ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

M. S. BAOUENDI
C. GOULAOUIC

Étude de l'analyticité et de la régularité Gevrey pour une classe d'opérateurs elliptiques dégénérés

Annales scientifiques de l'É.N.S. 4e série, tome 4, nº 1 (1971), p. 31-46
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1971_4_4_1_31_0>

Ann. scient. Éc. Norm. Sup.,
4e série, t. 4, 1971, p. 31 à 46.

ÉTUDE DE L'ANALYTICITÉ ET DE LA RÉGULARITÉ GEVREY POUR UNE CLASSE D'OPÉRATEURS ELLIPTIQUES DÉGÉNÉRÉS

PAR M. S. BAOUENDI ET C. GOULAOUIC.

0. — Introduction.

On considère une classe de problèmes elliptiques dégénérés associés à des opérateurs $\mathcal{A}$ qui sont des généralisations dans un ouvert Ω de $\mathbf{R}^n$ (ou sur une variété à bord) de l'opérateur de Legendre

$$\frac{d}{dx}(1-x^2)\frac{d}{dx} \quad \text{sur } (-1, +1).$$

La régularité C^∞ de tels opérateurs a été étudiée dans [2].

On montre ici que si u est une fonction assez régulière telle que $\mathcal{A}u$ soit analytique sur un ouvert $\underline{\omega}$ de $\overline{\Omega}$ où tous les coefficients de $\mathcal{A}$ sont analytiques, alors u est elle-même analytique sur $\underline{\omega}$ (en particulier, si $\underline{\omega} = \overline{\Omega}$, les fonctions propres de l'opérateur $\mathcal{A}$ sont analytiques sur $\overline{\Omega}$). En fait, on montre, plus généralement, que si les données sont dans une classe de Gevrey d'ordre s, la solution est aussi dans cette classe de Gevrey.

La méthode suivie est inspirée de celle de Morrey et Nirenberg [10], avec quelques difficultés supplémentaires, en particulier un usage important des inégalités de Hardy. On obtient d'abord des majorations des dérivées « presque tangentielles »; ensuite, on obtient une estimation de toutes les dérivées en dérivant l'équation suivant la direction normale, et on en déduit la régularité Gevrey.

On termine par quelques remarques concernant le problème de l'analyticité et le type de dégénérescence considéré (dégénérescence « à l'intérieur », autres exemples et contre-exemples).

Le plan suivi est :

I. — Rappels et lemmes préliminaires.

1. RAPPELS DE RÉSULTATS SUR DES PROBLÈMES ELLIPTIQUES DÉGÉNÉRÉS [2]. — Soient Ω un ouvert borné de $\mathbf{R}^n$ (¹) et φ une fonction de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}$ de classe C^∞ telle que

$$(1.1)\qquad \begin{cases} \Omega = \{ x \in \mathbf{R}^n ;\ \varphi(x) > 0 \}, \\ \partial\Omega = \{ x \in \mathbf{R}^n ;\ \varphi(x) = 0 \}, \\ d\varphi(x) \neq 0 \quad \text{pour} \quad x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

On note $\mathcal{V} = \left\{ u \in \mathcal{D}'(\Omega) ;\ \varphi^{\frac{1}{2}} D^\alpha u \in L^2(\Omega) \text{ pour tout } \alpha \in \mathbf{N}^n \text{ tel que } |\alpha| \leq 1 \right\}$, muni de son produit scalaire naturel. On sait que $\mathcal{V}$ est un espace normal de distributions contenu dans $L^2(\Omega)$. On considère une forme intégro-différentielle (²) :

$$(1.2)\qquad a(u, v) = \sum_{\substack{|\alpha| \leq 1 \\ |\beta| \leq 1}} \int_\Omega a_{\alpha\beta}(x)\, \varphi(x)\, D^\alpha u(x)\, \overline{D^\beta v(x)}\, dx$$

(¹) On pourra supposer $n \geq 2$, le cas $n = 1$ étant beaucoup plus simple (et se traite immédiatement par les inégalités de Hardy).

(²) On considère un problème variationnel pour fixer les idées et parce que la régularité d'un tel problème est connue (*cf.* [2], [3]), mais la méthode vaut pour des problèmes non variationnels pourvu que l'on connaisse des résultats de régularité suffisante.

et on suppose que les coefficients $a_{\alpha\beta}$ sont de classe C^∞ sur $\overline{\Omega}$ et que la forme a est $\mathcal{V}$-coercitive [c'est-à-dire qu'il existe une constante $\lambda > 0$ telle que l'on ait pour tout $u \in \mathcal{V}$, $\operatorname{Re} a(u, u) \geq \lambda \| u \|_{\mathcal{V}}^2$].

On note $\mathcal{A}$ l'opérateur différentiel associé à la forme a

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}(x, D) = \sum_{\substack{|\alpha| \leq 1 \\ |\beta| \leq 1}} D^\beta a_{\alpha\beta} \varphi D^\alpha. \tag{1.3}$$

On sait (*cf.* [2] ou [3]) que pour tout g dans $L^2(\Omega)$, il existe u unique vérifiant

$$\begin{cases} u \in \mathcal{V}, \\ \mathcal{A} u = g \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega) \end{cases} \tag{1.4}$$

et on a, avec une constante c indépendante de g,

$$\| \varphi u \|_{H^2(\Omega)} \leq c \| g \|_{L^2(\Omega)} \quad (^3) \tag{1.5}$$

et on sait aussi que si g est dans $C^\infty(\overline{\Omega})$, alors u est aussi dans $C^\infty(\overline{\Omega})$.

Dans la suite, pour démontrer des propriétés d'analyticité de u, on appliquera la méthode de Morrey et Nirenberg [10] à la fonction φu, ce qui sera possible en utilisant des inégalités de Hardy, que l'on rappelle.

