ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

NORIO SHIMAKURA

Problèmes aux limites variationnels du type elliptique

Annales scientifiques de l'É.N.S. 4e série, tome 2, nº 2 (1969), p. 255-310
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1969_4_2_2_255_0>

Ann. scient. Éc. Norm. Sup.,
4[e] série, t. 2, 1969, p. 255 à 310.

PROBLÈMES AUX LIMITES VARIATIONNELS DU TYPE ELLIPTIQUE

PAR NORIO SHIMAKURA.

INTRODUCTION.

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbf{R}^n$ à frontière régulière Γ ou bien le demi-espace $\mathbf{R}^n_+ = \{x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n;\ x_n > 0\}$. Nous traitons un opérateur différentiel elliptique A d'ordre $2m$ attaché à une condition aux limites définie par certains m opérateurs différentiels $B_r (r = r_1, r_2, \ldots, r_m;\ 0 \leqq r_j \leqq 2m - 1)$. Nous déterminons le domaine $\mathcal{D}[A]$ de A comme suit :

$$\mathcal{D}[A] = \{u \in H^{2m}(\Omega)\,;\ B_r|_\Gamma = 0,\ r = r_1, \ldots, r_m\}. \tag{0.1}$$

Tous les coefficients de A et des B_r sont supposés réguliers. Nous posons de plus une condition que A *soit variationnel*, c'est-à-dire, qu'il existe un β réel tel que l'on ait

$$\mathcal{R}e((A + \beta)u, u) \geqq 0 \quad \text{pour tout } u \in \mathcal{D}[A]. \tag{0.2}$$

Au point de vue de la théorie des opérateurs, cette condition est dite que $A + \beta I$ *soit accrétif*, ou bien que $-(A + \beta I)$ *soit dissipatif*.

Dans la théorie des équations aux dérivées partielles, il y a de nombreux exemples de cette catégorie. Le laplacien $-\Delta$ et les opérateurs du second ordre à coefficients variables, avec la condition de Dirichlet, de Neumann, du troisième espèce et de certaines dérivées obliques, appartiennent tous à cette catégorie. Quant aux opérateurs elliptiques d'ordres supérieurs, le premier exemple est celui des opérateurs fortement elliptiques avec la condition de Dirichlet, traités par Gårding. Il a obtenu l'inégalité

$$\mathcal{R}e(Au, u) \geqq c\,\|u\|^2_{H^m(\Omega)} - c'\,\|u\|^2 \quad \text{pour tout } u \in H^m_0(\Omega) \tag{0.3}$$

avec une constante c positive et une constante c' réelle.

Quant aux conditions aux limites autres que de Dirichlet, MM. Lions et Magenes ont traité des problèmes (de Vishik-Sobolev) qui se posent comme suit (*voir* [7]) : on se donne un système au bord $\{A; \{B_r\}\}$ et une forme sesquilinéaire $a(u, v)$ avec les propriétés :

(*a*) Pour tous u et v de $\mathcal{D}[A]$, on ait

$$a(u, v) = (Au, v);$$

(*b*) Il existe une constante $c > 0$ tel que

$$\mathcal{R}e\, a(u, u) \geqq c \| u \|^2_{H^m(\Omega)} \quad \text{pour tout } u \in \mathcal{D}[A].$$

C'est-à-dire, on suppose, à l'avance, l'accrétivité de A. Donc, les conditions sur A et sur les B_r exigées pour cette propriété sont cachées dans la forme $a(u, v)$.

Maintenant, nous proposons un problème réciproque comme suit : Étant donné un opérateur elliptique A d'ordre $2m$, existe-t-il des conditions aux limites $\{B_r\}$ et des constantes réelles β telles que l'on ait

$$\mathcal{R}e((A+\beta)u, u) \geqq c \| u \|^2_{H^m(\Omega)} \quad \text{pour tout } u \in \mathcal{D}[A] \tag{0.4}$$

avec une constante $c > 0$? Plus précisément, il y a deux aspects à ce problème. L'un est la détermination des ensembles des ordres des conditions aux limites, et l'autre est la recherche sur les relations algébriques entre les coefficients de A et des B_r.

Nous supposons la forme des opérateurs au bord comme suit :

$$B_r = \left(\frac{\partial}{\partial n}\right)^r - \sum_{l=0}^{r-1} b_{rl}\left(x'; \frac{\partial}{\partial x'}\right)\left(\frac{\partial}{\partial n}\right)^l, \tag{0.5}$$

où r parcourt un ensemble R des m entiers distincts entre 0 et $2m-1$, $\frac{\partial}{\partial n}$ est la dérivée normale intérieure à Γ, et les $b_{rl}\left(x'; \frac{\partial}{\partial x'}\right)$ sont des opérateurs différentiels tangentiels d'ordre $\leqq r-l$. Alors, nous décomposons le problème ci-dessus :

(i) Quels ensembles R de m entiers distincts peuvent-ils être des ensembles des ordres des conditions aux limites $\{B_r\}_{r\in R}$ qui font A variationnels ?

(ii) Lorsque A est variationnel sous une condition aux limites $\{B_r\}_{r\in R}$, la variationalité est-elle une propriété *stable* par rapport à n'importe quel opérateur K d'ordre inférieur ? c'est-à-dire, est-il A variationnel ainsi que tous les $A+K$ avec les K d'ordre $< 2m$? Sinon, quelle condition supplémentaire est-elle exigée, d'abord sur R ?

(iii) Dans le point (ii), quelles relations algébriques sont-elles demandées entre les coefficients de A et des $\{B_r\}_{r\in R}$?

(iv) Existe-t-il des problèmes aux limites satisfaisant aux conditions (ii) et (iii) autres que du problème de Dirichlet ?

La réponse au point (i) est le théorème 1 et celle au point (ii) est le théorème 2 qui s'énonce qu'il n'existe que $(m+1)$ ensembles R

$$(0.6)\quad \begin{cases} R_0 = \{0, 1, \ldots, m-1\} & \text{donnant la condition de Dirichlet,} \\ R_j = \{0, 1, \ldots, m-j-1, m, m+1, \ldots, m+j-1\} & (1 \leqq j \leqq m-1), \\ R_m = \{m, m+1, \ldots, 2m-1\}; \end{cases}$$

satisfaisant à la demande au point (ii).

La variationalité sera donc une propriété assez difficile à caractériser, parce qu'elle dépend aussi des termes d'ordre inférieur de A, tandis que la propriété au point (ii), nous l'appelons *la variationalité stable*, sera plus facile, car elle impliquera seulement des conditions sur les parties principales de A et des B_r. Donc, dans cet article, nous cherchons seulement des conditions sur $\{A; \{B_r\}_{r\in R}\}$ (avec $R = R_j$, $1 \leqq j \leqq m$) pour la variationalité stable. Évidemment, le problème n'est résolu que partiellement. Le théorème 3 est un résultat pour les systèmes au bord auto-adjoints. Les théorèmes 4 et 7 donnent des conditions suffisantes pour la variationalité des systèmes au bord non auto-adjoints (celui-là traite le cas des coefficients constants et du demi-espace $\mathbf{R}^n_+$, celui-ci généralise le précédent au cas des coefficients variables et des ouverts bornés Ω). Dans le théorème 4, l'hypothèse suivante joue constamment un rôle essentiel :

$$(0.7)\qquad A - A^\star = \text{un opérateur d'ordre} < 2m,$$

parce que l'on factorise A_0 (la partie principale de A) $+ \lambda I$ comme $A^\lambda_{0-} A^\lambda_{0+}$ pour tout $\lambda \geqq 0$, que l'on utilise toujours le fait $A^\lambda_{0-} = (A^\lambda_{0+})^\star$ et que l'on réduit le problème à l'estimation de la différence

$$(0.8)\qquad ((A_0 + \lambda) u, u) - \| A^\lambda_{0+} u \|^2.$$

[On a supposé (0.7) aussi dans les théorèmes 1 et 2, mais il est facile de la supprimer, il suffit seulement de supposer que A soit fortement elliptique.] Dans le théorème 7, on ne suppose (0.7) que sur la frontière Γ. On a posé toujours une autre hypothèse que les opérateurs $\{B_r\}_{r\in R}$ recouvrent $A + \lambda I$ pour tout $\lambda \geqq 0$ au sens d'Agmon-Douglis- Nirenberg [2].

Dans le paragraphe 1, nous précisons les définitions et les hypothèses nécessaires et énonçons les théorèmes 1, 2, 3 et 4. Nous donnons les démonstrations des deux premiers dans le paragraphe 2 et du troisième dans le paragraphe 3. Pour démontrer le dernier, nous traitons, dans le paragraphe 4, des opérateurs différentiels ordinaires à coefficients constants définis sur la demi-droite $\mathbf{R}^1_+$. Dans le paragraphe 5, nous établissons le théorème 4, citons quelques exemples et appliquons au résultat les théorèmes d'interpolations dus à MM. Lions et Magenes. Dans le paragraphe 6, nous démontrons le théorème 7, une généralisation du théorème 4, sous les hypothèses légèrement moins fortes qu'aux paragraphes précédents. Dans l'Appendice, nous démontrons un lemme algébrique qui est important pour évaluer la différence (0.8).

L'auteur désire exprimer sa profonde reconnaissance à MM. les Professeurs Lions et Mizohata qui lui ont suggéré ce problème. Et l'auteur remercie vivement M. Aomoto qui l'a aidé pour la preuve du lemme algébrique.

1. Opérateurs elliptiques variationnels et stablement variationnels.

Soit $\mathbf{R}^n$ l'espace euclidien réel de dimension n et désignons par $x=(x_1, \ldots, x_n)$ son point générique. Soit Ω un ouvert de $\mathbf{R}^n$. La frontière Γ de Ω soit une variété de classe C^∞ de dimension $n-1$. Supposons que Ω soit un domaine borné ou bien le demi-espace $\mathbf{R}^n_+=\{x\in\mathbf{R}^n; x_n>0\}$. Nous allons traiter des opérateurs elliptiques dans le cadre de $L^2(\Omega)$ (l'espace hilbertien des fonctions carrées sommables dans Ω).

Soit

$$A=A\left(x; \frac{\partial}{\partial x}\right)=\sum_{|\nu|\leq 2m} a_\nu(x)\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\nu \tag{1.1}$$

un opérateur différentiel d'ordre $2m$ (m, entier positif). Les coefficients $\{a_\nu(x)\}_{|\nu|\leq 2m}$ sont supposés de classe $\mathcal{B}(\Omega)$, c'est-à-dire, de classe $C^\infty(\overline{\Omega})$ et bornés ainsi que toutes leurs dérivées d'ordre quelconque.

Soit R un ensemble de m entiers distincts entre 0 et $2m-1$, c'est-à-dire, soit

$$R=\{r_\alpha\}_{\alpha=1}^m; \qquad 0\leq r_1<r_2<\ldots<r_m\leq 2m-1; \tag{1.2}$$

posons, de plus,

$$S=\{0, 1, \ldots, 2m-1\}\setminus R \tag{1.3}$$

l'ensemble complémentaire de R dans $\{0, 1, \ldots, 2m-1\}$. S est donc l'ensemble de m entiers distincts entre 0 et $2m-1$ disjoint à R. Les éléments de R sont désignés par des caractères latins (r, r', s, ...), tandis que les éléments de S sont désignés par des caractères grecs (ρ, ρ', σ, τ, ...).

Nous écrivons une condition au bord $\{B_r\}_{r\in R}$ sous la forme

$$\left\{\begin{array}{l} B_r u(x') \equiv \left(\dfrac{\partial}{\partial n}\right)^r u(x') - \displaystyle\sum_{\substack{\rho<r\\ \rho\in S}} b_{r\rho}\left(x'; \dfrac{\partial}{\partial x'}\right)\left(\dfrac{\partial}{\partial n}\right)^\rho u(x') = 0 \\ \qquad\qquad \text{pour tout } x'\in\Gamma; \quad r\in R, \end{array}\right. \tag{1.4}$$

où $\frac{\partial}{\partial n}$ désigne la dérivée normale intérieure à Γ au point $x' \in \Gamma$, et $b_{r\rho}\left(x'; \frac{\partial}{\partial x'}\right)$ désignent des opérateurs différentiels tangentiels à Γ d'ordre $\leqq r - \rho$ à coefficients de classe $\mathcal{B}(\Gamma)$, c'est-à-dire, de classe $C^{\infty}(\Gamma)$ et bornés ainsi que toutes leurs dérivées d'ordre quelconque. Donc, $\{B_r\}_{r \in R}$ est un système normal de m opérateurs différentiels au bord dont l'ensemble des ordres est R.

Nous supposons d'abord que la partie principale de l'opérateur A soit formellement auto-adjoint, c'est-à-dire, en désignant par $A^*\left(x; \frac{\partial}{\partial x}\right)$ l'adjoint formel de A, supposons que

$$\text{[H.1]} \qquad \left\{ \begin{array}{l} A^*\left(x; \frac{\partial}{\partial x}\right) - A\left(x; \frac{\partial}{\partial x}\right) \quad \text{soit un opérateur d'ordre} \leqq 2m - 1 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \text{pour tout} \quad x \in \overline{\Omega}. \end{array} \right.$$

Ensuite, l'hypothèse de l'ellipticité de A s'exprime comme suit : Soit $A_0\left(x; \frac{\partial}{\partial x}\right)$ la partie principale de A, c'est-à-dire, la somme des termes d'ordre exactement $2m$ de A, et supposons que

$$\text{[H.2]} \qquad C^{-1} |\xi|^{2m} \leqq A_0(x; i\xi) \leqq C |\xi|^{2m} \quad \text{pour tout } (x, \xi) \in \overline{\Omega} \times \mathbf{R}^n,$$

où C soit une constante positive indépendante de $(x, \xi) \in \overline{\Omega} \times \mathbf{R}^n$.

Nous supposons la condition du recouvrement :

$$\text{[H.3]} \qquad \begin{array}{l} \text{Le système } \{B_r\}_{\Gamma \;\; R} \text{ recouvre } A + \lambda I \text{ pour tout } \lambda \geqq 0 \\ \text{au sens d'Agmon-Douglis-Nirenberg [3].} \end{array}$$

Le domaine $\mathcal{D}[A]$ de A est, par définition, le suivant :

$$(1.5) \qquad \mathcal{D}[A] = \{ u \in H^{2m}(\Omega) ; B_r u|_{\Gamma} = 0 \text{ pour tout } r \in R \},$$

où $H^{2m}(\Omega)$ désigne l'espace hilbertien de Sobolev d'ordre $2m$, c'est-à-dire, l'espace des fonctions carrées sommables dans Ω ainsi que toutes ses distributions dérivées d'ordre $\leqq 2m$.

Cela posé, nous donnons deux définitions.

Définition 1.1. — *Un système au bord* $\{A; \{B_r\}_{r \in R}\}$ *est dit variationnel, si et seulement s'il existe une constante réelle* β *telle que l'on ait*

$$(1.6) \qquad \mathcal{R}e(Au, u) \geqq -\beta \|u\|^2 \quad \textit{pour tout } u \in \mathcal{D}[A],$$

où le produit scalaire $(\ ,\ )$ *et la norme* $\|\ \|$ *désignent ceux de* $L^2(\Omega)$.

Si le système au bord $\{A; \{B_r\}_{r \in R}\}$ satisfaisant à [H.1], [H.2] et à [H.3] est auto-adjoint du domaine $\mathcal{D}[A]$ qui est dense dans $L^2(\Omega)$ il est alors borné inférieurement [1], donc variationnel.

DÉFINITION 1.2. — *Un système au bord* $\{A; \{B_r\}_{r\in R}\}$ *est dit stablement variationnel, si et seulement si, pour tout opérateur différentiel* $K = K\left(x; \frac{\partial}{\partial x}\right)$ *d'ordre* $\leqq 2m - 1$ *à coefficients de classe* $\mathcal{B}(\overline{\Omega})$, *le système* $\{A + K; \{B_r\}_{r\in R}\}$ *du domaine* $\mathcal{D}[A]$ *est variationnel.*

Nous introduisons une hypothèse sur l'ensemble R :

$[H.4]_1$ $$S = \{2m - 1 - r; r \in R\}.$$

Si le système au bord $\{A; \{B_r\}_{r\in R}\}$ satisfaisant à [H.1], [H.2] et à [H.3] est auto-adjoint, alors l'hypothèse $[H.4]_1$ est remplie. En général, étant donné un système au bord $\{A; \{B_r\}_{r\in R}\}$ elliptique défini par (1.1) et par (1.4), nous pouvons définir le système adjoint $\{A^*; \{B'_{r'}\}_{r'\in R'}\}$ une certaine équivalence près ([3], [10]), où $\{B'_{r'}\}_{r'\in R'}$ désigne un système de m opérateurs différentiels au bord avec les mêmes formes que (1.4) dont l'ensemble des ordres est R'. R' est égal, en général, à l'ensemble $\{2m - 1 - \rho; \rho \in S\}$. Donc, l'hypothèse $[H.4]_1$ signifie que $R' = R$.

Nous énonçons d'abord le

THÉORÈME 1. — *Si un système au bord* $\{A; \{B_r\}_{r\in R}\}$ *défini par* (1.1) *et par* (1.4) *satisfaisant aux* [H.1]$\sim$[H.3] *est variationnel, il satisfait alors à* $[H.4]_1$.

La démonstration sera donnée dans le paragraphe 2.

Nous introduisons encore deux hypothèses sur R :

$[H.4]_2$ Pour tout choix de $(r, s) \in R \times R$ tel que $r + s \geqq 2m$, on ait toujours à la fois $r \geqq m$ et $s \geqq m$;

[H.4] L'ensemble R soit l'un des $(m+1)$ ensembles suivants :

$$\begin{cases} R_0 = \{0, 1, \ldots, m-1\}, \\ R_j = \{0, 1, \ldots, m-1-j, m, m+1, \ldots, m+j-1\}, \quad 1 \leqq j \leqq m-1, \\ R_m = \{m, m+1, \ldots, 2m-1\}. \end{cases}$$

LEMME 1.1. — *Un ensemble* R *satisfait à* [H.4] *si et seulement s'il satisfait à* $[H.4]_1$ *et à* $[H.4]_2$.

Nous le démontrerons à la fin de ce paragraphe. Nous énonçons le

THÉORÈME 2. — *Si un système au bord* $\{A; \{B_r\}_{r\in R}\}$ *défini par* (1.1) *et par* (1.4) *satisfaisant aux* [H.1]$\sim$[H.3] *est stablement variationnel, il satisfait aussi à* [H.4].

