

ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

YVES MEYER

Nombres algébriques et analyse harmonique

Annales scientifiques de l'É.N.S. 4^e série, tome 3, n° 1 (1970), p. 75-110

http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1970_4_3_1_75_0

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1970, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (<http://www.elsevier.com/locate/ansens>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

NOMBRES ALGÈBRIQUES ET ANALYSE HARMONIQUE

PAR YVES MEYER.



INTRODUCTION. — Une grande partie de l'analyse harmonique moderne est consacrée aux ensembles exceptionnels de nombres réels; ensembles compacts et ensembles discrets, ensembles d'unicité, ensembles de synthèse harmonique, etc.

Le but de ce travail est de montrer que très souvent les propriétés remarquables de ces ensembles E vis-à-vis de l'analyse harmonique s'interprètent en regardant la droite réelle comme un sous-groupe à un paramètre dense dans un groupe compact; l'ensemble exceptionnel devenant une partie remarquable de ce groupe compact G. On doit, dans la définition de G, tenir le plus grand compte de la nature algébrique des paramètres servant à définir E. Par cette méthode, Salem a résolu le problème de l'unicité dans le cadre des ensembles à rapport de dissection constant.

Soient θ un nombre réel supérieur à 2, Λ l'ensemble (discret) de toutes les sommes finies $\sum_{k \geq 0} \varepsilon_k \theta^k$, $\varepsilon_k = 0$ ou 1 et E l'ensemble compact de toutes les sommes $\sum_{k \geq 1} \varepsilon_k \theta^{-k}$, $\varepsilon_k = 0$ ou 1. Le chapitre 1 contient une nouvelle preuve du théorème de Salem (E est d'unicité si θ est un nombre de Pisot) ainsi qu'une généralisation de ce résultat. Le chapitre 2 résout le problème de savoir quand Λ est exactement l'ensemble des zéros d'une fonction presque-périodique. La classe de nombres de Pisot que ce problème introduit est étudiée au chapitre 3. Dans le chapitre 4 nous montrons que Λ a un compact propre si et seulement si θ est un nombre de Pisot. Dans le chapitre 5, E est encore l'ensemble de toutes les sommes $\sum_{k \geq 1} \varepsilon_k \theta^{-k}$, $\varepsilon_k = 0$ ou 1, θ est un nombre de Pisot ou de Salem et $A(E)$ est l'algèbre

des restrictions à E des transformées de Fourier des fonctions de $L^1(\mathbf{R})$; une propriété importante de l'algèbre de Banach $A(E)$ est alors obtenue et c'est un premier pas en direction du problème de la synthèse. Au chapitre 6, nous montrons que si θ est un nombre de Pisot supérieur à 3 et φ une fonction d'une variable réelle, à valeurs complexes, dont le spectre est contenu dans E , on peut associer à φ une suite $(P_k)_{k \geq 1}$ de sommes trigonométriques finies réalisant la synthèse de φ au sens suivant :

(a) les fréquences de P_k appartiennent à l'ensemble des sommes $\sum_1^k \varepsilon_j \theta^{-j}$,

$\varepsilon_j = 0$ ou 1 ;

(b) $\sup_{k \geq 1} \sup_{t \in \mathbf{R}} |P_k(t)| \leq \sup_{t \in \mathbf{R}} \text{ess} |\varphi(t)|$;

(c) $P_k(t) \rightarrow \varphi(t)$ uniformément sur tout compact de \mathbf{R} ($k \rightarrow +\infty$). C'est une généralisation des propriétés bien connues de l'ensemble triadique de Cantor ($\theta = 3$).

1. Unicité du développement trigonométrique.

1.1. Soit E un ensemble compact de nombres réels; E est un ensemble de multiplicité s'il existe une distribution S , non nulle, de support contenu dans E , dont la transformée de Fourier \hat{S} tend vers zéro à l'infini. Dans le cas contraire, E est un ensemble d'unicité.

Soit E un compact contenu dans l'intervalle ouvert $] \pi, \pi [$ et S une distribution portée par E . Il suffit que $\lim_{k \in \mathbf{Z}, |k| \rightarrow +\infty} \hat{S}(k) = 0$ pour que $\lim_{t \in \mathbf{R}, |t| \rightarrow +\infty} \hat{S}(t) = 0$. Il revient donc au même de dire que E est un ensemble de multiplicité ou qu'il existe une série trigonométrique $\sum_{k \geq 0} (a_k \cos kt + b_k \sin kt)$, 2π -périodique, dont les coefficients a_k et b_k ne sont pas tous nuls mais dont les sommes partielles tendent vers zéro pour tout t appartenant à $] -\pi, \pi [$ sans appartenir à E ; il n'y a pas unicité du développement trigonométrique (voir [5], chap. V, p. 52).

Rappelons d'autre part la construction de certains ensembles parfaits de nombres réels. Soit $(\xi_k)_{k \geq 1}$ une suite de nombres réels appartenant à l'intervalle $] 0, \frac{1}{2} [$. La dissection ξ_k sur un intervalle $[a, b]$ remplace cet intervalle par deux intervalles fermés, égaux, de longueur $(b - a)\xi_k$, contenus dans $[a, b]$ et respectivement d'origine a et d'extrémité b .

Partons de l'intervalle $[0, 1]$ et opérons la dissection ξ_1 . Nous obtenons un ensemble E_1 . Sur chacun des deux intervalles composant E_1 nous opérons la dissection ξ_2 et nous obtenons E_2 et ainsi de suite. Le compact E_k se compose de 2^k intervalles de longueur $2^{-k} \xi_1 \dots \xi_k$ et E est l'intersection des E_k .

Si $\xi_k = \xi$ pour tout $k \geq 1$ et si ξ^{-1} est un nombre de Pisot, Salem a montré que E est un ensemble d'unicité.

Nous allons voir que E est encore un ensemble d'unicité si E est construit à l'aide d'une suite $(\xi_k)_{k \geq 1}$ de rapports de dissection dont les inverses sont des nombres de Pisot, soumis à une condition très naturelle de régularité et pris dans un même corps de nombres algébriques.

DÉFINITION 1.1. — Soit \mathcal{K} un corps réel de nombres algébriques, c'est-à-dire une extension de \mathbf{Q} contenue dans \mathbf{R} de degré fini n . Nous appellerons $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ les n \mathbf{Q} -isomorphismes de \mathcal{K} dans \mathbf{C} où σ_1 est l'application identique de \mathcal{K} dans \mathbf{R} ([20], chap. II).

THÉORÈME I. — Soit \mathcal{K} un corps réel de nombres algébriques de degré n . Soient α et β deux nombres réels tels que $0 < \alpha < 1$ et $\beta > 2$. Soit $(\omega_k)_{k \geq 1}$ une suite d'entiers algébriques de \mathcal{K} tels que :

- (a) $\omega_k \geq \beta$;
- (b) $|\sigma_j(\omega_k)| \leq \alpha$ pour $2 \leq j \leq n$ et $k \geq 1$.

Alors l'ensemble parfait symétrique construit à l'aide des rapports de dissection $\xi_k = \omega_k^{-1}$ est un ensemble d'unicité.

Avant de prouver ce théorème faisons quelques remarques. Le théorème ne peut comporter de réciproque; en effet, R. Schneider [21] a montré que sans faire aucune hypothèse de nature arithmétique sur les ξ_k , la seule hypothèse $\sum_1^\infty \xi_k^2 < +\infty$ suffit à assurer que E est un ensemble d'unicité (voir aussi [9]).

Un corollaire du théorème est la remarque suivante : soit \mathcal{K} un corps réel de nombres algébriques de degré n et F un ensemble fini de nombres de Pisot de \mathcal{K} , de degré n et dépassant 2. Alors tout ensemble parfait symétrique E construit à l'aide de rapports de dissection ξ_k tels que $\xi_k^{-1} \in F$ est un ensemble d'unicité.

1.2. UNE NOUVELLE PREUVE DU THÉORÈME DE SALEM. — Avant d'attaquer le cas général, nous allons supposer que, pour tout $k \geq 1$, $\xi_k = \xi$ et prouver le résultat suivant :

THÉORÈME II. — Soit θ un nombre de Pisot, de degré n , supérieur à 2, E l'ensemble de toutes les sommes $\sum_{k \geq 1} \varepsilon_k \theta^{-k}$, $\varepsilon_k = 0$ ou 1 et, pour tout $k \geq 0$, h_k l'homomorphisme de \mathbf{R} dans \mathbf{T}^n défini par

$$h_k(t) = (\exp 2\pi i \theta^k t, \dots, \exp 2\pi i \theta^{k+n-1} t).$$

On peut trouver un compact K de \mathbf{T}^n , de mesure nulle, tel que, pour tout $k \geq 0$, $h_k(E)$ soit contenu dans K .

Le résultat est frappant parce que $h_k(\mathbf{R})$ est un sous-groupe dense de \mathbf{T}^n isomorphe à \mathbf{R} .

Nous allons introduire quelques définitions et notations.

Soit n le degré de θ , $\theta_2, \dots, \theta_n$ les conjugués de θ autres que θ . Les θ_j qui ne sont pas réels sont deux à deux conjugués; enfin $\theta, \theta_2, \dots, \theta_n$ sont tous différents. Soit, pour tout $k \geq 0$, H_k l'application linéaire de \mathbf{R} dans \mathbf{R}^n définie par

$$H_k(t) = (\theta^k t, \dots, \theta^{k+n-1} t).$$

Soit $P: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{T}^n$ la projection canonique définie par

$$P(x_1, \dots, x_n) = (\exp 2\pi i x_1, \dots, \exp 2\pi i x_n).$$

Alors $h_k = P \circ H_k$.

Soit $U \subset \mathbf{R}^n$ un compact défini paramétriquement par

$$x_1 = u_2 + \dots + u_n, \quad x_2 = \theta_2 u_2 + \dots + \theta_n u_n, \quad \dots, \quad x_n = \theta_2^{n-1} u_2 + \dots + \theta_n^{n-1} u_n,$$

où

$$u_2 = -\sum_0^{\infty} \varepsilon_k \theta_2^k, \quad \dots, \quad u_n = -\sum_0^{\infty} \varepsilon_k \theta_n^k$$

et où les ε_k valent 0 ou 1. Alors les u_j relatifs à deux θ_j conjugués le sont. Pour cette raison les x_p , $1 \leq p \leq n$, dépendent linéairement de $n-1$ paramètres réels et U est contenu dans un hyperplan L de \mathbf{R}^n . D'autre part U est compact.

Soit $V = H_0(E)$; V est porté par une « droite » D de \mathbf{R}^n qui n'est pas contenue dans L car le déterminant

$$\begin{vmatrix} 1 & \theta & \dots & \theta^{n-1} \\ 1 & \theta_2 & \dots & \theta_2^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \theta_n & \dots & \theta_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

n'est pas nul.

Remarquons maintenant que $U + V$ est une partie compacte de \mathbf{R}^n .

Rapportons \mathbf{R}^n à un nouveau système d'axe tel que l'équation de L devienne $x_n = 0$ et que celles de la droite D deviennent $x_1 = \dots = x_{n-1} = 0$. Pour calculer la mesure de $U + V$, appliquons le théorème de Fubini en intégrant d'abord par rapport à x_n . Puisque $U \subset L$, $V \subset D$ et que la mesure de E est nulle ($\theta > 2$), on obtient $\text{mes}(U + V) = 0$.

Soit $K = P(U + V)$. Alors K est un compact de \mathbf{T}^n de mesure nulle (la projection canonique de \mathbf{R}^n sur \mathbf{T}^n diminue la mesure).

Enfin $h_k(E) \subset K$. En effet, tout élément t de E peut être écrit $t = t' + t''$ où

$$t' = \sum_1^k \varepsilon_m \theta^{-m}, \quad t'' = \sum_{k+1}^{\infty} \varepsilon_m \theta^{-m}.$$

On a $H_k(t) = H_k(t') + H_k(t'')$. Il est évident que $H_k(t'') \in V$. D'autre part, modulo \mathbf{Z}^n , $H_k(t')$ appartient à U [cela résulte, par combinaison linéaire à coefficients 0 ou 1 des congruences $\theta^k = -\theta_2^k - \dots - \theta_n^k \pmod{1}$, $k \geq 0$]. Donc, modulo \mathbf{Z}^n , $H_k(t)$ appartient à $U + V$ et $h_k(t)$ à K .

1.3. Pour les ensembles à rapport de dissection variables, on n'a pas un résultat aussi simple; il faut généraliser la condition de Piatecki-Shapiro ([5], th. V, p. 59). Quelques notations sont nécessaires. Soit $\mathcal{C}_0(\mathbf{R})$ l'espace de Banach de toutes les fonctions à valeurs complexes continues et nulles à l'infini sur \mathbf{R} . Soit $M(\mathbf{R})$ l'espace dual de $\mathcal{C}_0(\mathbf{R})$ qui s'identifie à l'espace de toutes les mesures de Radon complexes et bornées sur \mathbf{R} . La topologie $\sigma(M(\mathbf{R}), \mathcal{C}_0(\mathbf{R}))$ est la topologie de la convergence simple sur $\mathcal{C}_0(\mathbf{R})$ des éléments de $M(\mathbf{R})$. On a alors le résultat classique suivant.

PROPOSITION 1.3. — *Supposons que E est un ensemble compact de nombres réels, qu'il existe une constante C et une suite $(\mu_k)_{k \geq 1}$ d'éléments de $M(\mathbf{R})$ tels que, pour tout $k \geq 1$,*

- (1) $\|\mu_k\| \leq c$;
- (2) $\hat{\mu}_k = 0$ sur un voisinage W_k de E ;
- (3) $\mu_k \rightarrow \delta(t)$ dans $\sigma(M(\mathbf{R}), \mathcal{C}_0(\mathbf{R}))$ ($k \rightarrow +\infty$) où $\delta(t)$ est la masse unité en 0.

Alors E est un ensemble d'unicité ([5], th. III, p. 58).

Rappelons la démonstration de cette proposition : si $\hat{S}(t)$ est une distribution portée par E dont la transformée de Fourier est nulle à l'infini, on a, grâce à la théorie de Wiener, $\int_{\mathbf{R}} \hat{S}(u) d\mu_k(u) = 0$. Mais $\lim_{k \rightarrow +\infty} \int_{\mathbf{R}} \hat{S}(u) d\mu_k(u) = \hat{S}(0)$. Ainsi $\hat{S}(0) = 0$. En appliquant cette preuve à la distribution $S(t) \exp - 2\pi i u_0 t$ on montre que $\hat{S}(u_0) = 0$ pour tout u_0 réel. Ainsi $S = 0$.

1.4. Venons-en à la notion qui remplacera celle de Piatecki-Shapiro ([5], th. V, p. 59), le compact de \mathbf{T}^n sera remplacé par une suite de compacts laissant une place uniforme.

DÉFINITION 1.4. — *Soient $n \geq 1$ un entier et A_k une suite de compacts du tore n -dimensionnel \mathbf{T}^n . Nous dirons que la suite des A_k laisse une place uniforme si l'on peut trouver un compact K de \mathbf{T}^n , K distinct de \mathbf{T}^n et une*

suite x_k de points de \mathbf{T}^n tels que $A_k + x_k$ soit, pour tout $k \geq 0$, contenu dans K .

Le résultat suivant sera utile pour montrer qu'une suite A_k de compacts de \mathbf{T}^n laisse une place uniforme.