2. Inégalités de Hardy. — On considère une fonction h assez régulière (en particulier C^∞) de $[0, \infty)$ dans $\mathbf{C}$ (ou dans un espace de Banach); on peut écrire

$$h(t) = \frac{1}{t} \int_0^t D_\sigma(\sigma h(\sigma))\, d\sigma \qquad \text{si} \quad D_\sigma(\sigma h(\sigma)) \in L^2(0, \infty). \tag{1.6}$$

On en déduit

$$D^k h(t) = \frac{1}{t^{k+1}} \int_0^t \sigma^k D^{k+1}(\sigma h(\sigma))\, d\sigma \qquad \text{si} \quad D^{k+1} \sigma h(\sigma) \in L^2(0, \infty). \tag{1.7}$$

On en tire

$$\begin{cases} \| D^k h \|_{L^2(0,\infty)} \leq H_k \| D^{k+1}(t h(t)) \|_{L^2(0,\infty)}, \\ \text{avec} \quad H_k = \dfrac{2}{2k+1} \qquad \text{pour} \quad k \in \mathbf{N}. \end{cases} \tag{1.8}$$

En effet, en posant $l(t) = D^{k+1} t h(t)$, on a

$$\left\| \frac{1}{t^{k+1}} \int_0^t \sigma^k l(\sigma)\, d\sigma \right\|_{L^2(0,\infty)} = \left\| \int_0^1 u^k l(tu)\, du \right\|_{L^2(0,\infty)} \leq \int_0^1 u^k \| l(tu) \|_{L^2(0,\infty)} du$$
$$\leq \int_0^1 \frac{u^k}{\sqrt{u}} du \left(\int_0^\infty | l(x) |^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{2}{2k+1} \| l \|_{L^2(0,\infty)}.$$

(^{3}) $H^m(\Omega)$ désigne de façon générale l'espace de Sobolev $\{ u \in \mathcal{D}'(\Omega);\ D^\alpha u \in L^2(\Omega)$ pour tout $\alpha \in \mathbf{N}^n$ tel que $|\alpha| \leq m \}$.

Remarque 1.1. — Les inégalités de Hardy écrites sont valables aussi sur (o, T) au lieu de (o, ∞).

3. Remarques sur les fonctions analytiques et les fonctions de Gevrey. — Soient K un compact de $\mathbf{R}^n$, s un nombre réel $\geqq 1$; on appelle espace de Gevrey d'ordre s sur K, l'espace $G_s(K)$ des fonctions u de classe C^∞ de K dans $\mathbf{C}$ telles qu'il existe une constante $L > 0$ avec

$$\sup_{\alpha \in \mathbf{N}^n} \frac{\| D^\alpha u \|_{L^2(K)}}{L^{|\alpha|}(|\alpha|!)^s} < \infty.$$

En particulier, on sait que $G_1(K)$ est l'espace des fonctions analytiques sur K.

On fait les conventions usuelles :

— pour $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbf{N}^n$, on note $\alpha ! = \alpha_1 !, \ldots, \alpha_n !$;

— pour α, β dans $\mathbf{N}^n$, on note $\alpha \leqq \beta$, si et seulement si l'on a $\alpha_i \leqq \beta_i$ pour $1 \leqq i \leqq n$. Alors on note aussi

$$\binom{\alpha}{\beta} = \binom{\alpha_1}{\beta_1} \cdots \binom{\alpha_n}{\beta_n}.$$

On utilisera les résultats suivants :

Lemme 1.1. — *Soient* K *un compact de* $\overline{\mathbf{R}^n_+}$ *et* u *une fonction de* K *dans* $\mathbf{C}$; *les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) *La fonction* u *appartient à* $G_s(K)$ $(s \geqq 1)$;

(ii) *Il existe deux constantes* L_1 *et* L_2 *telles que l'on ait*

$$\sup_{(\alpha, p) \in \mathbf{N}^{n-1} \times \mathbf{N}} \frac{\| D_x^\alpha D_y^p u \|_{L^2(K)}}{L_1^{|\alpha|} L_2^p (|\alpha|! \, p!)^s} < \infty.$$

La démonstration de ce lemme est immédiate et on obtient encore des propriétés équivalentes à (i) et (ii) en remplaçant $|\alpha|!$ par $\alpha!$ ou la norme dans $L^2(K)$ par la norme dans $L^\infty(K)$.

On dira qu'une fonction u d'une partie Ω (ouverte) de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{C}$ est dans la classe de Gevrey d'ordre s sur Ω, ou encore de classe G_s sur Ω, si et seulement si sa restriction à tout compact K de Ω est dans l'espace $G_s(K)$.

Lemme 1.2. — *Soit* u *une fonction* C^∞ *de* $\overline{\mathbf{R}^n_+}$ *dans* $\mathbf{C}$ *telle que la fonction* $(x, y) \mapsto y\,u(x, y)$ *soit dans la classe de Gevrey d'ordre* s *sur un voisinage* V *de* $(x_0, y_0) \in \mathbf{R}^{n-1} \times [0, \infty[$; *alors la fonction* u *est elle-même dans la classe de Gevrey d'ordre* s *sur* V.

La seule difficulté est pour $y_0 = 0$, et il suffit alors d'utiliser les inégalités de Hardy (1.8).

II. — Notations et inégalités de régularité locale.

On veut étudier la régularité Gevrey d'ordre s de u sur un voisinage d'un point de $\partial\Omega$ où la fonction φ et les coefficients de $\mathcal{A}$ sont dans la classe de Gevrey d'ordre s (la régularité Gevrey à l'intérieur étant classique, *cf.* [9], par exemple).

Par un changement de coordonnées de classe G_s, on peut se ramener au cas (*fig.* 1).

$$(2.1) \qquad Au = D_y y D_y u + \sum_{|\mu|=2} b_\mu D_x^\mu y u + \sum_{|\mu|\leq 1} c_\mu D_x^\mu D_y y u + \sum_{|\mu|\leq 1} d_\mu D_x^\mu u = g,$$

avec tous les coefficients b_μ, c_μ, d_μ et g de classe G_s sur un ouvert Ω' de $\overline{\mathbf{R}^n_+}$ (on conserve les mêmes notations u, g, pour l'étude dans Ω et dans $\mathbf{R}^n_+$ après localisation et on note A l'opérateur déduit de $\mathcal{A}$ par la localisation).

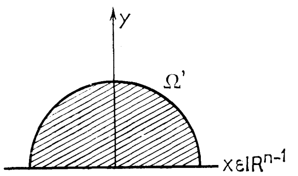

Fig. 1.