THÉORÈME 3. — *Un système au bord* $\{A; \{B_r\}_{r\in R}\}$ *auto-adjoint satisfaisant aux* [H.1], [H.2], [H.3] *et* [H.4] *est stablement variationnel. Et de* *plus, étant donné un opérateur quelconque* K *d'ordre* $\leqq 2m-1$ *à coefficients de classe* $\mathcal{B}(\Omega)$, *il existe des constantes* β *réelle, et* γ *positive telles que*

$$\gamma^{-1}\| u \|^2_{\mathrm{H}^m(\Omega)} \leqq \mathcal{R}e\,((\mathrm{A}+\mathrm{K}+\beta)\,u,\, u) \leqq \gamma \| u \|^2_{\mathrm{H}^m(\Omega)} \quad \textit{pour tout } u\in\mathcal{D}[\mathrm{A}].$$

Les démonstrations des théorèmes 2 et 3 seront données dans les paragraphes 2 et 3 respectivement.

Ensuite, nous nous bornerons aux systèmes au bord $\{\mathrm{A};\{\mathrm{B}_r\}_{r\in\mathrm{R}}\}$ à coefficients constants définis dans le demi-espace $\mathbf{R}^n_+$ comme suit :

$$\mathrm{A}=\mathrm{A}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)=\sum_{|\nu|=2m} a_\nu \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\nu=\sum_{k=0}^{2m}\alpha_k(\mathrm{D}_{x'})\,(-\mathrm{D}_{x_n})^k; \tag{1.7}$$

$$\mathrm{B}_r=(-\mathrm{D}_{x_n})^r-\sum_{\substack{\rho<r\\ \rho\in\mathrm{S}}}\beta_{r\rho}(\mathrm{D}_{x'})\,(-\mathrm{D}_{x_n})^\rho,\qquad r\in\mathrm{R}, \tag{1.8}$$

où

$$\mathrm{D}_{x'}=\left(\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_1},\,\ldots,\,\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_{n-1}}\right),\qquad \mathrm{D}_{x_n}=\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_n};$$

(1.9) $\alpha_k(\mathrm{D}_{x'})$: opérateur différentiel tangentiel homogène d'ordre $(2m-k)$ à coefficients constants;

(1.10) $\beta_{r\rho}(\mathrm{D}_{x'})$: opérateur différentiel tangentiel homogène d'ordre $(r-\rho)$ à coefficients constants;

et, de plus, l'hypothèse [H.2] nous permet de poser

$$\alpha_{2m}(\mathrm{D}_{x'})\equiv 1, \tag{1.11}$$

car il est une constante positive.

Soit maintenant $\xi'\in\mathbf{R}^{n-1}$ et soit $\lambda\geqq 0$. Nous faisons attacher au système $\{\mathrm{A};\{\mathrm{B}_r\}_{r\in\mathrm{R}}\}$ des polynômes

$$\mathrm{A}(\xi',\lambda;z)\equiv\sum_{k=0}^{2m}\alpha_k(\xi')\,z^k+\lambda; \tag{1.12}$$

$$\mathrm{B}_r(\xi';z)\equiv z^r-\sum_{\substack{\rho<r\\ \rho\in\mathrm{S}}}\beta_{r\rho}(\xi')\,z^\rho,\qquad r\in\mathrm{R}. \tag{1.13}$$

Par l'hypothèse [H.1], les coefficients $\alpha_k(\xi')$, qui sont des polynômes homogènes de degrés $(2m-k)$, sont réels, et par l'hypothèse [H.2], le polynôme $\mathrm{A}(\xi',\lambda;z)$ se factorise comme suit :

$$\left\{\begin{aligned} &\mathrm{A}\ (\xi',\lambda;z)=\mathrm{A}_-(\xi',\lambda;z)\,\mathrm{A}_+(\xi',\lambda;z),\\ &\mathrm{A}_+(\xi',\lambda;z)=\prod_{l=1}^{m}(z+\tau_l(\xi',\lambda)),\\ &\mathrm{A}_-(\xi',\lambda;z)=\prod_{l=1}^{m}(z+\overline{\tau_l(\xi',\lambda)}),\end{aligned}\right. \tag{1.14}$$

où les $\{\tau_l(\xi', \lambda)\}_{l=1}^{m}$ sont des fonctions continues de (ξ', λ) ayant les propriétés suivantes :

$$(1.15)\qquad \begin{cases} \tau_l(t\xi', t^{2m}\lambda) = t\,\tau_l(\xi', \lambda) & \text{pour tous } \xi' \in \mathbf{R}^{n-1}, \quad \lambda \geqq 0, \quad t \geqq 0; \\ \mathcal{I}m\,\tau_l(\xi', \lambda) > 0 & \text{si } \ |\xi'|^{2m} + \lambda > 0. \end{cases}$$

Définissons, pour $u(x) \in L^2(\mathbf{R}_+^n)$, sa transformation de Fourier partielle

$$\mathcal{F}' u(\xi', x_n) = \int_{\mathbf{R}^{n-1}} e^{ix'.\xi'}\, u(x', x_n)\, dx',$$

et l'inverse de cette transformation, pour $\hat{v}(\xi', x_n) \in L^2(\mathbf{R}_+^n)$,

$$\overline{\mathcal{F}}' \hat{v}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n-1}} \int_{\mathbf{R}^{n-1}} e^{-ix'.\xi'}\, \hat{v}(\xi', x_n)\, d\xi'.$$

Avec ces notations, nous définissons les opérateurs A_+^λ et A_-^λ :

$$(1.16)\qquad \begin{cases} A_+^\lambda u(x) = \overline{\mathcal{F}}'[A_+(\xi', \lambda; -D_{x_n})\,\mathcal{F}' u(\xi', x_n)]\,(x'), \\ A_-^\lambda u(x) = \overline{\mathcal{F}}'[A_-(\xi', \lambda; -D_{x_n})\,\mathcal{F}' u(\xi', x_n)]\,(x') \\ \qquad\qquad \text{pour} \quad u(x) \in H^m(\mathbf{R}_+^n). \end{cases}$$

Alors, nous avons

$$(1.17)\qquad A_-^\lambda u(x) = (A_+^\lambda)^* u(x) \qquad \text{pour} \quad u \in H_0^m(\mathbf{R}_+^n) \quad \text{et pour} \quad \lambda \geqq 0;$$

$$(1.18)\qquad (A + \lambda)\, u(x) = A_-^\lambda A_+^\lambda u(x) \qquad \text{pour} \quad u \in H_0^{2m}(\mathbf{R}_+^n) \quad \text{et pour} \quad \lambda \geqq 0.$$

Les opérateurs A_+^λ et A_-^λ sont des opérateurs différentiels en x_n d'ordre m à coefficients des opérateurs pseudo-différentiels en x'.

Supposons maintenant que $R = R_j (0 \leqq j \leqq m)$, et définissons une forme bilinéaire $\mathcal{B}_j(\lambda)\ [u, v]$ pour u, $v \in \mathcal{D}[A]$ comme suit :

$$(1.19)\qquad \begin{cases} \mathcal{B}_j(\lambda)\,[u, v] = \frac{1}{2}\{((A + \lambda)\, u, v) + (u, (A + \lambda)\, v)\} - (A_+^\lambda u, A_+^\lambda v) \\ \qquad\qquad \text{pour} \quad u, v \in \mathcal{D}[A] \quad \text{et pour} \quad \lambda \geqq 0. \end{cases}$$

Il est facile de voir que

$$(1.20)\qquad \mathcal{B}_j(\lambda)\,[v, u] = \overline{\mathcal{B}_j(\lambda)\,[u, v]} \qquad \text{pour} \quad u, v \in \mathcal{D}[A];$$

$$(1.21)\qquad \mathcal{B}_j(\lambda)\,[u, u] = \mathcal{R}e((A + \lambda)\, u, u) - \|A_+^\lambda u\|^2 \qquad \text{pour} \quad u \in \mathcal{D}[A],$$

et que la forme $\mathcal{B}_0(\lambda) \equiv 0$, parce que, dans ce cas-là, $\mathcal{D}[A]$ s'identifie avec $H^{2m}(\mathbf{R}_+^n) \cap H_0^m(\mathbf{R}_+^n)$. Supposons donc que $1 \leqq 1 \leqq m$. Il existe alors une matrice carrée d'ordre j, notée par $\mathcal{B}_j(\xi', \lambda)$, telle que l'on ait

$$(1.22)\qquad \begin{cases} \mathcal{B}_j(\lambda)\,[u, v] = \int_{\mathbf{R}^{n-1}} {}^t\overline{\underset{(j)}{\mathbf{v}}(\xi')}\, \mathcal{B}_j(\xi', \lambda)\, \underset{(j)}{\mathbf{u}}(\xi')\, d\xi', \\ \qquad\qquad \text{pour} \quad u, v \in \mathcal{D}[A], \end{cases}$$

où $\underset{(j)}{\mathbf{u}}(\xi')$ est le j-vecteur défini par

$$\underset{(j)}{\mathbf{u}}(\xi') = \begin{bmatrix} (-D_{x_n})^{m-1}\mathcal{F}'u(\xi', +0) \\ (-D_{x_n})^{m-2}\mathcal{F}'u(\xi', +0) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ (-D_{x_n})^{m-j}\mathcal{F}'u(\xi', +0) \end{bmatrix}, \tag{1.23}$$

et la définition analogue de $\underset{(j)}{\mathbf{v}}(\xi')$.

La matrice $\mathcal{B}_j(\xi', \lambda)$ est déterminée par les coefficients $\{\alpha_k(\xi')\}_{k=0}^{2m}$, $\{\beta_{r\rho}(\xi')\}_{r\in R_j, \rho\in S_j}$, et par $\lambda \geqq 0$ et munie des propriétés suivantes :

$$\mathcal{B}_j(\xi', \lambda) \text{ est hermitienne : } \{\mathcal{B}_j(\xi', \lambda)\}^* = \mathcal{B}_j(\xi', \lambda); \tag{1.24}$$

(1.25) Désignons par $(\mathcal{B}_j(\xi', \lambda))_{p,q}$ le (p, q)-élément de $\mathcal{B}_j(\xi', \lambda)$, alors, pour tous $\xi' \in \mathbf{R}^{n-1}$, $\lambda \geqq 0$ et $t \geqq 0$, nous avons

$$(\mathcal{B}_j(t\xi', t^{2m}\lambda))_{p,q} = t^{p+q-1}(\mathcal{B}_j(\xi', \lambda))_{p,q}.$$

Nous définissons encore une matrice diagonale d'ordre j :

$$I_j(\xi', \lambda) = \begin{bmatrix} (|\xi'|^{2m}+\lambda)^{\frac{1}{2m}} & & & \bigcirc \\ & (|\xi'|^{2m}+\lambda)^{\frac{3}{2m}} & & \\ & & \ddots & \\ \bigcirc & & & (|\xi'|^{2m}+\lambda)^{\frac{2j-1}{2m}} \end{bmatrix}. \tag{1.26}$$

Cela posé, nous faisons une hypothèse :

$[\widetilde{\text{H.3}}]$ Il existe une constante positive C indépendante de $\xi' \in \mathbf{R}^{n-1}$ et de $\lambda \geqq 0$, telle que la matrice $\mathcal{B}_j(\xi', \lambda) - C\, I_j(\xi', \lambda)$ soit définie positive si $|\xi'|^{2m} + \lambda > 0$.

Nous avons des

Lemme 1.2. — *Si* $R = R_j$ $(1 \leqq j \leqq m)$, *l'hypothèse* $[\widetilde{\text{H.3}}]$ *implique l'hypothèse* [H.3].

Lemme 1.3. — *Les matrices* $\mathcal{B}_j(\xi', \lambda)$ *pour un système au bord* $\{A; \{B_r\}_{r\in R_j}\}$ *et pour son adjoint sont identiques. Donc, un système au bord satisfait à* $[\widetilde{\text{H.3}}]$, *si et seulement si son adjoint le fait.*

Les preuves seront données dans le paragraphe 5 (essentiellement dans le paragraphe 4). Nous énonçons le

Théorème 4. — *Un système au bord à coefficients constants* $\{A; \{B_r\}_{r\in R}\}$ *défini par* (1.7) *et par* (1.8) *satisfaisant aux hypothèses* [H.1], [H.2], [H.4] (*avec* $R = R_j$, $1 \leqq j \leqq m$) *et* $[\widetilde{\text{H.3}}]$ *est stablement variationnel. Et de plus, pour un opérateur quelconque* K *d'ordre* $\leqq 2m-1$ *à coefficients de classe* $\mathcal{B}(\overline{\Omega})$, *il existe des constantes* β *réelles et* γ *positive telles que*

$$\gamma^{-1}\|u\|^2_{H^m(\mathbf{R}^n_+)} \leqq \mathcal{R}e((A+K+\beta)u, u) \leqq \gamma\|u\|^2_{H^m(\mathbf{R}^n_+)} \quad \textit{pour tout} \quad u \in \mathcal{D}[A].$$

La démonstration sera donnée aussi dans le paragraphe 5 (essentiellement dans le paragraphe 4).

Remarque 1.1. — Nous avons les conclusions des théorèmes 1 et 2 même sous une hypothèse, beaucoup moins restreinte que les [H.1] et [H.2], que A soit fortement elliptique uniformément sur $\overline{\Omega}$, c'est-à-dire, qu'il existe une constante $C > 0$ telle que l'on ait

$$C^{-1} |\xi|^{2m} \leqq \mathcal{R}e\, A_0(x; i\xi) \leqq C |\xi|^{2m} \quad \text{pour tout } (x, \xi) \in \overline{\Omega} \times \mathbf{R}^n. \tag{1.27}$$

En effet, dans les preuves de ces théorèmes au paragraphe 2, nous n'utiliserons que cette dernière condition (1.27).

Remarque 1.2. — Soit $R = R_j$ ($0 \leqq j \leqq m - 1$). Alors, les $(m - j)$ premières conditions aux limites $B_r u = 0$ pour $0 \leqq r \leqq m - j - 1$ [*voir* (1.4)] signifient que $\left(\frac{\partial}{\partial n}\right)^r u|_\Gamma = 0$ pour $0 \leqq r \leqq m - j - 1$. Donc le domaine $\mathcal{D}[A]$ [*voir* (1.5)] est toujours contenu dans l'espace $H^{2m}(\Omega) \cap H_0^{m-j}(\Omega)$.

Remarque 1.3. — Pour un système au bord fixé $\{A; \{B_r\}_{r \in R_j}\}$ défini par (1.7) et par (1.8), il existe un $\tilde{\lambda}_0 > 0$ tel que la matrice $\mathcal{B}_j(\xi', \lambda)$ soit toujours définie positive si $\lambda \geqq \tilde{\lambda}_0 |\xi'|^{2m}$. Nous le verrons dans le paragraphe 4 (*voir* le lemme 4.4). Donc, l'hypothèse $[\widetilde{H.3}]$ est une condition posée sur $\mathcal{B}_j(\xi', \lambda)$ pour $\frac{\lambda}{|\xi'|^{2m}}$ relativement petit.

Remarque 1.4. — Nous énoncerons, dans le paragraphe 6, le théorème 7 une analogie du théorème 4 au cas où Ω est un ouvert borné de $\mathbf{R}^n$. Dans ce théorème 7, nous remplacerons les hypothèses [H.1] et [H.2] par des hypothèses moins fortes {H.1} et {H.2}.

Pour terminer ce paragraphe, nous démontrons le lemme 1.1.

Preuve du lemme 1.1. — Nous démontrons l'énoncé par récurrence sur m. Pour $m = 1$, l'énoncé est trivial. Soit $m \geqq 2$. Alors les R_j ($0 \leqq j \leqq m$) définis dans l'hypothèse [H.4] satisfont à $[H.4]_1$ et à $[H.4]_2$.

Soit, réciproquement, R un ensemble quelconque vérifiant $[H.4]_1$ et $[H.4]_2$. Nous énumérons les m éléments de R comme

$$0 \leqq r_1 < r_2 < \ldots < r_m \leqq 2m - 1.$$

Si $r_m = m - 1$, alors $R = R_0$, et si $r_1 = m$, alors $R = R_m$. Supposons donc $r_1 < m \leqq r_m$ et soit h l'indice tel que

$$1 \leqq h \leqq m - 1 \quad \text{et que} \quad r_h < m \leqq r_{h+1}.$$

Par $[\mathrm{H}.4]_2$, on a $r_h + r_m \leqq 2m - 1$. Comme r_h et $2m - 1 - r_m$ sont distincts grâce à $[\mathrm{H}.4]_1$, on a $r_h + r_m \leqq 2m - 2$, donc $r_m \leqq 2m - 2$. On voit alors

$$\{r_\alpha\}_{\alpha=h+1}^m \subseteq \{m, m+1, \ldots, 2m-2\}.$$

D'autre part, on a

$$\{2m - 1 - r_\beta\}_{\beta=1}^h \subseteq \{m, m+1, \ldots, 2m-1\}.$$

Si, donc, $r_1 \geqq 1$, on aurait m entiers distincts entre m et $2m-2$. Ceci est impossible, donc $r_1 = 0$. Nous posons alors

$$\overline{\mathrm{R}} = \{r_{\beta+1} - 1\}_{\beta=1}^{m-1}.$$

L'ensemble $\overline{\mathrm{R}}$ vérifie $[\mathrm{H}.4]_1$ et $[\mathrm{H}.4]_2$ pour $m-1$ au lieu de m, et par l'hypothèse de récurrence sur m, $\overline{\mathrm{R}}$ doit être égal à un certain R_j ci-défini $(0 \leqq j \leqq m-1)$ avec m remplacé par $m-1$. L'ensemble R est enfin égal à l'un des $\mathrm{R}_1, \ldots, \mathrm{R}_{m-1}$, en effet à R_{m-h}.

C. Q. F. D.

2. Démonstrations des théorèmes 1 et 2.

2.1. Premièrement, nous considérons le cas où

$$(2.1) \qquad \Omega = \mathbf{R}_+^n = \{x = (x', x_n) \in \mathbf{R}^n;\ x' \in \mathbf{R}^{n-1},\ x_n > 0\}.$$

Supposons qu'un système au bord $\{\mathrm{A}; \{\mathrm{B}_r\}_{r\in\mathrm{R}}\}$ soit défini dans $\mathbf{R}_+^n$ et satisfasse aux hypothèses $[\mathrm{H}.1] \sim [\mathrm{H}.3]$.

