HENRI SKODA

d''-cohomologie à croissance lente dans $\mathbf{C}^n$

Annales scientifiques de l'É.N.S. 4e série, tome 4, nº 1 (1971), p. 97-120
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1971_4_4_1_97_0>

Ann. scient. Éc. Norm. Sup.,
4e série, t. 4, 1971, p. 97 à 120.

d''-COHOMOLOGIE A CROISSANCE LENTE DANS $\mathbf{C}^n$

PAR HENRI SKODA.

Introduction.

Soit f une forme différentielle dans $\mathbf{C}^n$, d''-fermée, et dont les coefficients sont soit des mesures à croissance lente, soit des fonctions dans L^p_{loc} à croissance lente ($1 \leq p \leq +\infty$). On construit une forme U telle que

$$d''U = f$$

et qui vérifie des conditions de croissance très précises. Lorsque f s'annule au voisinage de 0, la construction de U est entièrement explicite, on a une représentation intégrale des coefficients de la forme U en fonction des coefficients de f, à l'aide de noyaux.

On reprend une méthode qui avait servi à démontrer la trivialité locale de la d''-cohomologie (*cf.* Dolbeault [1]) et qui consiste à résoudre d'abord l'équation $\Delta U = 2\,\delta'' f$, la forme $\omega = f - d''U$ est alors d''-fermée et harmonique et dans le cas présent, on montre que ses coefficients sont des polynômes; on est alors ramené au cas où f est polynomiale. La technique utilisée suit de très près celle employée par P. Lelong (*cf.* [3]) pour la résolution de $id'd''V = \theta$ (lorsque θ est à croissance lente), en particulier dans la construction des noyaux intégraux et dans la majoration de la forme ω.

On retrouve d'ailleurs les résultats de P. Lelong relatifs à l'opérateur $d'd''$.

La même méthode s'applique pour l'opérateur d dans $\mathbf{R}^n$ et donne des résultats tout à fait semblables.

Une méthode semblable, mais techniquement encore plus pénible, permettrait, dans le cas d'un ouvert de $\mathbf{C}^n$ régulier, borné, pseudoconvexe, de ramener la d''-cohomologie des formes à coefficients L^p_{loc} (ou mesures) et à croissance lente, à la d''-cohomologie à croissance d'Hörmander. Mais il me paraît difficile d'obtenir alors les résultats *optimaux* sur la croissance.

Dans le cas où f est une forme à coefficients dans L^2_{loc}, nous avons comparé nos résultats à ceux de Hörmander, ce qui nous a conduit à une petite amélioration technique du résultat d'Hörmander; le théorème d'Hörmander, amélioré, redonne alors très sensiblement nos résultats (dans le cas L^2).

La première partie de ce travail, très technique, est consacrée à la construction et à l'estimation d'une bonne solution de l'équation $\Delta U = \frac{\partial \mu}{\partial z_i}$ (où U est une fonction et μ une mesure). On en déduit alors aussitôt une forme U solution de $\Delta U = \delta'' f$. La deuxième partie est consacrée à la résolution du problème initialement posé.

I. — Solution de l'équation $\Delta U = \frac{\partial \mu}{\partial z_i}$.

Soit σ_n l'aire de la sphère euclidienne de $\mathbf{C}^n = \mathbf{R}^{2n}$, soit $E(z)$ la solution élémentaire du laplacien Δ, définie par

$$E(z) = -\frac{1}{(2n-2)\sigma_n |z|^{2n-2}}$$

$\left[\text{on pose } |z| = (|z_1|^2 + |z_2|^2 + \ldots + |z_n|^2)^{\frac{1}{2}}\right]$.

Si μ désigne une mesure sur $\mathbf{C}^n$ à support compact, on a une solution de l'équation

$$\Delta U = \frac{\partial \mu}{\partial z_i}$$

donnée par

$$U = E \star \frac{\partial \mu}{\partial z_i} = \frac{\partial E}{\partial z_i} \star \mu.$$

On a $\frac{\partial E}{\partial z_i} = \frac{\bar{z}_i}{2\sigma_n |z|^{2n}}$ (la dérivée étant calculée au sens des distributions), $\frac{\partial E}{\partial z_i}$ étant localement sommable, $U(z)$ est donné par l'intégrale

$$U(z) = \frac{1}{2\sigma_n} \int_{\mathbf{C}^n} (\bar{z}_i - \bar{x}_i) |z - x|^{-2n} d\mu(x),$$

intégrale qui converge absolument pour presque tout z.

Si μ est maintenant une mesure à croissance lente dans $\mathbf{C}^n$, nulle au voisinage de o, on va construire une solution U en modifiant convenablement le noyau $(\bar{z}_i - \bar{x}_i) |z - x|^{-2n}$.

On remarque que, pour x fixé, $x \neq 0$, $(\bar{z}_i - \bar{x}_i) |z - x|^{-2n}$ est une fonction harmonique de z au voisinage de o (dérivée d'une fonction harmonique), on peut donc développer $(\bar{z}_i - \bar{x}_i)\,|\,z - x\,|^{-2n}$, au voisinage de o en série de polynômes *homogènes* et *harmoniques* en z :

$$\frac{1}{2\sigma_n}(\bar{z}_i - \bar{x}_i)\,|\,z - x\,|^{-2n} = \sum_{s=0}^{\infty} P_{s,i}(z, x),$$

$P_{s,i}(z, x)$ désignant un polynôme homogène, de degré s, des variables z_j et $\bar{z}_k$, dont les coefficients sont des fonctions de x, définies pour $x \neq 0$.

DÉFINITION. — On définit les noyaux suivants :

$$k_i(z, x) = \frac{1}{2\sigma_n}(\bar{z}_i - \bar{x}_i)\,|\,z - x\,|^{-2n},$$

$$k_i(q, z, x) = k_i(z, x) - \sum_{s=0}^{q} P_{s,i}(z, x)$$

pour q entier $\geqq 0$.

Les noyaux $k_i(q, z, x)$ sont donc définis pour $x \neq 0$ et $z \neq x$.

1. MAJORATIONS DES NOYAUX $k_i(q, z, x)$. — On a besoin du lemme suivant qui décrit le comportement des noyaux $k_i(q, z, x)$.

LEMME 1. — *On pose* $u = |\,z\,|.|\,x\,|^{-1}$. *Soit* ε *tel que* $0 < \varepsilon < 1$. *Il existe des constantes* $C_1(\varepsilon, q)$, $C_2(\varepsilon, q)$, $C_3(\varepsilon, q, p)$ *telles que* :

(*a*) $$|\,x\,|^{2n-1}\,|\,k_i(q, z, x)\,| \leqq C_1(\varepsilon, q)\,u^{q+1} \qquad \textit{pour} \quad u < 1 - \varepsilon\,;$$

(*b*) $$|\,x\,|^{2n-1}\,|\,k_i(q, z, x)\,| \leqq C_2(\varepsilon, q)\,u^{q} \qquad \textit{pour} \quad u > 1 + \varepsilon\,;$$

(*c*) $$\int_{1-\varepsilon \leqq |\zeta| \leqq 1+\varepsilon} \Big|\,|\,x\,|^{2n-1} k_i(q, |\,x\,|\,\zeta, x)\Big|^p d\zeta \leqq C_3(\varepsilon, q, p) \qquad \textit{pour} \quad 1 \leqq p < \frac{2n}{2n-1}.$$

Posons $u = |\,z\,|.|\,x\,|^{-1}$ et $\cos\varphi = \operatorname{Re}\dfrac{\langle z, x\rangle}{|\,z\,|.|\,x\,|}$ $\left(\text{avec } \langle z, x\rangle = \sum_{j=1}^{n} z_j \bar{x}_j\right)$.

On a, lorsque $u < 1$:

$$|\,z - x\,|^{-2n} = |\,x\,|^{-2n}(1 - 2u\cos\varphi + u^2)^{-n},$$

$$|\,z - x\,|^{-2n} = |\,x\,|^{-2n}\left[(1 - u\,e^{i\varphi})(1 - u\,e^{-i\varphi})\right]^{-n},$$

$$|\,z - x\,|^{-2n} = |\,x\,|^{-2n}\left[\left(\sum_{p=0}^{\infty} u^p e^{ip\varphi}\right)\left(\sum_{q=0}^{\infty} u^q e^{-iq\varphi}\right)\right]^n,$$

$$|\,z - x\,|^{-2n} = |\,x\,|^{-2n}\left[\sum_{\substack{p=0\\q=0}}^{\infty} \cos(p - q)\,\varphi\, u^{p+q}\right]^n,$$

$$|\,z - x\,|^{-2n} = |\,x\,|^{-2n}\sum_{s=0}^{\infty} B_s(\cos\varphi)\,u^s,$$

$B_s(\cos\varphi)$ désignant un polynôme en $\cos\varphi$ de degré s.

