

# ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

H. RÉSAL

**Application de la flexion circulaire des lames élastiques  
au tracé des arcs de cercle**

*Annales scientifiques de l'É.N.S. 2<sup>e</sup> série*, tome 4 (1875), p. 191-204

[http://www.numdam.org/item?id=ASENS\\_1875\\_2\\_4\\_\\_191\\_0](http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1875_2_4__191_0)

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1875, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (<http://www.elsevier.com/locate/ansens>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

APPLICATION  
DE LA  
FLEXION CIRCULAIRE DES LAMES ÉLASTIQUES

AU TRACÉ DES ARCS DE CERCLE,

PAR M. H. RESAL,  
MEMBRE DE L'INSTITUT.

---

Quelles que soient les conditions auxquelles doit satisfaire le tracé d'un arc de cercle, on peut toujours, soit graphiquement, soit par le calcul, fixer la position de trois points par lesquels on est ramené à faire passer cet arc.

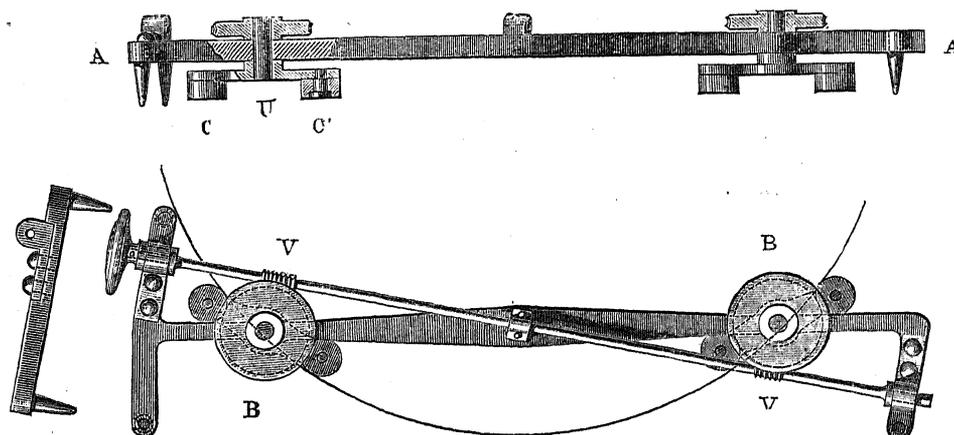
Mais si le rayon est très-grand et la corde relativement petite, la détermination du centre laisse à désirer au point de vue de l'exactitude; il faut, en effet, avoir à sa disposition une table de dessin d'une grande étendue; de plus, l'intersection des perpendiculaires, menées aux milieux de deux cordes, ne donne qu'approximativement la position du centre, position que l'on ne fixe définitivement qu'à la suite de tâtonnements plus ou moins longs et fort ennuyeux. Enfin l'emploi de compas de grandes dimensions, ou de règles à pivot munies d'un crayon ou d'un tire-ligne, laisse aussi à désirer sous le rapport de la précision. C'est ce qui explique pourquoi, dans la confection des mappemondes, on trace par points les parallèles voisins de l'équateur et la plupart des méridiens.

M. Tchébychef, si je ne me trompe, a eu le premier l'idée d'éviter ces difficultés en construisant un instrument qui se compose en principe d'une lame élastique; un mécanisme particulier permet de faire fléchir cette lame de telle manière que, quelle que soit la flèche, son profil ait (suivant M. Tchébychef) huit points communs avec un arc de cercle auquel on peut substituer ce profil par approximation.

Si une lame élastique est encastrée par ses extrémités dans deux pièces mobiles à volonté autour de deux axes fixes parallèles, il est facile de voir qu'en faisant tourner en sens inverse ces encastremens d'un même angle, le profil de la lame affectera la forme d'un arc de cercle; car, en raison de la symétrie, les encastremens ne donnent lieu qu'à des couples égaux et de sens contraire.

L'instrument représenté par la *fig. 1* réalise à très-peu près cette conception théorique.

Fig. 1.



Chacun des encastremens de la lame est formé d'une traverse horizontale CC' pouvant tourner autour d'un axe vertical U; au-dessous de cette traverse, vers ses extrémités et à égale distance de l'axe U, se trouvent deux roulettes identiques dont les axes sont verticaux. On engage la lame entre les quatre roulettes après avoir réglé la position relative des encastremens, comme nous l'indiquerons plus loin. Les axes U sont maintenus dans une pièce horizontale AA, au-dessous de laquelle se trouvent les encastremens, et qui repose sur trois pieds. Aux extrémités supérieures de ces axes sont adaptées deux roues dentées identiques B, B, engrenant avec une vis sans fin VV dont l'axe passe entre les deux roues et au moyen de laquelle on fait fléchir la lame.

