Annales scientifiques de l'É.N.S.

Gérard Barbançon

Théorème de Newton pour les fonctions de classe C^r

Annales scientifiques de l'É.N.S. 4e série, tome 5, nº 3 (1972), p. 435-457

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1972_4_5_3_435_0>

Ann. scient. Éc. Norm. Sup.,
4e série, t. 5. 1972, p. 435 à 458.

THÉORÈME DE NEWTON POUR LES FONCTIONS DE CLASSE C^r

PAR GÉRARD BARBANÇON

1. **Introduction. Généralités**

Le but du présent article est d'établir le :

THÉORÈME 1. — *Toute fonction numérique réelle, symétrie, de classe* C^{nr}, *de n variables réelles, peut s'exprimer comme fonction de classe* C^r *au moins, des fonctions symétriques élémentaires des variables.*

En d'autres termes, étant donnée une fonction symétrique $f \in C^{nr}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R})$ on cherche une fonction $F \in C^r(\mathbf{R}^n, \mathbf{R})$, telle que $f = F \circ \sigma$, où σ est l'application newtonienne de $\mathbf{R}^n_x$ dans $\mathbf{R}^n_\sigma$, qui à $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n_x$ fait correspondre $(\sigma_1, \ldots, \sigma_n) \in \mathbf{R}^n_\sigma$ avec

$$\sigma : \left| \begin{array}{l} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{array} \right. \mapsto \left| \begin{array}{l} \sigma_1 = x_1 + \ldots + x_n \\ \vdots \\ \sigma_n = x_1 + \ldots + x_n \end{array} \right.$$

Il s'agit d'un problème local qu'il suffit de savoir résoudre sur tout compact, ce qu'on ne s'astreindra pas à répéter à chaque fois. L'étude du cas des fonctions f de classe C^∞ se trouve dans Glaeser [1], et montre que l'on obtient alors une fonction F qui est encore de classe C^∞. Pour une fonction de classe C^μ ($\mu < +\infty$) le résultat ne peut s'obtenir qu'avec une diminution de l'ordre de dérivabilité (en bref « perte de dérivabilité ») dont l'étude est au centre du problème.

Mots et Expressions clés : Fonction de classe C^r, fonction symétrique de n variables, champ taylorien r-régulier, champ formellement holomorphe complexifié d'un champ taylorien, prolongement de Whitney, division d'un champ taylorien par une forme C-linéaire, diminution de l'ordre (ou perte) de dérivabilité.

Sur l'image de l'ensemble ouvert où l'application polynomiale σ est régulière, la construction de F s'obtient par inversion locale de σ, mais il faut que cette fonction se laisse prolonger à $\mathbf{R}^n_\sigma$. Pour cela on peut envisager deux méthodes. La première consiste à « dé-composer » le champ des jets de f pour obtenir un champ de polynômes de degré nr sur $\sigma(\mathbf{R}^n)$, qui est régulier sur l'intérieur de $\sigma(\mathbf{R}^n)$, et dont le champ des sections d'ordre r est continu sur $\sigma(\mathbf{R}^n)$.

$\sigma(\mathbf{R}^n)$ est un ensemble semi-algébrique, et il existe ρ assez grand pour que cet ensemble soit régulier au sens de Withney avec l'exposant ρ (Lojasiewicz [2]), mais le prolongement du champ construit sur $\sigma(\mathbf{R}^n)$ par une fonction de classe C^r sur $\mathbf{R}^n_\sigma$, n'est possible que si l'on montre que l'on peut prendre $\rho = 1$ (Withney [1]). C'est ce que nous avions fait pour $n \leq 4$ dans Barbançon [1]. Dès que $n > 5$, l'étude directe des propriétés métriques de $\sigma(\mathbf{R}^n)$ est difficile et on a préféré, pour traiter le cas général utiliser une deuxième méthode inspirée de Lojasiewicz [1].

Celle-ci consiste à complexifier le champ des jets de f et à prolonger ce champ complexifié à $\sigma^{-1}(\mathbf{R}^n)$, pour obtenir un champ « dé-composé » défini sur $\mathbf{R}^n_\sigma$ tout entier, ce qui permet de déduire la régularité du champ des sections d'ordre r à partir de sa continuité (*voir* proposition 4.1 ci-dessous).

On opère comme dans Lojasiewicz [1] et Glaeser [2] de façon à définir sur $\sigma^{-1}(\mathbf{R}^n)$ un champ « formellement holomorphe », ce qui permet de traiter la division d'un champ régulier par une forme linéaire complexe suivant la même technique que dans le cas réel. On se borne simplement à remarquer que dans le cas C^μ le prolongateur de Whitney est suffisant.

Dans une seconde étape on étudie la continuité sur l'image critique, du champ « dé-composé ». Ceci se fait par récurrence en effectuant à chaque étape une division par le jacobien $j(x) = \prod_{1 \leq k < l \leq n} (x_k - x_l)$ de l'application σ, d'une expression du type

$$(\star) \qquad \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \prod_{\substack{1 \leq k < l \leq n \\ k, l \neq i}} (x_k - x_l).$$

Si on cherche à diviser chaque terme par j, pour réduire la perte de dérivabilité à $(n-1)$ unités comme on le désire, on est amené à prendre pour f un multiplicateur rugueux dont les produits par les $\prod_{\substack{1 \leq k < l \leq n \\ k, l \neq i}} (x_k - x_l)$ soient très lisses $\left[\text{il faudrait que chaque terme dans la somme } (\star) \text{ soit de classe } C^{m + \left(\frac{n-1}{2}\right)} \text{ si les } \frac{\partial f}{\partial x_i} \text{ sont de classe } C^m\right]$.

En effectuant la division sans découpage, on constate que cette hypothèse supplémentaire est inutile, ce qui permet d'obtenir le théorème 1, qui donne sans doute le meilleur résultat possible (*voir* contre-exemple à la fin du paragraphe 4).

Enfin, on déduit du théorème 1 la division d'une fonction de classe C^{μ} par le polynôme générique à coefficients réels, précisant la perte de dérivabilité du quotient et du reste (*voir* aussi Lassalle [1] où est effectuée la division par un polynôme à coefficients complexes avec la même perte de dérivabilité pour le reste, mais une perte de dérivabilité doublée pour le quotient).

2. Champs tayloriens

DÉFINITION 2.1. — *Soit* E *un fermé de* $\mathbf{R}^{n'}$, *un champ de polynômes sur* E *est une application de* E *dans* $C[X_1, \ldots, X_{n'}]$:

$$A : \quad E \ni x \mapsto A_x = \sum \frac{1}{p!} a_p(x) X^p,$$

où $x = (x_1, \ldots, x_{n'}) \in E \subset \mathbf{R}^{n'}$, $p = (p_1, \ldots, p_{n'}) \in \mathbf{N}^{n'}$, $X^p = X_1^{p_1} \ldots X_{n'}^{p_{n'}}$.

Les $a_p : E \to C$ sont les coefficients du champ.

En substituant à l'indéterminée $X = (X_1, \ldots, X_{n'})$ un vecteur tangent en x à $\mathbf{R}^{n'}$, on obtient une application polynomiale que l'on notera encore A_x,

$$A_x : \quad \mathbf{R}^{n'} \ni x' \mapsto \sum \frac{1}{p!} a_p(x)(x'-x)^p = A_x(x').$$

On notera A^r le champ des sections d'ordre r de A,

$$A^r : \quad x \mapsto A_x^r = \sum_0^r \frac{1}{p!} a_p(x) X^p.$$

A est r-continu si les coefficients de A^r sont continus.

DÉFINITION 2.2. — A *est r-régulier si, pour tout multi-indice q, $|q| \leq r$ le champ*

$$\frac{\partial^q A^r}{\partial X^q} : \quad E \ni x \mapsto D_x^q A_x^r = \sum_q^r \frac{1}{(p-q)!} a_p(x) X^{p-q}$$

satisfait aux conditions de Whitney :

$$(W_q) \quad R_q A(x, x') = a_q(x') - D_x^q A_x^r(x') = 0(|x'-x|^{r-|q|})$$

quand x et x' tendent vers $a \in E$.

Il est équivalent de dire que pour tout point $a \in \mathrm{E}$, il existe un voisinage compact K de a, et un module de continuité ω_{K} tel que si x et $x' \in \mathrm{K}$, on ait

$$(\mathrm{W}'_q) \quad | \mathrm{R}_q(x, x') | \leq | x' - x |^{r - |q|} \omega_{\mathrm{K}}(| x' - x |).$$

Exemple : $q = 0$,

$$\left| a_0(x') - \sum_{|p| \leq r} \frac{1}{p\,!} a_p(x)(x' - x)^p \right| \leq | x' - x |^r \omega_{\mathrm{K}}(| x' - x |),$$

$\mathrm{J}^r(\mathrm{E})$ est l'espace des champs r-réguliers sur E munis de la topologie définie par la famille de semi-normes :

$$|||\, \mathrm{A} \,|||_r^{\mathrm{K}} = \sup_{\substack{x \in \mathrm{K} \\ |q| \leq r}} \left| \frac{1}{q\,!} a_q(x) \right| + \sup_{\substack{x, x' \in \mathrm{K} \\ x \neq x' \\ |q| \leq r}} \frac{| \mathrm{R}_q \mathrm{A}(x, x') |}{| x' - x |^{r - |q|}},$$

lorsque K décrit l'ensemble des compacts de E.