Les deux dernières égalités montrent qu'on a

$$|B_s(\cos\nu)| \leq B_s(1).$$

Posons $b_s = B_s(1)$, on a

$$(1-u)^{-2n} = \sum_{s=0}^{\infty} b_s u^s = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(s+2n-1)!}{s!\,(2n-1)!} u^s.$$

Calculons maintenant le développement de $k_i(z, x)$:

$$k_i(z, x) = \frac{1}{2\sigma_n}(\bar{z}_i - \bar{x}_i)\,|x|^{-2n} \sum_{s=0}^{\infty} B_s(\cos\nu)\, u^s,$$

$$k_i(z, x) = -\frac{\bar{x}_i}{2\sigma_n}|x|^{-2n} + \frac{|x|^{-2n}}{2\sigma_n} \sum_{s=1}^{\infty} [\bar{z}_i B_{s-1}(\cos\nu)\, u^{s-1} - \bar{x}_i B_s(\cos\nu)\, u^s].$$

On a donc

$$P_{0,i}(z, x) = -\frac{\bar{x}_i}{2\sigma_n}|x|^{-2n},$$

$$P_{s,i}(z, x) = \frac{|x|^{-2n}}{2\sigma_n}[\bar{z}_i B_{s-1}(\cos\nu)\, u^{s-1} - \bar{x}_i B_s(\cos\nu)\, u^s].$$

Il en résulte les majorations suivantes :

$$|x|^{2n-1}\,|P_{0,i}(z, x)| \leq \frac{1}{2\sigma_n},$$

$$|x|^{2n-1}\,|P_{s,i}(z, x)| \leq \frac{b_s + b_{s-1}}{2\sigma_n} u^s.$$

Posons

$$c_s = \frac{b_s + b_{s-1}}{2\sigma_n} \quad \text{pour} \quad s \geq 1 \quad \text{et} \quad c_0 = 1.$$

On a donc

$$|x|^{2n-1}\,|P_{s,i}(z, x)| \leq c_s u^s,$$

$$\sum_{s=0}^{\infty} c_s u^s \leq \frac{1}{\sigma_n}(1-u)^{-2n}$$

pour $u < 1$, le noyau $k_i(q, z, x)$ se développe en série :

$$k_i(q, z, x) = \sum_{s=q+1}^{\infty} P_{s,i}(z, x),$$

$$|x|^{2n-1}\,|k_i(q, z, x)| \leq \sum_{s=q+1}^{\infty} c_s u^s.$$

Comme cette dernière série converge pour $u < 1$, il existe une constante $C_1(\varepsilon, q)$ telle que

$$\sum_{s=q+1}^{\infty} c_s u^s \leq C_1(\varepsilon, q)\, u^{q+1} \quad \text{pour} \quad u < 1 - \varepsilon,$$

ce qui donne la majoration (a) du lemme 1.

Supposons maintenant $u > 1 + \varepsilon$, c'est-à-dire $|z| > (1+\varepsilon)|x|$. On a

$$|k_i(z, x)| \leqq \frac{1}{2\sigma_n} |z - x|^{-2n+1} \leqq \frac{1}{2\sigma_n} \varepsilon^{-2n+1} |x|^{-2n+1},$$

$$k_i(q, z, x) = k_i(z, x) - \sum_{s=0}^{q} P_{s,i}(z, x),$$

$$|x|^{2n-1} |k_i(q, z, x)| \leqq \frac{\varepsilon^{-2n+1}}{2\sigma^n} + \sum_{s=1}^{q} c_s u^s \leqq C_2(\varepsilon, q) u^q,$$

ce qui est la majoration (b) du lemme 1.

Supposons $1 + \varepsilon \geqq u \geqq 1 - \varepsilon$, on a

$$|k_i(q, z, x)| \leqq \frac{1}{2\sigma_n} |z - x|^{-2n+1} + \sum_{s=0}^{q} |P_{s,i}(z, x)|,$$

$$|x|^{2n-1} |k_i(q, z, x)| \leqq \frac{1}{2\sigma_n} |x|^{2n-1} |z - x|^{-2n+1} + \sum_{s=0}^{q} c_s (1+\varepsilon)^s.$$

Posons $z = |x|\zeta$, $x = |x|\xi$, on obtient

$$|x|^{2n-1} |k_i(q, |x|\zeta, x) \leqq \frac{1}{2\sigma_n} |\zeta - \xi|^{-2n+1} + C(\varepsilon, q).$$

L'intégrale

$$\int_{1-\varepsilon \leqq |\zeta| \leqq 1+\varepsilon} |\zeta - \xi|^{-p(2n-1)} d\zeta$$

converge pour $1 \leqq p < \dfrac{2n}{2n-1}$ et est indépendante de ξ qui appartient à la sphère unité de $\mathbf{C}^n$. Il en résulte la majoration (c) du lemme 1.

2. Théorème d'existence pour les mesures. — Soit μ une mesure à croissance lente, nulle dans l'ouvert $|x| < a$; on pose

$$U(z) = \int_{\mathbf{C}^n} k_i(q, z, x)\, d\mu(x)$$

et on va choisir q de sorte que l'intégrale converge pour presque tout z. On désigne par $|\mu|$ la mesure valeur absolue de la mesure μ.

Soit φ une fonction continue sur $\mathbf{C}^n$, telle que $\varphi(z) \leqq 1$, soient $p \geqq 1$ et r un nombre réel. Considérons la norme

$$\|f\|_{p,r,\varphi} = \left(\int_{\mathbf{C}^n} |f(z)|\, |z|^{-r}|^p\, \varphi(z)\, dz \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Considérons alors $k_i(q, z, x)$ comme une fonction de x à valeur dans l'espace normé des fonctions f telles que $\|f\|_{p,r,\varphi} < +\infty$ et considérons l'intégrale définissant U comme une intégrale vectorielle; on a

$$\|U\|_{p,r,\varphi} \leq \int_{\mathbf{C}^n} \|k_i(q, \ldots, x)\|_{p,r,\varphi}\, d|\mu|(x)$$

sous réserve de la convergence de l'intégrale de droite,

$$\|k_i(q, \ldots, x)\|^p_{p,r,\varphi} = \int_{\mathbf{C}^n} |k_i(q, z, x)|^p |z|^{-pr} \varphi(z)\, dz.$$

Posons $z = |x|\zeta$, on a $u = |\zeta|$ et

$$\|k_i(q, \ldots, x)\|^p_{p,r,\varphi} = |x|^{-\alpha} \int_{\mathbf{C}^n} \big||x|^{2n-1} k_i(q, |x|\zeta, x)\big|^p |\zeta|^{-pr} \varphi(|x|\zeta)\, d\zeta,$$

avec $\alpha = p(2n-1) + pr - 2n$.

Montrons que l'intégrale converge et est majorée uniformément en x (avec un choix convenable de p, q, r, φ), on découpe l'intégrale en trois morceaux :

— Pour $u = |\zeta| < 1 - \varepsilon$, on a d'après le lemme 1 :

$$|x|^{2n-1} |k_i(q, |x|\zeta, x) \leq C_1(\varepsilon, q) |\zeta|^{q+1}$$

comme $\varphi \leq 1$, l'intégrale converge, uniformément en x, au voisinage de 0 pourvu que

$$p(q+1-r) > -2n.$$

— Pour $1 - \varepsilon \leq |\zeta| \leq 1 + \varepsilon$, on majore l'intégrale en utilisant le (c) du lemme 1, pourvu que

$$1 \leq p < \frac{2n}{2n-1}.$$

— Pour $|\zeta| \geq 1 + \varepsilon$, on a d'après le (b) du lemme 1 :

$$|x|^{2n-1} |k_i(q, |x|\zeta, x)| \leq C_2(\varepsilon, q) |\zeta|^q,$$

l'intégrale converge, uniformément en x, au voisinage de l'infini pourvu que $p(q-r) < -2n$. Si on a seulement $p(q-r) = -2n$; on choisit $\varphi(z) = [1 + \mathrm{Log}^2(1 + |z|)]^{-1}$ de sorte que l'intégrale est majorée par

$$I = C_2^p(\varepsilon, q) \int_{|\zeta| \geq 1+\varepsilon} |\zeta|^{-2n} [1 + \mathrm{Log}^2(1 + |x|.|\zeta|)]^{-1}\, d\zeta,$$

$$I = \sigma_n C_2^p(\varepsilon, q) \int_{1+\varepsilon}^{+\infty} t^{-1} [1 + \mathrm{Log}^2(1 + |x|t)]^{-1}\, dt,$$

$$I = \sigma_n C_2^p(\varepsilon, q) \int_{(1+\varepsilon)|x|}^{+\infty} t^{-1} [1 + \mathrm{Log}^2(1 + t)]^{-1}\, dt,$$

comme $\mu = 0$ lorsque $|x| < a$, seuls importent les x tels que $|x| > a$, on a alors

$$\mathrm{I} \leqq \sigma_n C_2^p(\varepsilon, q) \int_{(1+\varepsilon)a}^{+\infty} t^{-1} [1 + \log^2(1+t)]^{-1} \, dt,$$

intégrale qui est convergente et indépendante de x.

