2 \operatorname{Re} \left\langle \frac{d^2}{dt^2} p(t), f(p(t)) (\text{grad } f)(p(t)) \right\rangle \\ &\quad + 2 \operatorname{Re} \left(\bar{f}(p(t)) \sum_{i,j} (\partial^2 f / \partial X_i \partial X_j)(p(t)) \frac{dp_i}{dt}(t) \frac{dp_j}{dt}(t) \right). \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} &2 \lambda \operatorname{Re} \left\langle \left(\frac{d^2}{dt^2} p \right)(0), f(x) \text{grad } f(x) \right\rangle \\ &= -2 \lambda |\langle v, \text{grad } f(x) \rangle|^2 - 2 \lambda \operatorname{Re} \left(\bar{f}(x) \sum_{i,j} (\partial^2 f / \partial X_i \partial X_j)(x) v_i v_j \right). \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} H_x(v) &= 2 |\langle v, (\text{grad } u)(x) \rangle|^2 - 2 \lambda |\langle v, (\text{grad } f)(x) \rangle|^2 \\ &\quad + 2 \operatorname{Re} \left(\overline{u(x)} \sum_{i,j} (\partial^2 u / \partial X_i \partial X_j)(x) v_i v_j \right) \\ &\quad - 2 \lambda \operatorname{Re} \left(\bar{f}(x) \sum_{i,j} (\partial^2 f / \partial X_i \partial X_j)(x) v_i v_j \right). \end{aligned}$$

Mais u étant linéaire, $(\partial^2 u / \partial X_i \partial X_j)(x) = 0$ et ceci démontre notre lemme.

COROLLAIRE (4.1.10). — *L'indice de H_x en un point critique de $\partial\sigma$, où $\sigma(x) \neq 0$, est au moins égal à $n - 1$.*

Preuve. — Considérons la restriction de H_x à l'hyperplan complexe $\mathbf{T}(x, H_{f(x)})$ tangent en x à $H_{f(x)}$. Alors pour tout $v \in \mathbf{T}(x, H_{f(x)})$ on a

$$\langle v, (\text{grad } u)(x) \rangle = \langle v, \text{grad } f(x) \rangle = 0.$$

Donc

$$H_x(v) = -2 \lambda \operatorname{Re} \left(\bar{f}(x) \sum_{i,j} (\partial^2 f / \partial X_i \partial X_j)(x) v_i v_j \right)$$

mais $x \in \Gamma_L$ et $\lambda \neq 0$. Le lemme (2.2.1) montre que la forme quadratique Q sur $\mathbf{T}(x, H_{f(x)})$ définie par

$$Q(v) = \sum_{i,j} (\partial^2 f / \partial X_i \partial X_j)(x) v_i v_j$$

pour tout $v \in \mathbf{T}(x, H_{f(x)})$ est non dégénérée, notre corollaire résulte de

LEMME (4.1.11). — *La partie réelle d'une forme quadratique complexe non dégénérée sur \mathbf{C}^m est une forme quadratique réelle non dégénérée de signature (m, m) .*

Donc l'indice de $d\sigma$ en un point critique x où $\sigma(x) \neq 0$ est au moins $n - 1$.

Nous allons maintenant modifier σ pour obtenir une fonction $\tilde{\sigma}$ sur M correcte sur $(B_\rho - \dot{T}_\varepsilon) \cap (\mathfrak{C}_{r_1(\rho)} - \mathfrak{C}_{r_0})$ (cf. 3.2.6) avec les propriétés annoncées.

On a le lemme suivant :

LEMME (4.1.12). — Soit C l'ensemble des points critiques de la restriction de σ à $\partial T_\varepsilon \cap \dot{B}_\rho$ ou σ ne s'annule pas. Alors pour tout $\alpha > 0$ il existe une fonction $\tilde{\sigma}_\alpha$ sur $M = B_\rho - \dot{T}_\varepsilon$ qui est correcte sur $(B_\rho - \dot{T}_\varepsilon) \cap (\mathfrak{C}_{r_1(\rho)} - \mathfrak{C}_{r_0})$ et qui coïncide avec σ à l'extérieur d'un voisinage relativement compact $U(C)$ de C dans $M \cap (\mathfrak{C}_{r_1(\rho)} - \mathfrak{C}_{r_0})$ et telle que ses première et seconde dérivées approximativement uniformément à α près celle de σ .

Preuve. — Pour établir ce lemme, on procède comme J. Milnor dans [14].

Comme C est compact et contenu dans $\mathfrak{C}_{r_1(\rho)} - \mathfrak{C}_{r_0}$, on peut trouver des ouverts U_i ($i = 1, \dots, m$) et des cartes

$$h_i: U_i \rightarrow B^- = \{x \in \mathbf{R}^{2n} \mid \|x\| < 1, x_{2n} \leq 0\}$$

de M , et des compacts C_i ($i = 1, \dots, m$) tels que :

$$(1) C \subset \bigcup_{i=1}^m \dot{C}_i;$$

$$(2) C_i \subset U_i;$$

$$(3) U(C) = \bigcup_{i=1}^m U_i \text{ relativement compact dans } M \cap (\mathfrak{C}_{r_1(\rho)} - \mathfrak{C}_{r_0}).$$

On va exhiber une fonction σ_m qui n'a que des points critiques non dégénérés sur $\left(\bigcup_{i=1}^m C_i\right) \cap \partial T_\varepsilon$ et qui n'a aucun point critique dans $\bigcup_{i=1}^m C_i - \partial T_\varepsilon$. Posons $M' = M \cap (\mathfrak{C}_{r_1(\rho)} - \mathfrak{C}_{r_0})$.

De manière analogue à celle du théorème 8.1, p. 178 de [17], on peut trouver une fonction σ_1 qui n'a pas de point critique dégénéré sur $C_1 \cap \partial T_\varepsilon$ et n'a aucun point critique dans $C_1 - \partial T_\varepsilon$. En effet soit λ_1 une fonction égale à 1 dans un voisinage de C_1 et à 0 à l'extérieur de U_1 et soit L_1 une forme linéaire de \mathbf{R}^{2n} . Alors

$$\sigma_1 = \sigma + \lambda_1 \cdot (L_1 \circ h_1)$$

conviendra si L_1 est convenablement choisi de norme $\|L_1\|$ assez petite.