Désignons par y la dernière variable x_n et par $\gamma_j u$ la trace $\left.\dfrac{\partial^j u}{\partial y^j}\right|_{y \downarrow 0}$ pour $u \in \mathrm{H}^{2m}(\mathbf{R}_+^n)$ et pour $0 \leqq j \leqq 2m-1$. Alors la condition au bord (1.4) s'écrit

$$(2.2) \qquad \gamma_0(\mathrm{B}_r u) \equiv \gamma_r u(x') - \sum_{\substack{\rho<r \\ \rho\in \mathrm{S}}} b_{r\rho}\left(x'; \frac{\partial}{\partial x'}\right)\gamma_\rho u(x') = 0,$$

pour tout $x' \in \mathbf{R}^{n-1}$ et pour tout $r \in \mathrm{R}$, avec R et S définis par (1.2) et par (1.3) respectivement. Nous allons, dans ce n° 2.1, obtenir une représentation des $u \in \mathcal{D}[\mathrm{A}]$, c'est-à-dire, des $u \in \mathrm{H}^{2m}(\mathbf{R}_+^n)$ satisfaisant à (2.2), au moyen de leurs traces $\{\gamma_\rho u\}_{\rho\in\mathrm{S}}$.

Soient, d'abord, $\varphi(x') \in \mathrm{L}^2_{x'}(\mathbf{R}^{n-1})$ et $\hat{\psi}(\xi') \in \mathrm{L}^2_{\xi'}(\mathbf{R}^{n-1})$, et définissons la transformation de Fourier $\mathcal{F}'\varphi(\xi')$ et son inverse $\overline{\mathcal{F}}'\hat{\psi}(x')$ par rapport aux variables tengentielles x' :

$$\mathcal{F}'\varphi(\xi') \equiv \mathop{\mathcal{F}'}_{x'\to\xi'}[\varphi(x')] \equiv \hat{\varphi}(\xi') \equiv \int_{\mathbf{R}^{n-1}} e^{ix'.\xi'}\varphi(x')\,dx',$$

$$\overline{\mathcal{F}}'\hat{\psi}(x') \equiv \mathop{\overline{\mathcal{F}}'}_{\xi'\to x'}[\hat{\psi}(\xi')] \equiv \psi(x') \equiv \frac{1}{(2\pi)^{n-1}}\int_{\mathbf{R}^{n-1}} e^{-ix'.\xi'}\hat{\psi}(\xi')\,d\xi'.$$

Ensuite, nous fixons une fois pour toute deux fonctions auxiliaires $\alpha(y)$ et $\beta(y)$ définies pour $y \geqq 0$ avec les propriétés :

(2.3) $\alpha(y) \in \mathcal{D}(\overline{\mathbf{R}}^1_+)$; $\alpha(0) = 1$; $\alpha^{(p)}(0) = 0$ pour $1 \leqq p \leqq 2m-1$;

(2.4) $\beta(y) \in \mathcal{D}(\overline{\mathbf{R}}^1_+)$; $\beta(y) \equiv 1$ pour $0 \leqq y \leqq 1$; $\beta(y) \equiv 0$ pour $y \geqq 2$.

Soit maintenant $\rho \in \mathrm{S}$, $\varphi(x') \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^{n-1})$ et $\lambda \geqq 1$ un paramètre, et posons

$$(2.5) \quad w_{\rho,\lambda}(x', y; \varphi) = \beta(y)\left[\frac{y^\rho}{\rho!} + \sum_{\substack{r>\rho \\ r\in \mathrm{R}}} \frac{y^r}{r!} b_{r\rho}\left(x'; \frac{\partial}{\partial x'}\right)\right] \overline{\mathcal{F}}'_{\xi' \to x'}\left[\hat{\varphi}(\xi')\, \alpha\left(y\lambda\sqrt{|\xi'|^2+1}\right)\right].$$

Alors, nous avons une application $\varphi(x') \to w_{\rho,\lambda}(x', y; \varphi)$ de l'espace $\mathcal{D}(\mathbf{R}^{n-1})$ dans l'espace $\mathrm{C}^\infty(\overline{\mathbf{R}}^n_+)$.

Lemme 2.1. — *L'application $\varphi(x') \to w_{\rho,\lambda}(x', y; \varphi)$ se prolonge comme une application linéaire continue de $\mathrm{H}^{2m-\rho-\frac{1}{2}}(\mathbf{R}^{n-1})$ dans $\mathcal{D}[\mathrm{A}]$ satisfaisant aux conditions suivantes :*

$$(2.6) \quad \| w_{\rho,\lambda}(x', y; \varphi) \|_{\mathrm{H}^s(\mathbf{R}^n_+)} \leqq \mathrm{C}\lambda^{s-\rho-\frac{1}{2}} \| \varphi(x') \|_{\mathrm{H}^{s-\rho-\frac{1}{2}}(\mathbf{R}^{n-1})} \qquad \textit{pour} \quad 0 \leqq \mathrm{S} \leqq 2m;$$

$$(2.7) \quad \gamma_\tau w_{\rho,\lambda}(x', 0; \varphi) = \begin{cases} \varphi(x') & \text{si } \tau = \rho, \\ 0 & \text{si } \tau \in \mathrm{S} \text{ et } \tau \neq \rho; \end{cases}$$

où la constante positive C *ne dépend pas de* φ, *s et de* $\lambda \geqq 1$.

Preuve. — Posons, pour le moment,

$$(2.8) \quad \begin{cases} \hat{v}_\lambda(\xi', y) = \hat{\varphi}(\xi')\, \alpha\left(\sqrt{|\xi'|^2+1}\,\lambda y\right), \\ v_\lambda(x', y) = \overline{\mathcal{F}}'_{\xi' \to x'}[\hat{v}_\lambda(\xi', y)]. \end{cases}$$

Alors nous avons

$$(2.9) \quad w_{\rho,\lambda}(x', y; \varphi) = \beta(y)\left[\frac{y^\rho}{\rho!} + \sum_{\substack{r>\rho \\ r\in \mathrm{R}}} \frac{y^r}{r!} b_{r\rho}\left(x'; \frac{\partial}{\partial x'}\right)\right] v_\lambda(x', y).$$

Nous allons démontrer, pour $\rho \leqq k$ (entier) $< 2m$, les trois inégalités suivantes :

$$(2.10) \quad \| \beta(y) y^k v_\lambda(x', y) \|_{\mathrm{L}^2_y(\mathbf{R}^1_+;\, \mathrm{H}^{2m+k-\rho}_{x'}(\mathbf{R}^{n-1}))} \leqq \mathrm{C}_k \lambda^{-k-\frac{1}{2}} \| \varphi(x') \|_{\mathrm{H}^{2m-\rho-\frac{1}{2}}_{x'}(\mathbf{R}^{n-1})};$$

$$(2.11) \quad \| \beta(y) y^k v_\lambda(x', y) \|_{\mathrm{L}^2_y(\mathbf{R}^1_+;\, \mathrm{H}^{k-\rho}_{x'}(\mathbf{R}^{n-1}))} \leqq \mathrm{C}'_k \lambda^{-k-\frac{1}{2}} \| \varphi(x') \|_{\mathrm{H}^{-\rho-\frac{1}{2}}_{x}(\mathbf{R}^{n-1})},$$

$$(2.12) \quad \left\| \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^{2m} [\beta(y) y^k v_\lambda(x', y)] \right\|_{\mathrm{L}^2_y(\mathbf{R}^1_+;\, \mathrm{H}^{k-\rho}_{x'}(\mathbf{R}^{n-1}))} \leqq \mathrm{C}''_k \lambda^{2m-k-\frac{1}{2}} \| \varphi(x') \|_{\mathrm{H}^{2m-\rho-\frac{1}{2}}_{x}(\mathbf{R}^{n-1})},$$

où les constantes C_k, C'_k et C''_k sont positives et indépendantes de φ et de $\lambda \geqq 1$.

D'abord, nous écrivons

$$\beta(y)y^k\hat{v}_\lambda(\xi', y) = \left\{(\lambda\sqrt{|\xi'|^2+1})^{-k-\frac{1}{2}}\hat{\varphi}(\xi')\beta(y)\right\}$$
$$\times\left\{(\lambda\sqrt{|\xi'|^2+1})^{k+\frac{1}{2}}y^k\alpha(\sqrt{|\xi'|^2+1}\,\lambda y)\right\},$$

d'où il suit (2.10) et (2.11). Ensuite, nous avons

$$\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^{2m}[\beta(y)y^k\hat{v}_\lambda(\xi', y)]$$
$$= \sum_{\substack{h+i+j=2m\\ h,i,j\geq 0}} C^k_{h,i,j}\beta^{(h)}(y)y^{k-i}(\lambda\sqrt{|\xi'|^2+1})^i\hat{\varphi}(\xi')\alpha^{(j)}(\sqrt{|\xi'|^2+1}\,\lambda y),$$

où $C^k_{h,i,j}$ sont des constantes numériques. Donc, nous avons

$$\left|\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^{2m}[\beta(y)y^k\hat{v}_\lambda(\xi', y)]\right|$$
$$\leq \mathrm{Cte}\,\lambda^{2m-k-\frac{1}{2}}\sqrt{|\xi'|^2+1}^{\,2m-k-\frac{1}{2}}|\hat{\varphi}(\xi')|$$
$$\times\sum_{\substack{h+i+j=2m\\ h,i,j\geq 0}}|\beta^{(h)}(y)|(\lambda\sqrt{|\xi'|^2+1})^{k-i+\frac{1}{2}}y^{k-i}|\alpha^{(j)}(\sqrt{|\xi'|^2+1}\,\lambda y)|,$$

il en résulte (2.12).

Maintenant, (2.9) nous donne

$$\|w_{\rho,\lambda}(x', y)\|_{L^2(\mathbf{R}^n_+)} \leq \mathrm{Cte}\Bigg[\|\beta(y)y^\rho v_\lambda(x', y)\|_{L^2(\mathbf{R}^n_+)}$$
$$+\sum_{\substack{r>\rho\\ r\in\mathrm{R}}}\|\beta(y)y^r v_\lambda(x', y)\|_{L^2_y(\mathbf{R}^1_+;\,H^{r-\rho}_{x'}(\mathbf{R}^{n-1}))}\Bigg],$$

et

$$\|w_{\rho,\lambda}(x', y)\|_{H^{2m}(\mathbf{R}^n_+)}$$
$$\leq \mathrm{Cte}\Bigg[\|\beta(y)y^\rho v_\lambda(x', y)\|_{L^2_y(\mathbf{R}^1_+;\,H^{2m}_{x'}(\mathbf{R}^{n-1}))}$$
$$+\left\|\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^{2m}[\beta(y)y^\rho v_\lambda(x', y)]\right\|_{L^2(\mathbf{R}^n_+)}$$
$$+\sum_{\substack{r>\rho\\ r\in\mathrm{R}}}\Bigg\{\|\beta(y)y^r v_\lambda(x', y)\|_{L^2_y(\mathbf{R}^1_+;\,H^{2m+r-\rho}_{x'}(\mathbf{R}^{n-1}))}$$
$$+\left\|\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^{2m}[\beta(y)y^r v_\lambda(x', y)]\right\|_{L^2_y(\mathbf{R}^1_+;\,H^{r-\rho}_{x'}(\mathbf{R}^{n-1}))}\Bigg\}\Bigg].$$

Les inégalités (2.10), (2.11) et (2.12) impliquent alors

(2.13) $$\|w_{\rho,\lambda}(x', y)\|_{L^2(\mathbf{R}^n_+)} \leq C\lambda^{-\rho-\frac{1}{2}}\|\varphi(x')\|_{H^{-\rho-\frac{1}{2}}(\mathbf{R}^{n-1})};$$

(2.14) $$\|w_{\rho,\lambda}(x', y)\|_{H^{2m}(\mathbf{R}^n_+)} \leq C\lambda^{2m-\rho-\frac{1}{2}}\|\varphi(x')\|_{H^{2m-\rho-\frac{1}{2}}(\mathbf{R}^{n-1})},$$

avec une constante $C > 0$ indépendante de φ et de $\lambda \geqq 1$. Donc, par interpolation, nous avons (2.6), parce que

$$(2.15)\qquad \| w_{\rho,\lambda}(x', y) \|_{H^{2m\theta}(\mathbf{R}^n_+)} \leqq C\lambda^{2m\theta-\rho-\frac{1}{2}} \| \varphi(x') \|_{H^{2m\theta-\rho-\frac{1}{2}}(\mathbf{R}^{n-1})} \qquad \text{pour} \quad 0 \leqq \theta \leqq 1.$$

Nous avons ainsi démontré la première partie du lemme et l'inégalité (2.6) en tenant compte de la densité de $\mathcal{D}(\mathbf{R}^{n-1})$ dans l'espace $H^{2m-\rho-\frac{1}{2}}(\mathbf{R}^{n-1})$.

Pour voir (2.7), il faut seulement vérifier, pour $0 \leqq j \leqq 2m-1$,

$$\gamma_j w_{\rho,\lambda}(x', 0; \varphi) = \begin{cases} \varphi(x') & \text{si } j = \rho, \\ b_{r\rho}\left(x'; \dfrac{\partial}{\partial x'}\right)\varphi(x') & \text{si } j = r \in R, \quad r > \rho, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

C. Q. F. D.

Corollaire 2.1. — *Si l'on fixe $\alpha(y)$, $\beta(y)$ et $\lambda \geqq 1$, nous avons une représentation unique pour tout $u \in \mathcal{D}[A]$ comme suit :*

$$(2.16)\qquad u(x', y) = \sum_{\rho \in S} w_{\rho,\lambda}(x', y; \gamma_\rho u) + u_0(x', y),$$

avec

$$u_0 \in H_0^{2m}(\mathbf{R}^n_+) \equiv \{ u \in H^{2m}(\mathbf{R}^n_+)\,;\ \gamma_j u = 0 \text{ pour } 0 \leqq j \leqq 2m-1 \}.$$

Maintenant, nous démontrons les théorèmes 1 et 2.

2.2. Nous traitons aussi, dans ce numéro, le cas où $\Omega = \mathbf{R}^n_+$.

Démonstration du théorème 1. — L'hypothèse contraire à $[H.4]_1$ est de supposer l'existence d'un couple $(\rho, \sigma) \in S \times S$ tel que l'on ait

$$(2.17)\qquad \rho + \sigma = 2m - 1 \qquad \text{et} \qquad \rho \geqq m > \sigma.$$

Sous cette hypothèse, il faut vérifier que, pour le système $\{A; \{B_r\}_{r \in R}\}$, il n'existe pas de β réel tel que l'on ait

$$\mathcal{R}e(Au, u) \geqq -\beta \| u \|^2 \quad \text{pour tout } u \in \mathcal{D}[A].$$

Écrivons l'opérateur A sous la forme

$$(2.18)\qquad A = (-1)^m a_0(x', y)\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^{2m} + \sum_{\substack{|\nu'| + k \leqq 2m \\ k < 2m}} a_{\nu',k}(x', y)\left(\frac{\partial}{\partial x'}\right)^{\nu}\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^{k},$$

où $a_0(x', y)$ est une fonction partout positive. Et considérons un sous-espace fermé E_1 de $\mathcal{D}[A]$ défini par

$$(2.19)\qquad E_1 = \{ u \in \mathcal{D}[A]\,;\ \gamma_\tau u = 0, \text{ si } \tau \in S \text{ et } \tau \neq \rho, \sigma \}.$$

Alors, nous avons, par intégration par parties et grâce aux majorations des traces $\gamma_j u (j < m)$,

$$(2.20)\qquad (\mathrm{A}u, u) = (-1)^{\rho+m} \langle a_0(x', 0)\gamma_\rho u, \gamma_\sigma u\rangle + b_1(u, u),$$

avec

$$(2.21)\qquad |b_1(u, u)| \leq \mathrm{Cte}\, \| u \|_m^2 \qquad \text{pour} \quad u \in \mathrm{E}_1,$$

où $\langle\ ,\ \rangle$ désigne le produit scalaire de l'espace $\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^{n-1})$. Maintenant, nous allons construire une suite $\{u_p\}_{p=1}^\infty$ de E_1, bornée dans $\mathrm{H}^m(\mathbf{R}_+^n)$, telle que l'on ait

$$(2.22)\qquad \mathcal{R}e(\mathrm{A}u_p, u_p) \to -\infty \qquad \text{lorsque} \quad p \to \infty.$$

Pour le faire, nous fixons une fonction $\varphi(x') \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^{n-1})$ telle que

$$(2.23)\qquad \langle a_0(x', 0)\varphi(x'), \varphi(x')\rangle = 1,$$

et construisons des suites $\{w_{\rho,k}(x', y; (-1)^{\rho-1+m}\varphi)\}_{k=1}^\infty$ et $\{w_{\sigma,k}(x', y; \varphi)\}_{k=1}^\infty$ de E_1 suivant la formule (2.5) pour les ρ et σ satisfaisant à (2.17). Nous posons alors

$$(2.24)\qquad \left\{\begin{array}{l} u_p(x', y) = \displaystyle\sum_{k=1}^{p} \{ k^{\rho-m-1} w_{\rho,k}(x', y; (-1)^{\rho-1+m}\varphi) + k^{\sigma-m-1} w_{\sigma,k}(x', y; \varphi) \} \\ \qquad\qquad\qquad \text{pour} \quad p = 1, 2, 3, \ldots. \end{array}\right.$$

Nous avons ainsi défini une suite $\{u_p\}_{p=1}^\infty$ de E_1, bornée dans $\mathrm{H}^m(\mathbf{R}_+^n)$, parce que l'on a, grâce au lemme 2.1,

$$(2.25)\qquad \begin{aligned} &\| u_p \|_{\mathrm{H}^m(\mathbf{R}_+^n)} \\ &\leq \sum_{k=1}^{p} \{ k^{\rho-m-1} \| w_{\rho,k}(.; (-1)^{\rho-1+m}\varphi) \|_{\mathrm{H}^m(\mathbf{R}_+^n)} + k^{\sigma-m-1} \| w_{\sigma,k}(.; \varphi) \|_{\mathrm{H}^m(\mathbf{R}_+^n)} \} \\ &\leq \mathrm{C} \sum_{k=1}^{p} k^{-\frac{3}{2}} \{ \| \varphi \|_{\mathrm{H}^{m-\rho-\frac{1}{2}}(\mathbf{R}^{n-1})} + \| \varphi \|_{\mathrm{H}^{m-\sigma-\frac{1}{2}}(\mathbf{R}^{n-1})} \} \\ &\leq \mathrm{C}_\varphi \sum_{k=1}^{p} k^{-\frac{3}{2}} < \mathrm{C}_\varphi \sum_{k=1}^{\infty} k^{-\frac{3}{2}} < +\infty, \end{aligned}$$

où $\mathrm{C}_\varphi > 0$ ne dépend pas de p. D'autre part, nous avons

$$(2.26)\qquad \left\{\begin{array}{ll} \gamma_\rho u_p(x', 0) = (-1)^{\rho-1+m}\mathrm{C}_{\rho,p}\varphi(x'), & \mathrm{C}_{\rho,p} = \displaystyle\sum_{k=1}^{p} k^{\rho-m-1}, \\ \gamma_\sigma u_p(x', 0) = \mathrm{C}_{\sigma,p}\varphi(x'), & \mathrm{C}_{\sigma,p} = \displaystyle\sum_{k=1}^{p} k^{\sigma-m-1}. \end{array}\right.$$

Par l'hypothèse (2.17) sur (ρ, σ), $C_{\rho,p}$ diverge vers $+\infty$ lorsque $p \to \infty$, tandis que $C_{\sigma,p}$ converge vers un nombre positif. Par la condition (2.23) sur φ et par la formule (2.20), nous avons

$$(A u_p, u_p) = - C_{\rho,p} C_{\sigma,p} + b_1(u_p, u_p),$$

où la suite $\{ b_1(u_p, u_p) \}_{p=1}^{\infty}$ des nombres complexes reste bornée lorsque $p \to \infty$, grâce aux (2.21) et (2.25). Nous avons ainsi (2.22).