En définitive, il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\| k_i(q, \ldots, x) \|_{p,r\varphi}^p \leqq C |x|^{-\alpha} \quad \text{pour} \quad |x| \geqq a,$$

sous les hypothèses

$$p(q+1-r) > -2n, \qquad p(q-r) < -2n, \qquad \varphi = 1$$

ou

$$p(q-r) = -2n, \qquad \varphi = 1 + \log^2(1 + |z|).$$

On a alors

$$\| u \|_{p,r,\varphi} \leqq C \int_{|x| \geqq a} |x|^{-\frac{\alpha}{p}} d|\mu|(x),$$

où $\dfrac{\alpha}{p} = r + 2n - 1 - \dfrac{2n}{p}$.

Posons $\rho = r - \dfrac{2n}{p} - 1$. Les majorations qui précèdent s'écrivent alors

$$\left(\int_{\mathbf{C}^n} |U(z)|^p |z|^{-p\rho - p - 2n} \varphi(z) \, dz \right)^{\frac{1}{p}} \leqq C \int_{|x| \geqq a} |x|^{-\rho - 2n} d|\mu|(x).$$

Sous les hypothèses

$$q - 1 \leqq \rho < q, \qquad \varphi(z) = 1 \quad \text{si} \quad q - 1 < \rho;$$
$$\varphi(z) = [1 + \log^2(1 + |z|)]^{-1} \quad \text{si} \quad q - 1 = \rho.$$

Il nous reste à envisager le cas où

$$\int_{|x| \geqq a} |x|^{-\rho} d|\mu|(x) < +\infty \qquad \text{avec} \quad \rho < 2n - 1.$$

On prend alors $U(z) = \int_{\mathbf{C}^n} k_i(z, x) \, d\mu(x)$. On a

$$\| U \|_{p,r,\varphi} \leqq \int_{|x| \geqq a} \| k_i(z, x) \|_{p,r,\varphi} \, d|\mu|(x),$$

$$|x|^{p\rho} \| k_i(z, x) \|_{p,r,\varphi}^p = |x|^{p\rho} \int_{\mathbf{C}^n} |k_i(z, x)|^p |z|^{-pr} \varphi(z) \, dz.$$

Il s'agit de majorer le second membre par une constante pour $|x| > a$. Dans toute la suite de l'exposé, on désigne par $C(\varepsilon)$ une constante dépendant de ε, qui peut varier d'une formule à l'autre.

— Pour $u < 1 - \varepsilon$, $|z| < (1-\varepsilon)|x|$, on a

$$|k_i(z, x)| \leqq C(\varepsilon)|x|^{-2n+1}.$$

On pose

$$I_1 = |x|^{p\rho} \int_{|z|<(1-\varepsilon)|x|} |k_i(z, x)|^p |z|^{-pr} \varphi(z)\, dz,$$

$$I_1 \leqq C(\varepsilon)|x|^{p\rho - p(2n-1)} \int_{|z|<(1-\varepsilon)|x|} |z|^{-pr}\, dz,$$

$$I_1 \leqq C(\varepsilon)|x|^{p(\rho-2n+1)} \int_0^{(1-\varepsilon)|x|} t^{2n-1-pr}\, dt,$$

$$I_1 \leqq C(\varepsilon)|x|^{p(\rho-2n+1)}[(1-\varepsilon)|x|]^{2n-pr},$$

$$I_1 \leqq C(\varepsilon)|x|^{p(\rho-2n+1)-pr+2n} \leqq C(\varepsilon, a)$$

si les conditions suivantes sont réalisées :

$$2n - pr > 0,$$
$$p(\rho - r - 2n + 1) + 2n \leqq 0.$$

— Pour $1 - \varepsilon \leqq u \leqq 1 + \varepsilon$, on pose $z = |x|\zeta$ et $x = |x|\xi$,

$$I_2 = |x|^{p\rho} \int_{1-\varepsilon \leqq u \leqq 1+\varepsilon} |k_i(z, x)|^p |z|^{-pr} \varphi(z)\, dz,$$

$$I_2 \leqq C(\varepsilon)|x|^{p(\rho-2n+1-r)+2n} \int_{1-\varepsilon \leqq |\zeta| \leqq 1+\varepsilon} |\zeta - \xi|^{-p(2n-1)}\, d\zeta,$$

Soit $I_2 \leqq C(\varepsilon, a)$ sous les hypothèses

$$p(\rho - r - 2n + 1) + 2n \leqq 0,$$
$$1 \leqq p < \frac{2n}{2n-1}.$$

— Pour $u > 1 + \varepsilon$, $|z| > (1+\varepsilon)|x|$, on pose

$$I_3 = |x|^{p\rho} \int_{u>1+\varepsilon} |k_i(z, x)^p |z|^{-pr} \varphi(z)\, dz$$

$$\leqq C(\varepsilon)|x|^{p\rho} \int_{u>1+\varepsilon} |z|^{-p(2n-1)-pr} \varphi(z)\, dz$$

$$\leqq C(\varepsilon)|x|^{p\rho} \int_{(1+\varepsilon)|x|}^{+\infty} t^{-p(r+2n-1)+2n-1}\, dt$$

$$\leqq C(\varepsilon)|x|^{p(\rho-r-2n+1)+2n} \leqq C(\varepsilon, a).$$

Si les conditions suivantes sont réalisées :

$$\begin{cases} -p(r+2n-1)+2n-1<-1, \\ p(\rho-r-2n+1)+2n\leqq 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} r+2n-1>\dfrac{2n}{p}, \\ r+2n-1\geqq\dfrac{2n}{p}+\rho. \end{cases}$$

La deuxième condition entraîne la première sauf si $\rho = 0$, dans ce cas, on peut choisir :

$$r+2n-1=\frac{2n}{p},$$

$$\varphi(z)=1+\mathrm{Log}^2(1+|z|),$$

comme on le vérifie immédiatement.

En définitive, on a

$$\|U\|_{p,r,\varphi}\leqq C(\varepsilon, a)\int_{|x|\geqq a}|x|^{-\rho}\,d|\mu|(x)$$

avec les choix suivants :

$$r=\rho+\frac{2n}{p}-2n+1,$$

$$\rho<2n-1,$$

$$\varphi(z)=1 \qquad \text{si} \quad \rho\neq 0,$$

$$\varphi(z)=1+\mathrm{Log}^2(1+|z|) \qquad \text{si} \quad \rho=0.$$

Pour toute mesure μ telle que $\int_{|x|\geqq a}|x|^{-\rho}\,d|\mu|(x)<+\infty$ et nulle pour $|x|<a$, on a donc construit un noyau tel que

$$U(z)=\int_{\mathbf{C}^n}k_l(q, z, x)\,d\mu(x)$$

converge pour presque tout z et tel que

$$\|U\|_{p,r,\varphi}<C\int_{|x|\geqq a}|x|^{-\rho}\,|\mu|(x)$$

pour un choix convenable de p, r, φ.

Soit χ une fonction de $\mathcal{D}(\mathbf{C}^n)$ égale à 1 au voisinage de 0, soient

$$\chi_m(z)=\chi\left(\frac{z}{m}\right), \qquad \mu_m=\chi_m\mu, \qquad U_m=\int_{\mathbf{C}^n}k_l(q, z, x)\,d\mu_m(x),$$

μ_m est à support compact, on a donc

$$\mathrm{U}_m = \int_{\mathbf{C}^n} k_i(z, x)\, d\mu_m(x) - \sum_{s=0}^{q} \int_{\mathbf{C}^n} \mathrm{P}_{s,i}(z, x)\, d\mu_m(x)$$

comme $\mathrm{P}_{s,i}(z, x)$ est harmonique en z, on a

$$\Delta \mathrm{U}_m = \frac{\partial \mu_m}{\partial z_i}$$

or $\mu_m \to \mu$ dans $\mathcal{D}'(\mathbf{C}^n)$ et $\mathrm{U}_m \to \mathrm{U}$ dans $\mathcal{D}'(\mathbf{C}^n)$, on a donc

$$\Delta \mathrm{U} = \lim \Delta \mathrm{U}_m = \lim \frac{\partial \mu_m}{\partial z_i} = \frac{\partial \mu}{\partial z_i}.$$

On regroupe tous les résultats en un même énoncé.