Les guides de la vis sans fin sont maintenus sur le support AA par des vis de pression qui permettent de la désembrayer lorsque l'on veut

régler la position des encastremets avant la mise en place de la lame; il suffit, à cet effet, de faire en sorte que les quatre galets soient tangents à une règle disposée en conséquence; on engrène ensuite la vis sans fin, puis on serre les vis de pression.

Si l'angle formé par les rayons des roulettes intérieures menés en leurs points de contact avec la lame ne dépasse pas une certaine limite, la courbure des portions de la lame comprises entre les deux couples de roulettes est très-faible et peut être négligée, ce qui revient à considérer le profil de chacune de ces portions comme se confondant avec la tangente commune aux profils des roulettes correspondantes.

Si l'on fait abstraction du frottement, les réactions sur la lame des deux roulettes extérieures, comme celles des roulettes intérieures, sont normales et égales entre elles en vertu de la symétrie. Les réactions d'un couple de roulettes étant censées parallèles entre elles, d'après ce que nous avons dit plus haut, sont de sens contraire et ont nécessairement la même valeur; car autrement les réactions des quatre roulettes auraient une résultante qui ne ferait équilibre à aucune force extérieure. On voit donc que, au degré d'approximation convenu, les réactions des roulettes forment aux extrémités de la lame deux couples identiques de sens contraire, et que, par suite, le profil de la lame est circulaire entre les roulettes intérieures.

Nous allons chercher maintenant à pousser plus loin l'approximation, en déterminant les modifications apportées à la forme circulaire par la courbure de la lame dans les encastremets, puis par les frottements.

1° *Influence de la courbure de la lame dans les encastremets.* — La *fig. 2* représente la section faite par le plan perpendiculaire aux axes des roulettes qui contient la fibre moyenne de la lame.

Soient

$\mu$  le moment d'élasticité de la lame;

$C_0, C_1$  les centres des roulettes intérieure et extérieure de l'un des encastremets;

$A_0, A_1$  les points de contact de celle de leurs tangentes intérieures avec laquelle la lame viendrait coïncider en faisant tourner dans un sens convenable la roulette  $C_1$  autour du centre  $C_0$ ;

$a_0, a_1$  les points de contact de la lame avec les roulettes  $C_0$  et  $C_1$ ;

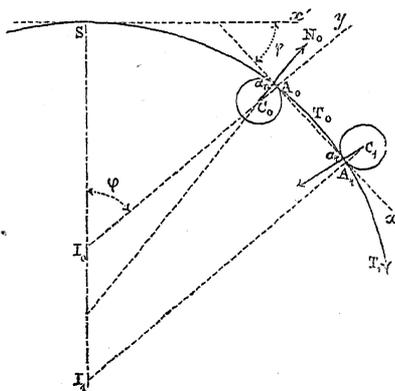
$l$  la longueur connue  $A_0, A_1$ ;

$R$  le rayon de chacune des roulettes;

$\mu N_i$  la réaction de la roulette  $C_i$  sur la lame dirigée suivant  $C_i a_i$  en négligeant le frottement;

$\varepsilon_0, \varepsilon_1$  les angles  $A_0 C_0 a_0, A_1 C_1 a_1$ .

Fig. 2.



Nous prendrons le point  $A_0$  pour origine des coordonnées, la direction de  $A_0 A_1$  pour celle de l'axe des  $x$ , et le prolongement au delà de  $A_0$  de  $C_0 A_0$  pour partie positive de l'axe des  $y$ . Nous désignerons par  $\rho, \alpha$  le rayon de courbure et l'inclinaison de la tangente sur  $A_0 x$  au point  $m$  du profil  $a_1 a_0$  dont les coordonnées sont  $x$  et  $y$ .

On a

$$\begin{aligned} x &= -R \sin \varepsilon_0, & y &= -R(1 - \cos \varepsilon_0), & \alpha &= \varepsilon_0, & \text{pour le point } a_0, \\ x &= l - R \sin \varepsilon_1, & y &= R(1 - \cos \varepsilon_1), & \alpha &= -\varepsilon_1, & \text{pour le point } a_1, \end{aligned}$$

et l'équation de la portion  $a_0 a_1$  de la lame élastique est

$$\frac{1}{\rho} = N_1 \cos \varepsilon_1 (l - R \sin \varepsilon_1 - x) + N_1 \sin \varepsilon_1 [y - R(1 - \cos \varepsilon_1)].$$