Voilà la démonstration du théorème 1 au cas : $\Omega = \mathbf{R}^n_+$.

Démonstration du théorème 2. — Soit $\{ A ; \{ B_r \}_{r \in R} \}$ un système au bord satisfaisant aux [H.1]$\sim$[H.3] dont l'ensemble R satisfasse à $[H.4]_1$ mais ne satisfasse pas à $[H.4]_2$. (Il est facile de voir que ces deux hypothèses sont indépendantes l'une l'autre si $m \geqq 2$.) L'hypothèse contraire à $[H.4]_2$ est de supposer l'existence d'un couple $(\rho, \sigma) \in S \times S$ tel que l'on ait

$$\rho + \sigma \leqq 2m - 2, \qquad \rho \geqq m \quad \text{et} \quad \sigma \leqq m - 2. \tag{2.27}$$

Sous cette hypothèse, il faut vérifier l'existence d'un opérateur $K = K\left(x', y ; \frac{\partial}{\partial x'}, \frac{\partial}{\partial y}\right)$ d'ordre $\leqq 2m - 1$ à coefficients de classe $\mathcal{B}(\mathbf{R}^n_+)$ tel que $A + K$ ne soit plus variationnel.

Écrivons l'opérateur A sous la forme

$$\left\{ \begin{aligned} A &= A_0 + A_1, \\ A_0 &= \sum_{k=\rho+\sigma+1}^{2m} a_k\left(x', y ; \frac{\partial}{\partial x'}\right)\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^k, \\ A_1 &= \sum_{k=0}^{\rho+\sigma} a_k\left(x', y ; \frac{\partial}{\partial x'}\right)\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^k, \end{aligned} \right. \tag{2.28}$$

où les a_k sont des opérateurs différentiels tangentiels d'ordre $\leqq 2m - k$ à coefficients de classe $\mathcal{B}(\mathbf{R}^n_+)$. Et nous considérons un sous-espace fermé E_2 de $\mathcal{D}[A]$ défini par

$$E_2 = \{ u \in \mathcal{D}[A] ; \gamma_\tau u = 0, \text{ si } \tau \in S \text{ et } \tau \neq \rho, \sigma \}. \tag{2.29}$$

Nous avons alors, par intégration par parties et grâce aux majorations des traces $\gamma_j u (j < m)$,

$$|(A_1 u, u)| \leqq \text{Cte} \, \| u \|_m^2 \qquad \text{pour} \quad u \in E_2. \tag{2.30}$$

D'autre part, il existe un opérateur différentiel tangentiel $T\left(x' ; \frac{\partial}{\partial x'}\right)$ d'ordre $\leqq 2m - \rho - \sigma - 1$ à coefficients de classe $\mathcal{B}(\mathbf{R}^{n-1})$ et une forme sesquilinéaire $b_2(u, u)$ tels que l'on ait

$$(A_0 u, u) = \langle T(\gamma_\rho u), \gamma_\sigma u \rangle + b_2(u, u), \tag{2.31}$$

avec

$$(2.32) \qquad | b_2(u, u) | \leqq \mathrm{Cte} \, \| u \|_m^2 \qquad \text{si} \quad u \in \mathrm{E}_2.$$

Posons alors

$$(2.33) \qquad \mathrm{K} = \mathrm{K}\left(x', y; \frac{\partial}{\partial x'}, \frac{\partial}{\partial y}\right) = (-1)^\sigma \varkappa \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^{\rho+\sigma+1},$$

où $\varkappa$ soit une constante positive à choisir plus tard. Alors, nous avons

$$(2.34) \qquad ((\mathrm{A}+\mathrm{K}) u, u) = \langle (\mathrm{T}-\varkappa) \gamma_\rho u, \gamma_\sigma u \rangle + b_3(u, u),$$

avec

$$(2.35) \qquad | b_3(u, u) | \leqq \mathrm{Cte} \, \| u \|_m^2 \qquad \text{si} \quad u \in \mathrm{E}_2.$$

Maintenant, nous allons construire une suite $\{v_p\}_{p=1}^\infty$ de E_2, bornée dans $\mathrm{H}^m(\mathbf{R}_+^n)$, telle que l'on ait

$$(2.36) \qquad \mathcal{R}e((\mathrm{A}+\mathrm{K}) v_p, v_p) \to -\infty \qquad \text{lorsque} \quad p \to \infty.$$

Pour le faire, nous fixons une fonction $\varphi(x') \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^{n-1})$ telle que

$$(2.37) \qquad \| \varphi(x') \|_{\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^{n-1})} = 1,$$

et posons

$$(2.38) \qquad \left\{ \begin{array}{l} v_p(x', y) = \displaystyle\sum_{k=1}^{p} \{ k^{\rho-m-1} w_{\rho,k}(x', y; \varphi) + k^{\sigma-m-1} w_{\sigma,k}(x', y; \varphi) \} \\ \qquad\qquad \text{pour} \quad p = 1, 2, 3, \ldots. \end{array} \right.$$

Nous avons ainsi défini une suite $\{v_p\}_{p=1}^\infty$ de E_2, bornée dans $\mathrm{H}^m(\mathbf{R}_+^n)$. [La majoration de la norme $\| v_p \|_{\mathrm{H}^m(\mathbf{R}_+^n)}$ est analogue à celle de u_p dans l'inégalité (2.25).] D'autre part, nous avons

$$(2.39) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \gamma_\rho v_p(x', 0) = \displaystyle\sum_{k=1}^{p} k^{\rho-m-1} \varphi(x') \equiv \mathrm{C}_{\rho,p} \varphi(x'), \\ \gamma_\sigma v_p(x', 0) = \displaystyle\sum_{k=1}^{p} k^{\sigma-m-1} \varphi(x') \equiv \mathrm{C}_{\sigma,p} \varphi(x'), \end{array} \right.$$

où nous remarquons que, grâce à l'hypothèse (2.27) sur (ρ, σ), la somme $\mathrm{C}_{\rho,p}$ diverge vers $+\infty$ lorsque $p \to \infty$, tandis que la somme $\mathrm{C}_{\sigma,p}$ converge vers un nombre positif.

Comme $\varphi(x') \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^{n-1})$, nous avons une constante $\mathrm{C} > 0$ telle que l'on ait

$$|\langle \mathrm{T} \varphi(x'), \varphi(x') \rangle| \leqq \mathrm{Cte} \, \| \varphi \|_{\mathrm{H}^{2m-\rho-\sigma-1}(\mathbf{R}^{n-1})} \| \varphi \|_{\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^{n-1})} \leqq \mathrm{C}.$$

Grâce à l'hypothèse (2.37), nous avons donc

$$\mathcal{R}e\langle (\mathrm{T}-\varkappa)\,\varphi(x'),\ \varphi(x')\rangle \leqq \mathrm{C}-\varkappa.$$

Choisissons alors $\varkappa$ de sorte que $\mathrm{C}-\varkappa<-1$. Nous avons

$$\mathcal{R}e\langle (\mathrm{T}-\varkappa)\,\gamma_\rho v_p,\ \gamma_\sigma v_p\rangle < -\mathrm{C}_{\rho,p}\,\mathrm{C}_{\sigma,p} \to -\infty \qquad \text{lorsque} \quad p\to+\infty.$$

En tenant compte de la borne de $\{\| v_p\|_{\mathrm{H}^m(\mathbf{R}^n_+)}\}_{p=1}^{\infty}$, (2.34) et de (2.35), nous obtenons (2.36).

Donc, la démonstration est terminée au cas où $\Omega=\mathbf{R}^n_+$.

2.3. Soit maintenant $\{\mathrm{A};\{\mathrm{B}_r\}_{r\in\mathrm{R}}\}$ un système au bord satisfaisant aux [H.1]$\sim$[H.3] défini dans un ouvert borné Ω de $\mathbf{R}^n$ à frontière Γ de classe C^∞. Les démonstrations des théorèmes 1 et 2 sont effectuées sur les mêmes principes que ceux dans le cas de $\Omega=\mathbf{R}^n_+$. Nous avons besoin seulement de quelques modifications. Nous allons maintenant les esquisser.

Comme la frontière Γ de Ω est une variété de classe C^∞ à dimension $n-1$, chaque point P de Γ admet une carte locale U au voisinage de P avec les propriétés suivantes : U s'applique par un difféomorphisme Ψ de classe C^∞ à un voisinage U' de l'origine O de $\overline{\mathbf{R}}^n_+$ de sorte que $\Psi(\mathrm{U}\cap\Gamma)=\mathrm{U}'\cap\mathbf{R}^{n-1}$ et que la direction normale intérieure à Γ corresponde à la direction $y>0$. Nous choisissons encore deux voisinages W_1 et W_2 de P tels que $\mathrm{W}_1\Subset\mathrm{W}_2\Subset\mathrm{U}$ et désignons par W'_1 et W'_2 leurs images par Ψ dans $\overline{\mathbf{R}}^n_+$.

Quant au théorème 1, nous écrivons l'opérateur A sous la même forme que (2.18). La définition du sous-espace E_1 de $\mathcal{D}[\mathrm{A}]$ est la même que (2.19). Nous prenons une fonction $\varphi(x')$ de l'espace $\mathcal{D}(\mathrm{W}_1\cap\Gamma)$ satisfaisant aussi à (2.23). La définition des $\{u_p\}_{p=1}^{\infty}$ est donnée par (2.24,) mais nous prenons les fonctions $\tilde{u}_p(x',y)\equiv\chi(x',y)\,u_p(x',y)$ au lieu des $u_p(x',y)$, où $\chi(x',y)$ soit une fonction de classe $\mathcal{D}(\mathrm{W}_2)$ telle que $\chi(x',y)\equiv 1$ sur $\overline{\mathrm{W}}_1$. Alors, la suite $\{\tilde{u}_p\}_{p=1}^{\infty}$ joue complètement le même rôle que celui de $\{u_p\}_{p=1}^{\infty}$ dans le cas de $\mathbf{R}^n_+$. Nous avons ainsi localisé toutes les situations, et il n'y a rien à modifier dans la suite de la démonstration.

Quant au théorème 2; nous écrivons A sous la forme de (2.28). L'espace E_2 est défini analoguement. Nous prenons comme K un opérateur à coefficients de classe $\mathcal{D}(\mathrm{U})$ qui est égal à l'opérateur donné par (2.33). Nous prenons une fonction $\varphi(x')\in\mathcal{D}(\mathrm{W}_1\cap\Gamma)$ satisfaisant aussi à (2.37). La définition des $\{v_p\}_{p=1}^{\infty}$ est donnée par (2.38). On les remplace par les $\tilde{v}_p(x',y)\equiv\chi(x',y)\,v_p(x',y)$, où $\chi(x',u)$ est la fonction prise ci-dessus. Alors, on montre (2.36) avec v_p remplacées par $\tilde{v}_p$.

Enfin, nous avons complètement établi les théorèmes 1 et 2.

3. Démonstration du théorème 3.

Soit $\{A; \{B_r\}_{r\in R}\}$ un système au bord elliptique auto-adjoint satisfaisant aux [H.1], [H.2], [H.3] et $[H.4]_1$. Pour le moment, nous ne supposons pas l'hypothèse $[H.4]_2$. Par l'hypothèse [H.2], il existe un β réel tel que $A + \beta I$ soit auto-adjoint strictement positif avec le domaine $\mathcal{D}[A]$ défini par (1.5). Nous désignons cet opérateur par A_β :

$$A_\beta = A + \beta I; \qquad (A_\beta u, u) \geqq \delta \| u \|^2 \quad \text{pour tout } u \in \mathcal{D}[A], \tag{3.1}$$

où δ est une constante positive. Nous pouvons alors introduire sa racine carrée $A_\beta^{\frac{1}{2}}$ strictement positive.

Nous allons utiliser quelques propriétés et résultats importants de la théorie d'interpolation. Alors, nous définissons une série des espaces d'interpolation suivant la méthode complexe de Calderon [8].

Soient X_0 et X_1 deux espaces de Banach avec

$$X_0 \subset X_1, \tag{3.2}$$

où l'injection de X_0 dans X_1 est supposée continue. Désignons par $\mathcal{H}(X_0, X_1)$ l'espace de Banach des fonctions $f(z)$ d'une variable complexe $z = v + iw$, à valeurs dans x_1, holomorphes dans $0 < v < 1$, bornées et continues dans $0 \leqq v \leqq 1$ et telles que $w \to f(iw)$ [resp. $w \to f(1 + iw)$] soit continue de $\mathbf{R}^1$ dans X_0 (resp. dans X_1) et que

$$\| f \|_{\mathcal{H}(X_0, X_1)} = \max \left\{ \sup_w \| f(iw) \|_{X_0}, \sup_w \| f(1 + iw) \|_{X_1} \right\} < +\infty, \tag{3.3}$$

muni de la norme définie par (3.3). Désignons, pour $0 < \theta < 1$, par

$$(X_0, X_1)_\theta = \{ u = f(\theta) \text{ ; avec une certaine } f \in \mathcal{H}(X_0, X_1) \} \tag{3.4}$$

un espace de Banach muni de la norme

$$\| u \|_{(X_0, X_1)_\theta} = \inf_{\substack{u = f(\theta) \\ f \in \mathcal{H}(X_0, X_1)}} \| f \|_{\mathcal{H}(X_0, X_1)}. \tag{3.5}$$

Si X_0 et X_1 sont hilbertiens, les espaces $(X_0, X_1)_\theta$ $(0 < \theta < 1)$ s'identifient avec les espaces d'interpolations (des indices θ correspondants) au sens des traces ou bien des moyennes (dans le cadre de L^2) introduits par Lions et Peetre [6].

Maintenant, nous posons $X_0 = L^2(\Omega)$ et $X_1 = \mathcal{D}[A]$. Ils sont hilbertiens ($\mathcal{D}[A]$ est un sous-espace fermé de $H^{2m}(\Omega)$). L'espace d'interpolation que nous considérons dans la suite est l'espace correspondant à $\theta = \frac{1}{2}$, c'est-à-dire, $(L^2(\Omega), \mathcal{D}[A])_{\frac{1}{2}}$.

Nous avons les trois lemmes suivants :

LEMME 3.1. — *Nous avons*

$$(A_\beta u, u) = \left\| A_\beta^{\frac{1}{2}} u \right\|^2 \quad \textit{pour tout } u \in \mathcal{D}[A]. \tag{3.6}$$

LEMME 3.2. — *Le domaine* $\mathcal{D}\left[A_\beta^{\frac{1}{2}}\right]$ *de* $A_\beta^{\frac{1}{2}}$ *s'identifie avec l'espace d'interpolation* $(L^2(\Omega), \mathcal{D}[A])_{\frac{1}{2}}$ *algébriquement et topologiquement, c'est-à-dire, il existe une constante* $c > 0$ *telle que l'on ait*

$$c^{-1} \left\| A_\beta^{\frac{1}{2}} u \right\| \leqq \| u \|_{(L^2(\Omega), \mathcal{D}[A])_{\frac{1}{2}}} \leqq c \left\| A_\beta^{\frac{1}{2}} u \right\| \quad \textit{pour tout } u \in \mathcal{D}\left[A_\beta^{\frac{1}{2}}\right]. \tag{3.7}$$

LEMME 3.3. — *L'espace d'interpolation* $(L^2(\Omega), \mathcal{D}[A])_{\frac{1}{2}}$ *s'identifie avec un sous-espace fermé*

$$\{ u \in H^m(\Omega) ;\quad B_r u|_\Gamma = 0 \quad \textit{pour tout } r \in R \textit{ tel que } r < m \} \tag{3.8}$$

de $H^m(\Omega)$ *algébriquement et topologiquement, c'est-à-dire, la norme dans* $(L^2(\Omega), \mathcal{D}[A])_{\frac{1}{2}}$ *est équivalente à celle de* $H^m(\Omega)$.

Le lemme 3.1 est trivial. Quant au lemme 3.2, nous pouvons référer Lions [6]. Le lemme 3.3 est un cas particulier d'un théorème d'interpolation obtenu par Grisvard [5].

A l'aide des trois lemmes, nous avons une inégalité

$$(A_\beta u, u) \geqq \gamma \| u \|^2_{H^m(\Omega)} \quad \text{pour tout } u \in \mathcal{D}[A], \tag{3.9}$$

avec une constante $\gamma > 0$ indépendante de u.

Démonstration du théorème 3. — Maintenant, nous supposons l'hypothèse $[H.4]_2$, c'est-à-dire, nous allons considérer seulement des systèmes au bord $\{A; \{B_r\}_{r\in R}\}$ satisfaisant aux $[H.1] \sim [H.4]$ et auto-adjoints.

Supposer $[H.4]_2$ à l'ensemble R est équivalente à supposer à l'ensemble complémentaire S la condition suivante :

$$\begin{array}{l}\text{Pour tout choix de } (\rho, \sigma) \in S \times S \text{ tel que } \rho + \sigma \leqq 2m - 2, \\ \quad \text{on ait toujours à la fois } \rho \leqq m - 1 \text{ et } \sigma \leqq m - 1.\end{array} \tag{3.10}$$

(Cette équivalence est à cause de l'hypothèse $[H.4]_1$.)

Soit alors $K = K\left(x; \dfrac{\partial}{\partial x}\right)$ un opérateur différentiel quelconque d'ordre $\leqq 2m - 1$ à coefficients de classe $\mathcal{B}(\Omega)$. Et nous allons estimer $|(Ku, u)|$ pour $u \in \mathcal{D}[A]$.