$\mathcal{E}^r(\mathbf{R}^{n'})$ désigne comme d'habitude l'espace des fonctions de classe C^r sur $\mathbf{R}^{n'}$, à valeurs complexes, muni de la topologie de la convergence uniforme des fonctions et de leurs dérivées d'ordre total inférieur ou égal à r sur tout compact de $\mathbf{R}^{n'}$.

L'application $\mathrm{T}^r : \mathcal{E}^r(\mathbf{R}^{n'}) \ni f \mapsto \mathrm{T}^r f \in \mathrm{J}^r(\mathbf{R}^{n'})$ qui à une fonction fait correspondre son champ de polynômes de Taylor est un isomorphisme. Notons $\mathrm{T}_{\mathrm{E}}^r$ la restriction

$$\mathrm{T}_{\mathrm{E}}^r : \quad \mathcal{E}^r(\mathbf{R}^{n'}) \ni f \mapsto (\mathrm{T}^r f)_{\mathrm{E}} \in \mathrm{J}^r(\mathrm{E}).$$

Théorème du prolongement de Whitney (*voir* Malgrange [1] et Glaeser [3]). — *$\mathrm{T}_{\mathrm{E}}^r$ est surjectif et admet un relèvement linéaire continu s : $\mathrm{J}^r(\mathrm{E}) \to \mathcal{E}^r(\mathbf{R}^{n'})$ avec $\mathrm{T}_{\mathrm{E}}^r \circ s = 1_{\mathrm{J}^r(\mathrm{E})}$.*

Définition 2.3. — *Deux sous-ensembles fermés* E *et* F *de* $\mathbf{R}^{n'}$ *sont* 1*-régulièrement séparés, soit si* $\mathrm{E} \cap \mathrm{F} = \emptyset$, *soit si pour tout compact* $\mathrm{K} \subset \mathbf{R}^{n'}$; *il existe une constante k telle que pour tout* $x \in \mathrm{K}$,

$$d(x, \mathrm{E}) + d(x, \mathrm{F}) \geq k\, d(x, \mathrm{E} \cap \mathrm{F}).$$

Exemple : Deux sous-espaces linéaires de $\mathbf{R}^{n'}$ sont 1-régulièrement séparés.

Proposition 2.1 (*voir* Malgrange [1]). — *Étant donné un champ* A *sur* $\mathrm{E} \cup \mathrm{F}$, E *et* F *étant fermés et* 1*-régulièrement séparés, la* r*-régularité des restrictions* A_{E} *et* A_{F} *implique celle de* A.

Définition 2.4. — *Soit* Ω *un ouvert de* $\mathbf{R}^m$, Ψ *une application de classe* C^r *sur* Ω, *à valeurs dans* $\mathbf{R}^{n'}$, A *un champ défini sur* $E \subset \mathbf{R}^{n'}$, *le champ* $A \circ \Psi$ *est défini sur* $\Psi^{-1}(E)$ *par*

$$A \circ \Psi : \quad \Psi^{-1}(E) \ni x \mapsto (A \circ \Psi)_x = A_{\Psi(x)}(T_x^r \Psi - \Psi(x)).$$

Si A *est* r' *régulier* ($r' \leqq r$), $A \circ \Psi$ *est* r'*-régulier.*

Champs formellement holomorphes. — Soit $\tilde{E}$ un fermé de $C^n \simeq \mathbf{R}^{2n}$, un champ A sur $\tilde{E}$ est une application

$$A : \quad \tilde{E} \to C[X_1, \ldots, X_n; Y_1, \ldots, Y_n] = C[Z_1, \ldots, Z_n; \bar{Z}_1, \ldots, \bar{Z}_n]$$

où l'on pose

$$Z_j = X_j + i\,Y_j; \qquad \bar{Z}_j = X_j - i\,Y_j.$$

Définition 2.5. — *Un champ* A *défini sur* $\tilde{E} \subset C^n$ *est formellement holomorphe si* $\dfrac{\partial A}{\partial \bar{Z}_j} = 0$ *pour* $j = 1, \ldots, n$.

Il revient au même de dire que A satisfait aux conditions de Cauchy,

$$\frac{\partial A}{\partial X_j} = i\,\frac{\partial A}{\partial Y_j} \qquad (i = 1, \ldots, n).$$

Proposition 2.2. — *Soit* Ω *un ouvert de* C^m, Ψ *holomorphe sur* Ω *à valeurs dans* C^n, A *un champ formellement holomorphe sur* $\tilde{E} \subset C^n$, *alors le champ* $A \circ \Psi$ *est formellement holomorphe sur* $\Psi^{-1}(\tilde{E})$. *Si* A *est r-régulier*, $A \circ \Psi$ *est r-régulier.*

On désignera par $J_C^r(\tilde{E})$ le sous-espace des champs formellement holomorphes, dans $J^r(\tilde{E})$.

Il résulte de la proposition 2.2 que si L est un C-automorphisme de C^n, $L^* : J_C^r(E) \ni A \mapsto A \circ L \in J_C^r(L^{-1}(E))$ est un isomorphisme.

Complexification. — Soit E un fermé de $\mathbf{R}^n \subset C^n \simeq \mathbf{R}^{2n}$. Sur E on a deux notions de champ suivant que E est considéré comme fermé de $\mathbf{R}^n$ ou de $\mathbf{R}^{2n}$. Toutefois à un champ

$$A : \quad E \ni x \mapsto A_x = \sum \frac{1}{p!} a_p(x)\, X^p \in C[X_1, \ldots, X_n],$$

on peut associer canoniquement un champ formellement holomorphe [A], appelé complexifié de A, défini par

$$[A] : \quad E \ni x \mapsto [A]_x = \sum \frac{1}{p!} a_p(x)\, Z^p \in C[Z_1, \ldots, Z_n, \bar{Z}_1, \ldots, \bar{Z}_n].$$

Si A est r-régulier, $[A]$ est r-régulier car $\frac{\partial [A]}{\partial X} = \left[\frac{\partial A}{\partial X}\right]$ et $\frac{\partial [A]}{\partial Y} = i\left[\frac{\partial A}{\partial X}\right]$, et les inégalités (W) sont les mêmes pour A et $[A]$ puisqu'elles ne font intervenir que des points dans E donc dans $\mathbf{R}^n$.

En particulier, si $f \in \mathcal{E}^r(\mathbf{R}^n)$, on notera $[f]$ le complexifié de $T^r f$, et l'application

$$[\ \ ]:\quad \mathcal{E}^r(\mathbf{R}^n) \ni f \mapsto [f] \in J^r_C(\mathbf{R}^n)$$

est un isomorphisme d'algèbres topologiques avec dérivations [dans l'expression $J^r_C(\mathbf{R}^n)$, $\mathbf{R}^n$ est considéré comme un fermé de C^n].

Sous-espaces réellement situés.

Définition 2.6 (Lojasiewicz [1]). — *Dans* C^n, *on appelle sous-espace réellement situé un sous-espace* $\mathbf{R}$-*linéaire de* $C^n \simeq \mathbf{R}^{2n}$, *de* $\mathbf{R}$-*dimension* n, *qui est l'image de* $\mathbf{R}^n$ *par un* C-*automorphisme.*

Si Γ est un sous-espace réellement situé, $C^n = \Gamma \oplus i\,\Gamma$ et toute $\mathbf{R}$-base de Γ est une C-base de C^n.

Exemple 1 : Si on désigne par σ l'application newtonienne

$$\sigma:\quad C^n \ni (z_1, \ldots, z_n) \mapsto (\sigma_1 = z_1 + \ldots + z_n, \ldots, \sigma_n = z_1 \ldots z_n) \in C^n.$$

L'image réciproque de $\mathbf{R}^n$ est une réunion de sous-espaces réellement situés, naturellement indexés par la famille $\mathcal{J}$ des permutations involutives de $\{1, 2, \ldots, n\}$.

En effet, remarquons que les coordonnées d'un point $z \in \sigma^{-1}(\mathbf{R}^n)$ sont les racines d'un polynôme à coefficients réels qui sont soit réelles, soit deux à deux imaginaires conjuguées, et

$$\sigma^{-1}(\mathbf{R}^n) = \bigcup_{\alpha \in \mathcal{J}} \Gamma_\alpha \qquad \text{avec} \quad \Gamma_\alpha = \{ z = (z_1, \ldots, z_n) \in C^n / z_i = \bar{z}_{\alpha(i)} \}.$$

Si $\alpha(i) = i$, z_i est réel, sinon on a les paires de racines conjuguées.

Exemple 2 : Si E est réellement situé dans C^n, $E \times \mathbf{R}^s$ est réellement situé dans C^{n+s}. Si on note $\hat{\sigma}$ l'application

$$\hat{\sigma}:\quad C^{n+s} \ni (z, t) \mapsto (\sigma(z), t) \in C^{n+s},$$

$\hat{\sigma}^{-1}(\mathbf{R}^{n+s}) = \sigma^{-1}(\mathbf{R}^n) \times \mathbf{R}^s$ est une réunion finie de sous-espaces réellement situés dans C^{n+s}.

Remarque 2.1. — Les sous-espaces réellement situés dans C^n sont $\mathbf{R}$-linéaires et par suite 1-régulièrement séparés.

Soit alors $\Gamma = \bigcup_{i=1}^{k} \Gamma_i$ une réunion finie de sous-espaces réellement situés, pour que la donnée d'une famille $(A_i)_{i \leq i \leq k}$ de champs r-réguliers chaque A_i étant défini sur Γ_i, fournisse un champ A r-régulier sur Γ, il suffit que pour tout couple (i, j), $1 \leq i < j \leq k$, les restrictions de A_i et A_j à $\Gamma_i \cap \Gamma_j$ coïncident.