THÉORÈME 1. — *Soit μ une mesure sur $\mathbf{C}^n$ nulle pour $|x| < a$, telle que*

$$\int_{\mathbf{C}^n} |z|^{-\rho-2n}\, d|\mu|(z) < +\infty \quad \textit{pour un } \rho \geqq -2n.$$

On pose $\mathrm{U}(z) = \int_{\mathbf{C}^n} k_i(q, z, x)\, d\mu(x)$, *où q est l'entier $\geqq 0$ tel que $q - 1 \leqq \rho < q$. Si $-1 > \rho \geqq -2n$, on prend*

$$\mathrm{U}(z) = \int_{\mathbf{C}^n} k_i(z, x)\, d\mu(x).$$

Alors $\mathrm{U}(z)$ *est solution de* $\Delta \mathrm{U} = \frac{\partial \mu}{\partial z_i}$ *[dans $\mathcal{D}'(\mathbf{C}^n)$] et vérifie les majorations*

$$\left(\int_{\mathbf{C}^n} |\mathrm{U}(z)|z|^{-\rho-1}|^p |z|^{-2n} \varphi(z)\, dz\right)^{\frac{1}{p}} \leqq \mathrm{C}(a, p, \rho) \int_{\mathbf{C}^n} |z|^{-\rho-2n}\, d|\mu|(z),$$

$\mathrm{C}(a, p, \rho)$ *désigne une constante indépendante de μ, avec*

$$\varphi(z) = [1 + \mathrm{Log}^2(1 + |z|)]^{-1}$$

si $\rho = -2n$ ou si ρ est un entier $\geqq -1$, $\varphi(z) = 1$ dans tous les autres cas; pour tout p tel que $1 \leqq p < \frac{2n}{2n-1}$.

Si maintenant μ n'est plus nulle au voisinage de 0, soit χ une fonction de $\mathcal{D}(\mathbf{C}^n)$, égale à 1 pour $|x| < a$ et telle que $0 \leqq \chi(x) \leqq 1$. On a $\mu = \chi\mu + (1-\chi)\mu$. Il suffit de prendre

$$\mathrm{U}(z) = \frac{\partial \mathrm{E}}{\partial z_i} \star (\chi\mu) + \int_{\mathbf{C}^n} k_i(q, z, x)[1 - \chi(x)]\, d\mu(x),$$

on en déduit aussitôt le corollaire suivant :

COROLLAIRE 1. — *Soit* μ *une mesure telle que*

$$\int_{\mathbf{C}^n} (1+|z|)^{-\rho-2n}\, d|\mu|(z) < +\infty$$

pour un $\rho \geqq -2n$. *Alors il existe une fonction localement sommable* U, *solution de l'équation*

$$\Delta U = \frac{\partial \mu}{\partial z_i}$$

qui vérifient les estimations

$$\int_{\mathbf{C}^n} |U(z)(1+|z|)^{-\rho-1}|^p (1+|z|)^{-2n} \varphi(z)\, dz < +\infty$$

pour tout p *tel que* $1 \leqq p < \frac{2n}{2n-1}$ *avec* $\varphi(z) = [1 + \mathrm{Log}^2(1+|z|)]^{-1}$ *si* $\rho = -2n$ *ou si* ρ *est un entier* $\geqq -1$, $\varphi(z) = 1$ *dans tous les autres cas.*

Le théorème 1 et le corollaire 1 s'appliquent en particulier au cas où la mesure μ est une fonction localement sommable f. On énonce le résultat correspondant avec $p = 1$.

COROLLAIRE 2. — *Soit* f *une fonction mesurable sur* $\mathbf{C}^n$, *nulle pour* $|x| < a$ *telle que*

$$\int_{\mathbf{C}^n} |f(z)|.|z|^{-\rho-2n}\, dz < +\infty, \qquad \rho \geqq -2n.$$

Il existe une fonction localement sommable U, *solution de l'équation* $\Delta U = \frac{\partial f}{\partial z_i}$ *vérifiant l'estimation*

$$\int_{\mathbf{C}^n} |U(z)|.|z|^{-\rho-1-2n} \varphi(z)\, dz \leqq C(a, \rho) \int_{\mathbf{C}^n} |f(z)|.|z|^{-\rho-2n}\, dz,$$

$C(a, \rho)$ *désignant une constante indépendante de* f, *avec*

$$\varphi(z) = [1 + \mathrm{Log}^2(1+|z|)]^{-1}$$

si $\rho = -2n$ *ou si* ρ *est un entier* $\geqq -1$, $\varphi(z) = 1$ *dans tous les autres cas. On a*

$$U(z) = \int_{\mathbf{C}^n} k_i(q, z, x) f(x)\, dx \qquad si \quad q-1 \leqq \rho < q,$$

$$U(z) = \int_{\mathbf{C}^n} k_i(z, x) f(x)\, dx \qquad si \quad \rho < -1.$$

On a un énoncé analogue lorsque f ne s'annule pas au voisinage de o, en remplaçant $|z|$ par $1 + |z|$.

3. Théorème d'existence pour les fonctions localement dans L^∞. — Soit f une fonction, nulle pour $|x| < a$, telle que $f(x)\,|x|^{-\rho}$ soit une fonction dans L^∞. Soit

$$U(z) = \int_{\mathbf{C}^n} k_i(q, z, x) f(x)\,dx,$$

$$|U(z)| \leqq \int_{|x| \geqq a} |k_i(q, z, x)|.|f(x)|\,dx,$$

$$|U(z)| \leqq \| f(x)\,|x|^{-\rho} \|_\infty \int_{|x| \geqq a} |k_i(q, z, x)|.|x|^\rho\,dx.$$

On décompose l'intégrale en trois parties :

— $$I_1 = \int_{u < 1-\varepsilon} |k_i(q, z, x)|.|x|^\rho\,dx$$

d'après le lemme 1 (a),

$$I_1 \leqq C(\varepsilon) \int_{|z| < (1-\varepsilon)|x|} |z|^{q+1}\,|x|^{-2n-q+\rho}\,dx,$$

$$I_1 \leqq C(\varepsilon)\,|z|^{q+1} \int_{(1-\varepsilon)^{-1}|z|}^{\infty} t^{-q+\rho-1}\,dt,$$

$$I_1 \leqq C(\varepsilon)\,|z|^{\rho+1} \quad \text{si} \quad -q+\rho < 0.$$

— $$I_2 = \int_{1-\varepsilon \leqq u \leqq 1+\varepsilon} |k_i(q, z, x)|.|x|^\rho\,dx,$$

en posant $z = |z|\,\zeta$, $x = |z|\,\xi$, on a

$$I_2 \leqq \int_{1-\varepsilon \leqq u \leqq 1+\varepsilon} [\,|\zeta - \xi|^{-2n+1} + C(\varepsilon)\,]\,|z|^{-2n+1+\rho}\,dx,$$

$$I_2 \leqq C(\varepsilon)\,|z|^{\rho+1} \int_{(1-\varepsilon)^{-1} \leqq |\xi| \leqq (1+\varepsilon)^{-1}} [\,|\zeta - \xi|^{-2n+1} + C(\varepsilon)\,]\,d\xi$$

(on a utilisé le fait que sur le domaine d'intégration $|z|$ et $|x|$ sont équivalents), on obtient

$$I_2 \leqq C(\varepsilon)\,|z|^{\rho+1}.$$

— $$I_3 = \int_{u > 1+\varepsilon} |k_i(q, z, x)|.|x|^\rho\,dx,$$

on utilise le lemme 1 (b),

$$I_3 \leqq C(\varepsilon) \int_{|z| > (1+\varepsilon)|x|} |x|^{-2n+1-q+\rho}\,|z|^q\,dx,$$

$$I_3 \leqq C(\varepsilon)\,|z|^q \int_a^{(1-\varepsilon)^{-1}|z|} t^{-q+\rho}\,dt,$$

$$I_3 \leqq C(\varepsilon)\,|z|^{\rho+1} \quad \text{si} \quad -q+\rho+1 > 0,$$

$$I_3 \leqq C(\varepsilon, a)\,|z|^{\rho+1}[1 + \operatorname{Log}(1 + |z|)] \quad \text{si} \quad -q+\rho+1 = 0.$$

Finalement, on a

$$\| \mathrm{U}(z) \, |z|^{-\rho-1} \varphi(z) \|_\infty \leqq \mathrm{C}(\varepsilon, a, \rho) \, \| f \, |z|^{-\rho} \|_\infty$$

pourvu que $q-1 \leqq \rho < q$, avec

$$\varphi(z) = 1 \quad \text{si} \quad q-1 < \rho;$$

$$\varphi(z) = [1 + \operatorname{Log}(1 + |z|)]^{-1} \quad \text{si} \quad q-1 = \rho.$$