L'intégration par parties, la condition au bord (1.4) et l'hypothèse (3.10) nous donnent

$$(Ku, u) = k(u, u) + b(u, u), \tag{3.11}$$

avec

$$k(u, u) = \sum_{\substack{|\alpha+\beta|<2m \\ |\alpha|, |\beta| \leq m}} \left(k_{\alpha\beta}(x)\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{\alpha} u, \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{\beta} u\right)_{L^2(\Omega)}; \tag{3.12}$$

$$b(u, u) = \sum_{\substack{\rho, \sigma \in S \\ \rho, \sigma \leq m-1}} \left\langle T_{\rho\sigma}\left(x'; \frac{\partial}{\partial x}\right)\gamma_\rho u, \gamma_\sigma u\right\rangle_{L^2(\Gamma)}, \tag{3.13}$$

où $k_{\alpha\beta}(x)$ sont des fonctions de classe $\mathcal{B}(\Omega)$, $T_{\rho\sigma}\left(x'; \frac{\partial}{\partial x'}\right)$ sont des opérateurs différentiels tangentiels d'ordre $\leq 2m - \rho - \sigma - 2$ à coefficients de classe $\mathcal{B}(\Gamma)$ et

$$\gamma_\rho u = \left(\frac{\partial}{\partial n}\right)^{\rho} u|_\Gamma \quad \text{les traces d'ordre } \rho \text{ de } u.$$

Nous avons donc

$$\left\{\begin{aligned} &|k(u, u)| \leq \mathrm{Cte}\, \|u\|_{H^m(\Omega)} \cdot \|u\|_{H^{m-1}(\Omega)}, \\ &|b(u, u)| \leq \mathrm{Cte} \sum_{\substack{\rho \in S \\ \rho \leq m-1}} \|\gamma_\rho u\|^2_{H^{m-\rho-1}(\Gamma)}. \end{aligned}\right. \tag{3.14}$$

Alors, pour $\varepsilon > 0$ donné quelconque, il existe une constante $C(\varepsilon) > 0$ telle que

$$|k(u, u)| + |b(u, u)| \leq \varepsilon \|u\|^2_{H^m(\Omega)} + C(\varepsilon)\|u\|^2 \quad \text{pour } u \in \mathcal{D}[A]. \tag{3.15}$$

Cette majoration et (3.9) impliquent, en prenant $\varepsilon = \frac{\gamma}{2}$,

$$\mathcal{R}e((A_\beta + K)u, u) \geq \frac{\gamma}{2}\|u\|^2_{H^m(\Omega)} - C'\|u\|^2 \quad \text{pour tout } u \in \mathcal{D}[A], \tag{3.16}$$

où $C' > 0$ est aussi une constante indépendante de u. On a enfin démontré que $A_\beta + K$, donc $A + K$, est variationnel. L'inégalité d'autre sens dans le théorème 3 est une conséquence de (3.7).

C. Q. F. D.

Pour la commodité dans la suite, nous allons maintenant éclaircir les relations algébriques détaillées entre les coefficients de A et ceux de $\{B_r\}_{r\in R}$ pour qu'un système au bord $\{A; \{B_r\}_{r\in R}\}$ soit auto-adjoint.

Soit $\{A; \{B_r\}_{r\in R}\}$ un système au bord elliptique défini dans le demi-espace $\mathbf{R}^n_+$ satisfaisant aux hypothèses [H.1]$\sim$[H.4]. Nous écrivons A et $\{B_r\}_{r\in R}$ suivant les formes de (1.7) et de (1.8) :

$$A = \sum_{k=0}^{2m} \alpha_k(x; D_{x'})(-D_{x_n})^k; \tag{3.17}$$

$$B_r = (-D_{x_n})^r - \sum_{\substack{\rho<r \\ \rho \in S}} \beta_{r\rho}(x'; D_{x'})(-D_{x_n})^\rho \quad \text{pour } r \in R = R_j \quad (0 \leq j \leq m), \tag{3.18}$$

où

$$D_{x'} = \left(\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_{n-1}}\right), \qquad D_{x_n} = \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_n},$$

et les $\alpha_k(x; D_{x'})$ et $\beta_{r\rho}(x'; D_{x'})$ sont des opérateurs différentiels tangentiels d'ordre $\leq 2m-k$ et $r-\rho$ respectivement à coefficients de classe $\mathcal{B}(\mathbf{R}^n_+)$ et $\mathcal{B}(\mathbf{R}^{n-1})$ respectivement. Désignons, de plus, par $\alpha^*_k(x; D_{x'})$ et par $\beta^*_{r\rho}(x'; D_{x'})$ les opérateurs adjoints formels à $\alpha_k(x; D_{x'})$ et à $\beta_{r\rho}(x'; D_{x'})$ respectivement. Écrivons par $\alpha^{(p)}_k(x; D_{x'})$ et par $\alpha^{*(q)}_l(x; D_{x'})$ les opérateurs $\alpha_k(x; D_{x'})$ et $\alpha^*_l(x; D_{x'})$ opérés par $D^p_{x_n}$ et par $(-D_{x_n})^q$ à leurs coefficients respectivement.

L'hypothèse que $\{A; \{B_r\}_{r\in R_j}\}$ soit auto-adjoint se compose de deux hypothèses algébriques : la première est l'identité entre A et son adjoint formel A^*, et la deuxième est l'équivalence entre $\{B_r\}_{r\in R_j}$ et sa condition au bord adjointe $\{B'_r\}_{r\in R_j}$. Nous avons un

LEMME 3.4. — *Soit* $R = R_j$. *Alors, un système au bord* $\{A; \{B_r\}_{r\in R_j}\}$ *défini dans* $\mathbf{R}^n_+$ *par* (3.17) *et par* (3.18) *est auto-adjoint, si et seulement si l'hypothèse* [H. *a-a*] *suivante est vérifiée :*

[H. *a-a*] :

(i) $$\alpha_k(x; D_{x'}) = \sum_{l=k}^{2m} \binom{l}{k} \alpha^{*(l-k)}_l(x; D_{x'}) \quad \textit{pour tout } 0 \leq k \leq 2m;$$

(ii) $$\sum_{p=0}^{k+l-1} \binom{m-l+p}{m-l} \alpha^{(p)}_{2m+1+p-k-l}(x'; D_{x'})\,\varphi(x')$$

$$+\sum_{p=0}^{l-1}\sum_{q=0}^{l-1-p} \binom{m-l+p}{m-l} \alpha^{(p)}_{2m+1+p+q-l}(x'; D_{x'})\,\{\beta_{m+q,\,m-k}(x'; D_{x'})\,\varphi(x')\}$$

$$+\sum_{p=0}^{k-1}\sum_{q=0}^{k-1-p} \binom{m+q+p}{m+q} \beta^*_{m+q,\,m-l}(x'; D_{x'})\,\{\alpha^{(p)}_{2m+1+p+q-k}(x'; D_{x'})\,\varphi(x')\}$$

$$= 0 \quad \textit{pour tout } \varphi(x') \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^{n-1}) \quad \textit{et pour tous } 1 \leq k,\ l \leq j.$$

Preuve. — Premièrement l'égalité $A = A^*$ nous donne tout de suite les relations (i). Donc, nous allons maintenant voir (ii).

L'identité

$$D^p_{x_n}\varphi.\overline{\psi} - \varphi.\overline{D^p_{x_n}\psi} = \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_n}\left(\sum_{j=0}^{p-1} D^{p-1-j}_{x_n}\varphi.\overline{D^j_{x_n}\psi}\right)$$

implique d'abord l'existence des formes $\Gamma_l(u, v)$ $(l = 1), \ldots, n)$ telles que l'on ait

(3.19) $$Au.\overline{v} - u.\overline{A^*v} = -\sum_{l=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_l}\Gamma_l(u, v),$$

où les $\Gamma_l(u, v)$ ne sont pas uniquement déterminées, mais on peut choisir comme $\Gamma_n(u, v)$ la forme suivante :

$$(3.20)\qquad \Gamma_n(u, v) = \sum_{p+q \leqq 2m-1} \Gamma_{p,q}((-D_{x_n})^p u, (-D_{x_n})^q v),$$

avec

$$(3.21)\qquad \Gamma_{p,q}(\varphi, \psi) = \frac{1}{i} \sum_{l=0}^{2m-p-q-1} \binom{l+q}{q} \alpha_{p+q+l+1}^{(l)}(x; D_{x'})\, \varphi(x) . \overline{\psi(x)}.$$

Supposons alors que u et v satisfassent à la condition au bord

$$B_r u |_{\mathbf{R}^{n-1}} = B_r v |_{\mathbf{R}^{n-1}} = 0,$$

pour tout $r \in R_j$, où les B_r sont donnés par (3.18). Alors, nous avons

$$(3.22)\qquad \Gamma_n(u, v)|_{x_n=0} = \sum_{\rho, \sigma \in S} \Theta_{\rho,\sigma}(\tilde{\gamma}_\rho u, \tilde{\gamma}_\sigma v),$$

où

$$\tilde{\gamma}_\rho u = (-D_{x_n})^\rho u |_{x_n=0}, \qquad \rho \in S,$$

$$(3.23)\qquad \Theta_{\rho,\sigma}(\varphi, \psi) = \begin{cases} = 0 \quad \text{si} \quad \rho + \sigma \geqq 2m; \\ = \Gamma_{\rho,\sigma}(\varphi, \psi)|_{x_n=0} + \sum\limits_{\substack{r > \rho \\ r \in R_j}} \Gamma_{r,\sigma}(\beta_{r\rho}\varphi, \psi)|_{x_n=0} \\ \quad + \sum\limits_{\substack{s > \sigma \\ s \in R_j}} \Gamma_{\rho,s}(\varphi, \beta_{s\sigma}\psi)|_{x_n=0} \quad \text{si} \quad \rho + \sigma < 2m. \end{cases}$$

L'hypothèse que $\{A; \{B_r\}_{r \in R_j}\}$ soit auto-adjoint s'exprime alors

$$(3.23\ bis)\qquad \Theta_{\rho,\sigma}(\varphi, \psi) \equiv 0 \quad \text{pour tous } \varphi, \psi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^{n-1}) \text{ et pour tout } (\rho, \sigma) \in S \times S.$$

L'ensemble R étant $R_j (0 \leqq j \leqq m)$, nous pouvons poser

— si $(\rho, \sigma) \in S \times S$ et $\rho + \sigma < 2m$,

$$\rho = m - k, \qquad \sigma = m - l, \qquad \text{avec } 1 \leqq k, l \leqq j;$$

— si $r \in R_j$ et $s \in R_j$ avec $r, s \geqq m$,

$$r = m + p, \qquad s = m + q, \qquad \text{avec } 0 \leqq p, q \leqq j - 1.$$

Donc, nous avons les relations (ii) dans l'énoncé, grâce à (3.21) et à (3.22).

C. Q. F. D.

COROLLAIRE 3.1. — *Supposons que le système* $\{A, \{B_r\}_{r\in R_j}\}$ *soit à coefficients constants, donc défini par* (1.7) *et par* (1.8). *Alors l'hypothèse* [H. *a-a*] *s'écrit comme suit :*

$$(3.24)\qquad \alpha_k(D_{x'})\quad \textit{soient à coefficients réels}\quad (0 \leq k \leq 2m);$$

$$(3.25)\qquad \alpha_{2m+1-k-l}(D_{x'}) + \sum_{q=0}^{l-1} \alpha_{2m+1+q-l}(D_{x'})\,\beta_{m+q,\,m-k}(D_{x'})$$
$$+ \sum_{q=0}^{k-1} \beta^{\star}_{m+q,\,m-l}(D_{x'})\,\alpha_{2m+1+q-k}(D_{x'}) \equiv 0 \quad \textit{pour tous } 1 \leq k,\quad l \leq j.$$

Nous remarquons enfin que les relations (ii) dans l'hypothèse [H. *a-a*] et (3.25) sont automatiquement remplies si $R = R_0$ (la condition de Dirichlet).

Ensuite, pour un système au bord $\{A; \{B_r\}_{r\in R_j}\}$ défini par (3.17) et par (3.18), nous donnons les relations algébriques pour qu'un système au bord $\{A^\star; \{B'_r\}_{r\in R_j}\}$ soit adjoint à $\{A; \{B_r\}_{r\in R_j}\}$, où nous donnons les opérateurs $\{B'_r\}_{r\in R_j}$ sous les mêmes formes que (3.18) :

$$(3.26)\qquad B'_r = (-D_{x_n})^r - \sum_{\substack{\rho<r\\ \rho\in S}} \beta'_{r\rho}(x'; D_{x'})\,(-D_{x_n})^\rho \qquad \text{pour } r\in R = R_j.$$

Nous ne supposons pas maintenant que $A^\star = A$. Nous posons

$$(3.27)\qquad \mathcal{D}[A^\star] = \{ v\in H^{2m}(\mathbf{R}^n_+)\,;\ B'_r v|_{\mathbf{R}^{n-1}} = 0 \text{ pour tout } r\in R_j \}.$$

LEMME 3.5. — *Le système au bord* $\{A^\star; \{B'_r\}_{r\in R_j}\}$ *est adjoint à* $\{A; \{B_r\}_{r\in R_j}\}$, *si et seulement si l'on a les relations*

$$(3.28)\qquad \sum_{p=0}^{k+l-1} \binom{m-l+p}{m-l} \alpha^{(p)\star}_{2m+1+p-k-l}(x'; D_{x'})\,\varphi(x')$$
$$+ \sum_{p=0}^{l-1}\ \sum_{q=0}^{l-1-p} \binom{m-l+p}{m-l} \alpha^{(p)}_{2m+1+p-k-l}(x'; D_{x'})\,\{\beta_{m+q,\,m-k}(x'; D_{x'})\,\varphi(x')\}$$
$$+ \sum_{p=0}^{k-1}\ \sum_{q=0}^{k-1-p} \binom{m+q+p}{m+q} \beta'^{\star}_{m+q,\,m-l}(x'; D_{x'})\,\{\alpha^{(p)}_{2m+1+p+q-k}(x'; D_{x'})\,\varphi(x')\}$$
$$= 0 \quad \textit{pour tout } \varphi(x') \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^{n-1}) \quad \textit{et pour tous } 1 \leq k,\ l \leq j.$$

Preuve. — On considère la différence $Au.\bar{v} - u.\overline{A^\star v}$ pour $u \in \mathcal{D}[A]$ et pour $v \in \mathcal{D}[A^\star]$. Alors, il faut seulement modifier la définition des $\Theta_{\rho,\sigma}(\varphi, \psi)$. Au lieu de (3.23), nous posons

$$(3.29)\qquad \Theta_{\rho,\sigma}(\varphi,\psi) = \begin{cases} = 0 & \text{si } \rho+\sigma \geqq 2m; \\ = \left\{ \Gamma_{\rho,\sigma}(\varphi,\psi) + \sum_{\substack{r>\rho \\ r\in R_j}} \Gamma_{r,\sigma}(\beta_{r\rho}\varphi,\psi) + \sum_{\substack{s>\sigma \\ s\in R_j}} \Gamma_{\rho,s}(\varphi, \beta'_{s\sigma}\psi) \right\}\Bigg|_{x_n=0} & \text{si } \rho+\sigma < 2m. \end{cases}$$

Alors, par un raisonnement tout à fait analogue, nous avons (3.28).

C. Q. F. D.

Corollaire 3.2. — *Supposons que le système* $\{A, \{B_r\}_{r\in R_j}\}$ *soit à coefficients constants et défini par* (1.7) *et par* (1.8). *Alors, son adjoint* $\{A^\star, \{B'_r\}_{r\in R_j}\}$ *l'est aussi et* (3.28) *devient*

$$(3.30)\qquad \alpha_{2m+1-k-l}(D_{x'}) + \sum_{q=0}^{l-1} \alpha_{2m+1+q-l}(D_{x'})\,\beta_{m+q,\,m-k}(D_{x'}) + \sum_{q=0}^{k-1} \beta'^{\star}_{m+q,\,m-l}(D_{x'})\,\alpha_{2m+1+q-k}(D_{x'}) \equiv 0 \quad \textit{pour tous } 1 \leqq k,\ l \leqq j.$$

4. Opérateurs différentiels ordinaires à coefficients constants.

Le but de ce paragraphe est de donner les explications détaillées sur les notions, surtout sur la matrice $\mathcal{B}_j(\xi', \lambda)$, introduites dans le paragraphe 1 pour préparer l'énoncé du théorème 4. Nous nous occupons donc d'étudier des systèmes au bord elliptiques d'ordre $2m$ d'une seule variable y à coefficients constants définis sur la demi-droite

$$\mathbf{R}^1_+ = \{ y \in \mathbf{R}^1;\ y > 0 \}.$$

L'opérateur A considéré dans ce qui suit a la forme

$$(4.1)\qquad A = A(D_y) = \sum_{k=0}^{2m} \alpha_k(-D_y)^k, \qquad D_y = \frac{1}{i}\frac{d}{dy},$$

avec les $\{\alpha_k\}_{k=0}^{2m}$ constants. Et, la condition au bord $y = 0$ s'écrit

$$(4.2)\qquad B_r u(0) \equiv (-D_y)^r u(0) - \sum_{\substack{\rho<r \\ \rho\in S}} \beta_{r\rho}(-D_y)^\rho u(0) = 0 \quad \text{pour tout } r \in R,$$

les $\{\beta_{r\rho}\}$ étant constants.

Nous considérons les constantes α_k et $\beta_{r\rho}$ comme dépendant à un certain nombre de paramètres réels que nous préciserons dans le paragraphe suivant. Donc tous les termes dans (4.1) et dans (4.2) sont regardés comme formant les parties principales de A et des B_r respectivement. De ce point de vue, nous allons interpréter les hypothèses [H.1], [H.2], [H.3] [H.4] et $[\widetilde{\mathrm{H}.3}]$, par rapport au système $\{A; \{B_r\}_{r\in R}\}$.

D'abord, deux premières hypothèses [H.1] et [H.2] deviennent respectivement

$$[h.1] \qquad \alpha_k \quad (0 \leqq k \leqq 2m) \quad \text{soient réels;}$$

$$[h.2] \qquad C^{-1}(|\eta|+1)^{2m} \leqq \sum_{k=0}^{2m} \alpha_k(-\eta)^k \leqq C(|\eta|+1)^{2m} \quad \text{pour tout } \eta \text{ réel,}$$

avec une constante $C > 0$ indépendante de η.