Comme  $\alpha$  décroît constamment à partir de  $\varepsilon_1$ , nous devons prendre

$$\frac{1}{\rho} = -\frac{d\alpha}{ds}, \quad ds \text{ étant l'élément d'arc, d'où}$$

$$(1) \quad -\frac{d\alpha}{ds} = N_1 \{ (l - R \sin \varepsilon_1 - x) \cos \varepsilon_1 + (y - R[1 - \cos \varepsilon_1]) \sin \varepsilon_1 \}.$$

Si l'on différentie cette équation en remarquant que  $\cos \alpha = \frac{dx}{ds}$ ,  $\sin \alpha = \frac{dy}{ds}$ , on obtient la suivante :

$$\frac{d^2 \alpha}{ds^2} = N_1 \cos(\alpha + \varepsilon_1).$$

Multipliant par  $d\alpha$ , intégrant et remarquant que l'équation (1) donne  $\frac{d\alpha}{ds} = 0$  pour le point  $a_1$  ou pour  $\alpha = -\varepsilon_1$ , on trouve

$$(2) \quad \frac{1}{2} \frac{d\alpha^2}{ds^2} = N_1 \sin(\alpha + \varepsilon_1),$$

d'où

$$ds = - \frac{1}{\sqrt{2 N_1}} \frac{d\alpha}{\sqrt{\sin(\alpha + \varepsilon_1)}},$$

par suite

$$dx = - \frac{1}{\sqrt{2 N_1}} \frac{\cos \alpha d\alpha}{\sqrt{\sin(\alpha + \varepsilon_1)}},$$

$$dy = - \frac{1}{\sqrt{2 N_1}} \frac{\sin \alpha d\alpha}{\sqrt{\sin(\alpha + \varepsilon_1)}}.$$

Si l'on intègre ces dernières équations entre les points  $a_0$  et  $a_1$ , on obtient les suivantes :

$$(3) \quad \begin{cases} l - R(\sin \varepsilon_1 - \sin \varepsilon_0) = \frac{1}{\sqrt{2 N_1}} \int_{-\varepsilon_1}^{\varepsilon_0} \frac{\cos \alpha d\alpha}{\sqrt{\sin(\alpha + \varepsilon_1)}}, \\ R(2 - \cos \varepsilon_1 - \cos \varepsilon_0) = \frac{1}{\sqrt{2 N_1}} \int_{-\varepsilon_1}^{\varepsilon_0} \frac{\sin \alpha d\alpha}{\sqrt{\sin(\alpha + \varepsilon_1)}}, \end{cases}$$

qui permettront de déterminer  $\varepsilon_0$  et  $\varepsilon_1$  en fonction de  $N_1$ . Si on les ajoute après les avoir multipliées respectivement par  $\sin \varepsilon_1$  et  $\cos \varepsilon_1$ , puis par  $\cos \varepsilon_1$  et  $-\sin \varepsilon_1$ , on trouve

$$(4) \quad \begin{cases} l \sin \varepsilon_1 - 2R \left[ \cos^2 \frac{(\varepsilon_0 + \varepsilon_1)}{2} - \cos \varepsilon_1 \right] = \frac{1}{\sqrt{2 N_1}} \int_{-\varepsilon_1}^{\varepsilon_0} \sqrt{\sin(\alpha + \varepsilon_1)} d\alpha, \\ l \cos \varepsilon_1 + R[\sin(\varepsilon_0 + \varepsilon_1) - 2 \sin \varepsilon_1] = \frac{2}{\sqrt{2 N_1}} \sqrt{\sin(\varepsilon_0 + \varepsilon_1)}, \end{cases}$$

et la solution du problème ne dépend que d'une intégrale elliptique de seconde espèce.

Supposons que  $\varepsilon_0$  et  $\varepsilon_1$ , par suite  $\alpha$ , soient assez petits pour que nous puissions en négliger, devant l'unité, les puissances supérieures à la seconde, nous aurons

$$\begin{aligned} \int_{-\varepsilon_1}^{\varepsilon_0} \sqrt{\sin(\alpha + \varepsilon_1)} d\alpha &= \int_{-\varepsilon_1}^{\varepsilon_0} \left[ \sqrt{\alpha + \varepsilon_1} - \frac{1}{12} (\alpha + \varepsilon_1)^{\frac{5}{2}} \right] \\ &= \frac{2}{3} (\varepsilon_0 + \varepsilon_1)^{\frac{3}{2}} \left[ 1 - \frac{1}{28} (\varepsilon_0 + \varepsilon_1)^2 \right], \\ \sqrt{\sin(\varepsilon_0 + \varepsilon_1)} &= \sqrt{\varepsilon_0 + \varepsilon_1} \left[ 1 - \frac{1}{12} (\varepsilon_0 + \varepsilon_1)^2 \right], \end{aligned}$$