PROPOSITION 1.4.1. — Soient $n \geq 1$ un entier, A_k une suite de compacts du tore n -dimensionnel \mathbf{T}^n , ε un nombre réel positif, A_k^ε l'ensemble des points x de \mathbf{T}^n dont la distance à A_k ne dépasse pas ε . Soit dx la mesure de Lebesgue de \mathbf{T}^n normalisée de sorte que $\int_{\mathbf{T}^n} dx = 1$. Supposons que, pour tout $k \geq 0$, $\text{mes}(A_k^\varepsilon) < 1$. Alors la suite des compacts A_k laisse une place uniforme.

En effet, le compact A_k^ε n'est pas tout \mathbf{T}^n . Soit donc x_k un point de \mathbf{T}^n tel que $d(x_k, A_k) \geq \varepsilon$ et K l'ensemble des x de \mathbf{T}^n tels que $d(o, x) \geq \varepsilon$. La distance d sur \mathbf{T}^n est invariante par translation et l'on a alors $A_k - x_k \subset K$ pour tout $k \geq 0$.

Soit $h_k(t) = \exp 2\pi i \omega_{1,k} t, \dots, \exp 2\pi i \omega_{n,k} t$ une suite d'homomorphismes continues de \mathbf{R} dans \mathbf{T}^n tels que $h_k(\mathbf{R})$ soit dense dans \mathbf{T}^n . Nous dirons que cette suite est normale si pour toute suite (p_1, \dots, p_n) d'entiers relatifs non tous nuls, $|p_1 \omega_{1,k} + \dots + p_n \omega_{n,k}| \rightarrow +\infty$ ($k \rightarrow +\infty$).

PROPOSITION 1.4.2. — Soient E un ensemble compact de nombres réels, h_k une suite normale d'homomorphismes de \mathbf{R} dans \mathbf{T}^n et A_k une suite de compacts de \mathbf{T}^n laissant une place uniforme. Supposons que, pour tout $k \geq 0$, $h_k(E) \subset A_k$. Alors E est un ensemble d'unicité.

La preuve de 1.4.2 est en tout point semblable à celle du théorème de Piatecki-Shapiro. On appelle $\varphi(x)$ une fonction indéfiniment dérivable, égale à 0 sur un voisinage de K (voir la définition 1.4) mais d'intégrale égale à 1 sur tout \mathbf{T}^n . Soit $\varphi_k(x) = \varphi(x + x_k)$; puisque $A_k + x_k \subset K$, $\varphi_k(x)$ est nulle sur un voisinage de A_k et l'intégrale de φ_k est 1. Les coefficients de Fourier de φ_k et de φ ont même module et l'on peut écrire

$$\varphi_k(\exp 2\pi i x_1, \dots, \exp 2\pi i x_n) = \sum_{\mathbf{Z}^n} \lambda_k(p_1, \dots, p_n) \exp -2\pi i (p_1 x_1 + \dots + p_n x_n),$$

où $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n$ et $|\lambda_k(p_1, \dots, p_n)| = \lambda(p_1, \dots, p_n) \in l^1(\mathbf{Z}^n)$. Définissons une fonction continue sur \mathbf{R} , f_k par $f_k = \varphi_k \circ h_k$. On a $f_k = \hat{\mu}_k$ où μ_k est la mesure discrète donnant la masse 1 au point 0 et la masse $\lambda_k(p_1, \dots, p_n)$ au point $p_1 \omega_{1,k} + \dots + p_n \omega_{n,k}$. On vérifie alors sans difficulté que $\sup_{k \geq 0} \|\mu_k\| < +\infty$ et que sur tout intervalle compact I ne contenant pas 0, $\int_I d|\mu_k|$ tend vers zéro. Puisque la masse de μ_k en 0 est 1, les μ_k conviennent à la proposition 1.3.

LEMME 1. — Soit K un compact de \mathbf{T}^n , $(F_k)_{k \geq 0}$ une suite de parties finies de \mathbf{T}^n telles que $\text{Card } F_k \leq A$ et $A \text{ mes } K < 1$. Alors $A_k = F_k + K$ est une suite de parties compactes de \mathbf{T}^n laissant une place uniforme.

Appelons encore K^ε (ou A_k^ε) l'ensemble des points de \mathbf{T}^n dont la distance à K (ou A_k) ne dépasse pas ε . On a $K^\varepsilon + F_k = A_k^\varepsilon$ et donc $\text{mes}(A_k^\varepsilon) \leq A \text{ mes } K^\varepsilon$. Il suffit de choisir $\varepsilon > 0$ assez petit pour que $A \text{ mes } K^\varepsilon < 1$ (c'est possible car $\text{mes } K^\varepsilon \rightarrow \text{mes } K$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$).

1.5. PREUVE DU THÉORÈME I (suite et fin). — Les points de E sont donnés par la formule

$$t = \varepsilon_1(1 - \xi_1) + \varepsilon_2 \xi_1(1 - \xi_2) + \dots + \varepsilon_k \xi_1 \dots \xi_{k-1}(1 - \xi_k) + \dots,$$

où $\varepsilon_k = 0$ ou 1 . Soit θ un entier fixe, arbitraire, de degré n , de \mathcal{K} , $\theta_2, \dots, \theta_n$ les conjugués de θ autres que θ . Posons, si $k \geq 1$ et $1 \leq j \leq n$, $\omega_{j,k} = \theta^{j-1}(\xi_1 \dots \xi_k)^{-1}$ et si $k = 0$, $\omega_{j,0} = \theta^{j-1}$. Soient H_k l'homomorphisme de \mathbf{R} dans \mathbf{R}^n défini par $H_k(t) = (t\omega_{1,k}, \dots, t\omega_{n,k})$ et p la projection canonique de \mathbf{R}^n sur \mathbf{T}^n définie par

$$p(x_1, \dots, x_n) = (\exp 2\pi i x_1, \dots, \exp 2\pi i x_n).$$

Soit U l'ensemble des points de \mathbf{R}^n de la forme (x_1, \dots, x_n) où $x_j = u_2 \theta_2^{j-1} + \dots + u_n \theta_n^{j-1}$, $1 \leq j \leq n$, où les u_m associés à des θ_m réels le sont, les u_m associés à des θ_m complexes et conjugués sont des nombres complexes conjugués et où $|u_m| \leq (1 + \alpha)(1 - \alpha)^{-1}$ ($2 \leq m \leq n$, α est défini par les hypothèses du théorème I). Grâce à ces conditions sur les u_m , les x_j dépendent linéairement de $n - 1$ paramètres réels et U est contenu dans un hyperplan L de \mathbf{R}^n . D'autre part U est compact.

Soit R_k l'ensemble de tous les points

$$\varepsilon_{k+1}(1 - \xi_{k+1}) + \varepsilon_{k+2} \xi_{k+1}(1 - \xi_{k+2}) + \dots + \varepsilon_{k+l} \xi_{k+1} \dots \xi_{k+l-1}(1 - \xi_{k+l}) + \dots,$$

où

$$\varepsilon_{k+l} \in \{0, 1\} \quad (l \geq 1).$$

Soit $V_k = H_0(R_k)$. Appelons N un entier qui sera fixé ultérieurement, I « l'intervalle » de \mathbf{R}^n défini comme l'ensemble des points $(t, \dots, \theta^{n-1}t)$ de \mathbf{R}^n tels que $0 \leq t \leq \beta^{-N}$ (β est défini par le théorème I). Alors $H_0(R_k) \subset I + f_k$ où f_k est un ensemble fini de 2^N points et $U + V_k = U + I + f_k$. Le théorème de Fubini nous apprend que $\text{mes}(U + I) \leq C\beta^{-N}$ (le support de I et le compact U porté par l'hyperplan L ne dépendent pas de N ; seule la longueur de I dépend de N). Choisissons N assez grand pour que $C\beta^{-N}2^N < 1$ (c'est possible car $2\beta^{-1} < 1$). Posons $K = p(U + I)$, $F_k = p(f_k)$ et $A_k = K + F_k = p(U + V_k)$. Le lemme 1 montre que la suite des compacts A_k laisse une place uniforme [car $\text{mes } K \leq \text{mes}(U + I)$ et $\text{card } F_k \leq 2^N$].

Soit $h_k = p \circ H_k$; il est immédiat de vérifier que la suite des h_k est normale. Pour prouver le théorème I il suffit de montrer que $h_k(E) \subset A_k$ ou que $H_k(E)$, modulo \mathbf{Z}^n , est contenu dans $U + V_k$. Tout élément t de E peut être écrit $t = t' + t''$ où $t' = \varepsilon_1(1 - \xi_1) + \dots + \varepsilon_k \xi_1 \dots \xi_{k-1}(1 - \xi_k)$. On vérifie immédiatement que $H_k(t'') \in V_k$. D'autre part $H_k(t') = (x_1, \dots, x_n)$ où chaque x_j est un entier algébrique du corps \mathcal{K} . La congruence $H_k(t') \in U$ (modulo \mathbf{Z}^n) est alors une conséquence immédiate des congruences

$$x_1 + \sigma_2(x_1) + \dots + \sigma_n(x_1) \in \mathbf{Z}, \quad \dots, \quad x_n + \sigma_2(x_n) + \dots + \sigma_n(x_n) \in \mathbf{Z}.$$

Les majorations de $|\sigma_2(x_1)| \dots |\sigma_n(x_1)|$ proviennent des hypothèses faites sur les modules des conjugués des $\omega_k (k \geq 1)$.

1.6. Pour montrer que le théorème I ne peut comporter de réciproque, prouvons le résultat suivant :

THÉORÈME III. — Soient \mathcal{K} un corps réel de nombres algébriques, n le degré de \mathcal{K} , $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ les n \mathbf{Q} -isomorphismes de \mathcal{K} dans \mathbf{C} (σ_1 est l'application identique de \mathcal{K} dans \mathbf{R}).

Soient $\alpha, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ n nombres réels tels que $0 < \alpha < \frac{1}{2}$, $\alpha_2 > 1, \dots, \alpha_n > 1$ et $\alpha \alpha_2 \dots \alpha_n = 1$. Soit C un nombre réel positif.

Appelons $(t_k)_{k \geq 1}$ une suite d'entiers algébriques du corps \mathcal{K} tels que $0 < t_k \leq \alpha^k$ et, pour $2 \leq j \leq n$, $|\sigma_j(t_k)| \leq C \alpha_j^k$.

Soit E l'ensemble de toutes les sommes $\sum_{k \geq 1} \varepsilon_k t_k$, $\varepsilon_k = 0$ ou 1 . Alors E est un ensemble d'unicité.

Avant de démontrer le théorème III faisons quelques remarques. Soit e_1, \dots, e_n une base du \mathbf{Z} -module libre formé des entiers algébriques du corps \mathcal{K} . Soit D le déterminant des vecteurs $(\sigma_j(e_1), \dots, \sigma_j(e_n)) (1 \leq j \leq n)$. Le théorème de Minkowski ([5], chap. VI, p. 75) nous apprend qu'il existe un entier algébrique t_k non nul tel que $0 < t_k \leq \alpha^k$ et que, pour $2 \leq j \leq n$, $|\sigma_j(t_k)| \leq C \alpha_j^k$ dès que $C \geq |D|$.

Si α est le module d'une unité θ de \mathcal{K} , on montre sans peine qu'il y a un ensemble fini F d'entiers algébriques du corps \mathcal{K} tel que, pour tout $k \geq 1$, $t_k \in \theta^k F$.

Passons à la preuve du théorème III. Appelons Λ_k l'ensemble de toutes les sommes $\sum_{j=1}^k \varepsilon_j t_j$, $\varepsilon_j = 0$ ou 1 et R_k l'ensemble de toutes les sommes

$\sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon_j t_j$, $\varepsilon_j = 0$ ou 1 . Soit, pour tout $k \geq 1$, s_k un entier de \mathcal{K} tel que $0 < s_k < \alpha^{-k}$ et, pour $2 \leq j \leq n$, $|\sigma_j(s_k)| \leq C \alpha_j^{-k}$ (s_k existe grâce au théorème de Minkowski dès que $C \geq |D|$). On a $s_k E = s_k \Lambda_k + s_k R_k$.

Tout $\lambda \in s_k \Lambda_k$ est un entier algébrique du corps \mathcal{K} tel que $|\sigma_j(\lambda)| \leq C^2 \alpha_j / \alpha_j - 1$ pour $2 \leq j \leq n$.

Pour tout entier p compris entre 1 et n et tout $\lambda \in s_k \Lambda_k$, on a, en posant $u_j = -\sigma_j(\lambda)$ pour $2 \leq j \leq n$:

$$(1.6.1) \quad e_p \lambda \equiv \sigma_2(e_p) u_2 + \dots + \sigma_n(e_p) u_n \pmod{1},$$

où $|u_j| \leq C^2 \alpha_j / \alpha_j - 1$, $2 \leq j \leq n$, et où les u_j relatifs à deux isomorphismes σ_j conjugués sont conjugués (sur le corps des complexes). Appelons U l'ensemble compact de \mathbf{R}^n formé des points $x = (x_p)_{1 \leq p \leq n}$ tels que x_p soit donné par le second membre de (1.6.1) avec $|u_p| \leq C^2 \alpha_j / \alpha_j - 1$. L'ensemble U est compact et est contenu dans un hyperplan L de \mathbf{R}^n . Soit H_0 l'homomorphisme continu de \mathbf{R} dans \mathbf{R}^n défini par $H_0(t) = (\alpha_1 t, \dots, \alpha_n t)$; $H_k(t) = H_0(s_k t)$, $k \geq 1$, P la projection canonique de \mathbf{R}^n sur \mathbf{T}^n et $h_k = P \circ H_k$, $V_k = H_k(\mathbf{R}_k)$. Alors on montre, comme dans la preuve du théorème I que :

- $H_k(E) \subset U + V_k + \mathbf{Z}^n$;

- $V_k \subset f_{k,N} + I_N$;

où $\text{Card } f_{k,N} \leq 2^N$, I_N est l'image par H_0 de $[0, \alpha^{N+1}/1 - \alpha]$.

Soit $K_N = P(U + I_N)$, $F_{k,N} = P(f_{k,N})$. On a $\text{mes}(U + I_N) \leq C_1 \alpha^N$ et donc $\text{mes } K_N \leq C_1 \alpha^N$. Pour N assez grand, on a donc $\text{Card } F_{k,N} \text{ mes } K_N < 1$ et la suite des compacts de \mathbf{T}^n , $A_k = K_N + F_{k,N}$ laisse donc une place uniforme; E est un ensemble d'unicité.

Cas des ensembles parfaits de translation.

THÉORÈME IV. — *Les notations relatives au corps \mathcal{K} de nombres algébriques sont les mêmes qu'au théorème III. Soient q un entier positif, $\alpha, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ n nombres réels tels que $0 < \alpha < q^{-1}$, $\alpha_2 > 1, \dots, \alpha_n > 1$, $\alpha \alpha_1 \dots \alpha_n = 1$ et soit C une constante positive. Soit, pour tout $k \geq 1$, X_k un ensemble fini de q nombres réels tel que tout $t \in X_k$ soit un entier algébrique de \mathcal{K} vérifiant les conditions $0 < t < \alpha^k$, $|\sigma_j(t)| \leq C \alpha_j^k$ pour $2 \leq j \leq n$. Posons $E = X_1 + \dots + X_k + \dots$. Alors E est un ensemble d'unicité.*

La preuve du théorème IV est semblable à celle du théorème III.