En utilisant les lemmes B et C (p. 12 de [14]) on peut choisir σ_2 de telle sorte que σ_2 n'ait aucun point critique dégénéré sur $\partial T_\varepsilon \cap (C_1 \cup C_2)$ et

aucun point critique dans $(C_1 \cup C_2) - \partial T_\varepsilon$ en procédant comme ci-dessus : on pose $\sigma_2 = \sigma_1 + \lambda_2 \cdot (L_2 \circ h_2)$ de telle manière que σ_2 n'ait pas de point critique dégénéré sur $C_2 \cap \partial T_\varepsilon$ et n'ait aucun point critique dans $C_2 - \partial T_\varepsilon$. De plus, σ_2 garde les propriétés de σ_1 quand $\|L_2\|$ est assez petit.

On obtient ainsi la fonction σ_m cherchée. De plus, pour tout $\beta > 0$, si les L_i sont de normes $\|L_i\|$ assez petites, alors les première et seconde dérivées de σ_m approximativement celles de σ sur M' à β près. Donc, $\tilde{\sigma}_\alpha = \sigma_m$ n'a pas de point critique dans le compact $M' - \bigcup_{i=1}^m \dot{C}_i$ et vérifie les

propriétés désirées, quand les normes $\|L_i\|$ sont assez petites.

Si $\alpha > 0$ est assez petit, l'indice de $\tilde{\sigma}_\alpha$ en un point critique sur $\partial T_\varepsilon \cap \dot{B}_\rho$ où σ ne s'annule pas est au moins $n - 1$ d'après le corollaire (4.1.10). Nous choisissons un tel α et posons $\tilde{\sigma}_\alpha = \tilde{\sigma}$.

En utilisant la fonction $\tilde{\sigma}$ et le théorème (3.1.7) [cf. aussi (3.2.6)], on obtient que $(B_\rho - \dot{T}_\varepsilon) \cap \mathfrak{C}_{\eta(\rho)}$ a le type d'homotopie de $(B_\rho - \dot{T}_\varepsilon) \cap \mathfrak{C}_{\eta_0}$ auquel on a adjoint des cellules de dimension $n - 1$ au moins. Le lemme 15, p. 402, de [20] donne alors le lemme (4.1.5).

(4.2) Pour achever la démonstration de la partie (a) du théorème (0.2.1), il nous reste à montrer que l'inclusion de $(B_\rho - \dot{T}_\varepsilon) \cap \mathfrak{C}_{\eta(\rho)}$ dans $B_\rho - H_0$ est une équivalence d'homotopie. Nous supposons ici que $\rho > 0$ est assez petit, $\eta(\rho) > 0$ assez petit comparé à ρ , et $\varepsilon > 0$ assez petit comparé à ρ et $\eta(\rho)$.

LEMME (4.2.1). — *Il y a un voisinage U^* de $H_0 \cap \Omega - \{0\}$ dans Ω tel que pour tout $b \neq 0$, $H_b \cap U^*$ soit une variété différentiable qui coupe chaque L_η transversalement.*

Preuve. — Nous avons choisi Ω tel que $\Gamma_L = \emptyset$ ou $\Gamma_L \cap H_0 = \{0\}$.

LEMME (4.2.2). — *L'inclusion de $(B_\rho - \dot{T}_\varepsilon) \cap \mathfrak{C}_{\eta(\rho)}$ dans $(B_\rho - H_0) \cap \mathfrak{C}_{\eta(\rho)}$ est une équivalence d'homotopie.*

Preuve. — Il s'agit d'une conséquence du lemme (3.1.5) [cf. aussi (3.2.6)]. Remplaçons là M par $B_\rho \cap \mathfrak{C}_{\eta(\rho)}$, f par $-|f|^2$, a par $-\varepsilon^2$ et b par 0. La fonction $|f|^2$ n'a pas de point critique dans $B_\rho \cap \mathfrak{C}_{\eta(\rho)} \cap (T_\varepsilon - H_0)$ d'après le lemme (2.1.1), dans $\dot{B}_\rho \cap \partial \mathfrak{C}_{\eta(\rho)} \cap (T_\varepsilon - H_0)$ d'après le lemme (4.2.1), et dans $S_\rho \cap \partial \mathfrak{C}_{\eta(\rho)} \cap (T_\varepsilon - H_0)$ d'après le lemme (2.1.4). Alors l'inclusion de $(B_\rho - T_\varepsilon) \cap \mathfrak{C}_{\eta(\rho)}$ — et aussi celle de $(B_\rho - \dot{T}_\varepsilon) \cap \mathfrak{C}_{\eta(\rho)}$ — dans $(B_\rho - H_0) \cap \mathfrak{C}_{\eta(\rho)}$ est une équivalence d'homotopie.

Il suffit donc de démontrer que $B_\rho \cap \mathfrak{C}_{\eta(\rho)}$ est un bon voisinage de O dans \mathbf{C}^n par rapport à H_0 .

LEMME (4.2.3). — *Étant donné $\rho > 0$ suffisamment petit, alors il existe $\eta(\rho) > 0$ tel que $B_\rho \cap \mathfrak{C}_{\rho(\eta)}$ soit un bon voisinage de O dans \mathbf{C}^n par rapport à H_0 .*

Preuve. — Nous voulons appliquer le lemme (3.2.7). D'abord, nous y remplaçons N par B_ρ , g par $|f|^2$, f par $|u|^2$. Si $b = \eta(\rho)^2$ est suffisamment petit, $0 < a < b$, alors les hypothèses (i) et (ii) du lemme (3.2.7) sont satisfaites, et l'hypothèse (iii) aussi, d'après les lemmes (2.1.4) et (4.2.1); ceci montre que $B_\rho \cap \mathfrak{C}_\eta - H_0$ est un rétracte par déformation de $B_\rho \cap \mathfrak{C}_{\eta(\rho)} - H_0$ pour tout η , $0 < \eta < \eta(\rho)$.

Maintenant nous fixons ρ' , $0 < \rho' < \rho$, et supposons que $\eta(\rho', \rho)$ est suffisamment petit. Si nous remplaçons, dans le lemme (3.2.7), N par $\mathfrak{C}_{\eta(\rho', \rho)}$, g par $|f|^2$, f par l'application $z \mapsto \|z\|^2$, a par ρ'^2 , b par ρ^2 , alors les hypothèses (i) et (ii) du lemme (3.2.7) sont satisfaites, et (iii) aussi, d'après les lemmes (2.1.4) et (4.2.1).