On aura également besoin dans la suite des valeurs négatives de ρ; $-1 > \rho \geqq -2n$, on prend alors

$$\mathrm{U}(z) = \int_{\mathbf{C}^n} k_i(z, x) f(x) \, dx,$$

$$|\mathrm{U}(z)| \leqq \| f(x) \, |x|^{-\rho} \|_\infty \int_{|x| \geqq a} |z-x|^{-2n-1} \, |x|^\rho \, dx.$$

On procède au même découpage de l'intégrale :

— $$\mathrm{I}_1 = \int_{u<1-\varepsilon} |z-x|^{-2n+1} \, |x|^\rho \, dx, \qquad |z| < (1-\varepsilon)|x|,$$

$$\mathrm{I}_1 \leqq \mathrm{C}(\varepsilon) \int_{|z|<(1-\varepsilon)|x|} |x|^{-2n+1+\rho} \, dx \leqq \mathrm{C}(\varepsilon, \rho) \, |z|^{\rho+1}.$$

— $$\mathrm{I}_2 = \int_{1-\varepsilon \leqq u \leqq 1+\varepsilon} |z-x|^{-2n+1} \, |x|^\rho \, dx, \qquad z = |z| \zeta, \quad x = |z| \xi,$$

$$\mathrm{I}_2 \leqq \mathrm{C}(\varepsilon) \, |z|^{\rho+1} \int_{(1-\varepsilon)^{-1} \leqq |\xi| \leqq (1+\varepsilon)^{-1}} |\zeta - \xi|^{-2n+1} \, d\xi,$$

$$\mathrm{I}_2 \leqq \mathrm{C}(\varepsilon) \, |z|^{\rho+1}.$$

— $$\mathrm{I}_3 = \int_{u>1+\varepsilon} |z-x|^{-2n+1} \, |x|^\rho \, dx, \qquad |z| > (1+\varepsilon)|x|,$$

$$\mathrm{I}_3 \leqq \mathrm{C}(\varepsilon) \, |z|^{-2n+1} \int_{|x|<(1+\varepsilon)^{-1}|z|} |x|^\rho \, dx,$$

$$\mathrm{I}_3 \leqq \mathrm{C}(\varepsilon, \rho) \, |z|^{\rho+1} \quad \text{si} \quad \rho > -2n,$$

$$\mathrm{I}_3 \leqq \mathrm{C}(\varepsilon, \rho, a) \, |z|^{\rho+1} [1 + \operatorname{Log}(1 + |z|)] \quad \text{si} \quad \rho = -2n.$$

Finalement, on a encore

$$\| \mathrm{U}(z) \, |z|^{-\rho-1} \varphi(z) \|_\infty \leqq \mathrm{C}(a, \rho) \, \| f(x) \, |x|^{-\rho} \|_\infty$$

pour $-1 > \rho \geqq -2n$, avec $\varphi(z) = 1$ sauf si $\rho = -2n$, auquel cas on a

$$\varphi(z) = 1 + \operatorname{Log}(1 + |z|).$$

THÉORÈME 2. — *Soit f une fonction mesurable, nulle pour $|x| < a$, telle que $f(x) \, |x|^{-\rho}$ soit essentiellement bornée, $\rho \geqq -2n$. Il existe une fonction* U *localement dans* L^∞, *solution de l'équation*

$$\Delta U = \frac{\partial f}{\partial z_i}$$

vérifiant l'estimation

$$\| U(z) | z |^{-\rho-1} \varphi(z) \|_\infty \leqq C(a, \rho) \| f(z) | z |^{-\rho} \|_\infty,$$

$C(a, \rho)$ *désignant une constante indépendante de* f :

$$\varphi(z) = [1 + \mathrm{Log}(1 + | z |)]^{-1} \qquad si \quad \rho = -2n$$

ou si ρ *est un entier* $\geqq -1$, $\varphi(z) = 1$ *dans tous les autres cas. On peut prendre*

$$U(z) = \int_{\mathbf{C}^n} k_i(q, z, x) f(x) \, dx$$

lorsque $q - 1 \leqq \rho < q$;

$$U(z) = \int_{\mathbf{C}^n} k_i(z, x) f(x) \, dx$$

lorsque $\rho < -1$.

4. Théorème d'existence pour les fonctions dans L^p. — On va déduire ce théorème des résultats précédents par interpolation. Soient Ω l'ouvert $| x | > a$, ρ un nombre réel $\rho \geqq -2n$, g une fonction de $\mathcal{D}(\Omega)$. On définit un opérateur linéaire K de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbf{C}^n)$ par la formule

$$(Kg)(z) = | z |^{-\rho-1} \varphi(z) \int_{\mathbf{C}^n} k_i(q, z, x) | x |^\rho g(x) \, dx \quad \text{si} \quad q - 1 \leqq \rho < q;$$

$$(Kg)(z) = | z |^{-\rho-1} \varphi(z) \int_{\mathbf{C}^n} k_i(z, x) | x |^\rho g(x) \, dx \quad \text{si} \quad -1 > \rho \geqq -2n.$$

$$\varphi(z) = [1 + \mathrm{Log}^2(1 + | z |)]^{-1} \quad \text{si } \rho \text{ est entier} \geqq -1 \text{ ou si } \rho = -2n,$$
$$\varphi(z) = 1 \quad \text{dans tous les autres cas.}$$

Soit ν la mesure $| x |^{-2n} dx$. D'après le théorème 2, il existe une constante $C(a, \rho)$ telle que

$$\| Kg \|_{L^\infty(\mathbf{C}^n, \nu)} \leqq C(a, \rho) \| g \|_{L^\infty(\Omega, \nu)}.$$

D'après le corollaire 2 du théorème 1, on a

$$\| Kg \|_{L^1(\mathbf{C}^n, \nu)} \leqq C'(a, \rho) \| g \|_{L^1(\Omega, \nu)}.$$

D'après le théorème d'interpolation de Riesz-Thorin (*cf.* [4]), il existe une constante $C'(a, \rho, p)$ telle que

$$\| Kg \|_{L^p(\mathbf{C}^n, \nu)} \leqq C'(a, \rho, p) \| g \|_{L^p(\Omega, \nu)} \quad \text{pour tout } p, \qquad 1 \leqq p < +\infty;$$

en revenant aux fonctions U et f, on a donc

$$\int_{\mathbf{C}^n} |U(z)|z|^{-\rho-1}\varphi(z)|^p \frac{dz}{|z|^{2n}} \leq C'^p(a, \rho, p) \int_{|x|>a} |f(x)|x|^{-\rho}|^p \frac{dx}{|x|^{2n}}.$$

THÉORÈME 3. — *Soit f une fonction mesurable, nulle pour $|x| < a$, telle que*

$$\int_{\mathbf{C}^n} |f(z)|z|^{-\rho}|^p |z|^{-2n}\, dx < +\infty.$$

Il existe une fonction U *localement dans* L^p, *solution de l'équation* $\Delta U = \dfrac{\partial f}{\partial z_i}$, *vérifiant l'estimation*

$$\int_{\mathbf{C}^n} |U(z)|z|^{-\rho-1}\varphi(z)|^p |z|^{-2n}\, dz \leq C(a, p, \rho) \int_{\mathbf{C}^n} |f(z)|z|^{-\rho}|^p |z|^{-2n}\, dz$$

$C(a, p, \rho)$ *désignant une constante indépendante de f;*

$$\varphi(z) = [1 + \mathrm{Log}^2(1 + |z|)]^{-1} \quad \textit{si } \rho \textit{ est entier} \geq -1 \textit{ ou si } \rho = -2n.$$
$$\varphi(z) = 1 \quad \textit{dans tous les autres cas.}$$

On a

$$U(z) = \int_{\mathbf{C}^n} k_i(q, z, x) f(x)\, dx \qquad si \quad q - 1 \leq \rho < q,$$

$$U(z) = \int_{\mathbf{C}^n} k_i(z, x) f(x)\, dx \qquad si \quad -1 > \rho \geq -2n.$$

Remarque. — En prenant comme dans le corollaire 1 du théorème 1 :

$$U = \frac{\partial E}{\partial z_i} * \chi f + \int_{\mathbf{C}^n} k_i(q, z, x)(1 - \chi(x)) f(x)\, dx,$$

on a un théorème analogue au théorème 3, lorsque f n'est plus nulle au voisinage de o. Il suffit de remplacer alors $|z|$ par $1 + |z|$.