De l'inégalité (1.5) on déduit en particulier après localisation, qu'il existe une constante $C > 0$ telle que l'on ait, pour tout $u \in \mathcal{D}(\Omega')$,

$$(2.2) \qquad \| yu \|_{H^2(\mathbf{R}^n_+)} \leq C_0 \| Au \|_{L^2(\mathbf{R}^n_+)}.$$

Introduisons quelques notations. — En désignant par ω un cylindre ouvert de $\mathbf{R}^n$ de la forme $\omega_x \times]0, a[$ avec ω_x ouvert de $\mathbf{R}^{n-1}$, on note :

$\overline{\omega}$ la fermeture de ω dans $\mathbf{R}^n$,

$\underline{\omega}$ l'ensemble $\omega_x \times [0, a[$.

Pour tout $\varepsilon \in [0, a[$, on note

$$\underline{\omega}_\varepsilon = \{ (x, y) \in \underline{\omega} ;\ y < a - \varepsilon \text{ et } d(x, \partial\omega_x) > \varepsilon \}.$$

Pour une fonction $v \in L^2(\underline{\omega}_\varepsilon)$, on notera (*fig.* 2)

$$N_\varepsilon(v) = \| v \|_{L^2(\underline{\omega}_\varepsilon)}.$$

On démontre le lemme général suivant :

LEMME 2.1. — *Il existe une constante* $C_1 > 0$ (*qui ne dépend que de* ω *et de la borne supérieure sur* ω *des coefficients de l'opérateur* A) *telle que l'on ait pour tous* ε, ε_1 *strictement positifs et tout* $v \in H^2(\omega)$ *et tout multi-indice* $\alpha \in \mathbf{N}^n$ *de longueur* $|\alpha| \leqq 2$:

$$\varepsilon^{|\alpha|} N_{\varepsilon+\varepsilon_1}(D^\alpha y v) \leqq C_1 \left\{ \varepsilon^2 N_{\varepsilon_1}(A v) + \varepsilon \sum_{|\beta|=1} N_{\varepsilon_1}(D^\beta y v) + N_{\varepsilon_1}(y v) \right\},$$

Démonstration. — Il suffit de considérer le cas $|\alpha| = 2$, les cas $|\alpha| < 2$ étant évidents.

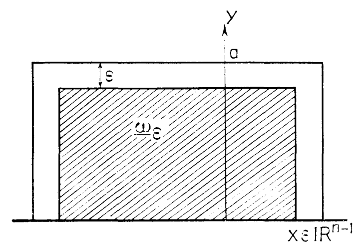

Fig. 2.

On choisit une fonction $\psi \in \mathcal{D}(\underline{\omega}_{\varepsilon_1})$ telle que

$$(2.3) \quad \left\{ \begin{array}{l} 0 \leqq \psi \leqq 1, \\ \psi(x, y) = 1 \quad \text{pour tout} \quad (x, y) \in \underline{\omega}_{\varepsilon+\varepsilon_1}, \\ \| D^\gamma \psi \|_{L^\infty(\omega)} \leqq C_2 \varepsilon^{-|\gamma|} \quad \text{pour tout} \quad \gamma \in \mathbf{N}^n, \\ \text{la constante } C_2 \text{ ne dépendant pas de } \varepsilon, \varepsilon_1. \end{array} \right.$$

Un tel choix est possible.

Pour $v \in H^2(\omega)$, on pose $u = \psi v$ et, d'après (2.2), on a

$$\| y u \|_{H^2(\mathbf{R}^n_+)} \leqq C_0 \| A u \|_{L^2(\mathbf{R}^n_+)}.$$

d'où on déduit, pour $|\alpha| = 2$,

$$N_{\varepsilon+\varepsilon_1}(D^\alpha y v) \leqq C_0 \{ N_{\varepsilon_1}(\psi A v) + N_{\varepsilon_1}([A, \psi] v) \},$$

où $[A, \psi]$ désigne le commutant $A\psi - \psi A$.

On explicite le commutant

$$[A, \psi] = [D_y y D_y, \psi] + \sum_{|\mu|=2} b_\mu y [D_x^\mu, \psi] + \sum_{|\mu| \leqq 1} c_\mu [D_x^\mu D_y y, \psi] + \sum_{|\mu| \leqq 1} d_\mu [D_x^\mu, \psi].$$

En regroupant suivant l'ordre des dérivées de ψ, on obtient

ε^{-2}, facteur de termes en $y v$;

ε^{-1}, facteur de termes en $D^\beta y v$ avec $|\beta| = 1$ ou en v.

On note $C_3 = \sum \| h_\mu \|_{L^\infty(\omega)}$, le $\sum$ étant pris sur tous les coefficients de l'opérateur A.

En utilisant l'inégalité de Hardy (1.8), on obtient

$$N_{\varepsilon_1}(v) \leqq 2 N_{\varepsilon_1}(D_y y v),$$

que l'on utilise pour les termes en v facteur de ε^{-1}. Finalement, on obtient

$$N_{\varepsilon_1}(\psi A v) \leqq N_{\varepsilon_1}(A v),$$

$$N_{\varepsilon_1}([A, \psi] v) \leqq \varepsilon^{-1} 2 C_3 C_2 \sum_{|\beta| \leqq 1} N_{\varepsilon_1}(D^\beta y v) + \varepsilon^{-2} C_3 C_2 N_{\varepsilon_1}(y v).$$

D'où résulte immédiatement le lemme 2.1.

III. — Majoration des dérivées presque tangentielles.

On garde les notations et les hypothèses du paragraphe 2.

Le résultat essentiel de ce paragraphe est le suivant :

LEMME 3.1. — *Soient* K *un compact contenu dans* $\underline{\omega}$ *et* u *une fonction* C^∞ *sur* $\underline{\omega}$ *telle que* Au *soit de classe* G_s *sur un voisinage de* K. *Il existe une constante* $C > 0$ *telle que l'on ait*

$$\| D^\alpha y u \|_{L^2(K)} \leqq C^{|\alpha|+1} (|\alpha|!)^s \quad \textit{pour tout} \quad \alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbf{N}^n \quad \textit{tel que}\ 0 \leqq \alpha_n \leqq 2.$$

Pour démontrer ce lemme, on établit d'abord quelques résultats intermédiaires.