Inversement, étant donné un champ A défini sur une réunion finie Γ de sous-espaces réellement situés dans C^n, il suffit pour que A soit r-régulier sur Γ, que ses restrictions à chacun des sous-espaces réellement situés soient r-régulières. Mais pour étudier la régularité de A sur un seul sous-espace réellement situé, on pourra se ramener par un C-automorphisme au cas où ce sous-espace est $\mathbf{R}^n$, et si de plus A est formellement holomorphe, utilisant l'isomorphisme de $\mathcal{E}^r(\mathbf{R}^n)$ et $\mathrm{J}^r_{\mathrm{C}}(\mathbf{R}^n)$ on pourra étudier la classe de dérivabilité de la fonction induite par A en « décomplexifiant » le champ.

En d'autres termes si $\Gamma = \bigcup_{i=1}^{k} \Gamma_i$ est une réunion de sous-espaces réellement situés, la donnée d'un élément de $\mathrm{J}^r_{\mathrm{C}}(\Gamma^n)$, équivaut à la donnée d'une famille $(f_i)_{i=1,\dots,k}$ d'éléments de $\mathcal{E}^r(\mathbf{R}^n)$, dont le « recollement sur $\Gamma_i \cap \Gamma_j$ s'obtient en comparant les polynômes de Taylor complexifiés. En particulier, les normes $\| \;\; \|$ et $|\!|\!| \;\; |\!|\!|$ sont équivalentes sur $\mathrm{J}^r_{\mathrm{C}}(\Gamma)$.

Champs symétriques et antisymétriques. — Soit $\mathcal{B} = (e_i)_{1 \leq i \leq n}$ où $e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$, la C-base canonique de C^n, qui est aussi la $\mathbf{R}$-base canonique de $\mathbf{R}^n$. On notera les points de C^n par

$$z = \sum_{i=1}^{n} z_i e_i = (z_1, \dots, z_n).$$

On fait opérer sur C^n (et sur $\mathbf{R}^n$ par restriction) le groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$, de la façon suivante : à toute permutation $\pi \in \mathfrak{S}_n$, on associe le C-automorphisme de C^n noté $\tilde{\pi}$, défini par

$$\forall\, i \in \{1, \dots, n\}\; \tilde{\pi}(e_i) = e_{\pi(i)},$$

soit

$$\tilde{\pi}(z) = \sum_{i=1}^{n} z_i e_{\pi(i)} = (z_{\pi^{-1}(1)}, \dots, z_{\pi^{-1}(n)}).$$

Une partie symétrique de C^n est une partie invariante par $\mathfrak{S}_n$.

Exemple : $\mathbf{R}^n$ et $\sigma^{-1}(\mathbf{R}^n)$ sont des parties symétriques de C^n.

DÉFINITION 2.8. — *Une fonction* f (resp. un champ A) *définie sur une partie symétrique de* C^n, *est symétrique si*

$$\forall\, \pi \in \mathfrak{S}_n, \quad f = f \circ \tilde{\pi} \qquad \text{(resp. } A = A \circ \tilde{\pi}).$$

On notera $\mathcal{S}^r(\mathbf{R}^n)$ [resp. $J^r_\Sigma(\sigma^{-1}(\mathbf{R}^n))$] le sous-espace de $\mathcal{E}^r(\mathbf{R}^n)$ [resp. $J^r_C(\sigma^{-1}(\mathbf{R}^n))$] des fonctions (resp. des champs) symétriques. On notera $\overline{\mathcal{S}}^r(\mathbf{R}^{n+s})$ [resp. $J^r_\Sigma(\sigma^{-1}(\mathbf{R}^n)\times\mathbf{R}^s)$] le sous-espace des fonctions de $\mathcal{E}^r(\mathbf{R}^{n+s})$ [resp. des champs de $J^r_C(\sigma^{-1}(\mathbf{R}^n)\times\mathbf{R}^s)$] symétriques par rapport aux n premières variables, dans un sens évident.

DÉFINITION 2.9. — *Une fonction* f (resp. un champ A) *définie sur une partie symétrique de* C^n *est antisymétrique si* $\forall\, \pi \in \mathfrak{S}_n$, *on a* $f = \varepsilon_\pi f \circ \tilde{\pi}$ (resp. $A = \varepsilon_\pi A \circ \tilde{\pi}$) *où* ε_π *est la signature de* π.

Exemple 1 : Le jacobien $j(x) = \prod\limits_{1 \leq p < q \leq n} (x_p - x_q)$ de l'application newtonienne σ est antisymétrique.

Exemple 2 : $[j]_{\sigma^{-1}(\mathbf{R}^n)}$ est antisymétrique, et plus généralement, si G est un champ symétrique sur $\sigma^{-1}(\mathbf{R}^n)$, $G[j]_{\sigma^{-1}(\mathbf{R}^n)}$ est antisymétrique.

LEMME 2.3. — *Soit* A *un champ antisymétrique formellement holomorphe. Le polynôme* A_z *est divisible* (en tant que polynôme) *par tous les produits* $Z_i - Z_j$ *pour les couples d'entiers* (i, j) *tels que la transposition* τ_{ij} *qui échange* i *et* j *appartienne au sous-groupe d'isotropie de* z.

Les $Z_i - Z_j$ étant premiers entre eux, il suffit de le vérifier pour un facteur de cette forme, ce qui résulte de

$$G_z(Z) = -\, G_{\tilde{\tau}_{ij}(z)}(\tilde{\tau}_{ij}(Z)) = -\, G_z(\tilde{\tau}_{ij}(Z)).$$

Remarque. — On peut définir des fonctions de $n + s$ variables (resp. des champs définis sur des fermés symétriques de C^{n+s}) antisymétriques par rapport aux n premières variables.

Exemple : Si $\hat{j}$ est le jacobien de $\hat{\sigma}$, G formellement holomorphe symétrique par rapport aux n premières variables défini sur $\sigma^{-1}(\mathbf{R}^n)\times\mathbf{R}^s$, $G[\hat{j}]_{\hat{\sigma}^{-1}(\mathbf{R}^{n+s})}$ est antisymétrique.

3. Un opérateur de prolongement

PROPOSITION 3.1 (*voir* Lojasiewicz [1]). — *Soient* Γ *et* $\tilde{\Gamma}$ *deux réunions finies de sous-espaces réellement situées dans* C^n, *avec* $\Gamma \subset \tilde{\Gamma}$, *il existe une application linéaire continue*

$$J^r_C(\Gamma) \ni H \mapsto \tilde{H} \in J^r_C(\tilde{\Gamma}) \qquad \textit{telle que} \quad \tilde{H}_\Gamma = H.$$

$\tilde{\Gamma}$ étant une réunion finie de sous-espaces réellement situés, il suffit que pour chaque sous-espace réellement situé Π, on puisse construire une application linéaire continue $J^r_C(\Gamma) \ni H \mapsto H^\pi \in J^r_C(\Pi)$ telle que H^Π et H coïncident sur $\Pi \cap \Gamma$. D'après la remarque 2.1 cette seule condition de compatibilité entraîne que le champ

$$\tilde{H} \begin{cases} \tilde{H}_x = H_x & \text{si } x \in \Gamma, \\ \tilde{H}_x = H^\pi_x & \text{si } x \in \Pi \end{cases}$$

est dans $J^r_{\mathbf{C}}(\Gamma \cup \Pi)$.

Après avoir effectué au besoin un C-automorphisme, on peut supposer que $\Pi = \mathbf{R}^n$. Soit alors $\Lambda = \Gamma \cap \Pi$, le champ $H \in J^r_C(\Gamma)$ induit par restriction un champ H_Λ formellement holomorphe, r-régulier, que l'on peut « décomplexifier ». Le théorème du prolongement de Whitney fourni par un opérateur linéaire et continu, un prolongement r-régulier sur $\mathbf{R}^n$ du champ défini sur Λ. En retournant au complexifié, on obtient le champ H^Π cherché.

(On notera que la construction est beaucoup plus simple que dans le cas C^∞, le théorème de Whitney fournissant en classe C^r un prolongement linéaire continu.)

Lemme 3.1. — *Il existe un opérateur linéaire, continu, injectif,*

$$u: \ \mathfrak{S}^r(\mathbf{R}^{n+s}) \ni f \mapsto G \in J^r_\Sigma(\sigma^{-1}(\mathbf{R}^n) \times \mathbf{R}^s)$$

tel que $G_{\mathbf{R}^{n+s}} = [f]$.

C'est une conséquence immédiate de la proposition ci-dessus, puisque $\sigma^{-1}(\mathbf{R}^n) \times \mathbf{R}^s = \bigcup_{\alpha \in \mathfrak{I}} \Gamma_\alpha \times \mathbf{R}^s$ (*voir* l'exemple qui suit la définition 2.6) est une réunion finie de sous-espaces réellement situés dans C^{n+s}. Si le champ G' fourni par la proposition n'est pas symétrique, on pose $G = \frac{1}{n!} \sum_{\pi \in \mathfrak{S}_n} G' \circ (\tilde{\pi} \oplus 1_{\mathbf{R}^s})$, ce qui n'affecte pas la restriction à $\mathbf{R}^{n+s}$, puisque f est symétrique par rapport aux n premières variables.