et dans ces valeurs nous pourrions négliger les termes du second ordre, non-seulement parce qu'ils sont déjà supposés petits, mais encore parce qu'ils sont affectés de petits coefficients; il vient ainsi

$$(5) \quad \left\{ \begin{aligned} l\varepsilon_1 \left( 1 - \frac{1}{6} \varepsilon_1^2 \right) - R \left[ \varepsilon_1^2 - \frac{1}{4} (\varepsilon_0 + \varepsilon_1)^2 \right] &= \frac{2}{3\sqrt{N_1}} (\varepsilon_0 + \varepsilon_1) \sqrt{\varepsilon_0 + \varepsilon_1}, \\ l \left( 1 - \frac{\varepsilon_1^2}{2} \right) + R \left\{ (\varepsilon_0 + \varepsilon_1) \left[ 1 - \frac{(\varepsilon_0 + \varepsilon_1)^2}{6} \right] - 2\varepsilon_1 \left( 1 - \frac{\varepsilon_1^2}{6} \right) \right\} &= \frac{2}{\sqrt{2}} \sqrt{\varepsilon_0 + \varepsilon_1}. \end{aligned} \right.$$

Si nous négligeons maintenant les termes du second ordre et si nous admettons que  $R$  soit assez petit pour que l'on puisse considérer les rapports  $\frac{R\varepsilon_1}{l}$ ,  $\frac{R(\varepsilon_0 + \varepsilon_1)}{l}$  comme étant de cet ordre de grandeur, nous aurons

$$(6) \quad \left\{ \begin{aligned} l\varepsilon_1 &= \frac{2}{3\sqrt{2N_1}} (\varepsilon_0 + \varepsilon_1) \sqrt{\varepsilon_0 + \varepsilon_1}, \\ l &= \frac{2}{\sqrt{2N_1}} \sqrt{\varepsilon_0 + \varepsilon_1}; \end{aligned} \right.$$

d'où

$$(7) \quad \left\{ \begin{aligned} \varepsilon_0 &= 2\varepsilon_1, \\ N_1 l^2 &= 6\varepsilon_1. \end{aligned} \right.$$

Si l'on désigne par  $\mu N_0$  la réaction de la roulette  $C_0$  et si l'on transporte les forces  $\mu N_1$ ,  $\mu N_0$  parallèlement à elles-mêmes au point  $A_0$ ,

on reconnaît, en continuant l'approximation ci-dessus, qu'elles se réduisent à

- 1° Une force  $Y = \mu(N_0 - N_1)$ , dirigée suivant  $A_0 \gamma$ ;
- 2° Une force  $X = -\mu(N_0 \varepsilon_0 + N_1 \varepsilon_1)$ , dirigée suivant  $A_0 x$ ;
- 3° Un couple  $\mu N_1 l = \frac{6\mu \varepsilon_1}{l}$ .

Soient

S le sommet de la portion de la lame comprise entre les roulettes intérieures;

$I_0, I_1$  les intersections de la normale en ce point avec les prolongements de  $\alpha_0 C_0$  et  $\alpha_1 C_1$ ;

$a$  la longueur  $A_0 I_0$  et  $\varphi$  l'angle  $A_0 IS$  qui sont considérés comme des données de la question.

Pour déterminer la forme de la courbe  $\alpha_0 S$ , prenons respectivement pour axes des  $x'$  et des  $y'$  la tangente et la normale en S.

Les deux groupes de forces Y et X se faisant équilibre sur la lame entre les deux roulettes intérieures, on a, en projetant sur  $SI_0$ ,

$$(a) \quad (N_1 - N_0) \cos \varphi = (N_0 \varepsilon_0 + N_1 \varepsilon_1) \sin \varphi,$$

d'où

$$N_0 = N_1 \frac{(1 - \varepsilon_1 \tan \varphi)}{1 + 2 \varepsilon_1 \tan \varphi},$$

$$\frac{Y}{\mu} = -\frac{3 N_1 \varepsilon_1 \tan \varphi}{1 + 2 \varepsilon_1 \tan \varphi} = -\frac{18 \varepsilon_1^2 \tan \varphi}{l^2 (1 + 2 \varepsilon_1 \tan \varphi)},$$

$$\frac{X}{\mu} = -\frac{3 N_1 \varepsilon_1}{1 + 2 \varepsilon_1 \tan \varphi} = -\frac{18 \varepsilon_1^2}{l^2 (1 + 2 \varepsilon_1 \tan \varphi)}.$$