On part de la relation (2.1) que l'on dérive par rapport à x; on obtient

$$A(D_x^\alpha u) = D_x^\alpha (A u) + Q_\alpha u, \tag{3.1}$$

avec

$$Q_\alpha u = \sum_{|\mu|=2} [b_\mu D_x^\mu, D_x^\alpha] y u + \sum_{|\mu| \leqq 1} [c_\mu D_x^\mu, D_x^\alpha] D_y y u + \sum_{|\mu| \leqq 1} [d_\mu D_x^\mu, D_x^\alpha] u.$$

On trouve dans $Q_\alpha u$ des termes de la forme

$$U_1 = \sum_{|\beta| \geqq 1} \binom{\alpha}{\beta} D_x^\beta b_\mu D_x^{\alpha-\beta+\mu} y u, \qquad \text{avec} \quad |\mu| = 2,$$

$$U_2 = \sum_{|\beta| \geqq 1} \binom{\alpha}{\beta} D_x^\beta c_\mu D_x^{\alpha-\beta+\mu} D_y y u, \qquad \text{avec} \quad |\mu| \leqq 1,$$

$$U_3 = \sum_{|\beta| \geqq 1} \binom{\alpha}{\beta} D_x^\beta d_\mu D_x^{\alpha-\beta+\mu} u, \qquad \text{avec} \quad |\mu| \leqq 1.$$

On utilise maintenant le lemme 2.1, où l'on remplace v par $D_x^\alpha u$; on obtient pour tout $\nu \in \mathbf{N}^n$ tel que $|\nu| = 2$,

$$N_{\varepsilon+\varepsilon_1}(D_x^\alpha D^\nu yu) \leq C_1 \left\{ N_{\varepsilon_1}(AD_x^\alpha u) + \varepsilon^{-1} \sum_{|\mu|=1} N_{\varepsilon_1}(D_x^\alpha D^\mu yu) + \varepsilon^{-2} N_{\varepsilon_1}(D_x^\alpha yu) \right\}$$

ou encore,

$$(3.2) \quad N_{\varepsilon+\varepsilon_1}(D_x^\alpha D^\nu yu) \leq C_1 \left\{ N_{\varepsilon_1}(D_x^\alpha A u) + N_{\varepsilon_1}(Q_\alpha u) + \varepsilon^{-1} \sum_{|\mu|=1} N_{\varepsilon_1}(D_x^\alpha D^\mu yu) + \varepsilon^{-2} N_{\varepsilon_1}(D_x^\alpha yu) \right\}.$$

Majorons $N_{\varepsilon_1}(Q_\alpha u)$; on écrit d'abord

$$N_{\varepsilon_1}(U_1) \leq \sum_{|\beta|\geq 1} \binom{\alpha}{\beta} \| D_x^\beta b_\mu \|_{L^\infty(\omega)} N_{\varepsilon_1}(D_x^{\alpha-\beta+\mu} yu), \qquad \text{avec } |\mu| = 2,$$

$$N_{\varepsilon_1}(U_2) \leq \sum_{|\beta|\geq 1} \binom{\alpha}{\beta} \| D_x^\beta c_\mu \|_{L^\infty(\omega)} N_{\varepsilon_1}(D_x^{\alpha-\beta+\mu} D_y yu), \qquad \text{avec } |\mu| \leq 1.$$

On remarque que la majoration analogue pour un terme de la forme U_3 se ramène par l'inégalité de Hardy à la forme obtenue pour $N_{\varepsilon_1}(U_2)$. On obtient finalement

$$(3.3) \qquad N_{\varepsilon_1}(Q_\alpha u) \leq 2 \sum_{\substack{\mu \in \mathbf{N}^n \\ |\mu| \leq 2 \\ \mu_n = 0 \text{ ou } 1}} \sum_{|\beta|\geq 1} \binom{\alpha}{\beta} \| D_x^\beta h_\mu \|_{L^\infty(\omega)} N_{\varepsilon_1}(D_x^{\alpha-\beta} D^\mu yu),$$

où h_μ est le coefficient d'indice correspondant dans A.

On utilise l'hypothèse de régularité Gevrey d'ordre s des coefficients de A sous la forme

(3.4) *Il existe une constante* $L > 0$ *telle que l'on ait*

$$\sup_{h_\mu} \| D^\gamma h_\mu \|_{L^\infty(\omega)} \leq L^{|\gamma|+1} (\gamma\,!)^s \leq L^{|\gamma|+1} (|\gamma|\,!)^s \quad \textit{pour tout } \gamma \textit{ dans } \mathbf{N}^n,$$

le sup *portant sur tous les coefficients de* A.

Des relations (3.2), (3.3) et (3.4) on déduit finalement

$$(3.5) \quad N_{\varepsilon+\varepsilon_1}(D_x^\alpha D^\nu yu) \leq C_1 \left\{ N_{\varepsilon_1}(D_x^\alpha A u) + \varepsilon^{-1} \sum_{|\mu|=1} N_{\varepsilon_1}(D_x^\alpha D^\mu yu) + \varepsilon^{-2} N_{\varepsilon_1}(D_x^\alpha yu) \right.$$
$$\left. + 2 \sum_{\substack{|\mu| \leq 2 \\ \mu_n \leq 1}} \sum_{|\beta|\geq 1} \binom{\alpha}{\beta} L^{|\beta|+1} (|\beta|\,!)^s N_{\varepsilon_1}(D_x^{\alpha-\beta} D^\mu yu) \right\}$$

pour tout $\nu \in \mathbf{N}^n$ tel que $|\nu| = 2$.

De cette inégalité (3.5) on déduit le résultat [4] :

LEMME 3.2. — *On suppose la fonction* Au *de classe* G_s *dans* $\overline{\omega}$; *alors on peut trouver une constante* $M > 0$ *telle que l'on ait pour tout* $\varepsilon > 0$ *et pour tout* $\gamma \in \mathbf{N}^n$ *tel que* $\gamma_n \leqq 2$,

$$N_{|\gamma|\varepsilon}(D^\gamma yu) \leqq M^{|\gamma|+1}\varepsilon^{-|\gamma|s}. \tag{3.6}$$

Démonstration. — On fait une récurrence sur $|\gamma|$; la relation (3.6) est évidemment valable pour $|\gamma|$ borné avec un choix convenable de la constante M. On suppose que M est choisie pour que (3.6) soit valable pour $|\gamma| \leqq j$ et on détermine les conditions pour que cette même constante soit aussi valable pour $|\gamma| = j+1$.