4. Théorème de Newton en classe C^r

Proposition 4.1. — *Soit Ω un ouvert partout dense dans $\mathbf{R}^n$, tel qu'il existe une base de $\mathbf{R}^n$ pour laquelle toute droite affine dont la direction est donnée par l'un des vecteurs de la base, et qui passe par un point de $F = \mathbf{R}^n \setminus \Omega$, ait une intersection au plus dénombrable avec F. Alors tout champ de polynômes r-continu sur $\mathbf{R}^n$ et r-régulier sur Ω, est r-régulier sur $\mathbf{R}^n$.*

[L'hypothèse que l'intersection de F avec toute parallèle aux axes issue d'un point de F soit au plus dénombrable, est essentielle. Dans le cas général il faudrait rajouter l'hypothèse que la restriction du champ à F soit elle-même r-régulière pour pouvoir appliquer le lemme d'Hesténès. Un contre-exemple classique est fourni par la fonction de Lebesgue continue sur $[0, 1]$, localement constante sur le complémentaire de l'ensemble de Cantor, qui n'est pas dérivable sur l'ensemble de Cantor (*voir* Glaeser [4]).]

Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un champ soit r-régulier sur un ouvert, est que $\forall\, p, |p| \leqq r-1$, les coefficients a_p soient de classe C^1 sur l'ouvert, avec

$$\forall\, i \in \{1, \ldots, n\}\ \frac{\partial a_p}{\partial x_i} = a_{(p_1, \ldots, p_i+1, \ldots, p_n)}. \tag{1}$$

Soit $A : x \mapsto A_x = \sum_{|p| \leqq r} \frac{1}{p!} a_p(x) X^p$ r-régulier sur Ω, r-continu sur $\mathbf{R}^n$.

Pour montrer que A est r-régulier sur $\mathbf{R}^n$, il suffit de vérifier que les a_p qui sont de classe C^1 et vérifient (1) sur Ω, admettent des dérivées partielles sur F satisfaisant à (1). Or ceci résulte en chaque $x_0 \in F$, de l'application aux restrictions des a_p aux parallèles aux axes issues de x_0 de la :

Proposition (Bourbaki [1]). — *Soit* I *un intervalle réel ouvert,* x_0 *l'une des extrémités de* I, $f \in \mathcal{E}^0$ (I), *qui admet une dérivée à droite* f'_d *aux points du complémentaire* B *par rapport à* J *d'une partie dénombrable de* I, *et* $f'_d(x)$ *a une limite* l *quand* x *tend vers* x_0 *en restant dans* B. *Alors* f *se prolonge par continuité à* x_0, *et la fonction prolongée admet en* x_0 *une dérivée égale à* l.

Conséquence 4.1 (Lojasiewicz [1]). — Soit Γ une réunion finie de sous-espaces réellement situés dans C^n, et ϖ un polynôme complexe non identiquement nul, F l'ensemble de ses zéros. Tout chanp formellement holomorphe r-continu sur Γ, r-régulier sur $\Gamma - F$ est r-régulier sur Γ.

En effet, d'après la remarque 2.1, on peut supposer que $\Gamma = \mathbf{R}^n$, et décomplexifier grâce à l'holomorphie formelle. De plus, on peut supposer, au moins localement que $\mathbf{R}^n \cap F$ ne contient aucune droite parallèle aux axes. L'assertion résulte alors de la proposition précédente puisque toute droite non située dans F a une intersection finie avec F.

Lemme 4.1. — *Soit* l *une forme linéaire complexe non identiquement nulle,* Γ *une réunion finie de sous-espaces réellement situés dans* C^n, H *un champ formellement holomorphe,* r*-régulier sur* Γ, *tel que si* $z \in \Gamma \cap \{l = 0\}$, *le polynôme* H_z *soit divisible par* l (Z). *Alors il existe un champ* G *formellement holomorphe,* $(r-1)$*-régulier sur* Γ, *avec* $H^r = (G[l]_\Gamma)^r$.

En chaque point $z \in \Gamma$, G_z est bien défini : si $z \in \Gamma \setminus \{ l = 0 \}$, G est r-régulier au voisinage de z et si $z \in \Gamma \cap \{ l = 0 \}$, $[l]_z = l(Z)$ et H_z est divisible par $l(Z)$ avec $H_z^r = G_z^{r-1} \, l(Z) = (G [l]_\Gamma)_z^r$.

D'après la conséquence 4.1 ci-dessus, il suffit de vérifier que G qui est $(r-1)$-régulier sur $\Gamma \setminus \{ l = 0 \}$ est $(r-1)$-continu sur Γ. On peut pour cela supposer (remarque 2.1) que Γ se réduit à un seul sous-espace réellement situé.

Soit alors $z_0 \in \Lambda = \Gamma \cap \{ l = 0 \}$ et $z \in \Gamma \setminus \Lambda$. Notons z_1 la projection orthogonale de z sur Λ. Si z tend vers z_0, z_1 aussi : montrons par récurrence que, dans ces conditions,

$$(\star) \qquad \forall q, \quad |q| \leqq r-1, \qquad D^q G_z(z) - D^q G_{z_1}(z) = O^{r-1-|q|}(|z - z_1|),$$

où $D^q G = \dfrac{\partial^{|q|} G}{\partial Z^q}$ désigne une dérivation formelle de G par rapport aux indéterminées.

La r-régularité de H implique

$$H_z(z) - H_{z_1}(z) = l(z)\, g_0(z) - [l(z)\, G_{z_1}(z)] = O^r(|z - z_1|),$$
$$l(z)\,[g_0(z) - G_{z_1}(z)] = O^r(|l(z)|),$$

soit

$$G_z(z) - G_{z_1}(z) = O^{r-1}(|l(z)|).$$

Supposons pour $|q| \leqq |k| - 1 < r - 1$, $(\star)$ soit vérifié, la r-régularité de H implique à nouveau :

$$D^k H_z(z) - D^k H_{z_1}(z) = O^{r-|k|}(|z - z_1|),$$

soit, par la formule de Newton :

$$a\,(D^{k-1} G_z(z) - D^{k-1} G_{z_1}(z)) + b\, l(z)\,(D^k G_z(z) - D^k G_{z_1}(z)) = O^{r-|k|}(|l(z)|)$$

avec certaines constantes numériques a et b.

Compte tenu de l'hypothèse de récurrence, il vient

$$D^k G_z(z) - D^k G_{z_1}(r) = O^{r-1-|k|}(|z - z_1|),$$

ce qui établit $(\star)$.

Sur Λ les coefficients de G de degré $|k|$ sont des combinaisons linéaires des coefficients de H de degré $|k| + 1$, et $(\star)$ exprime que

$$\forall k, \quad |k| \leqq r-1, \qquad g_k(z) - g_k(z_1) = O(|z - z_1|)$$

quand z et z_1 tendent vers z_0.

Mais z_1 et $z_0 \in \Lambda$ et la continuité de H implique aussi

$$|k| \leqq r-1, \qquad g_k(z_1) - g_k(z_0) = O(|z_1 - z_0|).$$

Donc au total :

$$|k| \leqq r-1, \qquad g_k(z) - g_k(z_0) = O(|z - z_0|),$$

ce qui établit le lemme.

Remarque. — $\forall$ K compact $\subset \Gamma$, il existe une constante numérique c telle que : $\| G \|_K^{r-1} \leqq c \| H \|_K^r$.

PROPOSITION 4.2. — *Soit* $G = (H \circ \hat{\sigma})^{nr}$ *un champ sur* $\hat{\sigma}^{-1}(\mathbf{R}^{n+s})$ *symétrique par rapport aux n premières variables, si* G *est formellement holomorphe et nr-régulier*, H *est formellement holomorphe et r-régulier sur* $\mathbf{R}^{n+s}$.

Tout point de $\mathbf{R}_\sigma^n \times \mathbf{R}^s$ étant image par $\hat{\sigma}$ d'un point de $\sigma^{-1}(\mathbf{R}^n) \times \mathbf{R}^s$, en dehors de l'image critique de $\hat{\sigma}$ la régularité de H résulte immédiatement du théorème du difféomorphisme local. Sur un voisinage U d'un point où $\hat{\sigma}$ est un isomorphisme analytique, on a

$$H_{\hat{\sigma}(U)}^{nr} = (H \circ \hat{\sigma} \circ (\hat{\sigma}_U)^{-1})^{nr} = (G^{nr} \circ (\hat{\sigma}_U)^{-1})^{nr},$$

ce qui définit, localement sur l'image régulière, un champ H^{nr} formellement holomorphe, sans ambiguïté puisque G est symétrique par rapport aux n premières variables.

L'image critique de $\hat{\sigma}$ est l'ensemble des points de la forme (σ, t), où $t \in C^s$ et σ décrit l'ensemble Δ des zéros du discriminant de

$$P(z) = z^n - \sigma_1 z^{n-1} + \ldots + (-1)^n \sigma_n.$$

Ce discriminant est un polynôme par rapport aux σ_i, que l'on peut expliciter par le déterminant de Sylvester de P et $\frac{\partial P}{\partial z}\cdot$ Δ est l'ensemble des $\sigma \in C^n$ pour lesquels P (z) a des racines multiples en z.

D'après la conséquence 4.1, H^r étant r-régulier sur $(\mathbf{R}_\sigma^n \setminus \Delta) \times \mathbf{R}^s$, sa régularité sur $\mathbf{R}_\sigma^n \times \mathbf{R}^s$ résultera de la continuité des coefficients d'ordre total $\leqq r$. [On voit ici le rôle essentiel joué par la complexification et le prolongement de $[f]$ à $\hat{\sigma}^{-1}(\mathbf{R}^{n+s})$ qui permet d'obtenir un champ sur $\mathbf{R}_\sigma^n \times \mathbf{R}^s$, la vérification de conditions de régularité se ramenant ainsi à une simple vérification de conditions de continuité. Une étude directe fournirait simplement un champ continu sur $\sigma(\mathbf{R}^n) \times \mathbf{R}^s$ et nécessiterait la connaissance de propriétés métriques de cet ensemble.]