II. — Solution de l'équation, $d''u = f$ dans $\mathbf{C}^n$.

Comme dans le pragraphe I, toutes les dérivées sont calculées au sens des distributions. On adopte les notations d'Hörmander, pour tout ce qui concerne les multi-indices (*cf.* [2]).

Soit f une forme (ou courant) d''-fermée ($d''f = 0$), de type (α, β) dont les coefficients sont des mesures à croissance lente. f s'écrit en écriture canonique :

$$f = \sum_{I, J}{}' f_{I, J}\, dz_I \wedge d\bar{z}_J, \qquad |I| = \alpha, \qquad |J| = \beta$$

$\left(\sum_{\mathrm{I},\mathrm{J}}'\right.$ signifie qu'on somme seulement pour les multi-indices croissants$\left.\right)$.

On pose $|f| = \sum_{\mathrm{I},\mathrm{J}}' |f_{\mathrm{I},\mathrm{J}}|$; $|f|$ est donc une mesure positive.

Soit $\rho \geqq -2n$ tel que

$$\int_{\mathbf{C}^n} (1 + |z|)^{-\rho-2n} \, d|f|(x) < +\infty.$$

On cherche à construire une solution de l'équation

$$d''u = f.$$

On va se ramener à une équation de Laplace du type $\Delta \mathrm{U} = \frac{\partial \mu}{\partial z_i}\cdot$ Dans ce but, on introduit l'opérateur δ'' adjoint de d'' pour la structure hermitienne habituelle sur $\mathbf{C}^n$. Si g est une forme de type (α, β), $\delta'' g$ est une forme de type $(\alpha, \beta - 1)$ définie par

$$\delta'' g = (-1)^{\alpha-1} 2 \sum_{\substack{|\mathrm{I}| = \alpha \\ |\mathrm{K}| = \beta - 1}} \left[\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial z_j} (g_{\mathrm{I}, j\mathrm{K}}) \right] dz_{\mathrm{I}} \wedge d\bar{z}_{\mathrm{K}}.$$

Un calcul (*cf.* [5], [7]) montre qu'on a alors

$$(d''\delta'' + \delta'' d'')g = -2 \sum_{\mathrm{I},\mathrm{J}}' \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 g_{\mathrm{I},\mathrm{J}}}{\partial z_j \partial \bar{z}_j} \right) dz_{\mathrm{I}} \wedge d\bar{z}_{\mathrm{J}}.$$

soit encore

$$(d''\delta'' + \delta'' d'')g = -\frac{1}{2} \sum_{\mathrm{I},\mathrm{J}}' \Delta g_{\mathrm{I},\mathrm{J}} \, dz_{\mathrm{I}} \wedge d\bar{z}_{\mathrm{J}}.$$

Soit U une forme de type $(\alpha, \beta - 1)$, solution de l'équation

$$(d''\delta'' + \delta'' d'')\mathrm{U} = \delta'' f.$$

On a alors $\delta''(f - d''\mathrm{U}) = d''\delta''\mathrm{U}$, d'où $d''\delta''(f - d''\mathrm{U}) = 0$; comme $d''f = 0$, on a aussi $\delta'' d''(f - d''\mathrm{U}) = 0$, soit

$$(d''\delta'' + \delta'' d'')(f - d''\mathrm{U}) = 0,$$

c'est-à-dire $f - d''\mathrm{U}$ *est une forme à cœfficients harmoniques.*

L'équation $(d''\delta'' + \delta'' d'')\,\mathrm{U} = \delta'' f$ équivaut au système d'équations

$$-\frac{1}{4} \Delta \mathrm{U}_{\mathrm{I},\mathrm{K}} = (-1)^{\alpha-1} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial z_j} (f_{\mathrm{I}, j\mathrm{K}}), \qquad |\mathrm{I}| = \alpha, \quad |\mathrm{K}| = \beta - 1.$$

D'après la première partie, on sait trouver des $U_{I,K}$ solution des équations précédentes, avec des majorations très complètes. $U_{I,K}$ est en particulier une distribution tempérée, il en résulte que $f - d''U$ est une forme à coefficients tempérés et harmoniques, c'est-à-dire à coefficients polynômes harmoniques. Il en résulte :

LEMME 2. — *Si* U *est une solution tempérée de* $(d''\delta'' + \delta''d'')\,U = \delta''f$, *la forme* $\omega = f - d''U$ *est à coefficients polynômes harmoniques.*

On a besoin maintenant de majorer ω; soit $\psi \in \mathcal{D}(\mathbf{C}^n)$ une fonction positive ne dépendant que de $|z|$, à support dans la boule de rayon 1, d'intégrale égale à 1, on pose

$$\psi_\varepsilon(z) = \frac{1}{\varepsilon^{2n}}\,\psi\left(\frac{z}{\varepsilon}\right).$$

Comme ω est harmonique, on a

$$\omega = \omega \star \psi_\varepsilon = f \star \psi_\varepsilon - d''U \star \psi_\varepsilon \quad \text{pour tout } \varepsilon > 0;$$

$$\omega = \sum_{I,J}{}' f_{I,J} \star \psi_\varepsilon\, dz_I \wedge d\bar{z}_J - \sum_{I,K}{}' \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial U_{IK}}{\partial \bar{z}_j} \star \psi_\varepsilon\, d\bar{z}_j \wedge dz_I \wedge d\bar{z}_K,$$

$$\omega = \sum_{I,J}{}' f_{I,J} \star \psi_\varepsilon\, dz_I \wedge d\bar{z}_J - \sum_{I,K}{}' \sum_{j=1}^{n} U_{I,K} \star \frac{\partial \psi_\varepsilon}{\partial \bar{z}_j}\, d\bar{z}_j \wedge dz_I \wedge d\bar{z}_K.$$

Considérons d'abord le cas où les $f_{I,J}$ sont des mesures. D'après la première partie, on a les estimations suivantes :

$$\int_{\mathbf{C}^n} (1 + |z|)^{-\rho-2n}\, d|f|(z) < -\infty \qquad (\rho \geqq -2n),$$

$$\int_{\mathbf{C}^n} (1 + |z|)^{-\rho-2n-1} \varphi(z)\, |U(z)|\, dz < +\infty.$$

On en déduit :

$$f_{I,J} \star \psi_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon^{2n}} \int_{\mathbf{C}^n} \psi\left(\frac{z-x}{\varepsilon}\right) df_{I,J}(x),$$

$$|f_{I,J} \star \psi_\varepsilon(z)| \leqq \frac{\|\psi\|_\infty}{\varepsilon^{2n}} \int_{|z-x| \leqq \varepsilon} d|f|(x),$$

$$\int_{\mathbf{C}^n} (1 + |x|)^{-\rho-2n}\, d|f|(x) \geqq (1 + |z| + \varepsilon)^{-\rho-2n} \int_{|z-x| \leqq \varepsilon} d|f|(x),$$

$$|f_{I,J} \star \psi_\varepsilon(z)| \leqq C\varepsilon^{-2n}(1 + |z| + \varepsilon)^{\rho+2n},$$

où C est indépendant de z et de ε, *en choisissant* $\varepsilon = |z|$, on obtient

$$|f_{I,J} \star \psi_\varepsilon(z)| \leqq C|z|^\rho \qquad \text{pour } |z| \geqq 1.$$

On a de même

$$\left| \mathrm{U}_{\mathrm{I,K}} \star \frac{\partial \psi_\varepsilon}{\partial z_j} \right| \leqq \mathrm{C}\,\varepsilon^{-2n-1} \int_{|z-x|\leqq\varepsilon} |\mathrm{U}(x)|\,dx,$$

$$\int_{\mathbf{C}^n} (1+|x|)^{-\rho-2n-1} \varphi(x)\,|\mathrm{U}(x)|\,dx \geqq (1+|z|+\varepsilon)^{-\rho-2n-1} \varphi(|z|+\varepsilon) \int_{|z-x|\leqq\varepsilon} |\mathrm{U}(x)|\,dx,$$

$$\left| \mathrm{U}_{\mathrm{I,K}} \star \frac{\partial \psi_\varepsilon}{\partial \bar{z}_j} \right| \leqq \mathrm{C}\,\varepsilon^{-2n-1} (1+|z|+|\varepsilon|)^{\rho+2n+1} [1+\mathrm{Log}^2(1+|z|+|\varepsilon|)],$$

avec $\varepsilon = |z|$, on a

$$\left| \mathrm{U}_{\mathrm{I,K}} \star \frac{\partial \psi_\varepsilon}{\partial z_j} \right| \leqq \mathrm{C}\,|z|^\rho \mathrm{Log}^2 |z| \qquad \text{pour} \quad |z| > 2.$$