Évidemment, on peut maintenant construire le système fondamental de voisinages dont nous avons besoin.

D'après les lemmes (4.2.2), (4.2.3) et (4.1.3), l'inclusion de $(B_\rho - \mathring{T}_\varepsilon) \cap \mathfrak{C}_{\eta(\rho)}$ dans $B_\rho - H_0$ est une équivalence d'homotopie.

(4.3) Pour terminer ce paragraphe nous allons énoncer un corollaire intéressant de la partie (a) du théorème (0.2.1).

Soit $L \in \mathfrak{H}$ où \mathfrak{H} a été défini dans le théorème (0.2.1). On considère la fonction restriction de f à $U \cap L$. On applique le théorème (0.2.1) à ce nouveau cas et ainsi de suite, on obtient alors :

COROLLAIRE (4.3.1). — *Soit $n \geq 4$. Il existe un ensemble \mathfrak{P} partout dense dans la grassmannienne des sous-espaces vectoriels de \mathbf{C}^n de dimension 3 tel que, pour tout $P \in \mathfrak{P}$, il existe $\varepsilon_0 > 0$ pour lequel l'inclusion $(B_\varepsilon - H_0) \cap P$ dans $B_\varepsilon - H_0$ pour tout ε , $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$, donne un isomorphisme*

$$\pi_1((B_\varepsilon - H_0) \cap P, y) \xrightarrow{\sim} \pi_1(B_\varepsilon - H_0, y)$$

avec $y \in (B_\varepsilon - H_0) \cap P$.

5. Un calcul d'indice

Pour établir la partie (a) du théorème (0.2.1) nous n'avons pas cherché à distinguer les points critiques à gradient rentrant et les points critiques à gradient sortant de σ . De plus nous avons modifié σ afin d'obtenir une fonction convenable. Pour obtenir la partie (b) du théorème (0.2.1) nous sommes amenés à affiner le calcul d'indice fait ci-dessus, mais au lieu d'utiliser σ , nous allons considérer la restriction à $M - L_0$ de la fonction $\text{Log} |u - \theta|$ avec $\theta \in \mathbf{C}$ assez petit.

(5.1) Nous reprenons les notations de (4.1). Nous supposons que $\rho > 0$ soit assez petit et que, ρ étant donné, $\gamma_1(\rho) > 0$ soit suffisamment petit. Nous ne voulons pas discuter quel choix de r et $\theta(\rho)$ serait raisonnable.

Choisissons alors θ de telle sorte que $0 < |\theta| < \gamma_1(\rho)/4$.

On note $\mathfrak{F}_\gamma(\theta)$ l'ensemble des points z de \mathbf{C}^n où $|u(z) - \theta| \leq \gamma$.

Nous allons montrer :

LEMME (5.1.1). — *Pour tout ε assez petit, l'espace $(B_\rho - \dot{T}_\varepsilon) \cap \mathfrak{F}_{\gamma_1(\rho)}$ a le type d'homotopie de $(B_\rho - \dot{T}_\varepsilon) \cap L_0$ auquel on a adjoint des cellules de dimension n .*

Compte tenu des lemmes (4.2.2), (4.2.4) et (5.3.2), ceci implique la partie (b) du théorème (0.2.1).

Preuve. — Fixons $\varepsilon > 0$ suffisamment petit. Notons τ la restriction de $\text{Log } |u - \theta|$ à $M - L_0 = B_\rho - (T_\varepsilon \cup L_0)$, $\partial\tau$ celle à $\partial T - L_0$.

D'après les lemmes (2.1.4) et (4.2.1), L_0 est transverse à M . On peut choisir un disque D de \mathbf{C} centré en θ et de rayon γ_0 (dépendant de ε) tel que, pour tout $c \in D$, L_c soit transverse à M . Comme dans le cas du lemme (4.1.5), on obtient alors que $u - \theta$ définit une fibration triviale $(B_\rho - \dot{T}_\varepsilon) \cap \mathfrak{F}_{\gamma_0}(\theta)$ sur D de fibre $(B_\rho - \dot{T}_\varepsilon) \cap L_0$. Ainsi $(B_\rho - \dot{T}_\varepsilon) \cap L_0$ et $(B_\rho - \dot{T}_\varepsilon) \cap \mathfrak{F}_{\gamma_0}(\theta)$ ont le même type d'homotopie.

Nous allons calculer l'indice de la restriction de τ à $\partial T_\varepsilon \cap \dot{B}_\rho - L_0$ en un point critique x où $|u(x) - \theta| \geq \gamma_0$.

LEMME (5.1.2). — *Un point x de ∂T_ε est un point critique de la restriction de τ à $\partial T_\varepsilon \cap \dot{B}_\rho - L_0$ si et seulement s'il existe $\lambda \in \mathbf{R}$ tel que*

$$(\text{grad } \text{Log } |u - \theta|)(x) = \lambda (\text{grad } |f|^2)(x).$$

Preuve. — Elle est analogue à celle du lemme (4.1.6).

Remarquons que

$$(5.1.3) \quad \begin{cases} (\text{grad } \text{Log } |u - \theta|)(x) = \frac{(\text{grad } u)(x)}{u(x) - \theta} = \text{grad } \text{Log } (u - \theta)(x), \\ (\text{grad } |f|^2)(x) = 2f(x) (\text{grad } f)(x). \end{cases}$$

LEMME (5.1.4). — *Soit $x \in \partial T_\varepsilon$ un point critique de $\partial\tau$, alors le hessien H_x de $\partial\tau$ en x est donné par*

$$H_x(v) = -\text{Re} \left(\frac{\langle v, (\text{grad } u)(x) \rangle}{u(x) - \theta} \right)^2 - 2\lambda |\langle v, (\text{grad } f)(x) \rangle|^2 \\ - 2\lambda \text{Re} \left(\overline{f(x)} \sum_{i,j} (\partial^2 f / \partial X_i \partial X_j)(x) v_i v_j \right),$$

— pour tout $v \in \mathbf{T}(x, \partial T_\varepsilon)$ avec v_i comme $i^{\text{ème}}$ composante de v dans \mathbf{C}^n , et λ défini par $\text{grad Log}(u(x) - \theta) = 2\lambda f(x) \text{grad } f(x)$.

Preuve. — On procède comme pour le lemme (4.1.9).