On utilise (3.5) avec $\varepsilon_1 = j\varepsilon$ et $|\alpha| = |\gamma| - 2 = j - 1$.

On a

$$N_{(j+1)\varepsilon}(D^\gamma yu) \leqq C_1 \Big\{ N_{j\varepsilon}(D_x^\alpha Au) + \varepsilon^{-1} \sum_{|\mu|=1} N_{j\varepsilon}(D_x^\alpha D^\mu yu) + \varepsilon^{-2} N_{j\varepsilon}(D_x^\alpha yu) + 2 \sum_{\substack{|\mu| \leqq 2 \\ \mu_n \leqq 1}} \sum_{|\beta| \geqq 1} \binom{\alpha}{\beta} L^{|\beta|+1}(|\beta|!)^s N_{j\varepsilon}(D_x^{\alpha-\beta} D^\mu yu) \Big\}. \tag{3.7}$$

On vérifie que la récurrence peut s'appliquer, car le membre de droite ne contient des dérivations de yu que d'ordre $\leqq j$, et pour $k < j$ on a toujours $N_{j\varepsilon} \leqq N_{k\varepsilon}$.

On note N le nombre de coefficients de l'opérateur A; on utilise la régularité Gevrey d'ordre s de Au sous la forme : Il existe une constante [que l'on peut aussi choisir être L comme dans (3.4)] telle que l'on ait

$$N_{j\varepsilon}(D^\alpha Au) \leqq L^{|\alpha|+1}(|\alpha|!)^s \quad \text{pour tout} \quad \alpha \in \mathbf{N}^n \quad \text{et} \quad j \in \mathbf{N}. \tag{3.8}$$

On obtient

$$N_{(j+1)\varepsilon}(D^\gamma yu) \leqq C_1 \Big\{ L^j((j-1)!)^s + \varepsilon^{-1} N M^{j+1} \varepsilon^{-js} + \varepsilon^{-2} M^j \varepsilon^{(-j+1)s} + 2 \sum_{|\beta| \geqq 1} \binom{\alpha}{\beta} L^{|\beta|+1}(|\beta|!)^s N M^{j+2-|\beta|} \varepsilon^{-(j+1-|\beta|)s} \Big\}.$$

Pour avoir $N_{(j+1)\varepsilon}(D^\gamma yu) \leqq M^{j+2}\varepsilon^{-(j+1)s}$, il suffit d'avoir

$$C_1 \Big\{ L^j M^{-j-2}((j-1)!)^s \varepsilon^{(j+1)s} + N M^{-1} \varepsilon^{s-1} + M^{-2} \varepsilon^{2s-2} + 2 \sum_{|\beta| \geqq 1} \binom{\alpha}{\beta} (|\beta|!)^s N L^{|\beta|+1} M^{-|\beta|} \varepsilon^{|\beta|s} \Big\} \leqq 1. \tag{3.9}$$

---

[4] Pour des raisons techniques, on peut supposer $a \leqq 1$ dans la définition de ω, donc $N_{j\varepsilon}(.)$ est toujours nul pour $j\varepsilon \geqq 1$.

On remarque que, sous la condition $j\varepsilon \leqq 1$, on peut majorer le premier terme de cette somme par

$$C_1 L^j M^{-j-2} ((j-1)!)^s \varepsilon^{(j+1)^s} (j\varepsilon)^{-(j+1)^s} = C_1 \left(\frac{L}{M}\right)^j M^{-2} ((j-1!)^s j^{-(j+1)s}.$$

On peut donc choisir M assez grand (par rapport à L) pour avoir la somme des trois premiers termes de (3.9) majorés par $\frac{1}{2}$.

En remarquant que l'on a

$$\binom{\alpha}{\beta} \leqq \binom{|\alpha|}{|\beta|}^s \qquad \text{et} \qquad (|\alpha|(|\alpha|-1)\ldots(|\alpha|-|\beta|+1)\varepsilon^{|\beta|})^s \leqq 1$$

pour $j\varepsilon \leqq 1$, on obtient

$$2C_1 \sum_{|\beta|\geqq 1} \binom{\alpha}{\beta} (|\beta|!)^s N L^{|\beta|+1} M^{-|\beta|} \varepsilon^{|\beta|s} \leqq 2 C_1 N L \sum_{|\beta|\geqq 1} \left(\frac{L}{M}\right)^{|\beta|}$$

que l'on peut toujours rendre $\leqq \frac{1}{2}$ pourvu que M soit assez grand.

Le lemme 3.2 est donc démontré.

Le lemme 3.2 entraîne le lemme 3.1; en effet, étant donné K, il existe $c > 0$ tel que l'on ait $K \subset \underline{\omega}_c$ (*fig.* 3).

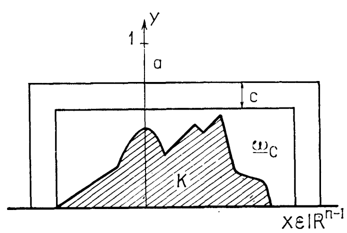

Fig. 3.

On utilise le lemme 3.2 avec $\varepsilon = \frac{c}{|\gamma|}$; ce qui donne

$$N_c(D^\gamma y u) \leqq M^{|\gamma|+1} c^{-|\gamma|s} |\gamma|^{|\gamma|s},$$

ce qui implique l'existence d'une constante $C > 0$ telle que l'on ait

$$N_c(D^\gamma y u) \leqq C^{|\gamma|+1} (|\gamma|!)^s \qquad \text{pour} \quad \gamma \in \mathbf{N}^n, \qquad \text{avec} \quad \gamma_n \leqq 2.$$

IV. — Majoration de toutes les dérivées et conclusions.

Sous les hypothèses du lemme 3.1, on démontre le résultat suivant :

LEMME 4.1. — *Il existe deux constantes* M_1 *et* M_2 *strictement positives telles que l'on ait pour tout* $\alpha \in \mathbf{N}^n$ $[\alpha = (\alpha', k)$ *avec* $\alpha' \in \mathbf{N}^{n-1}]$

(4.1) $$\| D^\alpha yu \|_{L^2(K)} \leq M_1^{|\alpha'|+1} M_2^{k+1} (|\alpha|!)^s \quad (5).$$

Démonstration. — On remarque d'abord que l'on est amené à introduire deux constantes *a priori* distinctes, pour des raisons techniques dans la démonstration par récurrence.