Nous nous rappelons [H.4.] Soit

$$[h.4] \qquad \begin{cases} R = R_j = \{0, \ldots, m-j-1, m, \ldots, m+j-1\} & (0 \leqq j \leqq m); \\ S = S_j = \{m-j, \ldots, m-1, m+j, \ldots, 2m-1\}. \end{cases}$$

Si $j = 0$, c'est-à-dire, $R = \{0, 1, \ldots, m-1\}$, la condition au bord est celle de Dirichlet. Nous omettons ce cas trivial, et supposons que $1 \leqq j \leqq m$.

Maintenant, pour interpréter les [H.3] et [H. *a-a*] (*voir* le paragraphe 3), nous introduisons quelques matrices carrées : Posons

$$(4.3) \qquad (\alpha)_j = \begin{bmatrix} \alpha_{2m-1} & \alpha_{2m-2} & \cdots & \alpha_{2m-j} \\ \alpha_{2m-2} & \cdots\cdots & \cdots & \alpha_{2m-j-1} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots \\ \alpha_{2m-j} & \cdots\cdots & \cdots & \alpha_{2m-2j+1} \end{bmatrix};$$

$$(4.4) \qquad ((\alpha))_j = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & \alpha_{2m} \\ 0 & 0 & \cdots & \alpha_{2m} & \alpha_{2m-1} \\ . & . & \cdots & \cdots & \cdots\cdots \\ 0 & \alpha_{2m} & \cdots & \cdots & \alpha_{2m-j+2} \\ \alpha_{2m} & \alpha_{2m-1} & \cdots & \alpha_{2m-j+2} & \alpha_{2m-j+1} \end{bmatrix};$$

$$(4.5) \qquad (\beta)_j = \begin{bmatrix} \beta_{m+j-1,\, m-1} & \cdots & \beta_{m+j-1,\, m-j} \\ \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots \\ \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots \\ \beta_{m,\, m-1} & \cdots & \beta_{m,\, m-j} \end{bmatrix};$$

$$(4.6) \qquad \varphi_j(z) = \begin{bmatrix} z^{m-1} & z^m & \cdots & z^{m+j-2} \\ z^{m-2} & \cdot\cdot & \cdots & z^{m+j-3} \\ \cdots & \cdot\cdot & \cdots & \cdots\cdots \\ z^{m-j} & \cdot\cdot & \cdots & z^{m-1} \end{bmatrix}.$$

Ce sont des matrices carrées d'ordre j. $(\alpha)_j$ et $((\alpha))_j$ sont réelles symétriques (hermitiennes). $\varphi_j(z)$ est une matrice carrée d'ordre j d'éléments monômes de z.

Pour transformer l'hypothèse [H.3] en une forme matricielle, nous faisons correspondre à l'opérateur $A(D_y)+\lambda$ (dépendant à un paramètre $\lambda \geqq 0$) un polynôme

$$A(-z)+\lambda \equiv \sum_{k=0}^{2m} \alpha_k z^k + \lambda. \tag{4.7}$$

Pour $\lambda \geqq 0$ fixé, le polynôme $A(-z)+\lambda$ a m zéros $z=-\tau_l(\lambda)$ $(l=1, \ldots, m)$ avec $\mathcal{I}m\, \tau_l(\lambda) > 0$. On pose alors

$$p_\lambda(z) \equiv \prod_{l=1}^{m} (z+\tau_l(\lambda)) = \sum_{k=0}^{m} s_{m-k}(\lambda)\, z^k. \tag{4.8}$$

Nous posons, de plus,

$$\Delta_j(\lambda) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\lambda} p_\lambda(z)^{-1} \{ z^j \mathrm{I}_j - (\beta)_j \} \varphi_j(z)\, dz, \tag{4.9}$$

où I_j est la matrice d'identité d'ordre j, Γ_λ est un contour fermé, borné contenant $\{-\tau_l(\lambda)\}_{l=1}^{m}$ à son intérieur. On a donc une matrice carrée $\Delta_j(\lambda)$ d'ordre j dépendant à un paramètre $\lambda \geqq 0$. L'hypothèse [H.3] est équivalente à dire que

[h.3] $\qquad \Delta_j(\lambda)$ soit inversible pour tout $\lambda \geqq 0$.

Si le système est auto-adjoint, il satisfait à

[h. a-a] $\qquad (\alpha)_j + ((\alpha))_j (\beta)_j + (\beta)_j^* ((\alpha))_j = 0.$

Nous remarquons ici une relation très importante entre les α_k et les $s_k(\lambda)$. L'hypothèse [h.2] nous permet d'abord de supposer

$$\alpha_{2m} = 1. \tag{4.10}$$

Alors, par (4.7) et par (4.8), nous avons

$$A(-z)+\lambda = \overline{p_\lambda(\bar{z})}\, p_\lambda(z) = \left[\prod_{l=1}^{m} \{ z + \overline{\tau_l(\lambda)} \} \right] \left[\prod_{l=1}^{m} \{ z+\tau_l(\lambda) \} \right],$$

d'où l'on obtient

$$\sum_{l=0}^{k} s_l(\lambda)\, \overline{s_{k-l}(\lambda)} = \begin{cases} \alpha_{2m-k} & \text{si } 0 \leqq k \leqq 2m-1, \\ \alpha_0 + \lambda & \text{si } k = 2m, \end{cases} \tag{4.11}$$

où l'on a posé $s_k(\lambda) = 0$ si $k<0$ ou $k>m$.

Nous considérons maintenant la forme bilinéaire $(\mathrm{A}u, v)$ pour u et v appartenant à

$$\mathcal{D}[\mathrm{A}] = \{ u \in \mathrm{H}^{2m}(\mathbf{R}_+^1) ;\ \mathrm{B}_r u(0) = 0 \quad \text{pour tout } r \in \mathrm{R}_j \}. \tag{4.12}$$

Posons, pour $\lambda \geqq 0$,

$$(4.13)\quad \begin{cases} A_+^\lambda(D_y) = \prod_{l=1}^{m} (-D_y + \tau_l(\lambda)) = \sum_{k=0}^{m} s_{m-k}(\lambda)\,(-D_y)^k, \\ A_-^\lambda(D_y) = \prod_{l=1}^{m} (-D_y + \overline{\tau_l(\lambda)}) = \sum_{k=0}^{m} \overline{s_{m-k}(\lambda)}\,(-D_y)^k, \end{cases}$$

alors nous avons

$$(4.14)\quad A(D_y) + \lambda = A_-^\lambda(D_y)\,A_+^\lambda(D_y) = \{A_+^\lambda(\mathcal{D}_y)\}^\star A_+^\lambda(\mathcal{D}_y).$$

Désignons par $(\quad,\quad)$ le produit scalaire dans $L^2(\mathbf{R}_+^1)$ et par $\|\quad\|$ la norme correspondante.

Nous définissons

$$(4.15)\quad \begin{cases} \mathcal{B}_j^{\mathrm{I}}(\lambda)[u, v] = ((A+\lambda)\,u, v) - (A_+^\lambda u, A_+^\lambda v), \\ \mathcal{B}_j(\lambda)[u, v] = \frac{1}{2}\{((A+\lambda)\,u, v) + (u, (A+\lambda)\,v)\} - (A_+^\lambda u, A_+^\lambda v) \\ \qquad\qquad \text{pour } u, v \in \mathcal{D}[A] \quad \text{et pour} \quad \lambda \geqq 0. \end{cases}$$

$\mathcal{B}_j^{\mathrm{I}}(\lambda)$ et $\mathcal{B}_j(\lambda)$ sont des formes bilinéaires définies dans $\mathcal{D}[A]$, plus précisément, ce sont des formes bilinéaires des traces

$$(4.16)\quad \underset{(j)}{\mathbf{u}} \equiv \begin{bmatrix} (-D_y)^{m-1} u(0) \\ \cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots \\ (-D_y)^{m-j} u(0) \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \underset{(j)}{\mathbf{v}} = \begin{bmatrix} (-D_y)^{m-1} v(0) \\ \cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots \\ (-D_y)^{m-j} v(0) \end{bmatrix}.$$

Les formules (4.13), (4.14), (4.15) et l'intégration par parties nous donnent un

Lemme 4.1. — *Les formes bilinéaires $\mathcal{B}_j^{\mathrm{I}}(\lambda)[u, v]$ et $\mathcal{B}_j(\lambda)[u, v]$ sont définies aussi par des matrices carrées d'ordre j, encore notées par $\mathcal{B}^{\mathrm{I}}(\lambda)$ et par $\mathcal{B}_j(\lambda)$ respectivement, comme suit :*

$$(4.17)\quad \begin{cases} \mathcal{B}_j^{\mathrm{I}}(\lambda)[u, v] = \underset{(j)}{\mathbf{v}}^\star . \mathcal{B}_j^{\mathrm{I}}(\lambda) . \underset{(j)}{\mathbf{u}}, \\ \mathcal{B}_j(\lambda)[u, v] = \underset{(j)}{\mathbf{v}}^\star . \mathcal{B}_j(\lambda) . \underset{(j)}{\mathbf{u}}; \end{cases}$$

où

$$(4.18)\quad \begin{cases} \mathcal{B}_j^{\mathrm{I}}(\lambda) = \frac{1}{i}\{\varkappa_j(\lambda) + ((\alpha))_j(\beta)_j\}, \\ \mathcal{B}_j(\lambda) = \frac{1}{2}\{\mathcal{B}_j^{\mathrm{I}}(\lambda) + \mathcal{B}_j^{\mathrm{I}}(\lambda)^\star\} \\ \qquad = \frac{1}{2i}\{\varkappa_j(\lambda) - \varkappa_j(\lambda)^\star + ((\alpha))_j(\beta)_j - (\beta)_j^\star((\alpha))_j\}, \end{cases}$$

$$(4.19)\quad \varkappa_j(\lambda) = \begin{bmatrix} \varkappa_{11}(\lambda) & \cdots & \varkappa_{1j}(\lambda) \\ \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots \\ \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots \\ \varkappa_{j1}(\lambda) & \cdots & \varkappa_{jj}(\lambda) \end{bmatrix},$$

avec

$$\varkappa_{pq}(\lambda) = \sum_{t=0}^{p-1} s_{q+t}(\lambda)\,\overline{s_{p-1-t}(\lambda)} \qquad \textit{pour} \quad 1 \leqq p,\ q \leqq j. \tag{4.20}$$

COROLLAIRE 4.1. — (i) *$\mathcal{B}_j(\lambda)$ est une matrice hermitienne d'ordre j;*

(ii) *Si l'on a l'hypothèse [h. a-a], nous avons $\mathcal{B}_j(\lambda) = \mathcal{B}^{\mathrm{I}}_j(\lambda)$;*

(iii) *En particulier, si l'on pose $u = v$ dans (4.15), on obtient*

$$\mathcal{R}e\,((\mathrm{A}+\lambda)\,u,\,u) = \|\mathrm{A}^{\lambda}_{+}u\|^2 + \underset{(j)}{\mathbf{u}}^{\star}.\mathcal{B}_j(\lambda).\underset{(j)}{\mathbf{u}} \qquad \textit{pour} \quad u \in \mathcal{D}[\mathrm{A}]. \tag{4.21}$$

Ensuite, nous voulons chercher quelques propriétés fondamentales des matrices $\mathcal{B}^{\mathrm{I}}_j(\lambda)$ et $\mathcal{B}_j(\lambda)$ pour $\lambda \geqq 0$. Surtout, nous nous sommes intéressés si elles sont définies positives. L'introduction de ces matrices semble très artificielle, parce que, comme on a déjà vu dans le paragraphe 1, l'opérateur A^{λ}_{+} devient, si $n \geqq 2$, un opérateur différentiel par rapport à x_n mais à coefficients des opérateurs pseudo-différentiels par rapport aux variables tangentielles x'. Pourtant, dans le cas $n = 1$ d'une seule variable $y > 0$ dont nous nous occupons maintenant, la matrice $\mathcal{B}^{\mathrm{I}}_j(\lambda)$ est liée avec la matrice $\Delta_j(\lambda)$ définie par (4.9) d'une manière très précise. Il y a une analogie aussi dans le cas $n \geqq 2$. Et cette liaison entre $\mathcal{B}^{\mathrm{I}}_j(\lambda)$ et $\Delta_j(\lambda)$ nous donnera une information favorable sur la matrice $\mathcal{B}_j(\lambda)$. Et nous verrons ce que signifie l'hypothèse $[\widetilde{\mathrm{H}.3}]$ qui va remplacer [H.3].

Maintenant, nous avons besoin d'introduire encore une matrice carrée d'ordre j : Posons

$$\mathrm{S}_j(\lambda) = \begin{bmatrix} s_0(\lambda) & s_1(\lambda) & \ldots & s_{j-1}(\lambda) \\ 0 & s_0(\lambda) & \ldots & s_{j-2}(\lambda) \\ \cdot & \cdots & \ldots & \cdots \\ 0 & 0 & \ldots & s_0(\lambda) \end{bmatrix}. \tag{4.22}$$

Alors, nous avons un

LEMME 4.2. — *La matrice $\mathcal{B}^{\mathrm{I}}_j(\lambda)$ est liée avec $\Delta_j(\lambda)$ comme suit :*

$$\Delta_j(\lambda) = -i\,((\alpha))_j\,\mathcal{B}^{\mathrm{I}}_j(\lambda)\,\mathrm{S}_j(\lambda)^{-1}. \tag{4.23}$$

Preuve. — Nous allons démontrer la relation

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_\lambda} p_\lambda(z)^{-1}\,\{z^j\,((\alpha))_j + \varkappa_j(\lambda)\}\,\varphi_j(z)\,dz = 0. \tag{4.24}$$

Pour cela, introduisons $(m+1)$-polynômes auxiliaires et une matrice :

$$q_{m-k}(z) = \sum_{h=k}^{m} s_{m-h}(\lambda)\,z^{h-k} \qquad \text{pour} \quad 0 \leqq k \leqq m; \tag{4.25}$$

$$\mathrm{S}'_m(\lambda) = \begin{bmatrix} s_m(\lambda) & 0 & \ldots & 0 \\ s_{m-1}(\lambda) & s_m(\lambda) & \cdot & \cdot \\ & & \cdot & 0 \\ s_1(\lambda) & \cdots & \ldots & s_m(\lambda) \end{bmatrix}.$$

Alors, nous avons

$$S_j(\lambda)\,\varphi_j(z) = \begin{bmatrix} q_{m-1}(z) & zq_{m-1}(z) & \dots & z^{j-1}q_{m-1}(z) \\ q_{m-2}(z) & zq_{m-2}(z) & \dots & z^{j-1}q_{m-2}(z) \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots & \dots\dots \\ q_{m-j}(z) & zq_{m-j}(z) & \dots & z^{j-1}q_{m-j}(z) \end{bmatrix}$$

et

$$z^j S_j(\lambda)\,\varphi_j(z) = \begin{bmatrix} z^{j-1} & z^j & \dots & z^{2j-1} \\ z^{j-2} & z^{j-1} & \dots & z^{2j-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & z & \dots & z^{j-1} \end{bmatrix} p_\lambda(z)$$

$$- \underbrace{\begin{bmatrix} \bigcirc & \boxed{I_j} \end{bmatrix}}_{m} S'_m\,\varphi_m(z) \left.\begin{bmatrix} I_j \\ \hline \bigcirc \end{bmatrix}\right\} m.$$

Nous utilisons les relations

$$(4.26) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{\Gamma_\lambda} p_\lambda(z)^{-1} z^{k-1} q_{m-l}(z)\,dz = \begin{cases} 1 & \text{si } k=l, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \\ \qquad\qquad \text{pour tous } 1 \leqq k,\ l \leqq m. \end{array} \right.$$

Donc, nous avons

$$(4.27) \qquad \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_\lambda} p_\lambda(z)^{-1}\varphi_l(z)\,dz = S_l(\lambda)^{-1} \qquad (l=1, \dots, m);$$

et, de plus,

$$(4.27)' \qquad \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_\lambda} p_\lambda(z)^{-1} z^j \varphi_j(z)\,dz = -S_j(\lambda)^{-1} S'_j(\lambda)\, S_j(\lambda)^{-1},$$

où nous avons posé

$$S'_j(\lambda) = \begin{bmatrix} s_j(\lambda) & s_{j+1}(\lambda) & \dots & s_{2j-1}(\lambda) \\ s_{j-1}(\lambda) & s_j(\lambda) & \dots & s_{2j-2}(\lambda) \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots & \dots\dots \\ s_1(\lambda) & s_2(\lambda) & \dots & s_j(\lambda) \end{bmatrix},$$

avec $s_k(\lambda) = 0$ si $k > m$.

Donc, pour voir (4.24), il faut seulement vérifier

$$(4.28) \qquad \varkappa_j(\lambda) = ((\alpha))_j S_j(\lambda)^{-1} S'_j(\lambda).$$

Pour le voir, il suffit de poser

$$S_j(\lambda)^{-1} = \begin{bmatrix} \sigma_0(\lambda) & \sigma_1(\lambda) & \dots & \sigma_{j-1}(\lambda) \\ & \sigma_0(\lambda) & \dots & \sigma_{j-2}(\lambda) \\ & & \ddots & \vdots \\ & \bigcirc & & \sigma_0(\lambda) \end{bmatrix};$$

avec

$$\sigma_0(\lambda) = 1, \qquad \sum_{p=0}^{l} \sigma_p(\lambda)\, s_{l-p}(\lambda) = 0 \qquad \text{pour} \quad 1 \leqq l \leqq j-1.$$

Alors, un calcul direct nous donne (4.28). Nous avons donc

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_\lambda} p_\lambda(z)^{-1} z^j \varphi_j(z)\, dz = -((\alpha))_j^{-1} \varkappa_j(\lambda)\, S_j(\lambda)^{-1}. \tag{4.29}$$

(4.27), (4.29) et (4.9) donnent enfin (4.23).

C. Q. F. D.

La première importance de la relation (4.23) est la suivante : Les matrices $((\alpha))_j$ et $S_j(\lambda)$ sont toujours inversibles [$\text{dét}((\alpha))_j = \pm 1$ et $\text{dét}\, S_j(\lambda) = 1$]. Donc la matrice $\mathcal{B}^{\mathrm{I}}_j(\lambda)$ est toujours inversible pour tout $\lambda \geqq 0$, car $\Delta_j(\lambda)$ l'est par l'hypothèse [*h*.3]. Donc, si l'hypothèse [*h. a-a*] a lieu, la matrice $\mathcal{B}_j(\lambda)$ elle-même, qui est égale à $\mathcal{B}^{\mathrm{I}}_j(\lambda)$, est toujours inversible.