Soit $p : [0, \varepsilon[\rightarrow \partial T_\varepsilon$ un chemin différentiable tel que

$$\begin{cases} p(0) = x, \\ \frac{dp}{dt}(0) = v. \end{cases}$$

Dans ce cas

$$H_x(v) = \frac{d^2}{dt^2} (\text{Log} | u(p(t)) - \theta |)_{t=0}.$$

Mais

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2} (\text{Log} | u(p(t)) - \theta |) &= \text{Re} \left[\left\langle \frac{d^2}{dt^2} p(t), (\text{grad Log}(u - \theta))(p(t)) \right\rangle \right] \\ &\quad - \text{Re} \left(\frac{\frac{d}{dt} u(p(t))}{u(p(t)) - \theta} \right)^2 \end{aligned}$$

et de ce que $|f(p(t))| = \varepsilon$, on obtient

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2} |f(p(t))|^2 = 0 &= 2 \text{Re} \left\langle \frac{d^2}{dt^2} p(t), f(p(t)) (\text{grad } f)(p(t)) \right\rangle \\ &\quad + 2 \left| \left\langle \frac{d}{dt} p(t), (\text{grad } f)(p(t)) \right\rangle \right|^2 \\ &\quad + 2 \text{Re} \left[\overline{f(p(t))} \left(\sum_{i,j} (\partial^2 f / \partial X_i \partial X_j)(p(t)) \frac{dp_i}{dt}(t) \frac{dp_j}{dt}(t) \right) \right], \end{aligned}$$

où p_i est la $i^{\text{ème}}$ composante de p dans \mathbf{C}^n .

On en déduit la formule désirée car en x qui est un point critique on obtient

$$\text{grad Log}(u(x) - \theta) = 2\lambda f(x) \text{grad } f(x).$$

COROLLAIRE (5.1.5). — Soit x un point critique de $\partial\tau$. Un vecteur $v \in \mathbf{T}(x, H_{f(x)})$ est orthogonal à un vecteur $w \in \mathbf{T}(x, \partial T_\varepsilon)$ pour H_x si et seulement si v, w sont orthogonaux pour la forme quadratique réelle définie par

$$Q(v, w) = 2 \text{Re} \left(\overline{f(x)} \sum_{i,j} (\partial^2 f / \partial X_i \partial X_j)(x) v_i w_j \right).$$

Preuve. — Cela provient du lemme (5.1.4) et de ce que $v \in \mathbf{T}(x, H_{f(x)})$ si et seulement si

$$\langle v, (\text{grad } u)(x) \rangle = \langle v, (\text{grad } f)(x) \rangle = 0.$$

COROLLAIRE (5.1.6). — Soit x un point critique de $\partial\tau$. Les espaces $\mathbf{T}(x, H_{f(x)})$ et $\mathbf{T}(x, \partial T_\varepsilon \cap \Gamma_L)$ sont orthogonaux pour H_x .

Preuve. — Comme ε est assez petit, ∂T_ε est transverse à Γ_L en x . Soit $w \in T(x, \partial T_\varepsilon \cap \Gamma_L)$. Alors il existe un chemin différentiable $q : [0, \varepsilon[\rightarrow \partial T_\varepsilon \cap \Gamma_L$ tel que

$$\begin{cases} q(0) = x, \\ \frac{dq}{dt}(0) = w. \end{cases}$$

Soit $v \in T(x, H_{f(x)})$ alors l'application $\varphi(v, w)$ de $[0, \varepsilon[$ dans \mathbf{R} définie par

$$\varphi(v, w)(t) = \langle v, f(q(t))(\text{grad } f)(q(t)) \rangle$$

est l'application nulle, car on a $q(t) \in \Gamma_L$ et $\langle v, (\text{grad } f)(q(t)) \rangle = 0$.

Donc

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \varphi(v, w)(t) &= \langle v, (\text{grad } f)(q(t)) \rangle \left\langle \frac{dq}{dt}(t), \text{grad } f(q(t)) \right\rangle \\ &\quad + \overline{f(q(t))} \sum_{i,j} (\partial^2 f / \partial X_i \partial X_j)(q(t)) \frac{dq_i}{dt}(t) v_j = 0. \end{aligned}$$

Et

$$\overline{f(q(t))} \sum_{i,j} (\partial^2 f / \partial X_i \partial X_j)(q(t)) \frac{dq_i}{dt}(t) v_j = 0.$$

On obtient donc l'orthogonalité de v et w pour la forme quadratique Q du corollaire (5.1.5) ce qui démontre le corollaire (5.1.6).

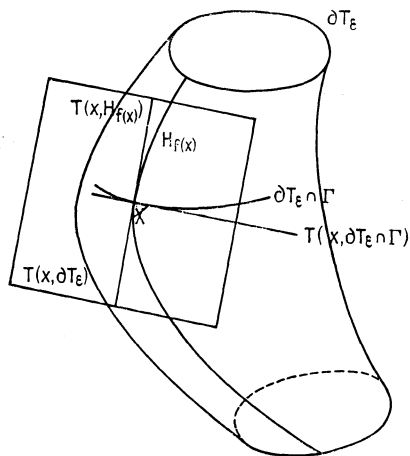


Fig. 2

COROLLAIRE (5.1.7). — Soit x un point critique de $\partial\tau$. Alors x est un point critique non dégénéré de $\partial\tau$ si et seulement si la restriction de H_x à $T(x, \partial T_\varepsilon \cap \Gamma_L)$ est non nulle. De plus l'indice de $\partial\tau$ en x est $n - 1$ ou n suivant que les valeurs de H_x sur $T(x, \partial T_\varepsilon \cap \Gamma_L) - \{0\}$ sont positives ou négatives.

Preuve. — Ceci provient de ce que, d'après les lemmes (2.2.1) et (4.1.11), la restriction de H_x à $T(x, H_{f(x)})$ est non dégénérée et que $T(x, H_{f(x)})$ et $T(x, \partial T_\varepsilon \cap \Gamma_L)$ sont orthogonaux pour H_x .

Le problème consiste maintenant à calculer le signe de la restriction de H_x à $T(x, \partial T_\varepsilon \cap \Gamma_L)$.