On démontre ce lemme par récurrence sur k; d'après le lemme 3.1, on sait que l'on peut vérifier l'inégalité (4.1) pour $k \leq 2$. Supposons que l'on ait trouvé des constantes M_1, M_2 qui conviennent jusqu'à l'ordre k et montrons que, si le choix est convenable, indépendamment de k, elles conviennent aussi à l'ordre $k+1$.

On récrit (2.1) sous la forme

$$D_y y D_y u = Au - \sum_{|\mu|=2} b_\mu D_x^\mu yu - \sum_{|\mu|\leq 1} c_\mu D_x^\mu D_y yu - \sum_{|\mu|\leq 1} d_\mu D_x^\mu u.$$

On applique aux deux membres l'opérateur de dérivation $D_x^\alpha D_y^{k-1}$; on obtient

(4.2) $$\left\{\begin{aligned} &D_x^\alpha D_y^k y D_y u = D_x^\alpha D_y^{k-1} Au - \sum_{|\mu|=2} U_\mu - \sum_{|\mu|\leq 1} V_\mu - \sum_{|\mu|\leq 1} W_\mu,\\ &\text{avec} \quad U_\mu = D_x^\alpha D_y^{k-1} b_\mu D_x^\mu yu,\\ &\phantom{\text{avec} \quad} V_\mu = D_x^\alpha D_y^{k-1} c_\mu D_x^\mu D_y yu,\\ &\phantom{\text{avec} \quad} W_\mu = D_x^\alpha D_y^{k-1} d_\mu D_x^\mu u.\end{aligned}\right.$$

On a d'abord

$$D_x^\alpha D_y^k y D_y u = D_x^\alpha D_y^{k+1} yu + i D_x^\alpha D_y^k u,$$
$$\| D_x^\alpha D_y^{k+1} yu \| \leq \| D_x^\alpha D_y^k y D_y u \| + \| D_x^\alpha D_y^k u \|,$$

et en utilisant l'inégalité de Hardy (1.8), on obtient, pour tout $k \in \mathbf{N}$, $k \geq 2$,

(4.3) $$\| D_x^\alpha D_y^{k+1} yu \| \leq 2 \| D_x^\alpha D_y^k y D_y u \|.$$

---

(5) Toutes les normes utilisées dans ce paragraphe étant dans $L^2(K)$, nous omettrons désormais de l'indiquer.

Par ailleurs, on a

$$U_\mu = \sum_{\substack{|\beta|\geqq 0 \\ l\geqq 0}} \binom{\alpha}{\beta}\binom{k-1}{l} D_x^\beta D_y^l b_\mu D_x^{\alpha-\beta+\mu} D_y^{k-l-1} yu, \qquad \text{avec} \quad |\mu| = 2,$$

$$V_\mu = \sum_{\substack{|\beta|\geqq 0 \\ l\geqq 0}} \binom{\alpha}{\beta}\binom{k-1}{l} D_x^\beta D_y^l c_\mu D_x^{\alpha-\beta+\mu} D_y^{k-l} yu, \qquad \text{avec} \quad |\mu| \leqq 1,$$

$$W_\mu = \sum_{\substack{|\beta|\geqq 0 \\ l\geqq 0}} \binom{\alpha}{\beta}\binom{k-1}{l} D_x^\beta D_y^l d_\mu D_x^{\alpha-\beta+\mu} D_y^{k-l-1} u, \qquad \text{avec} \quad |\mu| \leqq 1.$$

On pourra majorer $\|U_\mu\|$, $\|V_\mu\|$ et $\|W_\mu\|$ en utilisant l'hypothèse de récurrence et en remarquant que la majoration de $\|W_\mu\|$ se ramène [en utilisant encore l'inégalité de Hardy (1.8) sur $\|D_x^{\alpha-\beta+\mu} D_y^{k-l-1} u\|$] aux mêmes calculs que pour la majoration des termes de la forme $\|V_\mu\|$.

On a

$$\begin{aligned}
\|U_\mu\| &\leqq \sum_{\substack{|\beta|\geqq 0 \\ l\geqq 0}} \binom{\alpha}{\beta}\binom{k-1}{l} L^{|\beta|+l+1} (|\beta|!)^s (l!)^s \\
&\quad \times M_1^{|\alpha-\beta+\mu|+1} M_2^{k-l} ((|\alpha-\beta|+k-l+1)!)^s \\
&\leqq M_1^{|\alpha|+1} M_2^{k+2} ((|\alpha|+k+1)!)^s \\
&\quad \times \sum_{\substack{|\beta|\geqq 0 \\ l\geqq 0}} L \left(\frac{M_1}{M_2}\right)^2 \left(\frac{L}{M_1}\right)^{|\beta|} \left(\frac{L}{M_2}\right)^l \left(\frac{|\alpha|!\,(k-1)!\,(|\alpha-\beta|+k-l-1)!}{|\alpha-\beta|!\,(k-l-1)!\,(|\alpha|+k+1)!}\right)^s \\
&\leqq M_1^{|\alpha|+1} M_2^{k+2} ((|\alpha|+k+1)!)^s L \left(\frac{M_1}{M_2}\right)^2 \left(\sum_{\substack{\beta\in\mathbf{N}^{n-1} \\ |\beta|\geqq 0}} \left(\frac{L}{M_1}\right)^{|\beta|}\right) \left(\sum_{l\geqq 0} \left(\frac{L}{M_2}\right)^l\right).
\end{aligned}$$