Les composantes des forces  $\mu N_1, \mu N_0$  parallèles aux axes  $Sy', Sx'$ , abstraction faite du facteur  $\mu$ , ont, par suite, pour expressions

$$(8) \quad \begin{cases} Y' = \frac{18 \varepsilon_1^2 (\sin \varphi - \cos \varphi)}{l^2 (1 + 2 \varepsilon_1 \tan \varphi)}, \\ X' = -\frac{18 \varepsilon_1^2}{l^2 [\cos \varphi (1 + 2 \varepsilon_1 \tan \varphi)]}. \end{cases}$$

Si donc nous désignons par  $y'_0$  l'ordonnée du point  $A_0$  et par  $\gamma$  l'angle

que forme la tangente au point  $(x'y')$  avec  $S_0 x'$ , nous aurons

$$(9) \quad \frac{d\gamma}{ds} = Y'(a \sin \varphi - x') - X'(y'_0 - y) + \frac{6\varepsilon_1}{l}.$$

On tire de là

$$\frac{d^2\gamma}{ds^2} = X' \sin \gamma - Y' \cos \gamma,$$

et, en multipliant par  $d\gamma$  et intégrant,

$$(10) \quad \frac{1}{2} \frac{d\gamma^2}{ds^2} = -X' \cos \varphi - Y' \sin \varphi + C,$$

C étant une constante que l'on déterminera en exprimant que les équations (9) et (10) donnent la même valeur de  $\frac{ds}{d\gamma}$  pour le point S ou pour  $x' = 0$ ,  $y' = 0$ ,  $\gamma = 0$ ; d'où, en remarquant que X', Y' sont du second ordre,

$$C = X' + \frac{1}{2} \left( Y' a \sin \varphi - X' y'_0 + \frac{6\varepsilon_1}{l} \right)^2 = X' + 18 \frac{\varepsilon_1^2}{l^2}.$$

L'équation (10) devient, en y remplaçant X', Y', C par leurs valeurs et désignant par  $\rho$  le rayon de courbure,

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d\gamma}{ds} = \frac{6\varepsilon_1}{l} \left[ 1 + \frac{\sin \gamma (\cos \varphi - \sin \varphi) - \frac{(1 - \cos \gamma)}{\cos \varphi}}{1 + 2\varepsilon_1 \tan \varphi} \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Pour que le profil  $a_0 S$  diffère peu d'un arc de cercle, il faut que, entre  $\gamma = 0$  et  $\gamma = \varphi - \varepsilon$  ou  $\gamma = \varphi$ , le second terme entre parenthèses, nul avec  $\gamma$ , reste une petite fraction; en admettant qu'il en soit ainsi, sauf à déterminer ultérieurement les conditions qui doivent être remplies à cet effet, on peut prendre

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d\gamma}{ds} = \frac{6\varepsilon_1}{l} \left[ 1 + \frac{1}{2} \frac{\sin \gamma (\cos \varphi - \sin \varphi) - \frac{(1 - \cos \gamma)}{\cos \varphi}}{1 + 2\varepsilon_1 \tan \varphi} \right],$$

d'où

$$(11) \quad \rho = \frac{ds}{d\gamma} \left[ 1 - \frac{1}{2} \frac{\sin \gamma (\cos \varphi - \sin \varphi) - \frac{(1 - \cos \gamma)}{\cos \varphi}}{1 + 2\varepsilon_1 \tan \varphi} \right].$$

Soit

$$(12) \quad \varepsilon = \frac{1}{\varphi} \int_0^\varphi \rho d\varphi = \frac{l}{6\varepsilon_1} \left[ 1 - \frac{(1 - \cos\varphi)(\cos\varphi - \sin\varphi) - \frac{\varphi - \sin\varphi}{\cos\varphi}}{2\varphi(1 + 2\varepsilon_1 \tan\varphi)} \right]$$

le rayon de courbure moyen; nous aurons

$$(13) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\rho - \varepsilon}{\varepsilon} &= \frac{1}{2(1 + 2\varepsilon_1 \tan\varphi)} \left[ \frac{(1 - \cos\varphi)(\cos\varphi - \sin\varphi)}{\varphi} + \frac{\tan\varphi}{\varphi} \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{\cos\varphi} - \sin\gamma(\cos\varphi - \sin\varphi) + \frac{1 - \cos\gamma}{\cos\varphi} \right]. \end{aligned} \right.$$

Posons

$$\eta = \sin\gamma(\cos\varphi - \sin\varphi) - \frac{(1 - \cos\gamma)}{\cos\varphi}.$$