2. Les nombres de Pisot et les fonctions presque-périodiques.

2.1. LE PROBLÈME DE L'UNICITÉ ET LES FONCTIONS PRESQUE-PÉRIODIQUES. — Soit $\tilde{\mathbf{R}}$ le compactifié de Bohr de \mathbf{R} c'est-à-dire le groupe compact de tous les homomorphismes χ de \mathbf{R} dans \mathbf{T} . La topologie de $\tilde{\mathbf{R}}$ est celle de la convergence simple sur \mathbf{R} des homomorphismes χ . Si au nombre réel u nous associons le caractère χ_u défini par $\chi_u(t) = \exp 2 \pi i u t$, nous définissons une application de \mathbf{R} dans $\tilde{\mathbf{R}}$, $u \rightarrow \chi_u$, dont on montre qu'elle

est continue, injective et d'image dense. Désormais, par abus de langage, nous regarderons \mathbf{R} comme une partie de $\tilde{\mathbf{R}}$. ([18], th. 1.8.2).

Il est bien connu que les fonctions presque-périodiques sur \mathbf{R} sont alors les restrictions à \mathbf{R} des fonctions continues sur $\tilde{\mathbf{R}}$.

2.2. THÉORÈME I. — Soient E un ensemble compact de nombres réels, K une partie compacte de $\tilde{\mathbf{R}}$ qui n'est pas tout $\tilde{\mathbf{R}}$, $(t_k)_{k \geq 1}$ une suite de nombres réels tendant vers l'infini et $(s_k)_{k \geq 1}$ une suite arbitraire de nombres réels.

Si pour tout $k \geq 1$, $s_k + t_k E$ est contenu dans K , E est un ensemble d'unicité.

Ce résultat est un corollaire de la proposition 1.4 : puisque K n'est pas tout $\tilde{\mathbf{R}}$, il y a un entier n , n nombres réels $\omega_1, \dots, \omega_n$, \mathbf{Z} -linéairement indépendants, tels que, en appelant h l'homomorphisme continu de \mathbf{R} dans \mathbf{T}^n défini par $h(t) = (\exp 2\pi i \omega_1 t, \dots, \exp 2\pi i \omega_n t)$ l'image R de K par h soit un compact de \mathbf{T}^n différent de \mathbf{T}^n . Alors $h(t_k E) + h(s_k) \subset R$ et l'on est ramené à la proposition 1.4.

2.3. APPLICATION AU THÉORÈME DE SALEM-ZYGMUND.

THÉORÈME II. — Soient θ un nombre de Pisot supérieur à 2 et E l'ensemble de toutes les sommes $\sum_{k \geq 1} \varepsilon_k \theta^{-k}$, $\varepsilon_k = 0$ ou 1. Alors E est un ensemble d'unicité.

Appelons, en effet, Λ l'ensemble de toutes les sommes finies $\sum_{k \geq 0} \varepsilon_k \theta^k$, $\varepsilon_k = 0$ ou 1, $\bar{\Lambda}$ la fermeture de Λ dans $\tilde{\mathbf{R}}$ et $\Lambda' = \bar{\Lambda} \cap \mathbf{R}$. Nous montrerons (théorème III) que Λ' est dénombrable. Soit $K = \bar{\Lambda} + E$. On a de façon évidente $\theta^k E \subset K$ et le compact K pas tout $\tilde{\mathbf{R}}$ sinon $K \cap \mathbf{R} = \Lambda' + E$ serait tout \mathbf{R} . Or $\Lambda' + E$ est un ensemble sans intérieur de nombres réels (théorème de Baire). On applique alors le théorème I avec $s_k = 0$, $t_k = \theta^k$.

2.4. LE THÉORÈME FONDAMENTAL (NOTATIONS PRÉPARATOIRES). — Soit θ un entier algébrique de degré n . Nous désignerons par $\mathbf{Z}(\theta)$ l'ensemble des nombres réels t pouvant être écrits $t = p_0 + p_1 \theta + \dots + p_{n-1} \theta^{n-1}$ où les p_j , $0 \leq j \leq n-1$, sont des entiers relatifs.

DÉFINITION 2.4. — Nous écrirons un nombre réel t sous la forme $\sum_0^\infty \varepsilon_k \theta^k$, $\varepsilon_k = 0$ ou 1 si les deux conditions suivantes sont satisfaites :

(1) $t \in \mathbf{Z}(\theta)$;

(2) on peut trouver deux polynômes à coefficients entiers $P(X)$ et $Q(X)$ tels que la fraction rationnelle $P(X)/Q(X)$ soit représentée par la série formelle $\sum_{k \geq 0} \varepsilon_k X^k$, $\varepsilon_k = 0$ ou 1 et que $t = P(\theta)/Q(\theta)$.

Remarque. — Si θ est un nombre de Pisot et si $t = \sum_0^{\infty} \varepsilon_k \theta^k$, $\varepsilon_k = 0$ ou 1 , alors les conjugués t_j de t , $2 \leq j \leq n$, autres que t s'écrivent $\sum_0^{\infty} \varepsilon_k \theta_j^k$ où la série converge cette fois dans \mathbf{C} .

2.5. ÉNONCÉ DU THÉORÈME FONDAMENTAL.

THÉORÈME III. — Soient θ un nombre réel supérieur à 1 et Λ l'ensemble de toutes les sommes finies $\sum_{k \geq 0} \varepsilon_k \theta^k$ où $\varepsilon_k = 0$ ou 1 .

(1) Si θ n'est pas un nombre de Pisot, toute fonction presque-périodique nulle sur Λ est identiquement nulle,

(2) Si θ est un nombre de Pisot, soit Λ' l'ensemble de tous les nombres réels pouvant être écrits $\sum_0^{\infty} \varepsilon_k \theta^k$, $\varepsilon_k = 0$ ou 1 , au sens de la définition 2.4. Toute fonction presque-périodique nulle sur Λ est nulle sur Λ' mais Λ' est le plus grand ensemble de nombres réels possédant cette propriété.

Remarque. — Il se peut, comme nous le verrons que $\Lambda = \Lambda'$ c'est le cas si, par exemple θ est un entier ordinaire supérieur ou égal à 3.

2.6. PRINCIPE DE LA DÉMONSTRATION DU THÉORÈME III. — Quelques notations sont encore nécessaires : soient $\bar{\Lambda}$ la fermeture de Λ dans $\tilde{\mathbf{R}}$, $(\mu_k)_{k \geq 0}$ la suite des mesures portées par Λ et donnant la masse 2^{-k-1} à chacun des points $\sum_0^k \varepsilon_j \theta^j$, $\varepsilon_j = 0$ ou 1 . Nous allons voir que dans tous les cas la suite des mesures μ_k tend dans la topologie $\sigma(\mathbf{M}(\tilde{\mathbf{R}}), \mathcal{C}(\mathbf{R}))$ vers une mesure μ . On aura nécessairement $\text{Sup } \mu \subset \bar{\Lambda}$ et l'inclusion en sens inverse sera évidente compte tenu de μ et $\bar{\Lambda}$. Pour déterminer μ il suffit de calculer, pour tout nombre réel t , la limite de

$$\hat{\mu}_k(t) = \prod_{j=1}^k \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \exp 2\pi i t \theta^j \right).$$

Pour énoncer le résultat nous aurons besoin de la proposition suivante :

PROPOSITION 2.6. — Soient θ un entier algébrique de degré n , $\theta_2, \dots, \theta_n$ les conjugués de θ , σ_j , $1 \leq j \leq n$, les n \mathbf{Q} -isomorphismes du corps de θ dans \mathbf{C} , $\sigma_1 = \text{Id}$, et \mathcal{A} l'ensemble des nombres réels t pour lesquels on peut trouver $n - 1$ nombres complexes t_2, \dots, t_n tels que, pour tout $k \geq 0$, $t\theta^k + t_2\theta_2^k + \dots + t_n\theta_n^k$ soit un entier relatif. Alors \mathcal{A} est un \mathbf{Z} -module libre de rang n dont une base sera notée $\omega_1, \dots, \omega_n$.

2.7. UNE VERSION DU THÉORÈME DE PISOT. — La limite de $\hat{\mu}_k(t)$ est donnée par le résultat suivant :

PROPOSITION 2.7. — Si θ n'est pas un nombre de Pisot, pour tout nombre réel t non nul, $\hat{\mu}_k(t)$ tend vers zéro. Si θ est un nombre de Pisot, $\hat{\mu}_k(t)$ tend vers zéro sauf si, pour un entier k_0 , $t\theta^{k_0}$ s'écrit $p_1\omega_1 + \dots + p_n\omega_n$, $p_j \in \mathbf{Z}$, et alors

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \hat{\mu}_k(t) = \prod_0^{k_0-1} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \exp 2\pi i t \theta^j \right) \prod_{k_0}^{\infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \exp -2\pi i (t_2 \theta_2^j + \dots + t_n \theta_n^j) \right) \\ [t \in \mathbf{Q}(\theta), t_2 = \sigma_2(t), \dots, t_n = \sigma_n(t)].$$

La preuve de 2.7 se trouve dans [2], th. I et II, p. 134.

2.8. θ N'EST PAS UN NOMBRE DE PISOT. — Nous pouvons régler le (1) du théorème. Si θ n'est pas un nombre de Pisot, $\hat{\mu}_k(0) = 1$ tandis que pour tout t non nul $\hat{\mu}_k(t)$ tend vers zéro. Les mesures μ_k convergent dans la topologie $\sigma(\mathbf{M}(\tilde{\mathbf{R}}), \mathcal{C}(\tilde{\mathbf{R}}))$ vers la mesure de Lebesgue de $\tilde{\mathbf{R}}$ et Λ est dense dans $\tilde{\mathbf{R}}$.

2.9. θ EST UN NOMBRE DE PISOT (DESCRIPTION D'UN « SOLÉNOÏDE » G). — Si θ est un nombre de Pisot, soient $\omega_1, \dots, \omega_n$ comme dans la proposition, soient $\omega_{i,j} = \sigma_j(\omega_i)$, $1 \leq i \leq n$, $2 \leq j \leq n$. Chacun des nombres $\omega_1\theta, \dots, \omega_n\theta$ appartient évidemment à \mathcal{A} (par la définition même de \mathcal{A}). On a donc $(\omega_1\theta, \dots, \omega_n\theta) = \mathbf{M}(\omega_1, \dots, \omega_n)$ où \mathbf{M} est une matrice (n, n) à coefficients entiers; \mathbf{M} définit, par passage au quotient par \mathbf{Z}^n , un endomorphisme, que nous noterons encore \mathbf{M} , de \mathbf{T}^n . Soit \mathbf{H} la réunion de la suite croissante des sous-groupes $\theta^{-k} \mathcal{A}$ de \mathbf{R} . Le groupe dual de \mathbf{H} (\mathbf{H} est un groupe discret) est une limite projective de \mathbf{T}^n ; plus précisément ce dual \mathbf{G} est le groupe compact de toutes les suites $\mathbf{Z}_0, \dots, \mathbf{Z}_k, \dots$ d'éléments de \mathbf{T}^n telles que $\mathbf{Z}_k = \mathbf{M}(\mathbf{Z}_{k+1})$. On peut définir un homomorphisme continu h de \mathbf{R} dans \mathbf{G} par

$$h(t) = (\mathbf{Z}_0(t), \dots, \mathbf{Z}_k(t), \dots), \quad \text{où } \mathbf{Z}_k(t) = (\exp 2\pi i \theta^{-k} \omega_1 t, \dots, \exp 2\pi i \theta^{-k} \omega_n t);$$

l'image de \mathbf{R} par h est dense dans \mathbf{G} . Soit \tilde{h} le prolongement à $\tilde{\mathbf{R}}$ de h ; \tilde{h} est une surjection de $\tilde{\mathbf{R}}$ sur \mathbf{G} .

2.10. θ EST UN NOMBRE DE PISOT. DESCRIPTION D'UN COMPACT REMARQUABLE \mathbf{K} DE \mathbf{G} . — Le compact \mathbf{K} de \mathbf{G} est l'ensemble des points de \mathbf{G} de la forme $\varepsilon_0 \xi_0 + \varepsilon_1 \xi_1 + \dots + \varepsilon_k \xi_k + \dots$, où $\varepsilon_k = 0$ ou 1 et où les ξ_k , $k \geq 0$, sont définis de la façon suivante :

$$\xi_k = (\xi_{k,0}, \dots, \xi_{k,j}, \dots) \quad \text{où } \xi_{k,j} \in \mathbf{T}^n$$

et

$$\xi_{k,j} = (\exp 2\pi i \varphi_{k,j}^1, \dots, \exp 2\pi i \varphi_{k,j}^n) \quad \text{avec} \quad \varphi_{k,j}^h = \theta^{k-j} \omega_h \quad \text{si } 0 \leq k \leq j$$

et

$$\varphi_{k,j}^h = -\omega_{h,2} \theta_2^{k-j} - \dots - \omega_{h,n} \theta_n^{k-j} \quad \text{si } k > j \quad (1 \leq h \leq n).$$

Appelons Ω l'ensemble $\{0, 1\}^{\mathbf{N}}$, dP la mesure produit de celle donnant les masses $\frac{1}{2}$ à 0 et à 1 et $d\rho$ la mesure portée par K image de dP par l'application qui envoie la suite $(\varepsilon_k)_{k \geq 0}$ en $\sum_{k \geq 0} \varepsilon_k \xi_k$.

2.11. IMAGE RÉCIPROQUE D'UNE MESURE PAR UNE APPLICATION CONTINUE.

DÉFINITION. — Soient G_1 et G_2 deux groupes abéliens compacts, T un homomorphisme continu et surjectif de G_1 sur G_2 , N le noyau de T et $d\rho_2$ une mesure portée par G_2 . La mesure $d\rho_1$ sur G_1 , image réciproque de ρ_2 par T est définie par

$$\int_{G_1} f(x_1) d\rho_1 = \int_{G_2} d\rho_2 \int_N f(x+y) dy$$

$[f \in \mathcal{C}(G_1), dy$ est la mesure de Haar de N normalisée et $x \rightarrow \int_N f(x+y) dy$ est une fonction continue de x , constante sur les classes modulo N ; elle définit de façon canonique une fonction continue sur $G_2 \simeq G_1/N$.]

Soient Γ_1 et Γ_2 les groupes duaux de G_1 et G_2 et $T^* : \Gamma_2 \rightarrow \Gamma_1$ l'homomorphisme dual de T ; T^* est injectif. Les coefficients de Fourier de $d\rho_1$ sont $\hat{\rho}_1(\gamma_1) = 0$ si γ_1 n'est pas de la forme $T^*(\gamma_2)$, $\gamma_2 \in \Gamma_2$, et $\hat{\rho}_1(\gamma_1) = \hat{\rho}_2(\gamma_2)$ si $\gamma_1 = T^*(\gamma_2)$.

2.12. CARACTÉRISATION DE $\bar{\Lambda}$ ET D'UNE MESURE PORTÉE PAR $\bar{\Lambda}$.

PROPOSITION 2.11. — La fermeture $\bar{\Lambda}$ de Λ dans $\tilde{\mathbf{R}}$ est l'image réciproque par \tilde{h} du compact K de G et la mesure μ est l'image réciproque par \tilde{h} de la mesure ρ .

Nous allons d'abord prouver le second point. Il suffit pour cela de montrer que si un nombre réel t ne s'écrit pour aucune valeur de k sous la forme $t = \theta^{-k}(\omega_1 p_1 + \dots + \omega_n p_n)$ où $p_j \in \mathbf{Z}$, $1 \leq j \leq n$, alors $\hat{\mu}_k(t) = 0$. Si au contraire $t = \theta^{-k}(\omega_1 p_1 + \dots + \omega_n p_n)$, il faut montrer que

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \hat{\mu}_k(t) = \hat{\rho}(\theta^{-k}(\omega_1 p_1 + \dots + \omega_n p_n))$$

si $\theta^{-k}(\omega_1 p_1 + \dots + \omega_n p_n) \in H$, groupe dual de G .