Ensuite, nous considérons un système au bord particulier

$$\tilde{A} = (-D_y)^{2m} + 1; \qquad \tilde{B}_r = (-D_y)^r, \quad r \in R_j. \tag{4.30}$$

Alors, les $(\alpha)_j$ et $(\beta)_j$ correspondant à ce système $\{\tilde{A}; \{\tilde{B}_r\}_{r\in R_j}\}$ sont 0. Nous désignons par $\tilde{\varkappa}_j$ la matrice $\varkappa_j(0)$ correspondant à ce système. Nous avons un lemme très important :

Lemme 4.3. — *La matrice $\frac{1}{i}\tilde{\varkappa}_j$ est strictement définie positive.*

L'Appendice sera consacré à la démonstration de ce lemme. Nous l'admettons pour le moment, et démontrons le

Lemme 4.4. — *Étant donné un système au bord $\{A; \{B_r\}_{r\in R_j}\}$ satisfaisant à [h.1] et à [h.2], il existe un $\lambda_0 \geqq 0$ tel que la matrice $\mathcal{B}_j(\lambda)$ soit strictement définie positive pour tout $\lambda \geqq \lambda_0$.*

Preuve. — Posons

$$\lambda' = (\lambda + 1)^{\frac{1}{2m}} > 0; \tag{4.31}$$

$$\left\{\begin{array}{l} \alpha'_k(\lambda) = \left\{\begin{array}{ll} (\alpha_0 + \lambda)\lambda'^{-2m} & \text{si } k = 0, \\ \alpha_k \lambda'^{k-2m} & \text{si } k = 1, \ldots, 2m; \end{array}\right. \\ \tau'_l(\lambda) = \tau_l(\lambda)\lambda'^{-1} \qquad \text{pour } l = 1, \ldots, m; \\ s'_k(\lambda) = s_k(\lambda)\lambda'^{-k} \qquad \text{pour } k = 0, \ldots, m. \end{array}\right. \tag{4.32}$$

Alors, les $\alpha'_k(\lambda)$, $\tau'_l(\lambda)$ et les $s'_k(\lambda)$ sont des fonctions continues de $\lambda \geqq 0$, et $\{\tau'_l(\lambda)\}_{l=1}^m$ tendent vers les racines de l'équation $z^{2m}+1=0$ avec les parties imaginaires positives, lorsque $\lambda \to +\infty$. Posons, de plus,

$$(4.33) \qquad \Lambda_j = \begin{bmatrix} \lambda'^{-1} & & & \\ & \lambda'^{-2} & & \bigcirc \\ & & \ddots & \\ \bigcirc & & & \lambda'^{-j} \end{bmatrix};$$

$$(4.34) \qquad \begin{cases} \varkappa'_j(\lambda) = \lambda' \Lambda_j \varkappa_j(\lambda) \Lambda_j, \\ \mathcal{B}'_j(\lambda) = \lambda' \Lambda_j \mathcal{B}_j(\lambda) \Lambda_j, \qquad \mathcal{B}^{\mathrm{I}\prime}_j(\lambda) = \lambda' \Lambda_j \mathcal{B}^{\mathrm{I}}_j(\lambda) \Lambda_j. \end{cases}$$

Nous avons donc

$$(4.35) \qquad \mathcal{B}'_j(\lambda) = \frac{1}{i}\tilde{\varkappa}_j + \frac{1}{2i}\{\varkappa'_j(\lambda) - \tilde{\varkappa}_j\} - \frac{1}{2i}\{\varkappa'_j(\lambda) - \tilde{\varkappa}_j\}^* + \lambda' \Lambda_j Q_j \Lambda_j,$$

où

$$(4.36) \qquad Q_j = \frac{1}{2i}\{((\alpha))_j(\beta)_j - (\beta)_j^*((\alpha))_j\},$$

et nous avons utilisé la relation $\tilde{\varkappa}_j + \tilde{\varkappa}_j^* = 0$. La différence $\varkappa'_j(\lambda) - \tilde{\varkappa}_j$ et $\lambda' \Lambda_j Q_j \Lambda_j$ tendent vers zéro, lorsque $\lambda \to +\infty$. Par le lemme précédent, nous pouvons choisir un $\varepsilon > 0$ tel que $\frac{1}{i}\tilde{\varkappa}_j - \varepsilon \mathrm{I}_j$ soit strictement définie positive. Et choisissons un $\lambda_0 \geqq 0$ tel que $\left\| \mathcal{B}'_j(\lambda) - \frac{1}{i}\tilde{\varkappa}_j \right\|$ soit majorée par ε pour tout $\lambda \geqq \lambda_0$. Donc la matrice $\mathcal{B}'_j(\lambda)$ est strictement définie positive pour tout $\lambda \geqq \lambda_0$. Par conséquent, $\mathcal{B}_j(\lambda) = \lambda'^{-1}\Lambda_j^{-1}\mathcal{B}'_j(\lambda)\Lambda_j^{-1}$ l'est aussi.

C. Q. F. D.

Nous posons maintenant, pour $\lambda \geqq 0$,

$$(4.37) \qquad \mathrm{I}_j(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda' & & & \\ & \lambda'^3 & & \bigcirc \\ & & \ddots & \\ \bigcirc & & & \lambda'^{2j-1} \end{bmatrix} = \lambda'^{-1}\Lambda_j^{-2}, \qquad \lambda' = (\lambda+1)^{\frac{1}{2m}}.$$

Alors, nous avons vu, dans le lemme 4.4, qu'il existe deux constantes $c > 0$ et $\lambda_0 \geqq 0$ telles que la matrice $\mathcal{B}_j(\lambda) - c\,\mathrm{I}_j(\lambda)$ soit toujours strictement positive pour $\lambda \geqq \lambda_0$.

Alors, notre nouvelle hypothèse est la suivante :

[$\tilde{h}$.3] Il existe une constante $c > 0$ indépendante de $\lambda \geqq 0$ telle que la matrice $\mathcal{B}_j(\lambda) - c\mathrm{I}_j(\lambda)$ soit définie positive pour tout $\lambda \geqq 0$.

Essentiellement, c'est une hypothèse sur $\mathcal{B}_j(\lambda)$ pour petit λ.

Nous avons le

LEMME 4.5. — *L'hypothèse* $[\widetilde{h.3}]$ *implique l'hypothèse* $[h.3]$.

Preuve. — Soit $\mathbf{C} \in \mathbf{C}^j$ un vecteur quelconque $\neq 0$. Alors, nous avons

$$\mathbf{C}^* \mathcal{B}_j(\lambda).\mathbf{C} = \mathcal{R}e[\mathbf{C}^*.\mathcal{B}^{\mathrm{I}}_j(\lambda).\mathbf{C}] > 0 \quad \text{pour tout } \lambda \geqq 0,$$

grâce à $[\widetilde{h.3}]$. Donc, $\mathcal{B}^{\mathrm{I}}_j(\lambda)$ est toujours inversible pour tout $\lambda \geqq 0$, donc, par (4.23), $\Delta_j(\lambda)$ l'est aussi. (La preuve du lemme 1.2 est essentiellement finie.)

C. Q. F. D.

Nous remarquons encore que les hypothèses $[h.3]$ et $[h.\ a\text{-}a]$ impliquent, grâce au corollaire 4.1, $[\widetilde{h.3}]$. Donc, sous l'hypothèse $[h.\ a\text{-}a]$, deux hypothèses $[h.3]$ et $[\widetilde{h.3}]$ sont équivalentes.

Voici une estimation *a priori* :

LEMME 4.6. — *Sous les hypothèses* $[h.1]$, $[h.2]$, $[h.4]$ et $[\widetilde{h.3}]$, *nous avons la majoration*

$$(4.38) \qquad \| u \|^2_{\mathrm{H}^m(\mathbf{R}^1_+)} \leqq \mathrm{C}(\lambda)\, \{ \| \mathrm{A}^\lambda_+ u \|^2 + \mathcal{B}_j(\lambda)\,[u,\, u] \} \quad \text{pour tout } u \in \mathcal{D}[\mathrm{A}],$$

avec une constante $\mathrm{C}(\lambda) > 0$ *pour tout* $\lambda \geqq 0$ *indépendante de* u.

Preuve. — Comme la situation est la même pour tout $\lambda \geqq 0$, il suffit de démontrer, pour $\lambda = 0$, l'inégalité suivante :

$$(4.39) \qquad \| u \|^2_{\mathrm{H}^m(\mathbf{R}^1_+)} \leqq \mathrm{C}_0 \left\{ \| \mathrm{A}_+ u \|^2 + \sum_{l=1}^{j} | (-\mathrm{D}_y)^{m-l} u(0) |^2 \right\} \qquad \text{pour tout} \quad u \in \mathcal{D}[\mathrm{A}],$$

où nous avons posé $\mathrm{A}^0_+ = \mathrm{A}_+$.

Soit $\{ \varphi_r \}_{r \in \mathrm{R}_j} \in \mathbf{C}^m$ un vecteur quelconque donné. Alors, il existe une seule solution $\mathrm{U}_1(y) \in \mathrm{H}^{2m}(\mathbf{R}^1_+)$ du problème aux limites :

$$(4.40) \qquad \mathrm{A}_+ \mathrm{U}_1(y) = 0 \qquad \text{pour } y > 0; \qquad \mathrm{B}_r \mathrm{U}_1(0) = \varphi_r \quad \text{pour } r \in \mathrm{R}_j,$$

avec l'estimation

$$\| \mathrm{U}_1 \|^2_{\mathrm{H}^m(\mathbf{R}^1_+)} \leqq \mathrm{Cte} \sum_{r \in \mathrm{R}} | \varphi_r |^2.$$

Soit, d'autre part, $u \in \mathcal{D}[\mathrm{A}]$ et posons

$$f(y) = \mathrm{A}_+(\mathrm{D}_y)\, u(y) \qquad \text{pour} \quad y > 0.$$

Alors, $f(y) \in \mathrm{H}^m(\mathbf{R}^1_+)$. Soit $f_1(y) \in \mathrm{H}^m(\mathbf{R}^1)$ un prolongement de $f(y)$ à $y \leqq 0$, c'est-à-dire, $f_1(y) = f(y)$, si $y > 0$ et supposons que

$$\| f_1(y) \|_{\mathrm{H}^m(\mathbf{R}^1)} \leqq \mathrm{Cte}\, \| f(y) \|^2_{\mathrm{H}^m(\mathbf{R}^1_+)}$$

Et posons, de plus,

$$\hat{f}_1(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \| f_1(y)\, e^{iy\xi}\, dy, \qquad \xi \in \mathbf{R}^1,$$

$$v(y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} p_0(\xi)^{-1} \hat{f}_1(\xi)\, e^{-iy\xi}\, d\xi.$$

Alors nous voyons que $v(y) \in \mathrm{H}^{2m}(\mathbf{R}^1)$,

$$\mathrm{A}_+ v(y) = f_1(y) = \mathrm{A}_+ u(y) \qquad \text{pour} \quad y > 0,$$

et que

$$\| v \|^2_{\mathrm{H}^m(\mathbf{R}^1_+)} + \sum_{r \in \mathrm{R}_j} | \mathrm{B}_r u(0) |^2 \leqq \mathrm{Cte} \left(\| \mathrm{A}_+ u\ (y) \|^2 + \sum_{l=1}^{j} | (-\mathrm{D}_y)^{m-l} u(0) |^2 \right).$$

Nous prenons alors la solution $\mathrm{U}_1(y)$ du problème (4.40) avec $\varphi_r = \mathrm{B}_r(0)$ ($r \in \mathrm{R}_j$). On a, par l'unicité de la solution du problème

$$\mathrm{A}_+ u(y) = f(y), \qquad \mathrm{B}_r u(0) = 0 \qquad (r \in \mathrm{R}_j)$$

dans l'espace $\mathcal{D}[\mathrm{A}]$,

$$u(y) = v(y) - \mathrm{U}_1(y),$$

d'où l'on a l'estimation (4.39).

C. Q. F. D.

Nous avons ainsi démontré une inégalité suivante :

$$(4.41) \qquad \mathcal{R}e\,(\mathrm{A}u,\, u) \geqq \gamma \| u \|^2_{\mathrm{H}^m(\mathbf{R}^1_+)} \quad \text{pour tout } u \in \mathcal{D}[\mathrm{A}],$$

avec une constante $\gamma > 0$ indépendante de u. Cette inégalité joue le même rôle que celui de (3.9), et nous pouvons démontrer la

Proposition 4.1. — *Un système au bord* $\{ \mathrm{A};\, \{ \mathrm{B}_r \}_{r \in \mathrm{R}_j} \}$ *défini par* (4.1) *et par* (4.2) *satisfaisant aux hypothèses* $[h.1]$, $[h.2]$, $[\widetilde{h.3}]$ *et* $[h.4]$ *est stablement variationnel. Et, de plus, étant donné un opérateur quelconque* K *d'ordre* $\leqq 2m - 1$ *à coefficients de classe* $\mathcal{B}(\mathcal{R}^1_+)$, *il existe des constantes* β *réelle et* γ *positive telles que*

$$\gamma^{-1} \| u \|^2_{\mathrm{H}^m(\mathbf{R}^1_+)} \leqq \mathcal{R}e\,((\mathrm{A} + \mathrm{K} + \beta)\, u,\, u) \leqq \gamma \| u \|^2_{\mathrm{H}^m(\mathbf{R}^1_+)} \qquad \text{pour tout} \quad u \in \mathcal{D}[\mathrm{A}].$$

Ensuite, nous remarquons une chose sur le système adjoint au système défini par (4.1) et par (4.2) avec $\mathrm{R} = \mathrm{R}_j$ ($1 \leqq j \leqq m$). La condition au bord adjoint à (4.2) par rapport à A s'écrit également

$$(4.42) \quad \mathrm{B}'_r u(0) \equiv (-\mathrm{D}_y)^r u(0) - \sum_{\substack{\rho < r \\ \rho \in \mathrm{S}}} \beta'_{r\rho} (-\mathrm{D}_y)^\rho u(0) = 0 \qquad \text{pour tout} \quad r \in \mathrm{R} = \mathrm{R}_j.$$

où les $\{ \beta'_{r\rho} \}$ doivent remplir les relations entre les α_k et les $\{ \beta_{r\rho} \}$

$$(4.43) \qquad (\alpha)_j + ((\alpha))_j (\beta)_j + (\beta')^*_j ((\alpha))_j = 0.$$

[*voir* la formule (3.30)].

Alors, nous avons

$$(4.44)\qquad ((\alpha))_j(\beta)_j - (\beta)_j^*((\alpha))_j = ((\alpha))_j(\beta')_j - (\beta')_j^*((\alpha))_j,$$

car $(\alpha_j^*) = (\alpha)_j$. Donc, si l'on construit la matrice $\mathcal{B}_j(\lambda)$ pour le système adjoint $\{ A^\star; \{ B'_r \}_{r\in R_j} \}$ $(A^\star = A)$, elle est égale à celle du $\{ A; \{ B_r \}_{r\in R_j} \}$. Donc l'hypothèse $[\widetilde{h.3}]$ est la même pour l'adjoint. Le lemme 1.3 est ainsi essentiellement démontré.

5. Démonstration du théorème 4 et quelques exemples.

Nous revenons maintenant au système au bord $\{ A; \{ B_r \}_{r\in R_j} \}$ défini par (1.7) et par (1.8) dans le demi-espace $\mathcal{R}_+^n$:

$$(5.1)\qquad A = \sum_{k=0}^{2m} \alpha_k(D_{x'})(-D_{x_n})^k;$$

$$(5.2)\qquad B_r = (-D_{x_n})^r - \sum_{\substack{\rho<r\\ \rho\in S_j}} \beta_{r\rho}(D_{x'})(-D_{x_n})^\rho \qquad (r\in R_j),$$

où les coefficients $(\alpha_k D_{x'})$ satisfont aux hypothèses

$$(5.3)\qquad \alpha_{2m}(D_{x'}) \equiv 1;$$

(5.4) $\alpha_k(D_{x'})$: polynôme en $D_{x'}$ homogène de degré $(2m-k)$ à coefficents constants réels;

(5.5) $\beta_{r\rho}(D_{x'})$: polynôme en $D_{x'}$ homogène de degré $(r-\rho)$ à coefficients constants.

Les définitions des opérateurs A_+^λ et A_-^λ ont été données par (1.16), et nous avons défini

$$(5.6)\qquad \begin{cases} \mathcal{B}_j(\lambda)[u, v] = \frac{1}{2}\{ ((A+\lambda)u, v) + (u, (A+\lambda)v) \} - (A_+^\lambda u, A_+^\lambda v) \\ \text{pour } u \text{ et } v \in \mathcal{D}[A] \text{ et pour } \lambda \geqq 0. \end{cases}$$

Nous définissons également

$$(5.7)\qquad \mathcal{B}_j^{\mathrm{I}}(\lambda)[u, v] = ((A+\lambda)u, v) - (A_+^\lambda u, A_+^\lambda v) \qquad \text{pour } u, v\in \mathcal{D}[A].$$

La définition de la matrice $\mathcal{B}_j(\xi', \lambda)$ attachée à la forme $\mathcal{B}_j(\lambda)[u, v]$ a été donnée par (1.22). Nous pouvons définir également la matrice $\mathcal{B}_j^{\mathrm{I}}(\xi', \lambda)$ attachée à $\mathcal{B}_j^{\mathrm{I}}(\lambda)[u, v]$. $\mathcal{B}_j(\xi', \lambda)$ et $\mathcal{B}_j^{\mathrm{I}}(\xi', \lambda)$ ont des formes analogues à celles de $\mathcal{B}_j(\lambda)$ et de $\mathcal{B}_j^{\mathrm{I}}(\lambda)$ respectivement [*voir* (4.18)]. La définition de la matrice $\Delta_j(\xi', \lambda)$ est aussi analogue à (4.9), où nous remarquons l'homogénéité :

$$(5.8)\qquad \begin{cases} (\Delta_j(t\xi', t^{2m}\lambda))_{p,q} = t^{q-p+j}(\Delta_j(\xi', \lambda))_{p,q}, \\ \text{pour} \quad 1 \leqq p,\, q \leqq j, \quad \text{et pour} \quad t \geqq 0. \end{cases}$$

Toutes les autres constructions sont analogues à celles du paragraphe 4.

L'hypothèse [H.3] s'écrit

(5.9) La matrice $\Delta_j(\xi' \lambda)$ soit toujours inversible pour tout (ξ', λ) tel que $\xi' \in \mathbf{R}^{n-1}$, $\lambda \geqq 0$ et que $|\xi'|^{2m} + \lambda > 0$.