Supposons d'abord que  $\varphi$  soit inférieur à 45 degrés; si l'on fait croître  $\gamma$  à partir de zéro,  $\eta$  d'abord nul croîtra, puis décroîtra et s'annulera pour la valeur de  $\gamma$  donnée par l'équation

$$\tan\frac{\gamma}{2} = \cos\varphi(\cos\varphi - \sin\varphi).$$

Cette valeur ne correspond à un point de l'arc  $a_0 S$  que si elle est inférieure à  $\varphi - \varepsilon_0$ , ou si l'on veut à  $\varphi$ , ce qui n'a lieu que si  $\varphi$  est au moins égal à 32 degrés environ. Le maximum  $\eta$  correspondra à la valeur de  $\gamma$  donnée par

$$\tan\gamma = \cos\varphi(\cos\varphi - \sin\varphi),$$

et ne sera admissible que si cette équation donne pour  $\gamma$  une valeur au plus égale à  $\varphi$ , ce qui suppose que ce dernier angle ne soit pas inférieur à  $24^\circ 25'$ . Ce maximum sera

$$\eta' = \frac{1}{\cos\varphi} \left[ \sqrt{1 + \cos^2\varphi(\cos\varphi - \sin\varphi)^2} - 1 \right].$$

Pour de plus grandes valeurs de  $\gamma$ , celle de  $\eta$  deviendra négative, et sa plus grande valeur absolue correspondra à  $\gamma = \varphi$  et sera

$$(14) \quad \sin\varphi(\sin\varphi - \cos\varphi) + \frac{(1 - \cos\varphi)}{\varphi};$$

il est facile de reconnaître que, entre  $\varphi = 24^{\circ} 25'$  et  $\varphi = 45^{\circ}$ , elle est supérieure au maximum  $\eta'$ .

Si  $\varphi < 24^{\circ} 25'$ , la plus grande valeur de  $\eta$  sera donnée par l'expression (14) changée de signe; la même expression donne la plus grande valeur de  $-\eta$  pour  $\varphi > 45^{\circ}$ , limite à partir de laquelle  $\eta$  reste constamment négatif.

Il résulte de cette discussion que la plus grande valeur absolue du rapport (13) correspond à  $\gamma = \varphi$  et qu'il croît avec  $\varphi$ . Cette valeur est

$$\frac{1}{2(1 + 2\varepsilon_1 \tan \varphi)} \left[ (\cos \varphi - \sin \varphi) \left( \frac{1 - \cos \varphi}{\varphi} - \sin \varphi \right) + \frac{\tan \varphi}{\varphi} - 1 \right].$$

En y faisant

$\varphi = 60^{\circ}$ ,	on trouve	$\frac{0,345}{1 + 3,46 \varepsilon_1}$ ,
$\varphi = 50^{\circ}$ ,	»	$\frac{0,209}{1 + 2,38 \varepsilon_1}$ ,
$\varphi = 45^{\circ}$ ,	»	$\frac{0,136}{1 + 2 \varepsilon_1}$ ,
$\varphi = 40^{\circ}$ ,	»	$\frac{0,082}{1 + 1,67 \varepsilon_1}$ ,
$\varphi = 30^{\circ}$ ,	»	$\frac{0,004}{1 + 1,55 \varepsilon_1}$ .

On voit, d'après ce tableau, que pour que l'instrument que nous étudions donne un tracé suffisamment exact, il faut que l'angle  $2\varphi$  des normales aux extrémités de la partie utile de la lame ne dépasse pas 80 degrés, comme nous le supposerons dorénavant; mais alors, en raison du degré d'approximation adopté, nous pouvons négliger  $2\varepsilon_1 \tan \varphi$  devant l'unité, et les équations (11) et (12) se réduisent respectivement aux suivantes :

$$(11') \quad \rho = \frac{ds}{d\gamma} = \left\{ 1 - \frac{1}{2} \left[ \sin \gamma (\cos \varphi - \sin \varphi) - \frac{(1 - \cos \varphi)}{\cos \varphi} \right] \right\},$$

$$(12') \quad z = \frac{l}{6\varepsilon_1} \left\{ 1 - \frac{1}{2\varphi} \left[ (1 - \cos \varphi)(\cos \varphi - \sin \varphi) - \frac{\varphi - \sin \varphi}{\cos \varphi} \right] \right\}.$$

Il nous reste maintenant à déterminer la valeur de C correspondant à un angle  $\varphi$  donné.