Mais ces deux assertions sont des conséquences immédiates de la proposition 2.7. et de la définition de la mesure ρ .

- (a) $t \in \Lambda''$;
 (b) il existe une suite $(\varepsilon_k)_{k \geq 0}$ de 0 et de 1 (peut être différente de celle qui a défini t dans Λ'') telle que $t = \sum_0^{\infty} \varepsilon_k \theta^k$.

Pour montrer ce lemme, remarquons que si $t \in \Lambda''$, pour $2 \leq j \leq n$,

$$\sigma_j(t) = \varepsilon_0 + \varepsilon_1 \theta_j + \dots + \varepsilon_p \theta_j^p + \theta_j^{p+1} \sigma_j(t_{p+1}).$$

Grâce à (3) on peut passer à la limite pour trouver $\sigma_j(t) = \sum_0^{\infty} \varepsilon_k \theta_j^k$

et $|\sigma_j(t)| \leq \frac{1}{1 - |\theta_j|}$ pour $2 \leq j \leq n$ et tout élément t de Λ'' .

D'autre part, pour tout $p \geq 0$, t_{p+1} appartient lui-même à Λ'' comme on le vérifie aussitôt en écrivant une décomposition (1) relative à un indice $q > p$. Nous allons définir pour les éléments de Λ'' une décomposition (1) où quitte à changer les ε_k , t_{p+1} ne dépende que de la valeur de t_p . Tout élément t de Λ'' peut être écrit sous l'une des deux formes $t = \theta t_1$ où $t_1 \in \Lambda''$ ou $t = 1 + \theta t_1$ avec $t_1 \in \Lambda''$. Appelons Λ''_0 l'ensemble des éléments de Λ'' que l'on ne peut écrire que sous la première forme et Λ''_1 le reste de Λ'' . On écrit donc en prenant $\varepsilon_0 = 1$ chaque fois que c'est possible, $t = \varepsilon_0 + \theta t_1$ où ε_0 et t_1 ne dépendent que de la position de t dans Λ'' . On peut recommencer cette opération sur t_1 et l'on obtient une décomposition (1) où chaque $p \geq 0$, t_p appartient à Λ'' et où t_{p+1} ne dépend que de la valeur de t_p .

Terminons alors la preuve du lemme. Les propriétés (2) et (3) de la suite des t_p montrent que t_p appartient à un ensemble fini F d'entiers algébriques et puisque t_{p+1} ne dépend que de la position de t_p dans F, la suite des t_p , comme celle des ε_p , $p \geq 0$, est périodique à partir d'un certain moment. Il en résulte que t appartient à Λ' .

3. Un ensemble remarquable de nombres de Pisot.

Nous allons définir une partie \mathcal{S} de l'ensemble S des nombres de Pisot; θ appartient à \mathcal{S} si et seulement si Λ est l'ensemble des zéros d'une fonction presque-périodique.

3.1. Soient θ un nombre réel supérieur à 2, Λ l'ensemble de toutes les sommes finies $\sum_{k \geq 0} \varepsilon_k \theta^k$, $\varepsilon_k = 0$ ou 1, E l'ensemble parfait, à rapport de dissection θ^{-1} , composé de toutes les sommes $\sum_{k \geq 1} \varepsilon_k \theta^{-k}$, $\varepsilon_k = 0$ ou 1, et si θ est un entier algébrique de degré n , $\mathbf{Z}(\theta)$ l'anneau composé de tous les nombres réels $p_0 + p_1 \theta + \dots + p_{n-1} \theta^{n-1}$, $p_j \in \mathbf{Z}$, $0 \leq j \leq n - 1$.

Il est très curieux que le rôle joué par Λ vis-à-vis des fonctions presque-périodiques ait un lien étroit avec la nature arithmétique des éléments de E . Plus précisément, on a le résultat suivant :

THÉORÈME I. — *Les trois propriétés suivantes sont équivalentes :*

- (1) Λ est exactement l'ensemble des zéros d'une fonction presque-périodique;
 (2) θ est un nombre de Pisot supérieur à 2 et, si θ n'est pas une unité, o est le seul élément commun à E et à $\mathbf{Z}(\theta)$; si θ est une unité, les sommes finies $\sum_{k \geq 1} \varepsilon_k \theta^{-k}$, $\varepsilon_k = o$ ou 1 , sont les seuls éléments communs à E et à $\mathbf{Z}(\theta)$.
 (3) pour aucune valeur de l'entier p , $p \geq 1$ et pour aucune suite $\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_{p-1}$ de o et de 1 (sauf pour la suite ne comportant que des zéros), $\varepsilon_0 + \varepsilon_1 \theta + \dots + \varepsilon_{p-1} \theta^{p-1}$ n'est divisible par $1 - \theta^p$ dans l'anneau $\mathbf{Z}(\theta)$.

3.2. Nous allons montrer pourquoi les nombres de Pisot θ de l'intervalle $]1, 2]$ ne permettent pas que Λ soit l'ensemble des zéros d'une fonction presque-périodique f ; dans ce cas il existe un nombre réel T positif tel que tout intervalle $[t, t + T]$, $t > 0$ rencontre Λ . Soient $\varepsilon = \frac{1}{k}$ et τ une ε -presque période de f , $\tau \geq T + 1$. Dans l'intervalle $[-T - 1, -1]$ il y a au moins un nombre réel t_k tel que $t_k + \tau \in \Lambda$. On a donc $|f(t_k)| \leq \frac{1}{k}$. Soit $t \in [-T - 1, -1]$ un point adhérent à la suite des t_k . On a $f(t) = 0$ et t n'appartient pas à Λ .

3.3. Démontrons maintenant le théorème I. Pour tout ensemble X de nombres réels, adoptons les deux notations suivantes : \bar{X} est la fermeture de X dans le compactifié de Bohr de \mathbf{R} et $X' = X \cap \mathbf{R}$. Alors Λ' est l'ensemble de tous les nombres λ de $\mathbf{Z}(\theta)$ que l'on peut écrire, pour un entier $p \geq 1$, un entier $q \geq 1$, une suite $(\alpha_j)_{0 \leq j \leq p-1}$ de o et de 1 et une suite $(\varepsilon_j)_{0 \leq j \leq q-1}$ de o ou 1 sous la forme

$$(1) \quad \lambda = \alpha_0 + \dots + \alpha_{q-1} \theta^{q-1} + \theta^q (\varepsilon_0 + \dots + \varepsilon_{p-1} \theta^{p-1}) / (1 - \theta^p).$$

Il est tentant d'écrire que si $\lambda \in \Lambda'$ et si $\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_{p-1}$ dans l'écriture (1) ne sont pas tous nuls, alors λ n'appartient pas à Λ . En fait, ce n'est pas vrai car l'écriture (1) n'est pas nécessairement unique. On a cependant.

LEMME 1. — *Soit θ un nombre de Pisot. Les trois conditions ci-dessous sont équivalentes :*

- (1) $\Lambda' = \Lambda$;
 (2) le seul élément commun à Λ' et $-E$ est o ;

(3) pour aucune valeur de l'entier $p \geq 1$ et aucune suite (ε_j) $0 \leq j \leq p-1$ de 0 ou 1 (sauf la suite nulle), $\varepsilon_0 + \varepsilon_1 \theta + \dots + \varepsilon_{p-1} \theta^{p-1}$ n'est divisible, dans l'anneau $\mathbf{Z}(\theta)$, par $1 - \theta^p$.

Montrons d'abord que (3) \Rightarrow (1); en effet si, dans $\mathbf{Z}(\theta)$, $\theta^m (\varepsilon_0 + \dots + \varepsilon_{p-1} \theta^{p-1})$ est divisible par $1 - \theta^p$ il en est de même de $\varepsilon_0 + \dots + \varepsilon_{p-1} \theta^{p-1}$. D'autre part (1) \Rightarrow (2) car le seul élément commun à Λ et $-E$ est 0. Enfin la négation de (3) entraîne celle de (2). Soit, en effet, $\lambda = (\varepsilon_0 + \dots + \varepsilon_{p-1} \theta^{p-1}) / (1 - \theta^p)$ un élément de $\mathbf{Z}(\theta)$. On peut écrire, pour tout entier $m \geq 1$,

$$\lambda = (\varepsilon_0 + \dots + \varepsilon_{p-1} \theta^{p-1}) (1 + \theta^p + \dots + \theta^{p(m-1)}) + \lambda \theta^{mp}.$$

Tirant λ du second membre, on a $\lambda = \theta^{-mp} \lambda - s_m$ où $s_m \in E$ et en passant à la limite on obtient que $\lambda \in -E$.

COROLLAIRE. — Si $(\theta - 1) (1 - |\theta_2|) \dots (1 - |\theta_n|) > 1$, $\theta \in \mathcal{S}$.

En effet, si $\lambda \in \Lambda'$, pour $2 \leq j \leq n$, $\sigma_j(\lambda) = \sum_0^\infty \varepsilon_k \theta_j^k$ et donc $|\sigma_j(\lambda)| \leq \frac{1}{1 - |\theta_j|}$.

Or $\prod_1^n \sigma_j(\lambda) \in \mathbf{Z}$ et donc $|\lambda| \geq \prod_2^n (1 - |\theta_j|)$. Mais $E \subset \left[0, \frac{1}{\theta - 1}\right]$. La condition du corollaire assure donc que $-E \cap \Lambda' = \{0\}$.

3.4. Le lemme 1 prouve l'équivalence entre les assertions (1) et (3) du théorème II; pour montrer celle de (1) et de (2), nous avons besoin du lemme suivant :

LEMME 2. — Soit θ un nombre de Pisot supérieur à 1. Tout élément λ de E et de $\mathbf{Q}(\theta)$ peut s'écrire $\sum_{k \geq 1} \varepsilon_k \theta^{-k}$ où ε_k vaut 0 ou 1 et où la suite de ε_k est à partir d'un certain moment périodique.

En effet, pour tout élément t de E , posons $t_p = \theta^p \sum_{k \geq p+1} \varepsilon_k \theta^{-k}$. On a $t_{p+1} = \theta t_p - \varepsilon_{p+1}$ et il est possible de définir une écriture canonique des éléments de E telle que t_{p+1} et ε_{p+1} ne dépendent que de la position de t_p dans E .

Soient λ un élément de E appartenant à $\mathbf{Q}(\theta)$, a_0, \dots, a_{n-1} et b des entiers relatifs tels que $s\lambda = a_0 + \dots + a_{n-1} \theta^{n-1}$; développons λ sous la forme canonique $\sum_{k \geq 1} \varepsilon_k \theta^{-k}$, $\varepsilon_k = 0$ ou 1 et posons $\lambda_p = s \theta^p \sum_{k \geq p+1} \varepsilon_k \theta^{-k}$. On a également

$$\lambda_p = \theta^p (a_0 + \dots + a_{n-1} \theta^{n-1}) - s(\varepsilon_1 \theta^{p-1} + \dots + \varepsilon_p);$$

λ_p est donc un élément de $\mathbf{Z}(\theta)$ et un calcul élémentaire montre que l'on a, pour $2 \leq j \leq n$,

$$|\sigma_j(\lambda_p)| \leq |a_0| + \dots + |a_{n-1}| + \frac{|s|}{1 - |\sigma_j(\theta)|}.$$

Enfin $|\lambda_p| \leq \frac{|s|}{\theta - 1}$; λ_p appartient donc à un ensemble fini F de nombres réels. Mais $\lambda_{p+1} = \theta\lambda_p - s\varepsilon_{p+1}$ et λ_{p+1} ne dépend que de λ_p . La suite des λ_p , comme celle des ε_p , est donc périodique à partir d'un certain moment.

Le lemme 2 étant prouvé, soit λ un élément commun à E et à $\mathbf{Z}(\theta)$; il peut être écrit $\lambda = \sum_1^{q-1} \alpha_k \theta^{-k} + \theta^{-q} (\varepsilon_0 + \varepsilon_1 \theta^{-1} + \dots + \varepsilon_{p-1} \theta^{-p+1}) / 1 - \theta^{-p}$ avec $\alpha_k, \varepsilon_k = 0$ ou 1 . Posons $t = (\varepsilon_0 + \dots + \varepsilon_{p-1} \theta^{-p+1}) / 1 - \theta^{-p}$; en calculant t en fonction de λ , on voit que t appartient à $\mathbf{Z}(\theta)$ et donc que t appartient à Λ' . On applique alors le lemme 1.

4. Les nombres de Pisot et les compacts associés.

4.1. Soient Λ un ensemble de nombres réels et I un intervalle compact de nombres réels. Nous dirons que I est associé à Λ (voir [4]) s'il existe une constante C telle que, pour toute somme trigonométrique finie :

$$P(t) = \sum_{\lambda \in \Lambda} a_\lambda \exp 2\pi i \lambda t, \quad a_\lambda \in \mathbf{C},$$

on a

$$\sup_{t \in \mathbf{R}} |P(t)| \leq C \sup_{t \in I} |P(t)|.$$

Nous dirons que Λ est un ensemble cohérent de fréquences pour exprimer qu'il existe un intervalle compact I associé à Λ . Tout translaté de I est alors encore associé à Λ .

Si Λ est un ensemble cohérent de fréquences, il existe un nombre positif d tel que les points de Λ soient distants d'au moins d les uns des autres. La nature arithmétique des ensembles cohérents de fréquences est très particulière comme le montre le théorème ci-dessous.

THÉORÈME I. — Soient θ un nombre réel supérieur à 1 et Λ l'ensemble de toutes les sommes finies $\sum_{k \geq 0} \varepsilon_k \theta^k$, $\varepsilon_k = 0$ ou 1 . Les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

- (1) Λ est un ensemble cohérent de fréquences;
- (2) θ est un nombre de Pisot.

4.2. Montrons d'abord que si θ n'est pas un nombre de Pisot, Λ n'est pas un ensemble cohérent de fréquences. Appelons, pour tout entier k , $P_k(t)$ la somme trigonométrique $\exp \pi i t (1 + \theta + \dots + \theta^k) \cos \pi t \dots \cos \pi \theta^k t$; $P_k(t)$ est bien de la forme $\sum_{\lambda \in \Lambda} a_\lambda \exp 2 \pi i \lambda t$. Si θ n'est pas un nombre de Pisot, pour tout t non nul,

$$|P_k(t)| = |\cos \pi t| \dots |\cos \pi \theta^k t|$$

tend en décroissant vers zéro ([5], th. I, p. 64). On déduit du théorème de Dini que, sur tout compact K ne contenant pas 0, $P_k(t)$ converge uniformément vers zéro. On a cependant $P_k(0) = 1$. Cela interdit que Λ soit un ensemble cohérent de fréquences car on peut translater un intervalle I associé à Λ pour qu'il devienne un compact K ne contenant pas 0.

4.3. Pour montrer la réciproque, nous avons besoin du lemme diophantien suivant :

LEMME 1. — Soient L_1, L_2, \dots, L_n n formes linéaires \mathbf{R} -indépendantes sur \mathbf{R}^n telles que pour toute forme linéaire L non nulle à coefficients entiers, L_2, \dots, L_n et L soient \mathbf{R} -indépendantes. Pour tout $\varepsilon > 0$ on peut trouver un $T > 0$ tel que, pour tout point (x_2, \dots, x_n) de \mathbf{R}^{n-1} les inégalités diophantiennes ci-dessous soient simultanément résolubles

$$\begin{aligned} |L_1(p_1, \dots, p_n)| &\leq T, \\ |L_2(p_1, \dots, p_n) - x_2| &\leq \varepsilon, \\ &\dots\dots\dots, \\ |L_n(p_1, \dots, p_n) - x_n| &\leq \varepsilon. \end{aligned}$$

La démonstration de ce résultat est laissée au lecteur.