(5.2) Comme dans un voisinage ouvert de l'origine $u - \theta$ ne s'annule pas, on peut choisir une boule de rayon ρ' assez petit pour que, en choisissant une détermination de $\text{Log}(u - \theta) - \text{Log}(-\theta)$, $\text{Log}(u - \theta) - \text{Log}(-\theta)$ soit la coordonnée z_n dans $B_{\rho'}$ et de plus si $\Gamma_L \cap \dot{B}_{\rho'} \neq \emptyset$, les points de $\partial T_\varepsilon \cap \Gamma_L \cap B_{\rho'}$ sont respectivement contenus dans une composante analytique déterminée de Γ_L en O . Nous pouvons supposer que ε est assez petit pour que $\Gamma_L \cap \partial T_\varepsilon \subset \dot{B}_{\rho'}$.

Remarquons alors que la restriction de $\text{Log}(u - \theta)$ à chacune des composantes de $\bar{\Gamma}$ est non constante. En effet si la restriction de $\text{Log}(u - \theta)$ à une composante Γ_i de Γ_L était constante, Γ_i serait contenue dans L_0 dans un voisinage suffisamment petit de l'origine. Mais ceci entraîne que les points de Γ_i sont des points critiques de la restriction de f à L_0 dans un voisinage assez petit de O . Dans ce cas Γ_i serait contenu dans H_0 dans un voisinage assez petit de O et ceci serait contradictoire avec la définition de Γ_L .

Soit Γ_i la composante analytique de Γ_L en O qui contient x . Comme $\text{Log}(u - \theta)$ n'est pas constante sur Γ_i , il existe une normalisation $\pi : \tilde{\Gamma}_i \rightarrow \Gamma_i$ de Γ_i telle que si z est l'uniformisante locale de $\tilde{\Gamma}_i$ en $\pi^{-1}(O)$ on ait

$$z_n \circ \pi = \text{Log}(u - \theta) \circ \pi - \text{Log}(-\theta) = z^k$$

pour un certain entier k positif.

Pour calculer la valeur de H_x sur $T(x, \partial T_\varepsilon \cap \Gamma_L)$ en un point critique x de $\partial\tau$, on peut se restreindre à Γ_i . Plus précisément on a :

LEMME (5.2.1). — *Soit x un point critique de $\partial\tau$. Soit H_x le hessien de $\partial\tau$ en x . Alors la valeur de H_x en un vecteur $v \in T(x, \partial T_\varepsilon \cap \Gamma_L)$ égale la valeur en v du hessien en x de la restriction de $\partial\tau$ à $\partial T_\varepsilon \cap \Gamma_L$.*

Preuve. — Soit $p : [0, \varepsilon[\rightarrow \partial T_\varepsilon \cap \Gamma_L$ un chemin différentiable tel que

$$\begin{cases} p(0) = x, \\ \frac{dp}{dt}(0) = v. \end{cases}$$

Le lemme provient de ce que

$$H_x(v) = \left(\frac{d^2}{dt^2} \text{Log} |u(p(t)) - \theta| \right)_{t=0}.$$

Supposons que $x \in \Gamma_i$, on peut alors supposer que $p(t) \in \Gamma_i$. Posons

$$\begin{aligned}\tau \circ \pi - \tau(O) &= \tilde{\tau}, \\ |f|^2 \circ \pi &= |f \circ \pi|^2 = \tilde{\varphi}.\end{aligned}$$

Remarquons que $\tilde{\tau}$ est en fait la fonction $\operatorname{Re}(z^k)$. On a alors :

LEMME (5.2.2). — Soit x un point critique de $\partial\tau$ sur $\partial T_\varepsilon \cap \Gamma_L$. Soit \tilde{x} le point de $\tilde{\Gamma}_i$ tel que $\pi(\tilde{x}) = x$. Alors \tilde{x} est un point critique de $\tilde{\tau}$ sur l'ensemble Φ_ε défini par $\tilde{\varphi} = \varepsilon^2$. De plus la valeur du hessien $H_x(v)$ en x de la restriction de τ à $\partial T_\varepsilon \cap \Gamma_L$ sur un vecteur $v \in T(x, \partial T_\varepsilon \cap \Gamma_L)$ égale la valeur du hessien en \tilde{x} de la restriction de $\tilde{\tau}$ à Φ_ε sur le vecteur

$$\tilde{v} = (D_{\tilde{x}} \pi)^{-1} \cdot v \in T(\tilde{x}, \Phi_\varepsilon).$$

Preuve. — Soit $\tilde{H}_{\tilde{x}}$ le hessien de la restriction de $\tilde{\tau}$ à Φ_ε en \tilde{x} . Soit $p : [0, \varepsilon[\rightarrow \Phi_\varepsilon$ un chemin différentiable tel que

$$\begin{cases} p(0) = \tilde{x}, \\ \frac{dp}{dt}(0) = \tilde{v}. \end{cases}$$

On a

$$\tilde{H}_{\tilde{x}}(\tilde{v}) = \frac{d^2}{dt^2} (\tilde{\tau}(p(t)))_{t=0} = \frac{d^2}{dt^2} ((\tau \circ \pi)(p(t)))_{t=0}.$$

Posons

$$q = \pi \circ p.$$

On a

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} (\tau \circ \pi)(p(t)) &= \frac{d}{dt} (\tau \circ q)(t), \\ \frac{d^2}{dt^2} (\tau \circ \pi)(p(t)) &= \frac{d^2}{dt^2} (\tau \circ p)(t).\end{aligned}$$

Or

$$\frac{d^2}{dt^2} (\tau \circ q)(0) = H_x \left(\frac{dq}{dt}(0) \right)$$

et

$$\frac{dq}{dt}(0) = D_{\tilde{x}} \pi \cdot \tilde{v}.$$

Donc

$$\tilde{H}_{\tilde{x}}(\tilde{v}) = H_x(D_{\tilde{x}} \pi \cdot \tilde{v}) = H_x(v).$$

Ceci nous donne notre seconde assertion. Le fait que \tilde{x} soit un point critique de la restriction de $\tilde{\tau}$ à Φ_ε provient de ce que pour tout $\tilde{v} \in T(\tilde{x}, \Phi_\varepsilon)$ on a

$$D_{\tilde{x}} \tilde{\tau} \cdot \tilde{v} = D_{\tilde{x}} \tilde{\tau} \cdot D_x(\pi^{-1})v = D_x(\tilde{\tau} \circ \pi^{-1}) \cdot v = 0,$$

car π^{-1} est un isomorphisme local au voisinage de x , $v \in T(x, \partial T_\varepsilon \cap \tilde{\Gamma}_i)$ et $\tilde{\tau} \circ \pi^{-1} = \tau$.