On a donc

$$|\omega(z)| \leqq \mathrm{C}\,|z|^\rho \mathrm{Log}^2 |z| \qquad \text{pour} \quad |z| > 2.$$

Considérons maintenant le cas où les $f_{\mathrm{I,J}}$ sont des fonctions localement dans L^p; d'après la première partie (*cf.* remarque du théorème 3), on a les estimations suivantes :

$$\int_{\mathbf{C}^n} |f(x)(1+|x|)^{-\rho}|^p (1+|x|)^{-2n}\,dx < +\infty,$$

$$\int_{\mathbf{C}^n} |\mathrm{U}(x)(1+|x|)^{-\rho-1} \varphi(x)|^p (1+|x|)^{-2n}\,dx < +\infty.$$

En appliquant l'inégalité de Hölder à la mesure $(1+|x|)^{-2n-\gamma}dx$ avec $\gamma > 0$ assez petit, mesure qui est bornée, on obtient les estimations

$$\int_{\mathbf{C}^n} |f(x)|\,(1+|x|)^{-\rho'-2n}\,dx < +\infty,$$

$$\int_{\mathbf{C}^n} |\mathrm{U}(x)|\,(1+|x|)^{-\rho'-1-2n} \varphi(x)\,dx < +\infty,$$

avec $\rho' = \rho - \frac{\gamma}{p} + \gamma$, on est ramené au cas précédent lorsque $\rho > -2n$. On a donc

$$|\omega(z)| \leqq \mathrm{C}(\gamma)\,|z|^{\rho'} \mathrm{Log}^2 |z| \qquad \text{pour} \quad |z| > 2 \text{ et pour tout } \rho' > \rho,$$

il en résulte :

LEMME 3. — *Les coefficients de la forme ω sont des polynômes harmoniques dont le degré est inférieur ou égal à ρ.*

On laisse au lecteur la vérification immédiate du lemme 3 lorsque $\rho = -2n$ et $p > 1$, ou lorsque $p = +\infty$ (utiliser le théorème 2).

Si $\rho < 0$, le lemme 3 entraîne $\omega = 0$, $d''\,\mathrm{U} = f$.

Si $\rho \geqq 0$ et si la forme f est nulle pour $|x| < a$, les $U_{I,K}$ sont donnés par la formule

$$U_{I,K}(z) = (-1)^{\alpha} 4 \sum_{j=1}^{n} \int_{\mathbf{C}^n} k_j(q, z, x)\, df_{I,jK}(x),$$

avec $q - 1 \leqq \rho < q$. Il résulte aussitôt de l'expression des noyaux $k_j(q, z, x)$ que toutes les dérivées de $U_{I,K}$ au point o sont nulles jusqu'à l'ordre q compris. Les dérivées en o des coefficients de la forme $\omega = f - d''U$ sont donc nulles jusqu'à l'ordre $q-1$ inclus. Comme $q - 1 \leqq \rho < q$, on a forcément $\omega = 0$.

On peut énoncer le théorème principal de cet exposé. Pour plus de clarté, on préfère disjoindre le cas où $f_{I,J}$ est une mesure et le cas où $f_{I,J}$ est dans L^p_{loc}.

THÉORÈME 4. — *Si f est une forme de bidegré (α, β), nulle pour $|x| < a$, vérifiant $d''f = 0$ et dont les coefficients sont des mesures à croissance lente tels que $\int_{\mathbf{C}^n} |z|^{-\rho-2n} d|f|(z) < +\infty$ pour un $\rho \geqq -2n$.*

Alors la forme $U(z)$ de bidegré $(\alpha, \beta - 1)$, ayant pour coefficients :

$$U_{I,K}(z) = (-1)^{\alpha} 4 \sum_{j=1}^{n} \int_{\mathbf{C}^n} k_j(q, z, x)\, df_{I,jK}(x), \qquad q - 1 \leqq \rho < q.$$

[prendre $k_j(q, z, x) = k_j(z, x)$ si $\rho < -1$] est solution de l'équation

$$d''U = f$$

et vérifie les estimations

$$\left(\int_{\mathbf{C}^n} |U(z)|z|^{-\rho-1}|^p |z|^{-2n} \varphi(z)\, dz \right)^{\frac{1}{p}} \leqq C(a, p, \rho) \int_{\mathbf{C}^n} |z|^{-\rho-2n} d|f|(z).$$

Pour tout les p tels que $1 \leqq p < \frac{2n}{2n-1}$, avec $\varphi(z) = [1 + \mathrm{Log}^2(1 + |z|)]^{-1}$ si $\rho = -2n$ ou si ρ est un entier $\geqq -1$, $\varphi[z] = 1$ dans tous les autres cas. $C(a, p, \rho)$ désigne une constante indépendante de f.

THÉORÈME 4'. — *On suppose toujours $f = 0$ pour $|x| < a$ et $d''f = 0$. Les coefficients de f sont des fonctions dans L^p_{loc} vérifiant la condition*

$$\int_{\mathbf{C}^n} |f(z)|z|^{-\rho}|^p |z|^{-2n}\, dz < +\infty \qquad (p \geqq 1,\ \rho \geqq -2n),$$

resp. (si $f \in L^{\infty}_{\mathrm{loc}}$) $\operatorname{Supess}_{z \in \mathbf{C}^n} |f(z)|z|^{-\rho}| = \| f(z)|z|^{-\rho} \|_{\infty} < +\infty$ pour un $\rho \geqq -2n$.

Alors la forme $U(z)$ *ayant pour coefficients*

$$U_{I,K}(z) = (-1)^{\alpha} 4 \sum_{j=1}^{n} \int_{\mathbf{C}^n} k_j(q, z, x) f_{I,jK}(x)\, dx, \qquad |I| = \alpha, \quad |K| = \beta - 1, \quad q - 1 \leq \rho < q$$

est solution de l'équation

$$d''U = f$$

et vérifie les estimations

$$\int_{\mathbf{C}^n} |U(z)\,|z|^{-\rho-1} \varphi(z)|^p\, |z|^{-2n}\, dz \leq C(a, p, \rho) \int_{\mathbf{C}^n} |f(z)\,|z|^{-\rho}|^p\, |z|^{-2n}\, dx,$$

resp. $\| U(z)\,|z|^{-\rho-1}\,\varphi(z) \|_{\infty} \leq C(a, \rho) \| f(z)\,|z|^{-\rho} \|_{\infty}$. *Avec*

$$\varphi(z) = [1 + \mathrm{Log}^2(1 + |z|)]^{-1}$$

si $\rho = -2n$ *ou si* ρ *est entier* ≥ -1, $\varphi(z) = 1$ *dans tous les autres cas.*

Remarque 1. — Dans le cas des $\| \quad \|_{\infty}$, il suffit de prendre

$$\varphi(z) = [1 + \mathrm{Log}(1 + |z|)]^{-1},$$

si $\rho = -2n$ ou si ρ est entier ≥ -1. On peut prendre, dans tous les cas, au lieu de $\mathrm{Log}^2(1 + |z|)$, $\mathrm{Log}^{\gamma}(1 + |z|)$ avec $\gamma > 1$.

Remarque 2. — Comme $\delta''^2 = 0$, l'équation $(d''\delta'' + \delta''d'')U = \delta''f$ entraîne $\delta''d''\delta''U = 0$ ou encore $(\delta''d'' + d''\delta'')\delta''U = 0$. $\delta''U$ est une forme tempérée harmonique, c'est-à-dire à coefficients polynômes harmoniques, on voit facilement que $\delta''U$ vérifie les mêmes majorations que la forme ω, on a donc aussi

$$\delta''U = 0.$$

La forme U est *entièrement déterminée* par les conditions

$$d''U = f, \qquad \delta''U = 0,$$

la condition de croissance à l'infini des théorèmes précédents et la nullité des dérivées en o jusqu'à l'ordre q-1 inclus.

Si maintenant f n'est pas identiquement nulle au voisinage de o, ω est une forme dont les coefficients sont des polynômes de degré au plus ρ, on est ramené à la résolution d'une équation du type

$$d''v = \omega, \qquad \text{avec} \quad d''\omega = 0,$$

ω ayant pour coefficients des polynômes. On écrit ω sous la forme

$$\omega = \sum_{|\eta| \leq q-1} z^{\eta} \omega_{\eta} \qquad (q - 1 \leq \rho < q),$$

où les ω_η sont des formes ayant pour coefficients des polynômes en $\bar{z}$, on a

$$d''\omega = \sum_{|\eta| \leqq q-1} z^\eta d''\omega_\eta = 0$$

soit $d''\omega_\eta = 0$ pour $|\eta| \leqq q - 1$.