DÉFINITION. — Nous dirons qu'une partie A de \mathbf{R}^p , $p \geq 1$, est ε -dense pour exprimer que toute boule de \mathbf{R}^p de rayon ε rencontre A (ε est un nombre réel positif et cette définition dépend de la distance choisie sur \mathbf{R}^p).

Nous pouvons énoncer la conclusion du lemme sous la forme suivante :
pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un $T > 0$ tel que l'ensemble A_T des points de \mathbf{R}^{n-1} de la forme (x_2, \dots, x_n) où $x_j = L_j(p_1, \dots, p_n)$, $p_k \in \mathbf{Z}$, $|L_1(p_1, \dots, p_n)| \leq T$ ($2 \leq j \leq n$, $1 \leq k \leq n$) soit ε -dense.

4.4. Si θ est un nombre de Pisot, appelons H l'homomorphisme de \mathbf{R} dans \mathbf{R}^n défini par $H(t) = (t, \theta t, \dots, \theta^{n-1} t)$ (n est le degré de θ). Soient $\theta_2, \dots, \theta_n$ les conjugués de θ , U le compact de \mathbf{R}^n composé de tous les points (x_1, \dots, x_n) où

$$x_1 = u_2 + \dots + u_n, \quad \dots, \quad x_n = u_2 \theta_2^{n-1} + \dots + u_n \theta_n^{n-1}$$

et où

$$u_2 = -\sum_0^{\infty} \varepsilon_k \theta_2^k, \quad \dots, \quad u_n = -\sum_0^{\infty} \varepsilon_k \theta_n^k, \quad \varepsilon_k = 0 \text{ ou } 1,$$

les u_j relatifs à deux θ_j conjugués dans \mathbf{C} sont eux-mêmes conjugués et, pour cette raison les points de U dépendent linéairement de $n - 1$ paramètres réels et U est contenu dans un hyperplan L de \mathbf{R}^{n-1} . D'autre part U est compact. Soit p la projection canonique de \mathbf{R}^n sur \mathbf{T}^n défini par

$$p(x_1, \dots, x_n) = (\exp 2\pi i x_1, \dots, \exp 2\pi i x_n).$$

Soit $N = p(U)$.

L'inclusion $h(\Lambda) \subset N$ est une conséquence immédiate des congruences

$$\theta^k + \theta_2^k + \dots + \theta_n^k \equiv 0 \pmod{1}, \quad k \geq 0.$$

Soit $P(t) = \sum_{\lambda \in \Lambda} a_\lambda \exp 2\pi i \lambda t$ une somme trigonométrique, $\Gamma \subset \mathbf{R}$ le sous-groupe dense $\mathbf{Z} + \theta\mathbf{Z} + \dots + \theta^{n-1}\mathbf{Z}$ et I un intervalle compact, non réduit à un point qui n'est pas encore précisé. On a évidemment

$$\sup_{t \in \mathbf{R}} |P(t)| = \sup_{t \in \Gamma} |P(t)| \quad \text{et} \quad \sup_{t \in I} |P(t)| = \sup_{t \in I \cap \Gamma} |P(t)|.$$

On supposera dorénavant que

$$t = p_1 + p_2\theta + \dots + p_n\theta^{n-1} \quad \text{où } p_j \in \mathbf{Z}, \quad 0 \leq j \leq n-1.$$

Mais alors

$$\exp 2\pi i \lambda t = z_1(\lambda)^{p_1} z_2(\lambda)^{p_2} \dots z_n(\lambda)^{p_n} = \exp 2\pi i \sum_1^n p_j x_j(\lambda),$$

où $(z_1, \dots, z_n) = h(\lambda) \in N$ et $(x_1(\lambda), \dots, x_n(\lambda))$ est un point $x(\lambda)$ de \mathbf{R}^n tel que

$$p(x(\lambda)) = h(\lambda) \quad [z_1(\lambda) = \exp 2\pi i \lambda, \dots, z_n(\lambda) = \exp 2\pi i \theta^{n-1} \lambda].$$

Définissons, sur \mathbf{R}^n , un polynôme trigonométrique, $Q(y_1, \dots, y_n)$ par

$$Q(y_1, \dots, y_n) = \sum_{\lambda \in \Lambda} \omega_\lambda \exp 2\pi i (y_1 x_1(\lambda) + \dots + y_n x_n(\lambda)) \quad \text{où } (y_1, \dots, y_n) \in \mathbf{R}^n.$$

Soit $B(I)$ la partie de \mathbf{Z}^n définie par la condition $p_1 + p_2\theta + \dots + p_n\theta^{n-1} \in I$

On a alors

$$\sup_{t \in I} |P(t)| = \sup_{(p_1, \dots, p_n) \in B(I)} |Q(p_1, \dots, p_n)|$$

et

$$\sup_{t \in \mathbf{R}} |P(t)| = \sup_{(p_1, \dots, p_n) \in \mathbf{Z}^n} |Q(p_1, \dots, p_n)|.$$

Écrivons l'équation de l'hyperplan L contenant U sous la forme $\omega_1 x_1 + \dots + \omega_n x_n = 0$. Un calcul immédiat montre que ω_n est différent

de zéro. On a alors

$$Q(y_1 + \omega_1 t, \dots, y_n + \omega_n t) = Q(y_1, \dots, y_n) \quad \text{pour tout } t \in \mathbf{R} \text{ et tout } (y_1, \dots, y_n) \in \mathbf{R}^n$$

parce que les fréquences de Q appartiennent à U .

Cherchons I sous la forme $[-T, T]$. Soit $b(I)$ l'ensemble des points de \mathbf{R}^{n-1} de la forme $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_{n-1})$ où $\nu_j = p_j - \frac{\omega_j}{\omega_n} p_n$, $1 \leq j \leq n-1$ et où $|p_1 + p_2 \theta + \dots + p_n \theta^{n-1}| \leq T$. Soit

$$R(\nu_1, \dots, \nu_{n-1}) = Q(\nu_1, \dots, \nu_{n-1}, 0).$$

On a donc

$$\sup_{(p_1, \dots, p_n) \in b(I)} |Q(p_1, \dots, p_n)| = \sup_{\nu \in b(I)} |R(\nu)|, \quad \sup_{\mathbf{Z}^n} |Q(p_1, \dots, p_n)| = \sup_{\mathbf{R}^{n-1}} |R(\nu)|.$$

La fonction $R(\nu)$ est une somme trigonométrique finie

$$\sum c(x_1, \dots, x_{n-1}) \exp 2\pi i(\nu_1 x_1 + \dots + \nu_{n-1} x_{n-1})$$

dont les fréquences (x_1, \dots, x_{n-1}) appartiennent au compact K de \mathbf{R}^{n-1} qui est la projection de U sur $x_n = 0$. On utilise alors le lemme suivant :

LEMME. — *Pour tout entier $p \geq 1$ et tout compact K de \mathbf{R}^p il existe un $\varepsilon > 0$ et une constante C tels que pour toute partie A ε -dense de \mathbf{R}^p et toute somme trigonométrique $R(\nu)$ définie sur \mathbf{R}^p et dont les fréquences appartiennent à K on ait*

$$\sup_{\nu \in \mathbf{R}^p} |R(\nu)| \leq C \sup_{\nu \in A} |R(\nu)|$$

(voir par exemple [5], lemme 7, p. 146).

Grâce à ce lemme appliqué à $A = b(I)$, I est un intervalle associé à Λ dès que $b(I)$ est ε -dense. Compte tenu de la définition de $b(I)$ cette dernière condition est satisfaite dès que la longueur $2T$ de I est assez grande (lemme 1).

Par la même méthode on prouve le résultat suivant :

THÉORÈME II. — *Soient θ un nombre de Pisot, Λ l'ensemble de toutes les sommes finies $\sum_{k \geq 0} \varepsilon_k \theta^k$, $\varepsilon_k = 0$ ou 1 . Pour tout $\eta > 0$ il existe un intervalle compact I de nombres réels tels que, pour toute somme trigonométrique finie,*

$$P(t) = \sum_{\lambda \in \Lambda} a_\lambda \exp 2\pi i \lambda t$$

on ait

$$\sup_{t \in \mathbf{R}} |P(t)| \leq (1 + \eta) \sup_{t \in I} |P(t)|.$$

5. La synthèse des fonctions bornées.

5.1. DÉFINITIONS ET ÉNONCÉS DES PROBLÈMES. — A un ensemble compact E de nombres réels nous associons deux sous-espaces fermés de $L^\infty(\mathbf{R})$, invariants par translation, que nous noterons $\bar{L}(E)$ et $\underline{L}(E)$: $\bar{L}(E)$ est l'ensemble de tous les éléments $g(t)$ de $L^\infty(\mathbf{R})$ tels que, pour tout élément $f(t)$ de $L^1(\mathbf{R})$ l'implication suivante ait lieu

$$\hat{f} = 0 \text{ sur } E \Rightarrow \int_{\mathbf{R}} g(t) f(-t) dt = 0$$

et $\bar{L}(E)$ est défini de façon tout à fait semblable à l'exception que $\hat{f} = 0$ sur E est remplacé par $\hat{f} = 0$ au voisinage de E .

Le problème de la synthèse spectrale est de savoir si $\bar{L}(E) = \underline{L}(E)$. On montre que si $L^\infty(\mathbf{R})$ est muni de la topologie $\sigma(L^\infty, L^1)$ de la convergence simple sur $L^1(\mathbf{R})$, dire que $g \in \underline{L}(E)$ revient à dire que g est adhérent, dans $\sigma(L^\infty, L^1)$ à l'ensemble $PT(E)$ des sommes trigonométriques $\sum_{\lambda \in E} a_\lambda \exp 2\pi i \lambda t$. Se peut-il que tout élément g de $\underline{L}(E)$ soit, en fait, limite dans $\sigma(L^\infty, L^1)$, d'une suite $g_k(t)$ de sommes trigonométriques à fréquences dans E ? Nous allons voir que les nombres de Pisot et de Salem interviennent de façon remarquable dans ces deux problèmes quand on se restreint, pour E , à la classe des ensembles construits à l'aide d'un rapport de dissection constant.

5.2. THÉORÈME I. — Soit θ un entier algébrique supérieur à 2 dont les conjugués (autres que θ), $\theta_2, \dots, \theta_n$ ont un module inférieur ou égal à 1. Soit E l'ensemble de toutes les sommes $\sum_{k \geq 1} \varepsilon_k \theta^{-k}$, $\varepsilon_k \in \{0, 1\}$ (E est un ensemble à rapport de dissection θ^{-1}). Soit Λ ⁽¹⁾ l'ensemble de toutes les sommes finies $\sum_{k \geq 1} \varepsilon_k \theta^{-k}$, $\varepsilon_k \in \{0, 1\}$. (On a $\Lambda \subset E$.) Pour toute fonction $f(t)$ continue sur E les trois propriétés suivantes sont équivalentes :

(1) $\left| \int_E f(t) d\mu(t) \right| \leq A \|\hat{\mu}\|_\infty$ pour une constante A et toute mesure μ à support fini contenu dans Λ ;

(2) il existe une mesure de Radon sur \mathbf{R} , bornée, à valeurs complexes, ν , de norme au plus A dont la transformée de Fourier est égale à $f(t)$ sur E ;

(1) Attention! Λ n'a pas le même sens qu'aux chapitres 2 et 3.

(3) pour tout $\varepsilon > 0$ on peut trouver un élément g de $L^1(\mathbf{R})$ de norme au plus $A + \varepsilon$ dont la transformée de Fourier est égale à $f(t)$ sur E .

Le nombre réel θ est donc un nombre de Pisot ou de Salem. Avant de prouver le théorème I, indiquons quelques autres résultats frappants; leur énoncé nécessite quelques définitions supplémentaires.

5.3. Soit $A(\mathbf{R})$ l'algèbre de Banach de toutes les transformées de Fourier des éléments f de $L^1(\mathbf{R})$, $I(E)$ l'ensemble des éléments de $A(\mathbf{R})$ nuls sur E et $A(E)$ l'algèbre quotient $A(\mathbf{R})/I(E)$. L'algèbre $A(E)$ est semi-simple, son spectre est E et $A(E)$ s'identifie donc à une sous-algèbre de $C(E)$ [$C(E)$ est l'algèbre de toutes les fonctions continues sur E à valeurs complexes]. Soit $N(E)$ [resp. $PM(E)$] l'ensemble de toutes les distributions S de support contenu dans E dont la transformée de Fourier appartient à $\underline{L}(E)$ [resp. $L^\infty(\mathbf{R})$], $\|S\|_{(N(E))} = \sup_{t \in \mathbf{R}} |\hat{S}(t)|$ et de même pour $PM(E)$. Le problème de la synthèse spectrale pour E est de savoir si $N(E) = PM(E)$. Les espaces $N(E)$ et $A(E)$ peuvent être mis en dualité par

$$\langle S, \hat{f} \rangle = \langle \hat{S}, f \rangle = \int_{\mathbf{R}} \hat{S}(t) f(t) dt$$

[f est un élément de $L^1(\mathbf{R})$ dont la transformée de Fourier, restreinte à E , définit un élément de $A(E)$]. L'espace de Banach $N(E)$ est alors le dual de $A(E)$. On a, avec ces notations,

THÉORÈME II. — Soit θ un entier algébrique dont tous les conjugués ont un module inférieur ou égal à 1. Soient E l'ensemble de toutes les sommes $\sum_{k \geq 1} \varepsilon_k \theta^{-k}$, $\varepsilon_k = 0$ ou 1 et Λ l'ensemble de toutes les sommes finies $\sum_{k \geq 1} \varepsilon_k \theta^{-k}$, $\varepsilon_k = 0$ ou 1. Soit B l'ensemble de toutes les mesures μ à valeurs complexes, dont le support est une partie finie de Λ et telles que $\|\hat{\mu}\|_\infty \leq 1$. Alors pour tout élément f de $A(E)$ on a

$$\|f\|_{A(E)} = \sup \left\{ \int_E f d\mu; \mu \in B \right\}.$$

COROLLAIRE 1. — Si le compact E est de la forme décrite par le théorème et si $g(t)$ est un élément de $L^\infty(\mathbf{R})$ adhérent pour la topologie $\sigma(L^\infty, L^1)$ à l'ensemble des sommes trigonométriques $P(t) = \sum_{\lambda \in E} a_\lambda \exp 2\pi i \lambda t$, on peut trouver en fait une suite $g_k(t)$ de sommes trigonométriques dont les fréquences

appartiennent à Λ ($\Lambda \subset E$) vérifiant

$$(a) \sup_{t \in \mathbf{R}} |g_k(t)| \leq \sup_{t \in \mathbf{R}} \text{ess} |g(t)|;$$

(b) $g_k \rightarrow g$ uniformément sur tout compact de \mathbf{R} .

[Cependant on ne sait pas si E est un ensemble de synthèse (voir chap. 6).]

COROLLAIRE 2. — Soient ξ un nombre quelconque pris dans l'intervalle $]0, \frac{1}{2}[$ et E un ensemble parfait, du type Cantor, construit à l'aide du rapport de dissection ξ . Pour toute fonction $f(t)$, à valeurs complexes, continue sur E les deux propositions suivantes sont équivalentes :

$$(1) \left| \int_E f(t) d\mu(t) \right| \leq A \sup_{t \in \mathbf{R}} |\hat{f}(t)| \text{ pour toute mesure } \mu \text{ portée par } E;$$

(2) il existe une mesure ν , à valeurs complexes, sur \mathbf{R} , de masse totale ne dépassant pas A telle que $f(t) = \hat{\nu}(t)$ pour tout $t \in E$.