Remarquons que x étant un point critique de $\partial\tau$, on a

$$(\text{grad Log } |u - 0|)(x) = \lambda (\text{grad } |f|^2)(x).$$

Soit Γ_i la composante de $\bar{\Gamma}$ qui contient x .

Soit τ_0 la restriction de τ à $\partial T_\varepsilon \cap \Gamma_i$ et φ_0 la restriction de $|f|^2$ à Γ_i .
Alors

$$D_x \tau_0 = \lambda D_x \varphi_0.$$

Comme x est un point critique de la restriction de $\tilde{\tau}$ à Φ_ε on a

$$D_{\tilde{x}} \tilde{\tau} = \tilde{\lambda} D_{\tilde{x}} \tilde{\varphi}.$$

Or

$$D_{\tilde{x}} \tilde{\tau} = D_x \tau \circ D_{\tilde{x}} \pi = \lambda D_x \varphi_0 \circ D_{\tilde{x}} \pi$$

et

$$D_x \varphi_0 \circ D_{\tilde{x}} \pi = D_{\tilde{x}} \tilde{\varphi}.$$

Donc

$$(5.2.3) \quad \lambda = \tilde{\lambda}.$$

Supposons ε assez petit et $\Gamma_L \cap \hat{B}_\rho \neq \emptyset$. — Soit $x \in \bar{\Gamma} \cap \partial T_\varepsilon$ un point critique de $\partial\tau$ et Γ_i la composante de Γ_L qui contient x et $\pi : \tilde{\Gamma}_i \rightarrow \Gamma_i$ la normalisation de Γ_i . Dans ce cas on peut supposer que Φ_ε est contenu dans un disque où

$$(f \circ \pi)(z) = a_r z^r + a_{r+1} z^{r+1} + \dots,$$

avec $r \geq 1$ et $a_r \neq 0$. Donc

$$(f \circ \pi)(z) = a_r z^r \psi(z),$$

où $\psi(z)$ est inversible dans un voisinage de O . Quitte à supposer ε plus petit on peut supposer que Φ_ε est dans ce voisinage. On pose

$$F = f \circ \pi.$$

Rappelons que $\tilde{\tau}(z) = \text{Re}(z^k)$.

En utilisant la méthode de la preuve du lemme (5.1.4) on a

LEMME (5.2.4). — Un point $\tilde{x} \in \Phi_\varepsilon$ est un point critique de la restriction de $\tilde{\tau}$ à Φ_ε si et seulement s'il existe $\lambda \in \mathbf{R}$ tel que

$$k \tilde{x}^{k-1} = 2\lambda F(\tilde{x}) \overline{F'(\tilde{x})}.$$

De plus si $\tilde{H}_{\tilde{x}}$ est le hessien en \tilde{x} de la restriction de $\tilde{\tau}$ à Φ_ε nous avons pour tout $w \in T(\tilde{x}, \Phi_\varepsilon)$:

$$\tilde{H}_{\tilde{x}}(w) = \text{Re}(k(k-1)\tilde{x}^{k-2}w^2) - 2\lambda|F'(\tilde{x})|^2|w|^2 - 2\lambda \text{Re}(\overline{F(\tilde{x})}F''(\tilde{x})w^2).$$

REMARQUE (5.2.5). — Comme nous ne cherchons qu'à calculer le signe de $\tilde{H}_{\tilde{x}}$ et que la dimension réelle de Φ_ε égale 1 il suffit de calculer le signe de $\tilde{H}_{\tilde{x}}(w)$ pour un vecteur particulier de $T(\tilde{x}, \Phi_\varepsilon)$. Remarquons que le vecteur $w = i F(\tilde{x}) \overline{F'(\tilde{x})} \in T(\tilde{x}, \Phi_\varepsilon)$.

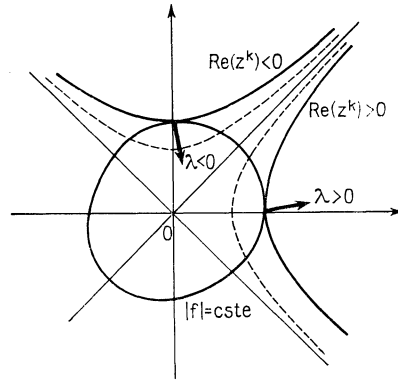


Fig. 3. — (Quand $\lambda > 0$ les points critiques sont bien à gradient rentrant).

Nous allons donc calculer le signe de

$$\begin{aligned} \tilde{H}_{\tilde{x}}(w) = & -\operatorname{Re}(k(k-1)\tilde{x}^{k-2}F(\tilde{x})^2\overline{F'(\tilde{x})^2}) - 2\lambda|F'(\tilde{x})|^4|F(\tilde{x})|^2 \\ & + 2\lambda\operatorname{Re}(\overline{F(\tilde{x})}F''(\tilde{x})F(\tilde{x})^2\overline{F'(\tilde{x})^2}). \end{aligned}$$

D'après le lemme (5.2.4), on a

$$\lambda = \frac{k\tilde{x}^{k-1}}{2\overline{F(\tilde{x})}F'(\tilde{x})}.$$

On obtient alors

$$\begin{aligned} \tilde{H}_{\tilde{x}}(w) = & -\operatorname{Re}\left[(k-1)\frac{k\tilde{x}^{k-1}}{2\overline{F(\tilde{x})}F'(\tilde{x})}\frac{2\overline{F(\tilde{x})}F'(\tilde{x})}{\tilde{x}}F(\tilde{x})^2\overline{F'(\tilde{x})^2}\right] \\ & - 2\lambda|\overline{F'(\tilde{x})}|^4|F(\tilde{x})|^2 + 2\lambda\operatorname{Re}(\overline{F(\tilde{x})}F''(\tilde{x})F(\tilde{x})^2\overline{F'(\tilde{x})^2}) \\ = & 2\lambda\left[-(k-1)\operatorname{Re}\frac{\overline{F(\tilde{x})}F'(\tilde{x})F(\tilde{x})^2\overline{F'(\tilde{x})^2}}{\tilde{x}}\right. \\ & \left.- |\overline{F'(\tilde{x})}|^4|F(\tilde{x})|^2 + \operatorname{Re}(\overline{F(\tilde{x})}F''(\tilde{x})F(\tilde{x})^2\overline{F'(\tilde{x})^2})\right]. \end{aligned}$$

Or on a

$$\begin{aligned} F(\tilde{x}) &= a_r\tilde{x}^r + \dots \\ F'(\tilde{x}) &= ra_r\tilde{x}^{r-1} + \dots \\ F''(\tilde{x}) &= r(r-1)a_r\tilde{x}^{r-2} + \dots \end{aligned}$$

1° Supposons que $r = 1$.