Le premier coefficient h_0 de H est donné par $h_0 \circ \hat{\sigma} = g_0$ et sa continuité résulte de celle de g_0 puisque $\hat{\sigma}$ est propre (*cf.* Glaeser [1]). De plus, pour tout compact $c \subset \mathbf{R}^{n+s}$, $|h_0|_c \leqq |g_0|_{\hat{\sigma}^{-1}(c)}$.

Dans les calculs qui suivent, on va être amené à effectuer des troncatures qui risquent d'introduire indûment les pertes de régularité. Pour éviter cela, on remarque que $G = (H \circ \hat{\sigma})^{nr}$ peut s'écrire $G + K = H \circ \hat{\sigma}$, où K est un champ symétrique par rapport aux n premières variables, d'ordre nr, c'est-à-dire vérifiant $K^{nr} = 0$.

Dérivant alors $G + K = H \circ \hat{\sigma}$ par rapport aux indéterminées Z et T, il vient

$$\text{(I)} \qquad \frac{\partial(G+K)}{\partial Z_i} = \sum_k \left(\frac{\partial H}{\partial \sigma_k} \circ \hat{\sigma}\right)\left[\frac{\partial \sigma_k}{\partial z_i}\right]_{\hat{\sigma}^{-1}(\mathbf{R}^{n+s})},$$

$$\text{(II)} \qquad \frac{\partial(G+K)}{\partial T_i} = \frac{\partial H}{\partial T_i} \circ \hat{\sigma}.$$

(II) montre que le champ $\dfrac{\partial H}{\partial T_i} \circ \hat{\sigma}$ est $(nr - 1)$-régulier. Résolvant (I) par la méthode de Cramer, il vient

$$(1) \qquad \frac{\partial H}{\partial \sigma_l} \circ \hat{\sigma}\, [j]_{\hat{\sigma}^{-1}(\mathbf{R}^{n+s})} = \sum_{i=1}^{n} [X_{il}]_{\hat{\sigma}^{-1}(\mathbf{R}^{n+s})} \frac{\partial(G+K)}{\partial Z_i},$$

où les $X_{il}(z)$ sont des $(n-1) \times (n-1)$ mineurs de

$$j(z) = \begin{vmatrix} 1 & z_2 + \ldots + z_n & \ldots & z_2 \ldots z_n \\ 1 & z_1 + \ldots + z_n & \ldots & z_1 \ldots z_{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq p < q \leq n} (z_p - z_q).$$

Plus précisément,

$$X_{il}(z) = (-1)^{i+l} z_i^{n-l} \prod_{\substack{1 \leq p < q \leq n \\ p, q \neq i}} (z_p - z_q).$$

On se propose de montrer que (1) implique que le champ $\dfrac{\partial H}{\partial \sigma_l} \circ \hat{\sigma}$ est $(nr - n)$-régulier. Ce champ étant par ailleurs symétrique et formellement holomorphe, on pourra amorcer une récurrence dont les étapes successives ne différeront pas de la première et feront perdre n unités (resp. 1 unité) à chaque dérivation par rapport aux σ_l (resp. aux T_i). $\dfrac{\partial^{|k+m|} H}{\partial \sigma^k\, \partial T^m} \circ \hat{\sigma}$ sera $(nr - n|k| - m)$-régulier et en particulier $\dfrac{\partial^{|k|} H}{\partial \sigma^k} \circ \hat{\sigma}$ sera $(nr - n|k|)$-régulier. Il en résultera que les coefficients h_λ d'ordre total $|\lambda| \leq r$ seront continus puisque les $h_\lambda \circ \hat{\sigma}$ le sont et que $\hat{\sigma}$ est propre, et par suite que H est r-régulier sur $\mathbf{R}^{n+s}$.

On est donc ramené à démontrer que $\dfrac{\partial H}{\partial \sigma_l} \circ \hat{\sigma}$ est $(nr - n)$-régulier. Pour cela nous ferons deux remarques sur les déterminants du type Van der Monde.

1. Si $0 \leqq k \leqq n-1$, on a

$$\sum_{i=1}^{n-k} X_{il}(z)(z_i - z_n) \ldots (z_i - z_{n-k+1}) = j(z)\, Q(z),$$

où Q est un polynôme.

En effet, d'après la définition de $X_{il}(z)$, cette somme est le développement par rapport à la $l^{\text{ième}}$ colonne du déterminant obtenu en remplaçant la $l^{\text{ième}}$ colonne de l'expression de $j(z)$ sous forme de déterminant par une colonne dont la $i^{\text{ième}}$ ligne est

$$\begin{cases} (z_i - z_n) \ldots (z_i - z_{n-k+1}) & \text{si } 1 \leqq i \leqq n-k, \\ 0 & \text{si } n-k < i \leqq n, \end{cases}$$

soit

$$\begin{array}{r} \\ n-k \\ n-k+1 \\ \\ \end{array} \begin{vmatrix} 1 & z_2 + \ldots + z_n & (z_1 - z_n) & \ldots & (z_1 - z_{n-k+1}) & z_2 \ldots z_n \\ & & (z_{n-k} - z_n) & \ldots & (z_{n-k} - z_{n-k+1}) & \\ & & & 0 & & \\ 1 & z_1 + \ldots + z_{n-1} & & 0 & & z_1 \ldots z_{n-1} \end{vmatrix}.$$

Or ce déterminant est divisible, en tant que polynôme par tous les $(z_p - z_q)$ puique les $p^{\text{ième}}$ et $q^{\text{ième}}$ lignes sont égales sur $\{ z_p = z_q \}$, d'où le résultat, les $(z_p - z_q)$ étant premiers entre eux.

On en déduit immédiatement que

$$\sum_{i=1}^{n-k} [X_{il}(z)]\, [z_i - z_n] \ldots [z_i - z_{n-k+1}] = [j(z)]\, [Q(z)].$$

2. Si $0 \leqq k \leqq n-1$ et $0 < r \leqq n-k$, et le polynôme du champ

$$\sum_{i=1}^{n-k} [X_{il}(z)]\, [z_i - z_n] \ldots [z_i - z_{n-k+1}]\, A_i$$

(où les A_i sont formellement holomorphes) contient $Z_r - Z_{n-k}$ en facteur en tout point $z \in \{ z_r - z_{n-k} \}$, il en est de même pour le champ $A_r - A_{n-k}$.

En effet, d'après la première remarque, le polynôme du champ

$$\left(\sum_{i=1}^{n-k} (X_{il}(z))\, [z_i - z_n] \ldots [z_i - z_{n-k+1}] \right) A_{n-k}$$

contient $Z_r - Z_{n-k}$ en facteur aux points $z \in \{ z_r = z_{n-k} \}$, et il en est donc de même pour le champ

$$\sum_{i=1}^{n-k-1} (X_{il}(z))\, [z_i - z_n] \ldots [z_i - z_{n-k+1}]\, (A_i - A_{n-k}).$$

Or ce dernier est le développement par rapport à la $l^{\text{ième}}$ colonne du déterminant obtenu par un procédé analogue au procédé ci-dessus, mais cette fois-ci à partir de l'expression de $[j(z)]$, en remplaçant dans la $l^{\text{ième}}$ colonne le terme de la $i^{\text{ième}}$ ligne par

$$\begin{cases} [X_{il}(z)]\,[z_i - z_n] \dots [z_i - z_{n-k+1}]\,(A_i - A_{n-k}) & \text{si } i \leqq n-k-1, \\ 0 & \text{si } i > n-k-1. \end{cases}$$

Sur $\{ z_r = z_{n-k} \}$ tous les termes du développement autres que

$$[X_{il}(z)]\,[z_r - z_n] \dots [z_r - z_{n-k+1}]\,(A_r - A_{n-k})$$

donnent des polynômes contenant $Z_r - Z_{n-k}$ en facteur, donc il en est de même pour ce terme et comme les $Z_p - Z_q$ sont premiers entre eux, $(A_r - A_{n-k})_z$ contient $Z_r - Z_{n-k}$ en facteur sur $\{ z_r = z_{n-k} \}$.

Revenant à la démonstration de la proposition, écrivons le deuxième membre de (1) sous la forme

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} [X_{il}(z)] \frac{\partial(G+K)}{\partial Z_i} &= \sum_{i=1}^{n-1} [X_{il}(z)] \left(\frac{\partial(G+K)}{\partial Z_i} - \frac{\partial(G+K)}{\partial Z_n} \right) + \left(\sum_{i=1}^{n} [X_{il}] \right) \frac{\partial(G+K)}{\partial Z_n} \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} [X_{il}(z)]\,[z_i - z_n]\,(G_{i,n} + K_{i,n}) + [j(z)]\,(G_n + K_n) \end{aligned}$$

où G_n est $(nr-1)$-régulier et K_n d'ordre $nr-1$, d'après la première remarque ci-dessus et $G_{i,n}$ est $(nr-2)$-régulier, d'après le lemme 4.1 appliqué à $\dfrac{\partial G}{\partial Z_i} - \dfrac{\partial G}{\partial Z_n} \cdot K_{i,n}$ est d'ordre $nr-2$ et regroupe le terme excédentaire $[z_i - z_n]\,G_{i,n} - ([z_i - z_n]\,G_{i,n})^{nr-1}$ et le terme fourni par la division de $\dfrac{\partial K}{\partial Z_i} - \dfrac{\partial K}{\partial Z_n}$ par $[z_i - z_n]$. [Remarquons que si $z \in \{ z_i - z_n \}$ $\left(\dfrac{\partial K}{\partial Z_i} - \dfrac{\partial K}{\partial Z_n} \right)_z$ contient $Z_i - Z_n$ en facteur, mais si $z \notin \{ z_i = z_n \}$, $(K_{i,n})_z$ est en fait une série formelle et il convient de lire les égalités dans un espace de champs de séries formelles, que l'on peut d'ailleurs supposer tronquées, à condition que ce soit à un ordre assez élevé.]