Le lien entre le théorème II et le corollaire 1 est clairement indiqué par le lemme de Banach ci-dessous.

LEMME. — Soient X un espace de Banach, X^* son dual et Y un sous-espace vectoriel de X^* . Les trois propositions suivantes sont équivalentes :

(1) il existe une constante C telle que pour tout élément x de X on ait

$$\|x\| \geq C \sup \{ |\langle x, y \rangle|; y \in Y, \|y\| \leq 1 \};$$

(2) il existe une constante C telle que, pour tout élément x^* de X^* , on puisse trouver une suite y_k d'éléments de Y telle que $\|y_k\| \leq C \|x^*\|$ et, pour tout x de E ,

$$\langle x, y_k \rangle \rightarrow \langle x, x^* \rangle \quad (k \rightarrow +\infty);$$

(3) tout élément de X^* est limite dans la topologie $\sigma(X^*, X)$ d'une suite d'éléments de Y .

Dans notre situation, $X = A(E)$, $X^* = N(E)$ et Y est l'ensemble des mesures à valeurs complexes dont le support est une partie finie de Λ .

Pour montrer le corollaire 2 on peut examiner les deux cas : θ est un nombre de Pisot et θ n'est pas un nombre de Pisot. Le premier cas est réglé par les théorèmes I et II et le second est classique ([6], § 5).

5.4. La preuve du théorème I est une généralisation de celle que m'a indiquée Y. Katznelson dans le cas où $\theta = 3$. L'idée est d'utiliser un groupe métrisable compact G , adapté au nombre algébrique θ , dans lequel \mathbf{R} s'enroule de façon dense. Plus précisément, soit $P(X) = X^n + a_1 X^{n-1} + \dots + a_n$ le polynôme minimal du nombre algébrique θ : $P(X)$ est irréductible

dans $\mathbf{Q}[X]$ (nous appellerons quelquefois a_0 le coefficient de X^n ; en fait $a_0 = 1$).

Appelons \mathbf{T} le groupe des nombres complexes de module 1, \mathbf{T}^∞ le produit d'une infinité dénombrable d'exemplaires de \mathbf{T} et \mathbf{G} le sous-groupe compact de \mathbf{T}^∞ formé de toutes les suites $(z_k)_{k \geq 0}$ telles que, pour tout $k \geq 0$, $z_k^{a_0} \dots z_{k+n}^{a_n} = 1$. Nous écrirons souvent un nombre complexe de module 1 sous la forme $z = \exp 2\pi i \varphi$ où φ est un élément de \mathbf{R}/\mathbf{Z} et par abus de langage nous appellerons encore \mathbf{G} le groupe de toutes les suites $\omega = (\varphi_0, \dots, \varphi_k, \dots)$ d'éléments de \mathbf{R}/\mathbf{Z} telles que, pour tout $k \geq 0$,

$$a_0 \varphi_k + \dots + a_n \varphi_{k+n} \equiv 0 \pmod{1}.$$

Soit h l'homomorphisme continu de \mathbf{R} dans \mathbf{G} défini par

$$h(t) = (\exp 2\pi i t, \dots, \exp 2\pi i \theta^{-k} t, \dots).$$

On montre que $h(\mathbf{R})$ est dense dans \mathbf{G} . Soient j l'injection canonique de \mathbf{G} dans \mathbf{T}^∞ , $\sum_{k \geq 0} \mathbf{Z}_k$ le groupe dual de \mathbf{T}^∞ (somme directe dénombrable d'exemplaires de \mathbf{Z}) et j^* l'homomorphisme dual de j ; j^* est une projection de $\sum_{k \geq 0} \mathbf{Z}_k$ sur le groupe dual Γ de \mathbf{G} et le noyau de j^* est l'ensemble de toutes les suites finies d'entiers relatifs, $(p_k)_{k \geq 0}$ telles que $\sum_{k \geq 0} p_k \theta^{-k} = 0$. Soit h^* l'homomorphisme dual de h ; h^* est injectif et $h^*(\Gamma)$ est un sous-groupe de \mathbf{R} isomorphe à Γ ; $h^*(\Gamma)$ est le sous-groupe de \mathbf{R} formé de tous les nombres réels t pouvant s'écrire comme des sommes finies $t = \sum_{k \geq 0} p_k \theta^{-k}$ où $p_k \in \mathbf{Z}$.

Soient $\mathcal{E}' \subset \sum_{k \geq 0} \mathbf{Z}_k$ l'ensemble des suites $(\varepsilon_k)_{k \geq 0}$ de 0 et de 1 nulles à partir d'un certain rang et $\mathcal{E} = j^*(\mathcal{E}')$.

LEMME 1. — *L'application j^* restreinte à \mathcal{E}' est injective.*

En effet, si $(\varepsilon_k)_{k \geq 0} \in \mathcal{E}'$,

$$h^* \circ j^* (\varepsilon_k)_{k \geq 0} = \sum_{k \geq 0} \varepsilon_k \theta^{-k};$$

puisque $\theta > 2$, $h^* \circ j^*$ et donc j^* sont injectives.

Le groupe \mathbf{G} est adapté au problème parce que si μ est une mesure dont le support est contenu dans Λ , $\hat{\mu}$ se prolonge par continuité sur \mathbf{G} (\mathbf{R} est regardé comme une partie dense dans \mathbf{G} grâce à l'injection continue h).

Nous avons besoin de deux lemmes techniques avant d'aborder la preuve des théorèmes I et II.

LEMME 2. — Soient $q \geq p \geq 0$ deux entiers et $\mu_{p,q}$ la mesure portée par Λ et définie par le produit de convolution

$$\mu_{p,q} = \left(\frac{1}{2} \delta(t) + \frac{1}{2} \delta(t - \theta^{-p}) \right) \star \dots \star \left(\frac{1}{2} \delta(t) + \frac{1}{2} \delta(t - \theta^{-q}) \right).$$

Si p tend vers l'infini, $\mu_{p,q}$ tend faiblement sur $C(E)$ vers la mesure de Dirac en $o (= \delta(t))$.

[$C(E)$ est l'espace de toutes les fonctions continues sur E .]

La vérification de ce résultat est immédiate.

Pour tout nombre réel t ,

$$\hat{\mu}_{p,q}(t) = 2^{p-q-1} (1 + \exp 2\pi i t \theta^{-p}) \dots (1 + \exp 2\pi i t \theta^{-q}).$$

Définissons sur G une fonction $M_{p,q}$ par

$$M_{p,q}(\omega) = 2^{p-q-1} (1 + \exp 2\pi i \varphi_p) \dots (1 + \exp 2\pi i \varphi_q) \quad \text{si } \omega = (\varphi_k)_{k \geq 0}.$$

On a $M_{p,q} \circ h = \hat{\mu}_{p,q}$ ou, de façon plus imagée, $M_{p,q}$ est le prolongement par continuité de $\hat{\mu}_{p,q}$. On a

$$|M_{p,q}(\omega)| = |\cos \pi \varphi_p| \dots |\cos \pi \varphi_q|.$$

LEMME 3. — Pour tout entier $p \geq 0$ et pour tout élément ω de G n'appartenant pas au sous-groupe $h(\mathbf{R})$, $\lim_{q \rightarrow +\infty} |M_{p,q}(\omega)| = 0$.

On remarque d'abord que p étant fixé, $|M_{p,q}|$ est une suite décroissante ($q \geq p$) et a donc une limite. Si cette limite n'est pas nulle, on a nécessairement $|\cos \pi \varphi_k| \rightarrow 0$ ($k \rightarrow +\infty$) et donc $\varphi_k = p_k + \eta_k$ où $p_k \in \mathbf{Z}$, $\eta_k \in \mathbf{R}$ et $\eta_k \rightarrow 0$ ($k \rightarrow +\infty$). Mais, pour tout $k \geq 0$, on a

$$a_0 \varphi_k + \dots + a_n \varphi_{n+k} \equiv 0 \pmod{1};$$

posant $t_k = a_0 \eta_k + \dots + a_n \eta_{n+k}$, on a donc $t_k \in \mathbf{Z}$ et $\lim_{k \rightarrow +\infty} t_k = 0$. Cela

entraîne $t_k = 0$ si $k \geq k_0$. Soient $\theta_2, \dots, \theta_n$ les conjugués de θ ; les relations de récurrence linéaire $a_0 \eta_k + \dots + a_n \eta_{n+k} = 0$ ($k \geq k_0$) entraînent

$$\eta_k = t \theta^{-k} + t_2 \theta_2^{-k} + \dots + t_n \theta_n^{-k} \quad (t \in \mathbf{R}, t_2, \dots, t_n \in \mathbf{C}).$$

Mais, par hypothèse, on a $|\theta_j| \leq 1$ pour $2 \leq j \leq n$; η_k ne peut tendre vers zéro quand k tend vers l'infini que si $\eta_k = t \theta^{-k}$ ($k \geq k_0$). On a donc $\varphi_k \equiv t \theta^{-k} \pmod{1}$ pour $k \geq k_0$. Mais les congruences vérifiées par les φ_k entraînent alors que $\varphi_k \equiv t \theta^{-k} \pmod{1}$ pour tout $k \geq 0$ (θ est un entier algébrique et $a_0 = 1$). Ainsi $\omega = (\varphi_k)_{k \geq 0} \in h(\mathbf{R})$.

La preuve du théorème I est maintenant aisée. Soit $f(t)$ une fonction continue sur E et telle que, pour toute mesure μ portée par Λ , on ait

$$(1) \quad \left| \int_E f(t) d\mu(t) \right| \leq A \|\hat{\mu}\|_\infty.$$

Soit A_f le inf des constantes A que l'on peut mettre au second membre de (1). Appelons $P(\mathcal{E})$ l'espace vectoriel normé composé de tous les polynômes trigonométriques P sur G dont le spectre est contenu dans \mathcal{E} ; la norme d'un élément P de $P(\mathcal{E})$ est $\sup_{\omega \in G} |P(\omega)|$. Les éléments de $P(\mathcal{E})$ et les mesures μ dont le support est une partie finie de Λ peuvent être mis en correspondance biunivoque par la relation $P \circ h = \hat{\mu}$. On a alors

$$\sup_{\omega \in G} |P(\omega)| = \sup_{t \in \mathbf{R}} |\hat{\mu}(t)|$$

car $h(\mathbf{R})$ est dense dans G . Grâce à ces remarques, on peut définir une forme linéaire sur $P(\mathcal{E})$, notée L_f , continue, de norme A_f par

$$L_f(P) = \sum_{\mathcal{E}} a_{(\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_k, \dots)} f\left(\sum_{k \geq 0} \varepsilon_k \theta^{-k}\right) \quad \text{si} \quad P(\omega) = \sum_{\mathcal{E}} a_{(\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_k, \dots)} \exp 2\pi i \left(\sum_{k \geq 0} \varepsilon_k \varphi_k\right).$$

Rappelons que $(\varepsilon_k)_{k \geq 0} \in \mathcal{E}$ signifie que $\varepsilon_k = 0$ ou 1 et que la suite des ε_k est nulle à partir d'un certain rang. En utilisant la correspondance $P \circ h = \hat{\mu}$, $L_f(P)$ devient $\int_E f(t) d\mu(t)$.

Grâce au théorème de Hahn-Banach on peut prolonger L_f en une forme linéaire, de norme A_f sur tout $C(G)$ et il existe une mesure σ portée par G , telle que

$$\|\sigma\| = A_f \text{ et } \hat{\sigma}\left(\sum_{k \geq 0} \varepsilon_k \theta^{-k}\right) = f\left(\sum_{k \geq 0} \varepsilon_k \theta^{-k}\right) \text{ pour tout } (\varepsilon_k)_{k \geq 0} \in \mathcal{E}.$$

(Pour écrire cette relation nous avons identifié un élément de \mathcal{E} et son image par h^* ce qui revient à considérer \mathbf{R} comme plongé dans G .) Décomposons σ en $\sigma_1 + \sigma_2$ où σ_1 est portée par $h(\mathbf{R})$ et σ_2 étrangère à $h(\mathbf{R})$; on a $\|\sigma\| = A_f = \|\sigma_1\| + \|\sigma_2\|$; le théorème I sera prouvé si nous montrons que $\sigma_2 = 0$. C'est là qu'intervient l'idée d'Y. Katznelson.

Revenant à la définition de A_f , soient ε un nombre réel positif, μ une mesure portée par Λ telle que $\|\hat{\mu}\|_\infty = 1$ et que $\left|\int_E f d\mu\right| \geq (1 - \varepsilon) A_f$. Grâce au lemme 1, dès que p est assez grand et quel que soit $q \geq p$, on a

$$\left|\int_E f d(\mu \star \mu_{p,q})\right| \geq (1 - 2\varepsilon) A_f.$$

Transportant cette inégalité sur G , on obtient

$$\left|\int_G P(\omega) M_{p,q}(\omega) d\sigma(\omega)\right| \geq (1 - 2\varepsilon) A_f \quad \text{avec} \quad \hat{\mu} = P \circ h, \quad \hat{\mu}_{p,q} = M_{p,q} \circ h.$$

Soient $G_1 = h(\mathbf{R})$, G_2 le complémentaire de G_1 dans G . On a

$$\int_G P M_{p,q} d\sigma = \int_{G_1} P M_{p,q} d\sigma_1 + \int_{G_2} P M_{p,q} d\sigma_2 = I + J \quad \text{et} \quad |I| \leq \|\sigma_1\|$$

[car $\sup_{\omega \in G} |P(\omega)| = \sup_{t \in \mathbf{R}} |\hat{u}(t)| = 1$ et $|M_{p,q}(\omega)| \leq 1$, $|J| \leq \int_{G_2} |M_{p,q}| d|\sigma_2|$. Par conséquent

$$(1 - 2\varepsilon)A_f = (1 - 2\varepsilon)\|\sigma_1\| + (1 - 2\varepsilon)\|\sigma_2\| \leq \|\sigma_1\| + \int_{G_2} |M_{p,q}| d|\sigma_2|.$$

Le premier membre de cette inégalité ne dépend pas de q . Si q tend vers l'infini, pour tout $\omega \in G_2$, $|M_{p,q}(\omega)|$ tend, en décroissant vers zéro. On a donc

$$\lim_{q \rightarrow +\infty} \int_{G_2} |M_{p,q}| d|\sigma_2| = 0 \quad \text{et} \quad (1 - 2\varepsilon)\|\sigma_1\| + (1 - 2\varepsilon)\|\sigma_2\| \leq \|\sigma_1\|.$$

On fait alors tendre ε vers zéro pour obtenir $\sigma_2 = 0$.

Remarque. — Si E est un ensemble parfait construit à l'aide d'un rapport de dissection égal à l'inverse d'un nombre de Pisot ou de Salem, tout élément S du dual de $A(E)$ est limite simple sur $A(E)$ d'une suite S_k d'éléments du dual de $A(E)$ à supports finis. Une telle propriété est invariante par isomorphisme entre algèbres de Banach. Soit F l'ensemble aléatoire de Salem construit avec des rapports de dissection tendant vers zéro (théorème I, chap. VIII, [5]). Alors pour presque tous les choix des paramètres aléatoires définissant F , l'algèbre de Banach $A(F)$ n'a pas cette propriété ([14]). Ainsi les algèbres de Banach $A(E)$ et $A(F)$ ne sont pas isomorphes. H. P. Rosenthal a montré que si E est un ensemble compact de mesure de Lebesgue positive au voisinage de chacun de ses éléments, $A(E)$ a la propriété décrite par le théorème II.