De même, on obtient les majorations

$$\|V_\mu\| \leqq M_1^{|\alpha|+1} M_2^{k+2} ((|\alpha|+k+1)!)^s L \left(\frac{M_1}{M_2}\right) \left(\sum_{\substack{\beta\in\mathbf{N}^{n-1} \\ |\beta|\geqq 0}} \left(\frac{L}{M_1}\right)^{|\beta|}\right) \left(\sum_{l\geqq 0} \left(\frac{L}{M_2}\right)^l\right),$$

$$\|W_\mu\| \leqq M_1^{|\alpha|+1} M_2^{k+2} ((|\alpha|+k+1)!)^s\, 2L \left(\frac{M_1}{M_2}\right) \left(\sum_{\substack{\beta\in\mathbf{N}^{n-1} \\ |\beta|\geqq 0}} \left(\frac{L}{M_1}\right)^{|\beta|}\right) \left(\sum_{l\geqq 0} \left(\frac{L}{M_2}\right)^l\right).$$

On peut choisir déjà M_1 et M_2 assez grands pour avoir

$$(4.4) \qquad \left(\sum_{\substack{\beta\in\mathbf{N}^{n-1} \\ |\beta|\geqq 0}} \left(\frac{L}{M_1}\right)^{|\beta|}\right) \left(\sum_{l\geqq 0} \left(\frac{L}{M_2}\right)^l\right) \leqq 2.$$

On a alors [compte tenu de (4.2) et (4.3)]

$$(4.5)\quad \frac{1}{2}\| D_x^\alpha D_y^{k+1} yu \| \leq \| D_x^\alpha D_y^{k-1} A u \| + M_1^{|\alpha|+1} M_2^{k+2} ((|\alpha| + k + 1)!)^s \left\{ NL\left(\frac{M_1}{M_2}\right)^2 + 3NL\left(\frac{M_1}{M_2}\right) \right\}.$$

En utilisant l'hypothèse de régularité Gevrey d'ordre s de Au [*cf.* (3.8)], on vérifie que l'on obtient

$$\| D_x^\alpha D_y^{k+1} u \| \leq M_1^{|\alpha|+1} M_2^{k+2} ((|\alpha| + k + 1)!)^s$$

pourvu que l'on ait

$$(4.6)\quad \frac{L^{|\alpha|+k}}{M_1^{|\alpha|+1} M_2^{k+2}} + NL\left(\frac{M_1}{M_2}\right)\left(3 + \frac{M_1}{M_2}\right) \leq \frac{1}{2},$$

ce qui est toujours réalisable en choisissant M_1, assez grand par rapport à L et M_2 assez grand par rapport à M_1.

Le lemme 4.1 est donc démontré, et il implique que la fonction yu est de classe G_s sur K, donc la fonction u est de classe G_s sur K (*cf.* lemme 1.2).

On a donc le résultat :

THÉORÈME 4.1. — *Soit $\mathcal{O}$ un ouvert de $\overline{\Omega}$ et supposons que la fonction φ et les coefficients de l'opérateur $\mathcal{A}$ soient de classe G_s sur $\mathcal{O}$ ($s \geq 1$). Alors toute fonction $u \in D(\mathcal{A})$, telle que $\mathcal{A}u$ soit de classe G_s sur $\mathcal{O}$, est aussi de classe G_s sur $\mathcal{O}$.*

On aurait aussi bien pû considérer, au lieu de la relation (3.1), la relation

$$(4.7)\quad A(D_x^\alpha u) = D_x^\alpha (\lambda u) + Q_\alpha u,$$

où λ est une fonction de classe G_s.

Toutes les estimations sont inchangées et on obtient ainsi en particulier le résultat :

THÉORÈME 4.2. — *Si la fonction φ et les coefficients de l'opérateur $\mathcal{A}$ sont de classe G_s sur $\overline{\Omega}$, les fonctions propres de $\mathcal{A}$ sont de classe G_s sur $\overline{\Omega}$.*

Remarque 4.1. — Les résultats énoncés ici pour $\overline{\Omega}$, avec Ω ouvert de $\mathbf{R}^n$, peuvent être obtenus de la même manière dans le cas d'une variété à bord de classe G_s (on peut considérer par exemple un opérateur dégénéré de la forme divφ grad, où φ est une fonction de classe G_s « équivalente à la distance au bord »).

V. — **Remarques.**

1. Dégénérescence à l'intérieur. — On considère un opérateur de la forme (1.3) dans un ouvert Ω de $\mathbf{R}^n$. φ étant une fonction C^∞ de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}$ telle que :

(5.1) $\{x \in \mathbf{R}^n;\ \varphi(x) = 0\}$ est une hypersurface $\Gamma \subset \Omega$ et on a $d\varphi(x) \neq 0$ pour tout $x \in \Gamma$ (*fig.* 4).

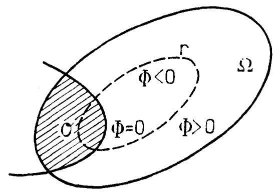

Fig. 4.

Dans ce cas, l'opérateur $\mathcal{A}$ est elliptique (non dégénéré) de part et d'autre de Γ dans Ω, mais dégénère sur Γ et a un signe différent de part et d'autre de Γ. Cet opérateur n'est pas hypoelliptique au sens usuel, cependant on montre, par la méthode ci-dessus, le résultat :

Théorème 5.1. — *Soit $\mathcal{O}$ un ouvert contenu dans Ω et supposons que les coefficients de $\mathcal{A}$ et φ soient de classe G_s dans $\mathcal{O}$.*

Soit u une fonction C^∞ dans $\mathcal{O}$ telle que $\mathcal{A}u$ soit de classe G_s dans $\mathcal{O}$; alors u est elle-même de classe G_s dans $\mathcal{O}$.

On peut en fait se contenter d'hypothèses plus faibles sur u dans le théorème 5.1.

2. Autres opérateurs et contre-exemples. — Il ne s'agit pas ici de donner une classification des opérateurs elliptiques dégénérés selon qu'ils possèdent ou non la propriété d'analyticité ou de régularité Gevrey étudiée ici. Dans cette direction, on peut signaler le travail de Derridj et Zuily [6] concernant l'étude de l'analyticité des opérateurs de la forme $\sum_{i=1}^{r} X_i^2$, les $(X_i)_{i=1,\ldots,r}$ étant des champs de vecteurs (l'hypoellipticité de tels opérateurs est étudié dans [8]); en particulier, ils obtiennent, par une méthode analogue à celle utilisée ici, un résultat positif pour une classe d'opérateurs généralisant celle étudiée (du point de vue de la régularité C^∞) dans [1] (un résultat partiel avait été annoncé par Matsuzawa).