Itérons le procédé :

$$\begin{aligned} A &= \sum_{i=1}^{n-1} [X_{il}(z)]\,[z_i - z_n]\,(G_{i,n} + K_{i,n}) \\ &= \sum_{i=1}^{n-2} [X_{il}(z)]\,[z_i - z_n]\,(G_{i,n} + K_{i,n} - G_{n-1,n} - K_{n-1,n}) \\ &\quad + \left(\sum_{i=1}^{n-1} [X_{il}(z)]\,[z_i - z_n] \right) (G_{n-1,n} + K_{n-1,n}). \end{aligned}$$

La deuxième remarque ci-dessus permet d'appliquer le lemme 4.1 au premier terme, d'où

$$A = \sum_{i=1}^{n-2} [X_{il}(z)] [z_i - z_n] [z_i - z_{n-1}] (G_{i,n-1,n} + K_{i,n-1,n}) + [j(z)] (G_{n-1} + K_{n-1}),$$

où $G_{i,n-1,n}$ est $(nr - 3)$-régulier, $K_{i,n-1,n}$ d'ordre $nr - 3$ et regroupe le terme excédentaire dans la division de $G_{i,n} - G_{n-1,n}$ et le terme provenant de la division de $K_{i,n} - K_{n-1,n}$. D'autre part, l'écriture du terme $[j(z)] (G_{n-1} + K_{n-1})$ résulte de la première remarque, et G_{n-1} est $nr - 2$ régulier et K_{n-1} d'ordre $nr - 2$. En répétant l'opération $(n - 1)$ fois, il vient

$$\sum_{i=1}^{n} [X_{il}(z)] \frac{\partial (G + K)}{\partial Z_i} = [j(z)] H + [j(z)] \tilde{K},$$

avec H $nr - 1 - (n - 1) = nr - n$ régulier et $\tilde{K}$ d'ordre $nr - n$.

Comparant avec (1), on a $H^{nr-n} = \left(\frac{\partial H}{\partial \sigma_l} \circ \hat{\sigma}\right)^{nr-n}$ ce qui achève la démonstration de la proposition.

Proposition 4.3. — *Pour tout champ* G *formellement holomorphe sur* $\hat{\sigma}^{-1}(\mathbf{R}^{n+s})$ *nr-régulier, symétrique par rapport aux n premières variables, il existe un champ* H *formellement holomorphe sur* $\mathbf{R}_\sigma^n \times \mathbf{R}^s$, *r-régulier avec* $(H \circ \hat{\sigma})^{nr} = G^{nr}$.

Cette proposition est une conséquence immédiate de la précédente sous réserve de la résolution du problème ponctuel qui est donnée par le :

Lemme 4.2. — *Pour tout champ* G, *formellement holomorphe sur* $\hat{\sigma}^{-1}(\mathbf{R}^{n+s})$ *de degré m symétrique par rapport aux n premières variables, il existe un champ* H *formellement holomorphe sur* $\mathbf{R}_\sigma^n \times \mathbf{R}^s$ *tel que* $G = (H \circ \hat{\sigma})^m$.

On a vu au début de la démonstration de la proposition 4.2 que la construction de H peut se faire par inversion locale de $\hat{\sigma}$, sur l'image régulière. Le problème ne se pose que sur l'image critique, et on commencera par une étude de l'ensemble critique de $\hat{\sigma}$. Pour ne pas alourdir les notations nous ferons cette étude pour σ, en supposant $s = 0$, ce qui ne restreint pas la généralité.

L'ensemble critique de σ est formé des $\binom{n}{2}$ hyperplans $\{ z/z_p = z_q \ p \neq q \}$ dont les intersections stratifient C^n pour σ.

Soit γ une partition de $\{1, 2, \ldots, n\}$, on peut considérer C^n comme somme directe des sous-espaces attachés aux classes de la partition. Une partition γ définit un ensemble $p_\gamma \subset \mathbf{C}^n$, dont les éléments sont les points dont les coordonnées sont égales dans chaque sous-espace défini par une classe de la partition mais différentes d'une classe à l'autre.

Deux partitions sont de même type si on peut passer de l'une à l'autre par une permutation de $\{1, 2, \ldots, n\}$. La relation « est de même type » est une relation d'équivalence sur l'ensemble des partitions. On notera $\dot{\gamma}$ la classe de γ.

Exemple : $n = 4$,

$$\gamma_1 = (1, 2)(3, 4), \qquad \gamma_2 = (1, 3)(2, 4), \qquad \dot{\gamma}_1 = \dot{\gamma}_2 = \{2, 2\}.$$

Pour un type de partition $\dot{\gamma}$ on notera $p_{\dot{\gamma}} = \bigcup_{\gamma \in \dot{\gamma}} p_\gamma$. Sur $p_{\dot{\gamma}}$ le rang de l'application σ est $r(\dot{\gamma}) =$ nombre de classes des partitions de type $\dot{\gamma}$.

$\bar{p}_\gamma$ est l'ensemble des points dont les coordonnées sont égales dans les sous-espaces attachés à chaque classe de la partition γ.

Sur $\bar{p}_{\dot{\gamma}} = \bigcup_{\gamma \in \dot{\gamma}} \bar{p}_\gamma$ le rang de σ est $\leqq r(\dot{\gamma})$.

Appelons σ_γ l'application dont la restriction à chaque sous-espace de $\mathbf{C}^n$ défini par la partition γ fait correspondre aux variables leurs fonctions symétriques élémentaires.

Exemple : $n = 4$,

$$\gamma = (1, 2)(3, 4);$$

$$\sigma_\gamma : \quad (z_1, z_2, z_3, z_4) \mapsto (\rho_1 = z_1 + z_2, \rho_2 = z_1 z_2, \rho_3 = z_3 + z_4, \rho_4 = z_3 z_4),$$

σ_γ est une application analytique propre dont le jacobien s'écrit par blocs et dont l'ensemble critique est exactement $\bar{p}_\gamma$.

Exemple : $n = 4$,

$$\gamma = (1, 2)(3, 4);$$

$$j_\gamma = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ z_2 & z_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & z_4 & z_3 \end{vmatrix} = (z_1 - z_2)(z_3 - z_4).$$

Si γ_1 et γ_2 sont de même type $\dot{\gamma}$, il existe $\pi \in \mathfrak{S}_n$ telle que $\sigma_{\gamma_1} = \sigma_{\gamma_2} \circ \tilde{\pi}$.

Aux applications σ_γ correspondant à un même type $\dot{\gamma}$, on peut associer une application polynomiale $\tau_{\dot{\gamma}}$ avec $\tau_{\dot{\gamma}} \circ \sigma_\gamma = \sigma$.

Exemple : $n = 3$,

$$\gamma = (1)\ (2, 3);$$

$$(z_1, z_2, z_3) \xmapsto{\sigma_{(1)(2,3)}} (\rho_1 = z_1, \rho_2 = z_2 + z_3, \rho_3 = z_2 z_3) \xmapsto{\tau_{\{1,2\}}} (\sigma_1 = \rho_1 + \rho_2, \sigma_2 = \rho_1 \rho_2 + \rho_3, \sigma_3 = \rho_1 \rho_3).$$

Le jacobien de $\tau_{\dot\gamma}$ est $i_{\dot\gamma}$ avec $i_{\dot\gamma} . j_\gamma = j$. $i_{\dot\gamma}$ ne s'annule pas sur $\sigma_\gamma(p_\gamma)$ où $\tau_{\dot\gamma}$ est donc régulière. Seuls les points de $\sigma_\gamma(\bar p_\gamma - p_\gamma)$ sont à la fois dans l'image critique de σ_γ et dans l'ensemble critique de $\tau_{\dot\gamma}$.

Étant donnée une partition γ, nous appellerons γ-symétrique un polynôme invariant par toute permutation π_γ produit direct de permutations portant sur chaque classe de la partition.

Étant donné un polynôme γ-symétrique P, nous appellerons application γ-newtonienne l'application qui lui fait correspondre l'unique polynôme Q_γ avec $P = Q_\gamma \circ \sigma_\gamma$.

Revenant à la démonstration du lemme, soit $z \in p_\gamma \cap \sigma^{-1}(\mathbf{R}^n)$, G_z est γ-symétrique, car pour $z \in p_\gamma$, $\tilde\pi_\gamma(z) = z$ et G étant symétrique,

$$G_z(Z) = G_{\tilde\pi_\gamma(z)}(\tilde\pi_\gamma(Z)) = G_z(\tilde\pi_\gamma(Z)),$$

ce qui exprime la γ-symétrie de G_z.