6. La propriété de la synthèse parfaite.

6.1. Soit E un ensemble parfait, sans intérieur de nombres réels. Supposons que la mesure de Lebesgue de E est nulle. Soient, pour tout $k \geq 1$, Λ_k une partie finie de E , Ω_λ , $\lambda \in \Lambda_k$, une suite finie de parties ouvertes de \mathbf{R} telles que, pour tout $k \geq 1$,

- (1) $\lambda \in \Omega_\lambda$, $E \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda_k} \Omega_\lambda$;
- (2) $\lambda \in \Lambda_k$ et $\lambda' \in \Lambda_k$, $\lambda \neq \lambda' \Rightarrow \Omega_\lambda \cap \Omega_{\lambda'} = \emptyset$;
- (3) $\sup_{\lambda \in \Lambda_k} \text{diam } \Omega_\lambda \rightarrow 0$ ($k \rightarrow +\infty$).

(Si X est un ensemble de nombres réels, $\text{diam } X$ est le diamètre de X .)

DÉFINITION 6.1. — *Nous dirons que E a la propriété de la synthèse parfaite s'il existe une constante C telle que, pour tout élément f de $A(\mathbf{R})$ on puisse*

trouver une suite $f_k, k \geq 1$, d'éléments de $A(\mathbf{R})$ satisfaisant aux deux conditions suivantes :

— pour tout $\lambda \in \Lambda_k$ et tout $t \in \Omega_\lambda$ on a $f_k(t) = f(\lambda)$;

$$(6.1.1.) \quad \sup_{k \geq 1} \|f_k\|_{A(\mathbf{R})} \leq C \|f\|_{A(\mathbf{R})}.$$

6.2. THÉORÈME I. — Soit E un ensemble de nombre réel ayant la propriété de la synthèse parfaite. Pour toute pseudomesure S portée par E , soit $S_k, k \geq 1$ la suite des mesures portées par Λ_k et définies par $S_k\{\lambda\} = \int_{\Omega_\lambda} dS(t), \lambda \in \Lambda_k$.

Alors :

$$(6.2.1) \quad \sup_{k \geq 1} \|\hat{S}_k\|_\infty \leq C \|\hat{S}\|_\infty \text{ où } C \text{ ne dépend que de } E;$$

$$(6.2.2) \quad \langle S_k, f \rangle \rightarrow \langle S, f \rangle \text{ (} k \rightarrow +\infty \text{) pour tout élément } f \text{ de } A(\mathbf{R}).$$

Nous allons d'abord montrer que (6.2.1) est satisfait. En effet, puisque Λ_k est un ensemble fini, Λ_k est un ensemble de synthèse et le dual de $A(\Lambda_k)$ est $PM(\Lambda_k)$. Pour tout $\varepsilon > 0$ on peut donc trouver un élément f de $A(\mathbf{R})$ tel que $\|f\|_{A(\mathbf{R})} = 1$ et $|\langle S_k, f \rangle| \geq (1 - \varepsilon) \|\hat{S}_k\|_\infty$. Soit f_k un élément de $A(\mathbf{R})$ tel que $f_k(t) = f(\lambda)$ si $\lambda \in \Lambda_k, t \in \Omega_\lambda$ et que $\|f_k\|_{A(\mathbf{R})} \leq C$. On a $\langle S_k, f \rangle = \langle S_k, f_k \rangle$ car f et f_k coïncident sur Λ_k et $\langle S_k, f_k \rangle = \langle S, f_k \rangle$ parce que f_k est constante sur Ω_λ . Donc

$$|\langle S_k, f \rangle| \leq \|\hat{S}\|_\infty \|f_k\|_{A(\mathbf{R})} \leq C \|\hat{S}\|_\infty \quad \text{et} \quad \sup_{k \geq 1} \|\hat{S}_k\|_\infty \leq C \|\hat{S}\|_\infty$$

Maintenant soit à prouver (6.2.2). Puisque (6.2.1) est vérifié, il suffit de montrer (6.2.2) pour une partie dense dans $A(\mathbf{R})$, par exemple pour les fonctions de $A(\mathbf{R})$ qui sont localement constantes au voisinage de E ([7], 1.3, p. 256). Soient f une telle fonction, I_1, \dots, I_N des intervalles ouverts dont la réunion contient E , dont les fermetures sont deux à deux disjointes et tels que f soit constante sur chacun d'eux. Grâce à la condition (3) portant sur les Ω_λ , on peut trouver un entier p tel que pour tout $k \geq p$ et tout $\lambda \in \Lambda_k, \Omega_\lambda$ soit contenu dans l'un des $I_j, 1 \leq j \leq N$; f est constante sur chaque Ω_λ . On a alors, grâce à la théorie de Wiener, $\langle S_k, f \rangle = \langle S, f \rangle$ dès que $k \geq p$ et ceci termine la preuve du théorème I.

6.3. Nous allons maintenant donner un critère assurant qu'un ensemble compact E de nombres réels a la propriété de la synthèse parfaite. Ce critère, semblable à celui donné par Piatecki-Shapiro ([5], th. V, p. 59) dans le cas de l'unicité, est cependant plus exigeant. Il s'appliquera aux ensembles parfaits de nombres réels construits à l'aide d'un rapport de dissection constant θ^{-1} dès que θ est un nombre de Pisot supérieur à 3.

ÉNONCÉ DU CRITÈRE :

a. Description d'un compact remarquable du tore n -dimensionnel. — Soient :

- n un entier, $n \geq 1$;
- \mathbf{T}^n le tore n -dimensionnel;
- P l'homomorphisme canonique de \mathbf{R}^n sur \mathbf{T}^n ($\mathbf{T}^n = \mathbf{R}^n/\mathbf{Z}^n$);
- B une partie compacte de \mathbf{R}^n telle que P , restreint à B soit un homéomorphisme de B sur $K = P(B)$;
- m un entier, $m \geq 1$;
- B_1, \dots, B_m m compacts deux à deux disjoints formant une partition de B ;
- L une forme linéaire sur \mathbf{R}^n , a_1, \dots, a_m m nombres réels différents deux à deux;
- pour $1 \leq j \leq m$, U_j l'ensemble des éléments x de B_j tels que $L(x) = a_j$,

$$U = \bigcup_{1 \leq j \leq m} U_j;$$

- $N_j = P(U_j)$ et $N = \bigcup_{1 \leq j \leq m} N_j$.

b. Description d'une suite d'« enroulements » de \mathbf{R} dans \mathbf{T}^n . — Soient :

- $(h_k)_{k \geq 1}$ une suite d'homomorphismes continus, injectifs de \mathbf{R} dans \mathbf{T}^n tels que, pour tout $k \geq 1$;
- $h_k(\mathbf{R})$ soit dense dans \mathbf{T}^n ;
- h_k soit défini par $h_k(t) = P(\omega_{1,k}t, \dots, \omega_{n,k}t)$, $t \in \mathbf{R}$;
- pour toute suite p_1, \dots, p_n d'entiers rationnels non tous nuls,

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} |p_1 \omega_{1,k} + \dots + p_n \omega_{n,k}| = +\infty.$$

Posons $\omega_k = (\omega_{1,k}, \dots, \omega_{n,k})$ et supposons que, pour tout $k \geq 1$, $L(\omega_k) \neq 0$.

c. Définition des fibres de K découpées par h_k . — Soit

- $X_0 = P(x_0)$ un point de N , $x_0 \in U$.

La fibre de K , contenant X_0 et découpée par h_k , est l'image par P de l'ensemble des points x de B_j de la forme $x = x_0 + \omega_k t$, $t \in \mathbf{R}$, $x_0 \in U_j$ (j est déterminé par x_0 car les B_j sont deux à deux disjoints).

THÉORÈME II. — Soient E un ensemble parfait de mesure nulle de nombres réels et $(\Lambda_k)_{k \geq 1}$ une suite de parties finies de E . Supposons qu'il existe un entier n , un compact K de \mathbf{T}^n vérifiant (a) et une suite $(h_k)_{k \geq 1}$ d'homomor-

phismes de \mathbf{R} dans \mathbf{T}^n vérifiant (b) et tels que, pour tout $k \geq 1$:

- $h_k(\Lambda_k)$ soit contenu dans \mathbf{N} ;
- $h_k(\mathbf{E})$ soit contenu dans \mathbf{K} et recouvert par la réunion $\bigcup_{\lambda \in \Lambda_k} F_{\lambda,k}$ des

fibres $F_{\lambda,k}$ découpées par h_k et contenant $h_k(\lambda)$, $\lambda \in \Lambda_k$. Alors \mathbf{E} a la propriété de la synthèse parfaite.

6.4. Pour simplifier nous présenterons la preuve si $m = 1$. Le cas général se traite de façon analogue.

Il y a un compact B' de \mathbf{R}^n , dont l'intérieur contient B et tel que P restreint à B' soit encore un homéomorphisme de B' sur $K' = P(B')$. Soient $F'_{\lambda,k}$ les fibres découpées par h_k dans l'intérieur de K' et Ω_λ , $\lambda \in \Lambda_k$ l'image réciproque par h_k de $F'_{\lambda,k}$. Les Ω_λ possèdent les propriétés (1), (2) et (3) car h_k est injective, P est un homéomorphisme de B' sur K' et $|\omega_k| \rightarrow +\infty$ avec k .

Nous allons montrer que \mathbf{E} a la propriété de la synthèse parfaite. Soit H_k le sous-groupe $\mathbf{Z}\omega_{1,k} + \dots + \mathbf{Z}\omega_{n,k}$ de \mathbf{R} , H_k est dense dans \mathbf{R} et soit I un intervalle compact de \mathbf{R} dont l'intérieur contient \mathbf{E} . Il suffit, pour prouver (6.1.1), de se restreindre à $A(I)$. Mais si $f \in A(\mathbf{R})$ on peut trouver une mesure discrète σ portée par H_k telle que $\hat{\sigma} = f$ sur I et $\|\sigma\| \leq 2\|f\|_{A(I)}$. On a donc $f = g_k \circ h_k$ où $g_k \in A(\mathbf{T}^n)$, $\|g_k\|_{A(\mathbf{T}^n)} \leq 2\|f\|_{A(I)}$. Soit γ_k la fonction \mathbf{Z}^n -périodique sur \mathbf{R}^n , définie par $\gamma_k = g_k \circ P$, U_k l'ensemble des x de U dont l'image par P appartient à $h_k(\Lambda_k)$ et enfin B_k (resp. B'_k) l'ensemble des points $x \in B$ (resp. B') de la forme $x = t\omega_k + y$ où $y \in U_k$ et $t \in \mathbf{R}$. Alors $P(B_k)$ est la réunion des fibres $F_{\lambda,k}$ relatives à $\lambda \in \Lambda_k$.

Appelons $B(\mathbf{R}^n)$ (ne pas confondre avec le compact B) l'algèbre de Banach de toutes les transformées de Fourier $\hat{\mu}$ des mesures complexes bornées μ sur \mathbf{R}^n . On pose $\|\hat{\mu}\|_{B(\mathbf{R}^n)} = \|\mu\|$. Nous utiliserons le lemme suivant :

LEMME 1. — Soient L une forme linéaire sur \mathbf{R}^n , ω un élément de \mathbf{R}^n tel que $L(\omega) \neq 0$ et a un nombre réel.

Pour tout élément γ de $B(\mathbf{R}^n)$ définissons une fonction δ sur \mathbf{R}^n continue, à valeurs complexes par les deux conditions : pour tout $x \in \mathbf{R}^n$,

$\delta(x + \omega t)$ ne dépend pas du nombre réel t ;

$\delta(x) = \gamma(x)$ si $L(x) = a$.

Alors δ appartient à $B(\mathbf{R}^n)$ et $\|\delta\|_{B(\mathbf{R}^n)} \leq \|\gamma\|_{A(\mathbf{R}^n)}$.

La preuve très simple de ce résultat est laissée au lecteur.

Appelons donc δ_k l'élément de $B(\mathbf{R}^n)$ défini à partir de γ_k comme il est dit au lemme 1. L'application P est un homéomorphisme de B' sur K' et un isomorphisme local entre \mathbf{R}^n et \mathbf{T}^n . On peut donc trouver une suite G_k

d'éléments de $A(\mathbf{T}^n)$ tels que si $x \in B'$, $G_k(P(x)) = \delta_k(x)$ et que $\|G_k\|_{A(\mathbf{T}^n)} \leq C \|\delta_k\|_{B(\mathbf{R}^n)}$. On a $G_k(x) = g_k(x)$ pour tout $x \in N$ et $G_k(x)$ est constante sur les fibres $F'_{\lambda, k}$, $\lambda \in \Lambda_k$. Posons $f_k = g_k \circ h_k$; on a

$$\|f_k\|_{B(\mathbf{R})} = \|g_k\|_{A(\mathbf{T}^n)} \leq C \|f\|_{A(\mathbb{U})} \quad \text{et} \quad f_k(t) = f(\lambda) \quad \text{si } t \in \Omega_\lambda, \quad \lambda \in \Lambda_k.$$

6.5. CAS GÉNÉRAL D'UN NOMBRE DE PISOT θ SUPÉRIEUR À 3. — Soient toujours E l'ensemble de toutes les sommes $\sum_{k \geq 1} \varepsilon_k \theta^{-k}$, $\varepsilon_k = 0$ ou 1 , Λ l'ensemble des sommes finies $\sum_{k \geq 1} \varepsilon_k \theta^{-k}$ et Λ_k l'ensemble des sommes finies $\sum_{j=1}^k \varepsilon_j \theta^{-j}$, $\varepsilon_j = 0$ ou 1 .

THÉORÈME IV. — Soient θ un nombre de Pisot supérieur à 3, E comme ci-dessus et L_E^∞ l'espace vectoriel de toutes les fonctions $\varphi \in L^\infty(\mathbf{R})$, à valeurs complexes, essentiellement bornées et dont le spectre est contenu dans E .

Alors pour tout $\varphi \in L_E^\infty$ on peut trouver une suite P_k de sommes trigonométriques finies, $P_k(t) = \sum_{\lambda \in \Lambda_k} a_{\lambda, k} \exp 2\pi i \lambda t$, $a_{\lambda, k} \in \mathbf{C}$ telle que :

- (a) les fréquences de P_k sont de la forme $\sum_1^k \varepsilon_j \theta^{-j}$, $\varepsilon_j = 0$ ou 1 ($1 \leq j \leq k$);
- (b) $\sup_{k \geq 1} \sup_{t \in \mathbf{R}} |P_k(t)| \leq \sup_{t \in \mathbf{R}} \text{ess} |\varphi(t)|$;
- (c) uniformément sur tout compact de \mathbf{R} , les P_k convergent vers φ .

L'intérêt du théorème IV est de caractériser la boule unité de L_E^∞ ; (c) n'est pas étonnant car une fonction de $L^\infty(\mathbf{R})$ dont le spectre est compact est une fonction continue.

Le théorème IV résulte immédiatement de ce que E est un ensemble de synthèse et du corollaire 1 au théorème II, chapitre 5. En fait nous allons montrer que, lorsque θ est un nombre de Pisot supérieur à 3, E a la propriété de la synthèse parfaite. Plus précisément :

THÉORÈME V. — Soient θ un nombre de Pisot supérieur à 3, et E comme ci-dessus. Soient K_1, \dots, K_m une partition de E en compacts ouverts, $t_1 \in K_1, \dots, t_m \in K_m$ et pour tout entier k , Λ_k la partie finie de E qui est l'ensemble de toutes les sommes $\sum_1^k \varepsilon_j \theta^{-j} + t_l \theta^{-k}$, $1 \leq j \leq k$, $1 \leq l \leq m$, $\varepsilon_j = 0$ ou 1 .