Nous avons été amenés aussi à démontrer l'analyticité pour une autre classe d'opérateurs elliptiques dégénérés (*cf.* [5]), en vue d'obtenir par exemple certaines caractérisations des fonctions analytiques jusqu'au bord sur une variété à bord.

Il faut toutefois se garder de conclure hâtivement dans l'étude de l'analyticité des opérateurs dégénérés, comme le montre l'étude suivante :

Avec les notations du paragraphe 1, on définit un opérateur $\mathcal{C}$ sur $\mathbf{R}\times\Omega$, par

$$\mathcal{C}(t, x, D_t, D_x) = D_t^2 + \mathcal{A}(x, D_x).$$

Cet opérateur $\mathcal{C}$, apparemment pas plus dégénéré que les opérateurs de la forme $\mathcal{A}$, possédant des propriétés de régularité maximum locale dans le cylindre fermé $\mathbf{R}\times\overline{\Omega}$, ne se comporte bien du point de vue de l'analyticité locale que pour $n=1$, de façon plus précise, on a le résultat :

PROPOSITION 5.1. — *On suppose $n\geq 2$, les coefficients de $\mathcal{A}$ et φ analytique sur $\overline{\Omega}$. Il existe une fonction $u\in C^\infty(\mathbf{R}\times\overline{\Omega})$ et un ouvert $\mathcal{O}$* [6] *de $\mathbf{R}\times\overline{\Omega}$ tel que $\mathcal{A}u$ soit analytique dans $\mathcal{O}$ et que u ne soit pas analytique dans $\mathcal{O}$.*

Ce résultat négatif est une conséquence du contre-exemple suivant qui nous a été signalé par L. Boutet de Monvel (et qui montre que l'analogue du théorème de Kotaté-Narasimhan, *cf.* [5], n'est pas vrai pour les opérateurs $\mathcal{A}$ considérés ici) :

On considère dans la boule unité Ω de $\mathbf{R}^2$ (que l'on identifie à $\mathbf{C}$ en posant $z=x+iy$) l'opérateur

$$\mathcal{A} = -\left(\frac{\partial}{\partial x}(1-r^2)\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}(1-r^2)\frac{\partial}{\partial y}\right) + 1 - r^2, \qquad \text{avec} \quad r^2 = x^2+y^2.$$

On vérifie que sur les fonctions holomorphes dans Ω, l'opérateur $\mathcal{A}$ se réduit à un opérateur du premier ordre $2z\dfrac{\partial}{\partial z} + 1 - r^2$.

Il en résulte que toute fonction u holomorphe dans Ω et dans la classe de Gevrey $G_2(\overline{\Omega})$, vérifie

$$(5.2) \qquad \exists\, C>0, \quad \|\mathcal{A}^k u\|_{L^2(\Omega)} \leq C^{k+1}(2k)! \qquad \text{pour tout} \quad k\in\mathbf{N};$$

et u peut évidemment ne pas être analytique dans $\overline{\Omega}$.

Par un argument désormais classique (*cf.* [9], t. 3, p. 61) on en déduit que l'opérateur $D_t^2+\mathcal{A}(x, D_x)$ dans $\mathbf{R}\times\Omega$ n'a pas la propriété d'analy-

---

[6] On peut même choisir $\mathcal{O}$ sous la forme $]-\varepsilon, \varepsilon[\times\overline{\Omega}$.

ticité locale en t et jusqu'au bord en x : en effet, (5.2) implique que la série

$$w(x, t) = \sum_{m=0}^{\infty} t^{2m} \frac{\mathcal{A}^m u(x)}{2m!}$$

est convergente et w est C^∞ pour $(x, t) \in \overline{\Omega} \times]-\varepsilon, \varepsilon[$ (pour ε assez petit), et on a

$$D_t^2 w + \mathcal{A} w = 0 \quad \text{dans } \overline{\Omega} \times]-\varepsilon, \varepsilon[.$$

Si la fonction w est analytique dans $\overline{\Omega} \times]-\varepsilon, \varepsilon[$, cela implique que u est analytique dans $\overline{\Omega}$. Ceci démontre la proposition 5.1 pour un opérateur $\mathcal{E}$ particulier. Dans le cas général, la théorie spectrale des opérateurs dégénérés $\mathcal{A}$ et des résultats de la théorie de l'approximation, permettent encore d'obtenir la proposition 5.1, en montrant aussi que (5.2) n'implique pas l'analyticité de u sur $\overline{\Omega}$.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] M. S. Baouendi, *Sur une classe d'opérateurs elliptiques dégénérés* (*Bull. Soc. Math. Fr.*, t. 95, 1967, p. 45-87).

[2] M. S. Baouendi et C. Goulaouic, *Régularité et théorie spectrale pour une classe d'opérateurs elliptiques dégénérés* (*Arch. Rat. Mec. Anal.*, vol. 34, nº 5, 1969, p. 361-379).

[3] M. S. Baouendi et C. Goulaouic, *C. R. Acad. Sc.*, t. 266, série A, 1968, p. 336-338.

[4] M. S. Baouendi et C. Goulaouic, *C. R. Acad. Sc.*, t. 270, série A, 1970, p. 1158-1161.

[5] M. S. Baouendi et C. Goulaouic, *C. R. Acad. Sc.*, t. 270, série A, 1970, p. 1424-1426, et article à paraître : *Régularité analytique et itérés d'opérateurs elliptiques dégénérés; applications.*

[6] Derridj et Zuily, Article à paraître.

[7] L. Hörmander, *Linear partial differential operators*, Springer, 1963.

[8] L. Hörmander, *Hypoelliptic second order differential equations* (*Acta Mathematica*, 1967).

[9] J. L. Lions et E. Magènes, *Problèmes aux limites non homogènes*, t. 1 et 3 (Dunod, Paris, 1968-1970.

[10] Morrey and Nirenberg, *On the analyticity of the solutions of linear elliptic systems of portial differential equations. C. P. A. M.*, vol. 10, 1957, p. 271-290.

(Manuscrit reçu le 20 novembre 1970.)

M. S. Baouendi,
Département de Mathématiques,
Faculté des Sciences,
06-Nice;

C. Goulaouic,
Département de Mathématiques,
Faculté des Sciences,
91-Orsay.