On est donc ramené au cas où les coefficients de ω sont des polynômes en $\bar{z}$, c'est-à-dire à un « théorème de Poincaré complexe ». Si ω est de la forme

$$\omega = \sum_{\mathrm{J},\mathrm{I}}' \sum_\eta \mathrm{C}_{\eta,\mathrm{I},\mathrm{J}} \bar{z}^\eta \, dz_\mathrm{I} \wedge d\bar{z}_{j_1} \wedge \ldots \wedge d\bar{z}_{j_\beta}, \qquad |\mathrm{I}| = \alpha, \quad |\mathrm{J}| = \beta, \quad |\eta| \leqq q - 1.$$

Un calcul montre qu'il suffit de prendre pour v :

$$v = \sum_{\mathrm{I},\mathrm{J}}' \sum_\eta \mathrm{C}_{\eta,\mathrm{I},\mathrm{J}} \left(\sum_{k=1}^{\beta} \frac{(-1)^{\alpha+k-1}}{\beta + |\eta|} \bar{z}_{j_k} \bar{z}^\eta \, dz_\mathrm{I} \wedge dz_{j_1} \wedge \ldots \wedge \widehat{d\bar{z}_{j_k}} \wedge \ldots \wedge d\bar{z}_{j_\beta} \right),$$

on a donc une solution v dont les coefficients sont des polynômes de degré inférieur ou égal à q.

Avec $u = \mathrm{U} + v$, on a $d''u = f$.

On peut énoncer deux théorèmes semblables aux théorèmes 4 et 4'.

THÉORÈME 5. — *Soit f une forme sur $\mathbf{C}^n$, dont les coefficients sont des mesures, telle que $d''f = 0$,*

$$\int_{\mathbf{C}^n} (1 + |z|)^{-\rho-2n} d|f|(z) < +\infty \qquad (\rho \geqq -2n).$$

Alors il existe une forme u à coefficients localement dans L^1 telle que

$$d''u = f$$

et vérifiant les estimations

$$\int_{\mathbf{C}^n} |u(z)(1 + |z|)^{-\rho-1}|^p (1 + |z|)^{-2n} \varphi(z) \, dz < +\infty$$

pour tout $p : 1 \leqq p < \frac{2n}{2n-1}$, avec $\varphi(z) = [1 + \mathrm{Log}^2(1 + |z|)]^{-1}$ si $\rho = -2n$ ou si ρ est un entier $\geqq -1$, $\varphi(z) = 1$ dans tous les autres cas.

THÉORÈME 5'. — *Soit f une forme sur $\mathbf{C}^n$, dont les coefficients sont des fonctions dans $\mathrm{L}^p_{\mathrm{loc}}$ telle que $d''f = 0$,*

$$\int_{\mathbf{C}^n} |f(z)(1 + |z|)^{-\rho}|^p (1 + |z|)^{-2n} dz < +\infty, \qquad 1 \leqq p < +\infty, \quad \rho \geqq -2n,$$

resp. (*si* $f \in L^{\infty}_{\text{loc}}$), $\| f(z)(1+|z|)^{-\rho}\|_{\infty} < +\infty$. *Il existe alors une forme* u *à coefficients dans* L^p_{loc} *telle que*

$$d''u = f$$

et vérifiant les estimations

$$\int_{\mathbf{C}^n} |u(z)(1+|z|)^{-\rho-1}\varphi(z)|^p (1+|z|)^{-2n}\, dz < +\infty,$$

resp. $\| u(z)(1+|z|)^{-\rho-1}\varphi(z)\|_{\infty} < +\infty$. *Avec*

$$\varphi(z) = [1+\operatorname{Log}^2(1+|z|)]^{-1} \qquad si \quad \rho = -2n$$

ou si ρ *est un entier* $\geqq 1$, $\varphi(z) = 1$ *dans tous les autres cas.*

Remarque 1. — On peut prendre $\varphi(z) = [1+\operatorname{Log}(1+|z|)]^{-1}$ dans le cas $p = +\infty$.

Remarque 2. — Lorsque $p = 2$, le résultat peut encore s'écrire de la façon suivante : si $\int |f(z)|^2(1+|z|^2)^{-\rho}\, dz < +\infty$ il existe u telle que $d''u = f$ et $\int |u(z)|^2(1+|z|^2)^{-\rho-1}\varphi^2(z)\, dz < +\infty$ avec $\varphi(z) = 1$ si ρ non entier, $\varphi(z) = [1+\operatorname{Log}^2(1+|z|)]^{-1}$ si ρ est entier. Le théorème 4.4.2 du livre d'Hörmander (*cf.* [2]) donne seulement :

$$\int |u(z)|^2(1+|z|^2)^{-\rho-2} < +\infty.$$

En fait, on démontre dans [6] une amélioration technique du théorème d'Hörmander, qui donne alors pour tout $\gamma > 0$,

$$\int_{\mathbf{C}^n} |u(z)|^2(1+|z|^2)^{-\rho-1-\gamma} < +\infty,$$

ce qui est pratiquement notre résultat. Pour y parvenir, on reprend la démonstration de 4.4.2 de [2] et on utilise, au lieu de la fonction $2+\operatorname{Log}(1+|z|^2)$, la fonction

$$(1+\gamma)\operatorname{Log}(1+|z|^2) - \operatorname{Log}[2+\operatorname{Log}(1+|z|^2)].$$

Pour les détails, *voir* [6].

Remarque 3. — Tout ce qui a été fait ici, dans $\mathbf{C}^n$, pour l'opérateur d'' est transposable, dans $\mathbf{R}^n$, à l'opérateur d.

C'est sans grand intérêt pour des formes à coefficients dans L^p_{loc}. Car on peut alors prolonger par continuité l'opérateur d'homotopie habituel pour les formes de classe C^∞, à des espaces de formes à coefficients L^p avec poids. La méthode peut néanmoins être intéressante pour des formes à coefficients mesures.

Remarque 4. — Supposons qu'en plus des hypothèses du théorème 4 (ou 4'), f vérifie la condition $d'f = 0$. Le théorème 4 (ou 4') nous fournit U telle que $d'\mathrm{U} = f$ et d'après la remarque 2 (du théorème 4') on a $\delta''\mathrm{U} = 0$. On a alors

$$d''d'\mathrm{U} = -d'd''\mathrm{U} = -d'f = 0,$$

$$\delta''d'\mathrm{U} = -d'\delta''\mathrm{U} = 0 \quad (cf. [6]),$$

$$(d''\delta'' + \delta''d'')\,d'\mathrm{U} = 0,$$

$d'\mathrm{U}$ est harmonique et comme pour la forme ω, on peut montrer que $d'\mathrm{U} = 0$. On peut alors appliquer le théorème 5' à l'opérateur d' et construire V telle que $d'\mathrm{V} = -\mathrm{U}$, soit $d'd''\mathrm{V} = f$. Si

$$\int_{\mathbf{C}^n} |z|^{-\rho-2n}\, d.|f|(z) < +\infty,$$

on a alors

$$\int_{\mathbf{C}^n} |\mathrm{V}(z)|\,(1+|z|)^{-\rho-2n-2}\, dz < +\infty,$$

en supposant ρ non entier pour simplifier.

En particulier, si $\frac{1}{i} f$ est de type (1.1) et positive, V est plurisousharmonique et en utilisant les propriétés de moyenne de V on retrouve l'essentiel des résultats de Lelong [3].

BIBLIOGRAPHIE.

[1] P. Dolbeault, *Formes différentielles et cohomologie sur une variété analytique complexe* (*Annals of Math.*, t. 64, 1956, p. 83-330).

[2] L. Hörmander, *Complex Analysis in Several Variables*, Van Nostrand, New Jersey, 1966.

[3] P. Lelong, *Fonctions entières et fonctions plurisousharmoniques d'ordre fini dans* $\mathbf{C}^n$. (*J. Anal. Math. Jerusalem*, vol. 12, 1964, p. 365-407).

[4] B. MALGRANGE, *Séminaire Schwartz*, 1959-1960, exposé n° 1, Faculté des Sciences de Paris, 1960.

[5] J. B. POLY, *$\bar{\partial}$-cohomologie à croissance. Théorèmes de décomposition sur un ouvert pseudo-convexe*, Faculté des Sciences de Poitiers, 1968.

[6] H. SKODA, *Croissance des fonctions entières s'annulant sur une hypersurface donnée de* $\mathbf{C}^n$, Secrétariat du Département de Mathématiques, Faculté des Sciences de Nice.

[7] A. WEIL, *Variétés kählériennes*, Hermann, Paris, 1958.

(Manuscrit reçu le 26 décembre 1970.)

Henri SKODA,
Département de Mathématiques,
Faculté des Sciences,
Parc Valrose,
06-Nice.