Il est possible de trouver une constante C , un entier m , une partition de E en K_1, \dots, K_m et des éléments t_1, \dots, t_m appartenant respectivement

à K_1, \dots, K_m tels que, pour toute distribution $S(t)$ portée par E , en posant

$$S_k(t) = \sum_{\lambda \in \Lambda_k} a_\lambda \delta(t - \lambda),$$

où $\delta(t)$ est la masse de Dirac en 0 et où

$$a_\lambda = \int_{s+0^{-k}K_l} dS(t), \quad s = \sum_1^k \varepsilon_j \theta^{-j}, \quad \lambda = s + 0^{-k} t_l,$$

on ait

$$(a) \sup_{t \in \mathbf{R}} |\hat{S}_k(t)| \leq C \sup_{t \in \mathbf{R}} |\hat{S}(t)|;$$

(b) \hat{S}_k tend uniformément vers $\hat{S}(t)$ sur tout ensemble compact de nombres réels si le second membre de (a) est fini.

6.6. Nous reconnaissons ici la propriété de la synthèse parfaite. Pour démontrer le théorème V nous emploierons évidemment le théorème II. Nous aurons, en outre, besoin du fait suivant :

PROPOSITION 1. — Soient θ un nombre réel dépassant 3, E l'ensemble de toutes les sommes $\sum_{k \geq 1} \varepsilon_k \theta^{-k}$, $\varepsilon_k = 0$ ou 1 et F un ensemble fini contenant 0.

Il est possible de trouver un entier M et une partition de E en compacts ouverts E_1, \dots, E_M et pour chaque entier j un $t_j \in E_j$ tels que, pour tous t, t', j, k , on ait $t \in E_j, t' \in E_k$ et $t' - t \in F \Rightarrow t' - t = t_k - t_j$.

Nous allons simplement esquisser la preuve de la proposition 1 en indiquant quel rôle joue la condition $\theta > 3$.

Soient K le corps $\mathbf{Z}/3\mathbf{Z}$, — 1, 0 et 1 les éléments de K , K^∞ le produit $\prod_{i \geq 1} K_i$ d'une suite d'exemplaires de K et $L \subset K^\infty$ l'ensemble des points de K^∞ dont les coordonnées valent 0 ou 1. Les seuls éléments de F intervenant dans la proposition sont les différences $\sum_{k \geq 1} \alpha_k \theta^{-k}$, $\alpha_k = -1, 0$ ou 1 entre deux éléments de E . La condition $\theta > 3$ assure que cette écriture est unique. Ainsi si $t = \sum_{k \geq 1} \varepsilon_k \theta^{-k}$, $\varepsilon_k = 0$ ou 1, $t' = \sum_{k \geq 1} \varepsilon'_k \theta^{-k}$, $\varepsilon'_k = 0$ ou 1 et si $t' - t \in F$, on a, pour tout $k \geq 1$, $\varepsilon'_k - \varepsilon_k = \alpha_k$ pour une des suites $(\alpha_k)_{k \geq 1}$ apparaissant dans l'écriture d'un élément de F . Soit alors φ l'application de $E - E$ dans K^∞ définie par $\varphi\left(\sum_{k \geq 1} \alpha_k \theta^{-k}\right) = (\alpha_k)_{k \geq 1}$ ($\alpha_k = -1, 0$ ou 1 est, par abus de langage, identifié à son reste mod 3). Si $t \in E, t' \in E$ et $t' - t \in F$, alors $T = \varphi(t) \in L, T' = \varphi(t') \in L$ et $T' - T \in \mathcal{F} = \varphi(F)$. Soit \mathcal{G} l'espace

vectorel sur K engendré par l'ensemble fini \mathcal{F} ; \mathcal{G} est fini. On commence par prouver la proposition 1 avec \mathcal{G} au lieu de F et L au lieu de E ce qui simplifie beaucoup la question car la relation $T' - T \in \mathcal{G}$, $T \in K^z$, $T' \in K^\infty$ est une relation d'équivalence définissant la congruence modulo un espace vectoriel fini et ensuite il est immédiat de passer de \mathcal{G} à \mathcal{F} ; à ce dernier stade la situation est isomorphe à celle considérée sur E .

COROLLAIRE. — *On peut, avec les notations de la proposition 1, trouver une partie finie J de \mathbf{N}^2 , une partition de E par des compacts ouverts $C_{i,j}$ ($i, j \in J$) et pour tout $(i, j) \in J$ trouver un point $t_{i,j} \in C_{i,j}$ tel que :*

- (a) $t \in C_{i,j}$, $t' \in C_{k,l}$ et $t' - t \in F$ entraîne $k = i$;
- (b) $t \in C_{i,j}$, $t' \in C_{i,k}$ et $t' - t \in F$ entraîne $t' - t = t_{i,k} - t_{i,j}$;
- (c) pour tout $i \geq 1$, tout j et tout k tels que $(i, j) \in J$ et $(i, k) \in J$, on peut trouver une suite $(k_p)_{0 \leq p \leq n}$ telle que $k_0 = j$, $k_n = k$ et que, si $s_p = t_{i,k_p}$, on ait $s_{p+1} - s_p \in F$.

Le corollaire exprime simplement que l'on peut regrouper les compacts E_j de la proposition 1 qui ont des relations entre eux et les réordonner en les $C_{i,j}$.

6.7. Passons maintenant à la preuve du théorème V.

Soient θ un nombre de Pisot de degré n , $\theta > 3$, $\theta_2, \dots, \theta_n$ les conjugués de θ autres que θ , U le compact de \mathbf{R}^n défini comme l'ensemble des points

$$x_1 = u_2 + \dots + u_n, \quad x_2 = \theta_2 u_2 + \dots + \theta_n u_n, \quad \dots, \quad x_n = \theta_2^{n-1} u_2 + \dots + \theta_n^{n-1} u_n,$$

où $u_2 = -\sum_0^\infty \varepsilon_k \theta_2^k, \dots, u_n = -\sum_0^\infty \varepsilon_k \theta_n^k$ pour une même suite ε_k de 0 et de 1.

Le compact U est contenu dans un hyperplan \mathcal{L} de \mathbf{R}^n . Soient $H_0: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^n$ défini par $H_0(t) = (t, \dots, \theta^{n-1}t)$, $V = H_0(E)$, $H_k(t) = H_0(\theta^k t)$, P la projection canonique de \mathbf{R}^n sur $\mathbf{T}^n = \mathbf{R}^n/\mathbf{Z}^n$ et $h_k = P \circ H_k$.

PROPOSITION 2. — *On peut trouver une partie finie J de \mathbf{N}^2 , une partition de V en compacts ouverts $V_{i,j}$ ($i, j \in J$) et pour chaque $(i, j) \in J$, un point $v_{i,j} \in V_{i,j}$ et un vecteur $x_{i,j}$ de \mathbf{Z}^n tels qu'en posant*

$$W_{i,j} = V_{i,j} + U$$

toute congruence $x' - x \in \mathbf{Z}^n$ où $x \in W_{i,j}$, $x' \in W_{i',j'}$ entraîne $i' = i$ et $x' - x = x_{i,j'} - x_{i,j}$ et que réciproquement pour tout $(i, j) \in J$ et $(i, j') \in J$ on ait

$$(v_{i,j'} - v_{i,j} - x_{i,j'} + x_{i,j}) \in \mathcal{L}.$$

Posons, en effet, $W = U + V$ et pour chaque $x \in W$ appelons $v(x)$ l'élément de V , $u(x)$ celui de U tels que $u(x) + v(x) = x$. Si $x' - x \in \mathbf{Z}^n$,

cela n'offre à la différence $x' - x$ qu'un nombre fini de possibilités parce que $x' - x \in W - W$ (qui est compact); ainsi $\nu(x') - \nu(x)$ appartient à un ensemble fini F . Par ailleurs deux points distincts de l'hyperplan \mathcal{L} ne sont jamais congrus modulo \mathbf{Z}^n ; le vecteur $x' - x$ de \mathbf{Z}^n est donc parfaitement déterminé par la différence $\nu(x') - \nu(x)$. On applique alors le corollaire de la proposition 1 en choisissant pour tout entier $i \geq 1$ un entier particulier j_0 tel que $(i, j_0) \in J$ (à supposer qu'il y en ait un) et en appelant $x_{i,j}$ le vecteur de \mathbf{Z}^n associé à la différence $\nu_{i,j} - \nu_{i,j_0}$; en posant $\mathcal{L}_{i,j} = \nu_{i,j} + \mathcal{L}$, $x_{i,j}$ est défini par la condition $\mathcal{L}_{i,j_0} + x_{i,j} = \mathcal{L}_{i,j}$ et $x_{i,j} \in \mathbf{Z}^n$.

Nous allons maintenant pouvoir montrer que les hypothèses du théorème 2 sont satisfaites mais quelques notations sont encore nécessaires.

Soient, pour tout $(i, j) \in J$, $B_{i,j} = W_{i,j} - x_{i,j}$, B_i la réunion des $B_{i,j}$, $(i, j) \in J$, et B la réunion des B_i , $1 \leq i \leq m$; enfin pour alléger nous écrirons \mathcal{L}_i au lieu de \mathcal{L}_{i,j_0} et \mathcal{L}_i est défini par la condition $L(x) = a_i$, $a_i \in \mathbf{R}$, $1 \leq i \leq m$.

Remarquons que deux points de B ne sont jamais congrus modulo \mathbf{Z}^n et que les B_i sont deux à deux disjoints.

En effet si $y \in B$, $y' \in B$ et $y' - y \in \mathbf{Z}^n$, alors $y = x - x_{i,j}$ où $x \in W_{i,j}$, $y' = x' - x_{i',j'}$ où $x' \in W_{i',j'}$; cela entraîne $x' - x \in \mathbf{Z}^n$ et donc, par la proposition 1, $i' = i$ et $x' - x = x_{i,j} - x_{i,j}$; soit $y' = y$. De façon analogue, on prouve que les B_i sont deux à deux disjoints.

Il reste à définir Λ_k ; soit $t_{i,j}$, $(i, j) \in J$, le nombre réel défini par $H_0(t_{i,j}) = \nu_{i,j}$ [$H_0(t) = (t, \dots, \theta^{n-1}t)$, $H_k(t) = H_0(\theta^k t)$ et $h_k = P \circ H_k$]: On appelle Λ_k l'ensemble fini des nombres réels s'écrivant

$$\lambda = \varepsilon_1 \theta^{-1} + \dots + \varepsilon_k \theta^{-k} + \theta^{-k} t_{i,j},$$

$\varepsilon_p = 0$ ou 1 , $(i, j) \in J$, $1 \leq p \leq k$. Il suffit de vérifier maintenant que $H_k(E)$ est recouvert par les fibres $F_{\lambda,k}$, $\lambda \in \Lambda_k$, issues de $h_k(\lambda)$ et découpées dans K . Que sont ces fibres? Pour tout λ ci-dessus, soit x_λ l'élément de U défini à l'aide des paramètres u_2, \dots, u_n comme il est expliqué dans la définition de U avec $u_2 = -\varepsilon_k - \varepsilon_{k-1} \theta_2 - \dots - \varepsilon_1 \theta_2^{k-1}$, etc. Soit $x = x_\lambda + \nu_{i,j} - x_{i,j}$; x appartient à \mathcal{L}_i définie par $L(x) = a_i$, $P(x) = X = h_k(\lambda)$ et la fibre $F_{\lambda,k}$ issue de $h_k(\lambda)$ et découpée dans K par h_k contient l'image par P de $x_\lambda + V_{i,j} - x_{i,j}$ ou de $x_\lambda + V_{i,j}$.

Soit $C_{i,j}$ l'ensemble des t tels que $H_0(t) \in V_{i,j}$ et

$$\Omega_\lambda = \varepsilon_1 \theta^{-1} + \dots + \varepsilon_k \theta^{-k} + \theta^{-k} C_{i,j}.$$

Les Ω_λ , $\lambda \in \Lambda_k$, forment une partition de E en compacts ouverts, $h_k(\Omega_\lambda) = F_{\lambda,k}$, les hypothèses du théorème 2 sont satisfaites.

BIBLIOGRAPHIE.

- [1] A. S. BESICOVITCH, *Almost periodic functions*, Cambridge University Press.
- [2] J. W. S. CASSELS, *An introduction to diophantine approximation*, Cambridge University Press, 1957.
- [3] J.-P. KAHANE, *Lectures on mean-periodic functions*, Tata Inst. Fund. Research, 1959.
- [4] J.-P. KAHANE, *Sur les fonctions moyennes-périodiques bornées* (*Ann. Inst. Fourier*, t. 7, 1957, p. 293-314).
- [5] J.-P. KAHANE et R. SALEM, *Ensembles parfaits et séries trigonométriques*, Hermann, 1962.
- [6] Y. KATZNELSON et C. MC GEHEE, *Measures and pseudomeasures on compact subsets of the line* (à paraître dans *Math. Scand.*).
- [7] Y. KATZNELSON et W. RUDIN, *The Stone Weierstrass property in Banach algebras* (*Pacific J. Math.*, vol. 11, 1961, p. 253-265).
- [8] H. J. LANDAU, *Necessary density conditions...* (*Acta Math.*, vol. 117, 1967, p. 37-52).
- [9] C. MC GEHEE, *Sets of Uniqueness and sets of multiplicity* (*Israël J. Math.*, vol. 4, n° 2, 1966).
- [10] Y. MEYER, *Isomorphismes entre certaines algèbres de restrictions* (*Ann. Inst. Fourier*, 18, n° 2, 1968, p. 73-86).
- [11] Séminaire Bourbaki, février 1968, exposé n° 341.
- [12] Y. MEYER, *Une caractérisation des nombres de Pisot* (*C. R. Acad. Sc.*, 267, série A, 1968, p. 196-198).
- [13] Y. MEYER, *Les problèmes de l'unicité et de la synthèse harmonique et la répartition modulo 1* (*C. R. Acad. Sc.*, 269, série A, 1969, p. 320-322).
- [14] Y. MEYER, *Algèbres de restrictions non isomorphes* (*Ann. Inst. Fourier*, t. 19, n° 1, 1969, p. 117-124).
- [15] Y. MEYER, *Les nombres de Pisot et l'analyse harmonique* (à paraître aux *Studia Math.*).
- [16] R. E. A. C. PALEY et N. WIENER, *Fourier transforms in the complex domain*, A. M. S. Coll., Publ. XIX.
- [17] H. P. ROSENTHAL, *A characterization of restrictions of Fourier-Stieltjes transforms* (*Pacific J. Math.*, vol. 23, n° 2, 1967).
- [18] W. RUDIN, *Fourier analysis on groups*, Intersc. Tracts, 1962.
- [19] R. SALEM, *Algebraic numbers and Fourier analysis*, Heath Math. Monographs, 1961.
- [20] P. SAMUEL, *Théorie algébrique des nombres*, Hermann, 1967.
- [21] R. SCHNEIDER, *Thèse*, University of California, Berkeley, California.
- [22] A. ZYGMUND, *Trigonometric series*, 2nd ed., vol. I et II, Cambridge University Press, 1959.

(Manuscrit reçu le 8 décembre 1969.)

Yves MEYER,
 Département de Mathématiques,
 Faculté des Sciences,
 91-Orsay.