Alors si \tilde{x} est assez petit, i. e. si ε est assez petit :

$$|\operatorname{Re}\overline{F(\tilde{x})}F''(\tilde{x})F(\tilde{x})^2\overline{F'(\tilde{x})^2}| \leq K|\tilde{x}|^3.$$

Dans ce cas

$$\begin{aligned} \text{Sgn } \tilde{H}_{\tilde{x}}(w) &= \text{Sgn } 2 \lambda [- (k-1) \text{Re } \eta |a_r|^6 |\tilde{x}|^2 - \xi |a_r|^6 |\tilde{x}|^2] \\ &= \text{Sgn } 2 \lambda ((- (k-1) \text{Re } \eta - \xi) |a_r|^6 |\tilde{x}|^2), \end{aligned}$$

où η et ξ dépendent de \tilde{x} et tendent vers 1 quand \tilde{x} tend vers zéro. Donc pour ε assez petit :

$$\text{Sgn } \tilde{H}_{\tilde{x}}(w) = \text{Sgn } (-2 k \lambda |a_r|^6 |\tilde{x}|^2) = \text{Sgn } (-\lambda).$$

2° Supposons que $r \geq 2$,

$$\begin{aligned} \text{Sgn } \tilde{H}_{\tilde{x}}(w) &= \text{Sgn } 2 \lambda [- (k-1) \text{Re } (r^3 |a_r|^6 \eta \tilde{x}^{2r+r-2} \bar{\tilde{x}}^{2(r-1)+r}) \\ &\quad - \xi |a_r|^6 r^4 |\tilde{x}|^{2r+4(r-1)} \\ &\quad + \text{Re } (\varphi (r^3 (r-1)) |a_r|^6 \tilde{x}^{2r+r-2} \bar{\tilde{x}}^{2(r-1)+r})], \end{aligned}$$

où η , ξ , φ tendent vers 1 quand \tilde{x} tend vers zéro. Donc pour ε assez petit :

$$\text{Sgn } \tilde{H}_{\tilde{x}}(w) = \text{Sgn } [-2 \lambda |a_r|^6 |\tilde{x}|^{6r-4} ((k-1) r^3 + r^4 - r^3 (r-1))] = \text{Sgn } (-\lambda).$$

On obtient donc

LEMME (5.2.6). — *Pour tout ε assez petit les points critiques x de la restriction de $\text{Log } |u - \theta|$ à $\partial T_\varepsilon \cap \dot{B}_\rho - L_0$ sont non dégénérés. De plus si en x on a*

$$\text{grad } \text{Log } (u(x) - \theta) = 2 \lambda f(x) (\text{grad } f)(x),$$

alors si $\lambda > 0$ l'indice du hessien H_x en x est n et si $\lambda < 0$ cet indice est $n - 1$.

(5.3) Nous sommes alors en mesure d'achever la démonstration de la partie (b) du théorème (0.2.1).

On procède comme dans (4.1). Fixons ε suffisamment petit, et soit $\eta_0 > 0$ assez petit comparé à ε , $\eta_0 < \eta(\rho)/2$. Supposons que $\partial T_\varepsilon \cap \Gamma_L \subset \mathfrak{C}_{\eta(\rho)/4}$.

Tout d'abord $(B_\rho - \dot{T}_\varepsilon) \cap \mathfrak{C}_{\eta_0}(\theta)$ a le type d'homotopie de $(B_\rho - \dot{T}_\varepsilon) \cap L_0$ d'après ce que l'on a vu dans (5.1). Ensuite considérons une fonction différentiable ω de \mathbf{C} dans \mathbf{R} telle que :

- (a) $\omega(z) = |z|$ pour tout z , $|z| \leq \eta(\rho)/2$;
- (b) $\omega(z) = |z + \theta|$ pour tout z , $|z - \theta| \geq \eta(\rho)$;
- (c) $\eta(\rho)/2 < \omega(z) < \eta(\rho)$ pour tout z , avec $\eta(\rho)/2 < |z|$ et $|z + \theta| < \eta(\rho)$;
- (d) ω a un rang constant sur $\mathbf{C} - \{0\}$.

Considérons la restriction α de la fonction $\text{Log } \omega(u(z) - \theta)$ à $M = B_\rho - \dot{T}_\varepsilon$. Remarquons que dans $\alpha^{-1}([\text{Log } \eta_0, \text{Log } \eta(\rho)/2])$ les seuls

points critiques de α sont sur $\partial T_\varepsilon \cap \Gamma$ si ε est assez petit, et d'après les lemmes (2.1.4) et (5.2.6) α est une fonction correcte sur $\alpha^{-1}([\text{Log } \gamma_0, \text{Log } \gamma(\rho)/2])$ dont les points critiques à gradients rentrant (où $\lambda > 0$) sont d'indice n . En appliquant le théorème (3.1.7) [cf. aussi (3.2.6)], on trouve alors que $(B_\rho - \dot{T}_\varepsilon) \cap \mathfrak{C}_{\gamma(\rho)/2}(\theta)$ a le type d'homotopie de $(B_\rho - \dot{T}_\varepsilon) \cap \mathfrak{C}_{\gamma_0}(\theta)$ auquel on a adjoint des cellules de dimension n . Comme α n'a aucun point critique dans $\alpha^{-1}([\text{Log } \gamma(\rho)/2, \text{Log } \gamma(\rho)])$, on obtient que $(B_\rho - \dot{T}_\varepsilon) \cap \mathfrak{C}_{\gamma(\rho)}$ et $(B_\rho - \dot{T}_\varepsilon) \cap \mathfrak{C}_{\gamma(\rho)/2}(\theta)$ ont le même type d'homotopie. D'où :