G_z peut alors s'écrire comme polynôme par rapport aux coordonnées ρ_i de $\sigma_\gamma(z)$,

$$G_z = Q_\gamma^z \circ \sigma_\gamma$$

sans ambiguïté car si $\tilde\pi(z) \in \sigma^{-1}(z)$, il existe σ_β avec $\beta \in \dot\gamma$ telle que $\sigma_\beta \circ \tilde\pi = \sigma_\gamma$, et on a

$$G_{\tilde\pi(z)} = Q_\gamma^{\tilde\pi(z)} \circ \sigma_\beta, \qquad \text{mais} \quad G_{\tilde\pi(z)}(\tilde\pi(Z)) = G_z(Z),$$

donc

$$Q_\gamma^{\tilde\pi(z)} \circ \sigma_\beta \circ \tilde\pi = Q_\gamma^{\tilde\pi(z)} \circ \sigma_\gamma = Q_\gamma^z \circ \sigma_\gamma,$$

et l'égalité de Q_γ^z et $Q_\gamma^{\tilde\pi(z)}$ en résulte.

D'autre part, $\tau_{\dot\gamma}$ étant régulière au point $\sigma_\gamma(z)$, l'inversion locale de $\tau_{\dot\gamma}$ fournit le polynôme $H_{\sigma(z)} = \left(Q_\gamma \circ \tau_{\dot\gamma}^{-1}\right)^m$ qui satisfait à l'énoncé du lemme.

Remarque. — L'application

$$J_{\Sigma}^{nr}(\hat\sigma^{-1}(\mathbf{R}^{n+s})) \ni G \mapsto H \in J_C^r(\mathbf{R}^{n+s})$$

définie par la proposition 4.3 qui est évidemment linéaire, est continue.

En effet, utilisant l'isomorphisme de $J_C^r(\mathbf{R}^{n+s})$ et $\mathcal{E}^r(\mathbf{R}^{n+s})$ il suffit de montrer que $\forall\ K \subset \mathbf{R}^{n+s}$, $\|H\|_K^r \leqq |||G|||_{\hat\sigma^{-1}(K)}^{nr}$. Nous avons déjà noté que $|h_0|_K \leqq k\,|g_0|_{\hat\sigma^{-1}(K)}$. Mais plus généralement d'après la remarque qui suit le lemme 4.1, la démonstration de la proposition 4.2 implique, pour $|\lambda| \leqq r$,

$$|h_\lambda|_K \leqq C_1\,|h_\lambda \circ \hat\sigma|_{\hat\sigma^{-1}(K)} \leqq C_1\,\|h_{\lambda-1} \circ \hat\sigma\|_{\hat\sigma^{-1}(K)}^{nr-(|\lambda|-1)n} \leqq C_2\,|||G|||_{\hat\sigma^{-1}(K)}^{nr-1}.$$

La distinction entre les normes $\| \ \|$ et $||| \ |||$ sur $\hat{\sigma}^{-1}(\mathrm{K})$ étant superflue pour les champs formellement holomorphes, un tel champ pouvant être considéré en restriction à chaque sous-espace réellement situé comme le complexifié d'une fonction définie sur $\mathbf{R}^n$.

Soit alors f une fonction de classe $\mathrm{C}^{nr}(\mathbf{R}^{n+s}, \mathrm{C})$, symétrique par rapport aux n premières variables, on construit le champ complexifié $[f]$ que l'on prolonge sans perte de régularité à $\hat{\sigma}^{-1}(\mathbf{R}^{n+s})$ par un champ G formellement holomorphe symétrique par rapport aux n premières variables. On en déduit l'existence sur $\mathbf{R}^{n+s}$ d'un champ H, r-régulier avec $(\mathrm{H} \circ \hat{\sigma})^{nr} = \mathrm{G}$ donc d'une fonction $\mathrm{F} \in \mathrm{C}^r(\mathbf{R}^{n+s}, \mathrm{C})$ avec $\mathrm{F} \circ \hat{\sigma} = f$.

D'où le théorème 1, que l'on pourrait encore formuler, en remarquant que

$$\| \mathrm{F} \|_{\mathrm{K}}^{r} \leq ||| \mathrm{G} |||_{\hat{\sigma}^{-1}(\mathrm{K})}^{nr} \leq k \, \| f \|_{\hat{\sigma}^{-1}(\mathrm{K}) \cap \mathbf{R}^{n+s}}^{nr},$$

par :

THÉORÈME 1 *bis*. — *Il existe un opérateur linéaire, injectif continu*

$$\bar{\mathcal{S}}^{nr}(\mathbf{R}^{n+s}) \ni f \mapsto \mathrm{F} \in \mathcal{E}^r(\mathbf{R}^{n+s})$$

tel que $\mathrm{F} \circ \hat{\sigma} = f$.

Contre-exemple. — Soit $f(x) = \left[\sum_{1 \leq i < j \leq 4} (x_i - x_j)^4 \right]^{6/5}$.

Nous laissons au lecteur le soin de vérifier que cette fonction est de classe C^4, en appliquant la formule de Faa de Bruno pour le calcul des dérivées de $f = \mathrm{U}^{6/5}$ avec $\mathrm{U} = \sum_{1 \leq i < j \leq 4} (x_i - x_j)^4$. D'autre part, l'application du théorème de Newton classique donne

$$\mathrm{U} = \mathrm{P}(\sigma) = 3\,\sigma_1^4 - 16\,\sigma_1^2\,\sigma_2 + 4\,\sigma_1\,\sigma_3 + 20\,\sigma_2^2 - 16\,\sigma_4$$

donc $f(x) = \mathrm{F} \circ \sigma(x)$ avec $\mathrm{F} = [\mathrm{P}(\sigma)]^{6/5}$.

F est de classe C^1 mais non de classe C^2 indépendamment de tout prolongement à $\mathbf{R}^4 \setminus \sigma(\mathbf{R}^4)$. En effet, $\frac{\partial^2 \mathrm{F}}{\partial \sigma_4^2} = k\,[\mathrm{P}(\sigma)]^{-4/5}$ et si l'on considère la droite $\sigma_2 = \sigma_3 = \sigma_4 = 0$ qui est dans $\sigma(\mathbf{R}^4)$,

$$\lim_{\substack{\sigma \to 0 \\ \sigma_2 = \sigma_3 = \sigma_4 = 0}} \left| \frac{\partial^2 \mathrm{F}}{\partial \sigma_4^2} \right| = +\infty.$$

5. Théorème de division en classe C^r

Dans C^{n+1+s}, pour chaque permutation involutive α des n premiers entiers, et pour tout k, $0 \leq k \leq n$, notons $\mathrm{M}_{\alpha, k}$ le sous-espace réellement situé formé par les points (z, v, t) où $z = (z_1, \ldots, z_n) \in \Gamma_\alpha$, $v - z_k \in \mathbf{R}$ (on pose $z_0 = 0$) et $t \in \mathbf{R}^s$. On notera $\tilde{\Gamma}$ la réunion finie $\tilde{\Gamma} = \bigcup_{\alpha \in \mathcal{J}} \left(\bigcup_{k=0}^{n} \mathrm{M}_{\alpha,k} \right)$.

Lemme 5.1. — *Soit $\tilde{\Phi}$ un champ r-régulier ($r \geqq n$) formellement holomorphe défini sur $\tilde{\Gamma}$, il existe des champs formellement holomorphes $\tilde{\mathrm{H}}$ ($r - n$)-régulier sur $\tilde{\Gamma}$ et A_i ($r - n + 1$)-réguliers pour $i = 0, \ldots, n - 1$ définis sur $p(\tilde{\Gamma})$ vérifiant*

$$\tilde{\Phi}^r = \left(\tilde{\mathrm{H}} \left[\prod_{i=1}^{n} (v - z_i) \right]_{\tilde{\Gamma}} \right)^r + \left(\sum_{0}^{n-1} (\mathrm{A}_i \circ p)_{\tilde{\Gamma}} [v^i]_{\tilde{\Gamma}} \right)^r$$

où $p : \mathrm{C}^{n+1+s} \ni (z, v, t) \mapsto (z, t) \in \mathrm{C}^{n+s}$.

Il suffit d'effectuer les divisions successives par les n champs définis par les $(v - z_i)_{1 \leqq i \leqq n}$, d'où une perte de régularité de n unités pour le quotient.

Notons $\tau_j : \mathrm{C}^{n+s} \ni (z, t) \mapsto (z, z_j, t) \ni \mathrm{C}^{n+1+s}$ et remarquons que $\tilde{\Phi} - \tilde{\Phi} \circ (\tau_1 \circ p)$ est défini sur $\tilde{\Gamma}$, r-régulier et contient $\mathrm{V} - \mathrm{Z}_1$ en facteur aux points de la forme (z, z_1, t), on a donc

$$(\tilde{\Phi} - \tilde{\Phi} \circ (\tau_1 \circ p))^r = \left(\tilde{\mathrm{H}} [v - z_1]_{\tilde{\Gamma}}\right)^r$$

soit

$$\tilde{\Phi}^r = \left(\tilde{\mathrm{H}}_1 [v - z_1]_{\tilde{\Gamma}}\right)^r + ((\tilde{\Phi} \circ \tau_1) \circ p)^r$$

avec $\tilde{\mathrm{H}}_1$ ($r - 1$)-régulier et $\mathrm{A}^1 = \tilde{\Phi} \circ \tau_1$ r-régulier.

Par récurrence finie, les étapes suivantes ne différant pas de la première, on obtient le résultat cherché.