Nous avons  $dx' = ds \cos \gamma$ ,  $dy' = ds \sin \gamma$ , et en remplaçant  $ds$  par sa valeur donnée par l'équation (11'), puis intégrant entre les limites 0 et  $\gamma$ , on trouve

$$x' = \frac{l}{6\varepsilon_1} \left[ \sin \gamma - \frac{\sin \gamma}{2 \cos \varphi} - \frac{(\cos \varphi - \sin \varphi)}{4} \sin^2 \gamma + \frac{\gamma}{4 \cos \varphi} + \frac{\sin 2\gamma}{8} \right],$$

$$y' = \frac{l}{6\varepsilon_1} \left[ 2 \sin^2 \frac{\gamma}{2} - \frac{\sin^2 \frac{\gamma}{2}}{\cos \varphi} - \frac{1}{4} \sin^2 \gamma - \frac{\gamma}{4} (\cos \varphi - \sin \varphi) + \frac{(\cos \varphi - \sin \varphi)}{8} \sin 2\gamma \right].$$

Il ne faudra pas perdre de vue que dans chacune de ces expressions l'ensemble des termes qui suivent le premier est de l'ordre de  $\eta$ .

Pour le point  $a_0$ , on a, aux termes du second ordre près en  $\varepsilon_1$  et  $\eta$ , en désignant par  $x'_0$  l'abscisse du point  $A_0$ ,

$$x' = x'_0, \quad y' = y'_0, \quad \gamma = \varphi - \varepsilon_0 = \varphi - 2\varepsilon_1;$$

et, par la substitution de ces valeurs, les deux équations précédentes permettront de déterminer  $\varepsilon_1$  et  $y'_0$ ; mais il nous suffit de considérer seulement la première, qui fait connaître  $\varepsilon_1$ , la seule quantité qui entre dans l'expression de  $\rho$ . En négligeant les termes de l'ordre  $\eta\varepsilon_1$ , on trouve

$$(15) \quad \varepsilon_1 = \frac{\sin \varphi \left( 1 - \frac{1}{2 \cos \varphi} \right) - \left( \frac{\cos \varphi - \sin \varphi}{4} \right) \sin^2 \varphi + \frac{\varphi}{4 \cos \varphi} + \frac{\sin 2\varphi}{8}}{\frac{x'_0}{l} + 2 \cos \varphi}.$$

Soient  $\theta$  l'angle dont on a fait tourner les porte-roulettes, ou l'inclinaison de la droite  $C_1 C_0$  sur  $Sx'$ ,  $\omega$  l'angle connu que forme  $C_1 C_0$  avec  $A_1 A_0$ ; on a

$$\varphi - \omega = 90^\circ - \theta,$$

d'où

$$(16) \quad \varphi = 90^\circ + \omega - \theta.$$

Si  $d$  est la distance connue, à  $Sy'$ , de l'axe de chaque porte-roulette, on aura

$$d = \frac{l}{2} \cos(\theta + \omega) + x'_0,$$

d'où

$$(17) \quad x'_0 = d - \frac{l}{2} \cos(\theta + \omega).$$

Si l'on met les formules (12') et (15) sous la forme

$$(12'') \quad \varepsilon = H \frac{l}{\varepsilon_1}, \quad (15') \quad \varepsilon_1 = \frac{A}{\frac{x'_0}{l} + B},$$

on a

$H = 0,1609,$	$A = 0,1692,$	$B = 1,969$	pour $\varphi = 10^\circ,$
$0,1581,$	$0,3326,$	$1,819$	" $20^\circ,$
$0,1637,$	$0,4720,$	$1,733$	" $30^\circ,$
$0,1719,$	$0,5574,$	$1,532$	" $40^\circ.$

A l'aide de ces données et des formules (12''), (15'), (16), (17), il sera facile de construire pour chaque instrument une table donnant les valeurs de  $\varepsilon$  correspondant à des valeurs de  $\theta$  suffisamment rapprochées les unes des autres; l'angle  $\theta$  pourra d'ailleurs être indiqué par un système d'aiguilles et de cadran disposé en conséquence.

2° *Influence du frottement.* — Soient

$p$  le rayon des axes des roulettes ;

$f$  le coefficient du frottement des roulettes sur leurs axes ;

$\delta$  le coefficient du frottement de roulement des roulettes sur la lame ;

$\mu T_0, \mu T_1$  les composantes tangentielles des réactions des roulettes  $C_0$  et  $C_1$  sur la lame.

Nous négligerons les termes de l'ordre  $f\varepsilon_1$  ou  $f\varepsilon_0$ , et nous pourrons aussi supposer que les forces  $\mu T_0, \mu T_1$  sont dirigées suivant la tangente  $A_0 A_1$  commune aux deux roulettes. Les conditions d'équilibre des roulettes donnent

$$(17) \quad T_0 = N_0 k, \quad T_1 = N_1 k,$$

en posant, pour abrégé,  $k = \frac{\delta + fp}{R}$ .