LEMME (5.3.1). — *L'espace $(B_\rho - \dot{T}_\varepsilon) \cap \mathfrak{C}_{\gamma(\rho)}$ a le type d'homotopie de $(B_\rho - \dot{T}_\varepsilon) \cap \mathfrak{C}_{\gamma_0}(\theta)$ auquel on a adjoint des cellules de dimension n .*

Les lemmes (4.2.2) et (4.2.4) montrent que l'inclusion de $(B_\rho - \dot{T}_\varepsilon) \cap \mathfrak{C}_{\gamma(\rho)}$ dans $B_\rho - H_0$ est une équivalence d'homotopie. D'après (5.1) nous savons que $(B_\rho - \dot{T}_\varepsilon) \cap L_0$ et $(B_\rho - \dot{T}_\varepsilon) \cap \mathfrak{C}_{\gamma_0}(\theta)$ ont le même type d'homotopie. La démonstration de la partie (b) du théorème (0.2.1) est donc terminée par le lemme suivant :

LEMME (5.3.2). — *L'inclusion de $(B_\rho - \dot{T}_\varepsilon) \cap L_0$ dans $(B_\rho - H_0) \cap L_0$ est une équivalence d'homotopie si ε est assez petit.*

Preuve. — Nous appliquons le lemme (3.1.5), en remplaçant M par $B_\rho \cap L_0$, f par $-|f|^2$, a par $-\varepsilon^2$ et b par 0. L'hypothèse du lemme (3.1.5) est satisfaite d'après le lemme (1.3.3); par conséquent, l'inclusion de $(B_\rho - \dot{T}_\varepsilon) \cap L_0$ — et aussi celle de $(B_\rho - \dot{T}_\varepsilon) \cap L_0$ — dans $(B_\rho - H_0) \cap L_0$ est une équivalence d'homotopie.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] A. ANDREOTTI et T. FRANKEL, *The Lefschetz theorem on hyperplane sections* (Ann. of Math. vol. 69, 1959, p. 713-717).
- [2] S. BLANK, Cours donné à la Faculté des Sciences d'Orsay, 1970-1971 (à paraître).
- [3] R. BOTT, *On a theorem of Lefschetz* (Michigan Math. J., vol. 6, 1959, p. 211-216).
- [4] D. CHÉNIOT, *Sur le théorème de Van Kampen sur le π_1 du complémentaire d'une courbe algébrique* (Séminaire Norquet, Université de Paris VII, 1971-1972).
- [5] A. DOUADY, *Variétés à bords anguleux et voisinages tubulaires* (Séminaire Cartan, 1961-1962 : Topologie différentielle, polycopié d'I. H. P., 11, rue Pierre-et-Marie Curie, Paris V, 1964, exposé 1).
- [6] A. GROTHENDIECK, *Cohomologie locale des faisceaux cohérents et théorèmes de Lefschetz locaux et globaux* (SGA 2), North Holland Publ. Comp., Amsterdam, 1968.
- [7] H. A. HAMM, *Lokale topologische Eigenschaften komplexer Räume* (Math. Ann., vol. 191, 1971, p. 235-252).
- [8] H. A. HAMM et LÊ DŨNG TRÁNG, *Un théorème du type de Lefschetz* (C. R. Acad. Sc. Paris, t. 272, série A, 1971, p. 946-949).

- [9] H. A. HAMM et LÊ DŨNG TRÁNG, *Eine Verallgemeinerung der Sätze von Lefschetz und Zariski* (à paraître).
- [10] H. HIRONAKA, *Bimeromorphic smoothing of a complex analytic space* (Preprint), Warwick University, Grande Bretagne.
- [11] LÊ DŨNG TRÁNG, *Un théorème du type de Lefschetz* (à paraître, in *Séminaire Norguet, 1970-1971, Springer Lecture Notes*).
- [12] H. I. LEVINE, *Singularities of differentiable mappings (Proc. of Liverpool Singularities-Symposium, I, Springer Lecture Notes, n° 192, 1971, p. 1-89)*.
- [13] S. ŁOJASIEWICZ, *Ensembles semi-analytiques*. Cours donné à la Faculté des Sciences d'Orsay, photocopié de l'I. H. E. S., Bures-sur-Yvette, 1965.
- [14] J. MILNOR, *Lectures on the h-cobordism theorem*, University Press, Princeton, 1965.
- [15] J. MILNOR, *Morse theory (Ann. of Math. Studies, vol. 51, University Press, Princeton, 1963)*.
- [16] J. MILNOR, *Singular points of complex hypersurfaces (Ann. of Math. Studies, vol. 61, University Press, Princeton, 1968)*.
- [17] M. MORSE, *The calculus of variations in the large (Amer. Math. Soc. Coll. Publ., vol. 18, 1934)*.
- [18] J. MUNKRES, *Elementary differential topology (Ann. of Math. Studies, vol. 54, University Press, Princeton, 1963)*.
- [19] D. PRILL, *Local classification of quotients of complex manifolds by discontinuous groups (Duke Math. J., vol. 34, 1967, p. 375-386)*.
- [20] E. SPANIER, *Algebraic Topology*, Mac Graw-Hill, New-York, 1966.
- [21] R. THOM, *Ensembles et morphismes stratifiés (Bull. Amer. Math. Soc., vol. 75, 1969, p. 240-284)*.
- [22] R. THOM, *Sur l'homologie des variétés algébriques réelles. Differential and combinatorial topology*, ed. by S. CAIRNS, University Press, Princeton, 1965, p. 255-265.
- [23] E. R. VAN KAMPEN, *On the fundamental group of an algebraic curve (Amer. J. Math., vol. 55, 1933, p. 255-260)*.
- [24] H. WHITNEY, *Tangents to analytic varieties (Ann. of Math., vol. 81, 1965, p. 496-549)*.
- [25] O. ZARISKI, *On the Poincaré group of a projective hypersurface (Ann. of Math., vol. 38, 1937, p. 131-141)*.
- [26] E. BAIADA et M. MORSE, *Homotopy and homology related to the Schœnflies problem (Ann. of Math., vol. 58, 1953, p. 142-165)*.
- [27] J. CERF, *Topologie de certains espaces de plongements (Bull. Soc. Math. Fr., vol. 89, 1961, p. 227-380)*.

(Manuscrit reçu le 5 octobre 1972.)

H. A. HAMM,
 Universität Göttingen;
 LÊ DŨNG TRÁNG,
 École Polytechnique,
 75005 Paris.