Explicitement, supposons

$$\tilde{\Phi}^r = \left(\tilde{\mathrm{H}}_k \left[\prod_{i=1}^{k} (v - z_i) \right]_{\tilde{\Gamma}} \right)^r + \left(\sum_{0}^{k-1} (\mathrm{A}_i^{k-1} \circ p) [v^i] \right)^r$$

appliquant une fois de plus la conséquence du lemme de division 4.1, il vient

$$\left((\tilde{\mathrm{H}}_k - \tilde{\mathrm{H}}_k \circ (\tau_{k+1} \circ p)) \prod_{i=1}^{k} [v - z_i]_{\tilde{\Gamma}} \right)^r = \left(\tilde{\mathrm{H}}_{k+1} \left[\prod_{i=1}^{k+1} (v - z_i) \right]_{\tilde{\Gamma}} \right)^r$$

soit

$$\left(\tilde{\mathrm{H}}_k \left[\prod_{i=1}^{k} [v - z_i] \right]_{\tilde{\Gamma}} \right)^r = \left(\mathrm{H}_{k+1} \left[\prod_{i=1}^{k+1} (v - z_i) \right]_{\tilde{\Gamma}} \right)^r$$
$$+ \left(\tilde{\mathrm{H}}_k \circ (\tau_{k+1} \circ p) \left[\prod_{i=1}^{k} (v - z_i) \right]_{\tilde{\Gamma}} \right)^r$$

d'où en remplaçant et en réordonnant le reste

$$\tilde{\Phi}^r = \left(\tilde{H}_{k+1}\left[\prod_{i=1}^{k+1}(v - z_i)\right]_{\tilde{\Gamma}}\right)^r + \left(\sum_0^k (A_i^k \circ p)\,[v^i]_{\tilde{\Gamma}}\right)^r$$

avec $\tilde{H}_{k+1}$ $(r - k - 1)$-régulier et les A_i^k $(r - k)$-réguliers.

Le lemme 5.1 peut être reformulé :

Lemme 5.1 *bis.* — *Il existe un opérateur linéaire, continu*

$$J_{\mathbf{C}}^r(\Gamma) \ni \tilde{\Phi} \mapsto (\tilde{H};\, (A_i)_{0 \leq i \leq n-1}) \in J_{\mathbf{C}}^{r-n}(\tilde{\Gamma}) \times [J_{\mathbf{C}}^{r-n+1}(p(\tilde{\Gamma}))]^n,$$

avec

$$\tilde{\Phi}^r = \left(\tilde{H}\left[\prod_{i=1}^{n}(v - z_i)\right]_{\tilde{\Gamma}}\right)^r + \left(\sum_0^{k-1}(A_i \circ p)\,[v^i]_{\tilde{\Gamma}}\right)^r.$$

La linéarité et la continuité de l'opérateur résultant immédiatement de la démonstration. (Cet opérateur est d'ailleurs un isomorphisme sur un produit d'espaces de champs de multiplicateurs.)

Théorème de division. — *Il existe un opérateur linéaire, continu :*

$$u :\ \mathcal{E}^r(\mathbf{R}^{1+s}) \ni \varphi(x, t) \mapsto (h(x, \sigma, t), (\alpha_i(\sigma, t))_{0 \leq i \leq n-1}) \in \mathcal{E}^{\left[\frac{r-n}{n}\right]}(\mathbf{R}^{n+1+s}) \times \left[\mathcal{E}^{\left[\frac{r-n+1}{n}\right]}(\mathbf{R}^{n+s})\right]^n$$

tel que

$$\varphi(x, t) = (x^n - \sigma_1 x^{n-1} + \ldots + (-1)^n \sigma_n)\, h(x, \sigma, t) + \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i(\sigma, t)\, x^i,$$

$\left[\frac{p}{q}\right]$ *désignant la partie entière de* p/q.

En effet, $\varphi(x, t) \in \overline{\mathcal{S}}^r(\mathbf{R}^{n+1+s})$ en considérant φ comme fonction trivialement symétrique des n premières variables.

On construit le champ complexifié $[\varphi]$ formellement holomorphe r-régulier sur $\mathbf{R}^{n+1+s}$ que l'on prolonge par $\tilde{\Phi}$ formellement holomorphe r-régulier sur $\tilde{\Gamma}$ et symétrique par rapport aux n premières variables. D'après le lemme 5.1 il existe $\tilde{H}$ et $(A_i)_{0 \leq i \leq n-1}$, vérifiant

$$\tilde{\Phi}^r = \left(\tilde{H}\left[\prod_{i=1}^{n}(v - z_i)\right] + \sum_{i=0}^{n-1}(A_i \circ p)\,[v^i]\right)^r.$$

En prenant les restrictions à $\sigma^{-1}(\mathbf{R}^n)\times\mathbf{R}^{1+s}$ et en symétrisant au besoin par rapport aux z_i, l'application de la proposition 4.2 donne

$$[\varphi]^r = [\varphi\circ\hat\sigma]^r = ([\mathrm{P}\circ\hat\sigma].[h\circ\hat\sigma] + \sum_i [\alpha_i\circ\hat\sigma].[x^i\circ\hat\sigma])^r$$

où on a posé

$$x^n - \sigma_1 x^{n-1} + \ldots + (-1)^n \sigma_n = \mathrm{P}(x, \sigma).$$

On en déduit $\varphi(x, t) = \mathrm{P}(x, \sigma)\, h(x, \sigma, t) + \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i(\sigma, t)\, x^i$ avec, si φ est de classe C^r, un quotient h de classe $\mathrm{C}^{\left[\frac{r-n}{n}\right]}$ et un reste à coefficients de classe $\mathrm{C}^{\left[\frac{r-n+1}{n}\right]}$, la diminution de l'ordre de dérivabilité de r à $r-n$ (resp. $r-n+1$) provenant de l'application du lemme 5.1 et la diminution de $r-n$ à $\left[\frac{r-n}{n}\right]$ $\left(\text{resp. de } r-n+1 \text{ à } \left[\frac{r-n+1}{n}\right]\right)$ provenant de la proposition 4.3.

Toutes les opérations qui permettent d'obtenir h et les α_i sont linéaires et continues.

Comme d'habitude la division par le polynôme générique permet la division par un polynôme distingué en considérant l'application $a : \mathbf{R}^s \ni t \mapsto \sigma = a(t) \in \mathbf{R}^n$ avec $a(0) = 0$. Observons toutefois que cette nouvelle composition peut altérer le résultat si a n'est pas au moins de classe $\mathrm{C}^{\left[\frac{r-n+1}{n}\right]}$, mais aussi l'améliorer si a est suffisamment plate sur l'image réciproque de l'ensemble des zéros du discriminant du polynôme générique.

Exemple : Si $f(x, y)$ est une fonction de classe C^r qui s'annule sur $\{y^2 - x^3 = 0\}$, il existe g de classe $\mathrm{C}^{\left[\frac{2r}{3}-2\right]}$ au moins, telle que $f(x, y) = (y^2 - x^3)\, g(x, y)$ alors que l'application directe de la proposition laissait prévoir g de classe $\mathrm{C}^{\left[\frac{r-2}{2}\right]}$.

Sommairement, disons qu'on considère $y^2 - x^3$ comme polynôme distingué en y, puis en x. L'étude du comportement des dérivés excédentaires dans le théorème de Newton, montre que la platitude de x^3 (resp. y^2) sur le discriminant du polynôme permet d'obtenir une compensation partielle de la perte de dérivabilité.

D'autre part, f étant ponctuellement dans l'idéal $(y^2 - x^3)\,\mathrm{C}^r$, en modifiant au besoin le prolongement du reste à l'ensemble où le polynôme distingué a des racines imaginaires, on peut supposer que ce reste est nul.

Le résultat ainsi obtenu est par contre le meilleur possible comme le montre l'étude de la fonction

$$f(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \geqq 0, \\ |x|^{r+\mu} \; 0 < \mu < 1 & \text{si} \quad x < 0. \end{cases}$$

BIBLIOGRAPHIE

BARBANÇON :

[1] *A propos du théorème de Newton pour les fonctions de classe* C^m (*Ann. Fac. Sc. P. Penh,* 1969).

BOURBAKI :

[1] *Fonctions d'une variable réelle,* chap. 1.

GLAESER :

[1] *Fonctions composées différentiables* (*Ann. of Math.,* vol. 77, 1963).

[2] (*) *Théorème de préparation différentiable* (*Liverpool Symposium,* 1971).

[3] *Étude de quelques algèbres tayloriennes* (*Journal d'Analyse Math.,* Jérusalem, 1958).

[4] *Racine carrée d'une fonction différentiable* (*Ann. Inst. Fourier,* 1963).

[5] *Multiplicateurs rugueux des fonctions différentiables et synthèse spectrale* (*Ann. scient. Éc. Norm. Sup.,* t. 69, 1962, p. 243-261).

HESTENES :

[1] *Extension of the range of differentiable functions* (*Duke Math. J.,* vol. 7, 1941).

LASSALLE :

[1] *Une démonstration du théorème de division pour les fonctions différentiables* (Polycopié du centre de Physique théorique de l'École Polytechnique).

LOJASIEWICZ :

[1] *Withney fields and Malgrange Mather Preparation Theorem* (*Liverpool Symposium,* 1971).

[2] *Ensembles semi-analytiques* (Polycopié I. H. E. S., 1965).

MALGRANGE :

[1] *Ideals of differentiable functions,* Tata Institute of fundamental Research Bombay, 1966).

WITHNEY :

[1] *Functions differentiable on the Boundaries of regions* (*Ann. of Math.,* vol. 55 N, (juillet 1934).

(Manuscrit reçu le 15 mars 1972.)

G. BARBANÇON,
Institut de Recherche mathématique avancée,
Laboratoire associé au C. N. R. S.,
7, rue René-Descartes,
67-Strasbourg.

(*) M. Glaeser y a signalé une erreur (*cf.* GLAESER, *Zentralblatt,* 214 Band, Heft 1, 29 novembre 1971, p. 128).