Au degré d'approximation adopté, l'influence des forces  $\mu T_0, \mu T_1$  sur la courbure de la portion  $a_1 a_0$  de la lame est négligeable. Le frottement

de roulement, résultant, comme on le sait, de ce que les points d'application des réactions  $\mu N_0$ ,  $\mu N_1$  sont portées en avant et à la petite distance  $\delta$  de  $a_0$  et  $a_1$ , n'influe pas non plus d'une manière sensible sur la forme de  $a_1 a_0$ , de sorte que les équations (6) et (7) peuvent encore s'appliquer dans les conditions actuelles.

Au lieu de l'équation ( $\alpha$ ), nous avons la suivante :

$$(N_1 - N_0) \cos \varphi = (N_0 \varepsilon_0 + N_1 \varepsilon_1) \sin \varphi \mp k (N_0 + N_1) \sin \varphi,$$

en prenant le signe  $-$  ou le signe  $+$  selon que l'on tend à augmenter ou à diminuer la courbure de la lame.

Pour fixer les idées, nous considérerons le premier cas; le second s'en déduira en changeant le signe de  $k$ . L'équation précédente donne, aux termes du troisième ordre près en  $\varepsilon_1$ ,  $k$ , en ayant égard aux formules (7),

$$N_0 = \frac{6\varepsilon_1}{l^2} [1 - (3\varepsilon_1 - 2k) \tan \varphi],$$

et l'on voit que l'on peut prendre  $T_0 = T_1 = \frac{6\varepsilon_1 k}{l^2}$ .

Il résulte de là que la déformation de la lame  $a_0 S$ , due au frottement, est produite par les forces  $12 \frac{\varepsilon_1 k \mu}{l^2} \tan \varphi$ ,  $12 \frac{\varepsilon_1 k \mu}{l^2}$ , respectivement dirigées suivant  $C_0 a_0$  ou  $C_0 A_0$  et  $A_0 A_1$ , en négligeant le frottement de roulement qui ne peut pas avoir une influence sensible sur la forme de la courbe.

Le moment des forces précédentes par rapport à un point quelconque de  $a_0 S$  peut être évalué, en continuant l'approximation adoptée comme si cet arc appartenait au cercle de rayon  $\varepsilon$ ; de sorte que, si l'on appelle  $\rho'$  le rayon de courbure au point ci-dessus, en réservant la lettre  $\rho$  pour désigner le rayon de courbure au même point dans le cas où l'on néglige le frottement, on a

$$\frac{1}{\rho'} - \frac{1}{\rho} = 12 \varepsilon_1 k \frac{\varepsilon}{l^2} \{ -\sin(\varphi - \theta) \tan \varphi + [1 - \cos(\varphi - \theta)] \},$$

d'où

$$\rho' - \rho = 12 \varepsilon_1 k \frac{\varepsilon}{l^2} \rho \rho' \{ \sin(\varphi - \theta) \tan \varphi - [1 - \cos(\varphi - \theta)] \},$$

ou encore, en remplaçant  $\rho\rho'$  par  $\varepsilon^2$ ,

$$\rho' - \rho = 12\varepsilon_1 k \frac{\varepsilon^3}{l^2} \left\{ \sin(\varphi - \theta) \operatorname{tang} \varphi - [1 - \cos(\varphi - \theta)] \right\}.$$

Si nous appelons  $\varepsilon'$  la valeur moyenne de  $\rho'$  ou  $\frac{1}{\varphi} \int_0^\varphi \rho' d\varphi$ , l'équation précédente donne par l'intégration

$$\varepsilon' - \varepsilon = 12 \frac{\varepsilon_1 k}{\varphi} \frac{r^3}{l^2} (\operatorname{tang} \varphi - \varphi),$$

ou, en vertu des formules (12'') et (15'),

$$\frac{\varepsilon' - \varepsilon}{\varepsilon} = kL \left( \frac{x_0}{l} + B \right),$$

en posant, pour abrégier,  $L = 12 \frac{\operatorname{tang} \varphi - \varphi}{A \varphi} H^2$ .

Si l'on fait le calcul on trouve que l'on a

L = 0,0201	pour	$\varphi = 10^\circ$ ,
0,0391	»	20°,
0,0710	»	30°,
0,1292	»	40°.

Or, tout en satisfaisant à des conditions convenables de solidité de l'instrument, on peut donner à  $p$  une valeur telle que  $k$  soit au plus égal à  $\frac{1}{200}$ ; et alors  $\frac{\varepsilon' - \varepsilon}{\varepsilon}$ , tout en croissant avec la courbure, restera toujours une petite fraction dans les limites de  $\varphi$  que nous avons admises; en d'autres termes, le frottement n'a pas une influence sensible sur la forme de la lame, et c'est ce que nous nous proposons d'établir.