Preuve du lemme 1.2. — Un raisonnement analogue au lemme 4.5.

Preuve du lemme 1.3. — *Voir* la remarque finale du paragraphe 4.

Démonstration du théorème 4. — Dans le paragraphe 4, l'hypothèse $[\widetilde{h.3}]$ nous a donné l'inégalité (4.41). Nous supposons maintenant $[\widetilde{\mathrm{H}.3}]$ au lieu de $[\widetilde{h.3}]$. En tenant compte de l'homogénéité en ξ', nous pouvons déduire de (4.41)

$$(5.10)\qquad \mathcal{R}e(\mathrm{A}u(x), u(x))_{\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^n_+)} \geqq \mathrm{C}_1 \sum_{|\nu|=m} \| \mathrm{D}^\nu_x u(x) \|^2_{\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^n_+)} \qquad \text{pour} \quad u \in \mathcal{D}[\mathrm{A}],$$

où C_1 est une constante positive indépendante de u. Nous fixons maintenant un $\beta > 0$ quelconque et écrivons $\mathrm{A} + \beta \mathrm{I} = \mathrm{A}_\beta$. Alors, nous avons

$$(5.11)\qquad \mathcal{R}e(\mathrm{A}_\beta u, u)_{\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^n_+)} \geqq \mathrm{C}_2 \| u \|^2_{\mathrm{H}^m(\mathbf{R}^n_+)} \quad \text{pour tout } u \in \mathcal{D}[\mathrm{A}],$$

avec une constante $\mathrm{C}_2 > 0$ indépendante de u. Cette inégalité a la même forme que (3.9). On en déduit le théorème 4 par le même raisonnement à la démonstration du théorème 3. La majoration de $\mathcal{R}e(\mathrm{A}_\beta u, u)_{\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^n_+)}$ par $\| \mathrm{U} \|^2_{\mathrm{H}^m(\mathbf{R}^n_+)}$ est obtenue par une estimation directe.

C. Q. F. D.

Nous avons donné ci-dessus un critérium pour la variationalité stable. C'était qu'il faut vérifier (sous les hypothèses [H.1], [H.2] et [H.4] essentiellement l'hypothèse $[\widetilde{\mathrm{H}.3}]$. Mais malheureusement, c'est une hypothèse assez compliquée. Dans la suite, je me borne à citer quelques exemples.

Exemple 1 : *Le cas où $j = 1$ et $m \geqq 1$ général.* — La matrice $\mathcal{B}_1(\xi', \lambda)$ en question devient scalaire, c'est-à-dire

$$(5.12)\qquad \mathcal{B}_1(\xi', \lambda) = \mathcal{I}m\,\mathrm{S}_1(\xi', \lambda) + \mathcal{I}m\,\beta_{m,m-1}(\xi').$$

où

$$(5.13)\qquad s_1(\xi', \lambda) = \sum_{l=1}^{m} \tau_l(\xi', \lambda) \quad [\textit{voir } (1.14)]$$

Comme $\beta_{m,m-1}(\xi')$ est un polynôme homogène de degré 1, nous pouvons l'exprimer comme

$$\beta_{m,m-1}(\xi') = \sum_{p=1}^{n-1} c_p \xi_p, \qquad \text{avec} \quad \{c_p\}_{p=1}^{n-1} \in \mathbf{C}^{n-1}. \tag{5.14}$$

Posons

$$\omega_p = \frac{\xi_p}{|\xi'|} \quad (p = 1, \ldots, n-1), \qquad \omega' = (\omega_1, \ldots, \omega_{n-1}), \tag{5.15}$$

alors nous avons $|\omega'| = 1$. Donc, pour que $\mathcal{B}_1(\omega', \lambda)$ soit positive pour tout ω' et pour tout $\lambda \geqq 0$, il faut et il suffit que

$$|\mathcal{I}m\, c'| < \inf_{\substack{\lambda \geqq 0 \\ |\omega'| = 1}} \{\mathcal{I}m\, \mathrm{S}_1(\omega', \lambda)\}, \qquad \text{où} \quad \mathcal{I}m\, c' = (\mathcal{I}m\, c_1, \ldots, \mathcal{I}m\, c_{n-1}). \tag{5.16}$$

Ces conditions au bord vérifient l'hypothèse [H. *a-a*], si et seulement si $\beta_{m,m-1}(\xi') + \frac{1}{2}\alpha_{2m-1}(\xi')$ sont à coefficients purement imaginaires.

Exemple 2 : *Le cas où* $j = m = 2$, $A = (-\Delta)^2$. — En utilisant encore ω' au lieu de ξ', nous avons

$$\left\{\begin{aligned} \tau_1(\omega', \lambda) &= \tau_1(\lambda) = r_\lambda e^{\left(\frac{\pi}{2} + \theta_\lambda\right)i}, \\ \tau_2(\omega', \lambda) &= \tau_2(\lambda) = r_\lambda e^{\left(\frac{\pi}{2} - \theta_\lambda\right)i}, \end{aligned}\right. \tag{5.17}$$

où

$$r_\lambda = \sqrt[4]{1+\lambda}; \qquad e^{2\theta_\lambda i} = \frac{1}{r_\lambda^2} + i\frac{\sqrt{\lambda}}{r_\lambda^2}, \qquad 0 \leqq \theta_\lambda < \frac{\pi}{4}. \tag{5.18}$$

Posons

$$\left\{\begin{aligned} \mathrm{Q}_2(\omega') &= \frac{1}{2i}\{((\alpha))_2((\beta(\omega'))_2 - (\beta(\omega'))_2^*((\alpha))_2\}, \qquad \text{où} \quad ((\alpha))_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}; \\ \eta_2(\omega', \lambda) &= \frac{1}{2i}\{\varkappa_2(\omega', \lambda) - \varkappa_2(\omega', \lambda)^*\} = \eta_2(\lambda). \end{aligned}\right. \tag{5.19}$$

Alors, nous avons

$$\mathcal{B}_2(\omega', \lambda) = \eta_2(\lambda) + \mathrm{Q}_2(\omega'); \tag{5.20}$$

$$\eta_2(\lambda) = 2r_\lambda \cos\theta_\lambda \begin{bmatrix} 1 & ir_\lambda \cos\theta_\lambda \\ -ir_\lambda\cos\theta_\lambda & r_\lambda^2 \end{bmatrix}; \tag{5.21}$$

$$\mathrm{Q}_2(\omega', \lambda) = \begin{bmatrix} q_1(\omega') & q_2'(\omega') + iq_2''(\omega') \\ q_2'(\omega') - iq_2''(\omega') & q_3(\omega') \end{bmatrix}, \tag{5.22}$$

avec

$$\left\{\begin{array}{ll} q_1(\omega') : & \text{polynôme en } \omega' \text{ homogène de degré 1 à coefficients réels;} \\ q_2'(\omega') \text{ et } q_2''(\omega') : & \text{polynômes en } \omega' \text{ homogènes de degré 2 à coefficients réels;} \\ q_3(\omega') : & \text{polynôme en } \omega' \text{ homogène de degré 3 à coefficients réels.} \end{array}\right. \tag{5.23}$$

Pour que $\mathcal{B}_2(\omega', \lambda)$ soit définie positive pour tout $|\omega'| = 1$ et $\lambda \geqq 0$, il faut et il suffit que

$$|q_1(\omega')| < 2, \quad |q_3(\omega')| < 2 \quad \text{pour tout } |\omega'| = 1 \tag{5.24}$$

et que, en posant $y = \sqrt{2(1 + r_\lambda^2)}$,

$$\begin{cases} y^4 + 2q_1(\omega')y^3 - 4\{1 + q_2''(\omega')\}y^2 + 4\{q_3(\omega') - q_1(\omega')\}y \\ \quad > 4\{q_2'(\omega')^2 + q_2''(\omega')^2 - q_1(\omega')^2 q_3(\omega')\} \\ \qquad \text{pour tout } |\omega'| = 1 \text{ et pour tout } y \geqq 2. \end{cases} \tag{5.25}$$

Il suffit donc, de prendre, par exemple,

$$q_1(\omega') \equiv q_3(\omega') \equiv q_2'(\omega') \equiv 0 > q_2''(\omega') > -4 \quad \text{pour tout } |\omega'| = 1.$$

Si une telle matrice $Q_2(\omega')$ est obtenue, toutes les conditions au bord définies par

$$\begin{bmatrix} \beta_{m+1,m-1}(\omega') & \beta_{m+1,m-2}(\omega') \\ \beta_{m,m-1}(\omega') & \beta_{m,m-2}(\omega') \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} P_2(\omega') - \begin{bmatrix} \sum_{p=1}^{n-1} \omega_p^2 & 0 \\ 0 & \sum_{p=1}^{n-1} \omega_p^2 \end{bmatrix}, \tag{5.26}$$

remplissent l'hypothèse $[\widetilde{\text{H}.3}]$, où $P_2(\omega')$ est une matrice à éléments polynômes en ω' satisfaisant

$$\frac{1}{2i}\{P_2(\omega') - P_2(\omega')^*\} = Q_2(\omega'). \tag{5.27}$$

(Évidemment (p, q)-élément de $P_2(\omega')$ doit être homogène de degré $p + q - 1 (1 \leqq p, q \leqq 2)$.] Parmi ces conditions au bord, celles qui satisfont $P_2(\omega') + P_2(\omega')^* = 0$ remplissent l'hypothèse [H. *a-a*].

Exemple 3 : $A = (-D_{x_n})^{2m} +$ *un opérateur tangentiel d'ordre* $2m$. — Dans ce cas, nous avons

$$\alpha_{2m}(\omega') \equiv 1; \quad \alpha_k(\omega') \equiv 0 \quad \text{si } 1 \leqq k \leqq 2m - 1; \quad \alpha_0(\omega') > 0. \tag{5.28}$$

Nous posons

$$\tilde{\lambda} = (\alpha_0(\omega') + \lambda)^{\frac{1}{2m}} > 0; \tag{5.29}$$

$$\tilde{\Lambda}_j = \begin{bmatrix} \tilde{} & & & \\ & \tilde{\lambda}^2 & & \bigcirc \\ & & \ddots & \\ \bigcirc & & & \tilde{\lambda}^j \end{bmatrix}. \tag{5.30}$$

Alors, nous voyons que

$$\varkappa_j(\omega', \lambda) = \tilde{\lambda}^{-1} \tilde{\Lambda}_j \tilde{\varkappa}_j \tilde{\Lambda}_j, \tag{5.31}$$

où $\tilde{\varkappa}_j$ est la matrice introduite dans le paragraphe 4 avant l'énoncé du lemme 4.3. Nous verrons dans l'Appendice que la matrice

$$\frac{1}{i}\{\tilde{\varkappa}_j - \tilde{\varkappa}_j^\star\} = \frac{2}{i}\tilde{\varkappa}_j$$

est définie positive. Donc la matrice

$$\eta_j(\omega', \lambda) = \frac{1}{2i}\{\varkappa_j(\omega', \lambda) - \varkappa_j(\omega', \lambda)^\star\} \tag{5.32}$$

est toujours définie positive pour $|\omega'| = 1$ et $\lambda \geqq 0$. En posant

$$Q_j(\omega') = \frac{1}{2i}\{P_j(\omega') - P_j(\omega')^\star\}, \qquad P_j(\omega') = ((\alpha))_j(\beta(\omega'))_j, \tag{5.33}$$

nous pouvons chercher les $Q_j(\omega')$ de sorte que les matrices

$$\mathcal{B}_j(\omega', \lambda) = \eta_j(\omega', \lambda) + Q_j(\omega') \tag{5.34}$$

soient toujours définies positives pour $|\omega'| = 1$ et $\lambda \geqq 0$. En effet, il suffit que la norme $\| Q_j(\omega') \|$ soit uniformément petite. Et l'on peut résoudre deux équations de (5.33). $P_j(\omega')$ n'est pas uniquement déterminée. Parmi eux, ceux qui satisfont à $P_j(\omega') + P_j(\omega')^\star = 0$ vérifient l'hypothèse [H. *a-a*].

Application des théorèmes d'interpolation au résultat. — Soit $\{A; \{B'_r\}_{r\in R_j}\}$ $(0 \leqq j \leqq m)$ un système au bord satisfaisant aux hypothèses du théorème 3 ou du théorème 4. Et désignons par $\{A^\star; \{B'_r\}_{r\in R_j}\}$ le système adjoint à $\{A; \{B_r\}_{r\in R_j}\}$. Alors, $\{A^\star; \{B'_r\}_{r\in R_j}\}$ satisfait aussi aux mêmes hypothèses. Écrivons par A_β (resp. $A^\star_\beta$) l'opérateur $A + \beta I$ (resp. $A^\star + \beta I$) avec du même domaine, où β est un réel fixé. Nous avons vu qu'il existe un β réel tel que les produits scalaires

$$\frac{1}{2}\{(A_\beta u, v) + (u, A_\beta v)\} \quad \text{et} \quad \frac{1}{2}\{(A^\star_\beta u, v) + (u, A^\star_\beta v)\} \tag{5.35}$$

induisent, sur $\mathcal{D}[A]$ et sur $\mathcal{D}[A^\star]$ respectivement, les mêmes structures hilbertiennes que celle de l'espace

$$H^m(\Omega) \cap H_0^{m-j}(\Omega), \tag{5.36}$$

désignons-le par $\mathcal{K}_j$.

Alors, le complété de $\mathcal{D}[A]$ (resp. $\mathcal{D}[A^\star]$) par cette structure est aussi $\mathcal{K}_j$, car $\mathcal{D}[A]$ et $\mathcal{D}[A^\star]$ sont denses dans $\mathcal{K}_j$.

Il existe donc un β réel tel que l'opérateur A_β (resp. $A^\star_\beta$) soit un isomorphisme

$$\text{de} \quad \mathcal{D}[A] \text{ (resp. } \mathcal{D}[A^\star]) \quad \text{sur } L^2(\Omega) \tag{5.37}$$

et

$$\text{de } \mathcal{K}_j \quad \text{sur son dual } \mathcal{K}'_j. \tag{5.38}$$

Nous pouvons interpoler deux isomorphismes par la méthode complexe (*voir* § 3) :

THÉORÈME 5. — *Sous les hypothèses du théorème* 3 *ou du théorème* 4, *il existe un* β *réel tel que l'opérateur* A_β (*resp.* A_β^*) *soit un isomorphisme*

$$(5.39)\qquad \begin{cases} \textit{de} & (\mathcal{K}_j, \mathcal{D}[A])_\theta \quad (\text{resp. } (\mathcal{K}_j, \mathcal{D}[A^*])_\theta) \\ \textit{sur} & (\mathcal{K}'_j, L^2(\Omega))_\theta \end{cases}$$

pour tout $0 < \theta < 1$.

Désignons de nouveau

$$(5.40)\qquad \begin{aligned} &\mathcal{D}(\mathcal{K}'_j) = \{ u \in L^2(\Omega) ; A_\beta u \in \mathcal{K}'_j \} \\ &(\text{resp } \mathcal{D}_*(\mathcal{K}'_j) = \{ v \in L^2(\Omega) ; A_\beta^* v \in \mathcal{K}'_j \}). \end{aligned}$$

Alors, par un résultat de Lions-Magenes [9], nous voyons que l'application $u \to \{ A_\beta u ; \{ B_r u \}_{r\in R_j} \}$ (resp. $v \to \{ A_\beta^* v ; \{ B'_r v \}_{r\in R_j} \}$) est un isomorphisme

$$(5.41)\qquad \text{de} \quad \mathcal{D}(\mathcal{K}'_j) \ (\text{resp. } \mathcal{D}_*(\mathcal{K}'_j)) \ \text{sur} \quad \mathcal{K}'_j \times \prod_{r\in R_j} H^{-r-\frac{1}{2}}(\Gamma)$$

et

$$(5.42)\qquad \text{de} \quad \mathcal{D}[A] \quad (\text{resp. } \mathcal{D}[A^*]) \ \text{sur} \quad L^2(\Omega) \times \prod_{r\in R_j} H^{2m-r-\frac{1}{2}}(\Gamma).$$

Le théorème suivant est aussi un résultat de Lions-Magenes :

THÉORÈME 6. — *Sous les hypothèses du théorème* 5, *l'application*

$$u \to \{ A_\beta u ; \{ B_r u \}_{r\in R_j} \} \quad (\textit{resp. } v \to \{ A_\beta^* v ; \{ B'_r v \}_{r\in R_j} \})$$

est un isomorphisme

$$(5.43)\qquad \begin{cases} \textit{de} & (\mathcal{D}(\mathcal{K}'_j), \mathcal{D}[A])_\theta \quad (\textit{resp. } (\mathcal{D}_*(\mathcal{K}'_j), \mathcal{D}[A^*])_\theta) \\ \textit{sur} & (\mathcal{K}'_j, L^2(\Omega))_\theta \times \prod_{r\in R_j} \left(H^{-r-\frac{1}{2}}(\Gamma), H^{2m-r-\frac{1}{2}}(\Gamma)\right)_\theta \end{cases}$$

pour tout $0 < \theta < 1$.

6. UNE GÉNÉRALISATION DU THÉORÈME 4.

6.1. Soit $\{ A ; \{ B_r \}_{r\in R} \}$ un système au bord défini dans un ouvert borné Ω de $\mathbf{R}^n$ à frontière Γ de classe C^∞. Nous allons énoncer et démontrer un théorème, analogue au théorème 4 dans le paragraphe 1, qui nous donne une condition suffisante pour la variationnalité stable.

Nous avons posé, dans le paragraphe 1, les hypothèses [H.1] et [H.2] qui ont énormément restreint le type de l'opérateur A. Mais elles sont trop fortes autant que nous nous bornions aux opérateurs dans les ouverts bornés Ω. Nous pouvons les affaiblir légèrement comme suit :

Désignons par $A_0\left(x;\dfrac{\partial}{\partial x}\right)$ et par $A_0^\star\left(x;\dfrac{\partial}{\partial x}\right)$ les parties principales de A et de son adjoint formel $A^\star$ respectivement. Alors, nous remplaçons [H.1] par

$$\{\text{H.1}\}\qquad A_0\left(x';\frac{\partial}{\partial x}\right)-A_0^\star\left(x';\frac{\partial}{\partial x}\right)\equiv 0 \quad \text{pour tout } x'\in\Gamma;$$

et [H.2] par

$$\{\text{H.2}\}\qquad C^{-1}|\xi|^{2m}\leqq \mathcal{R}e\, A_0(x;\, i\xi)\leqq C|\xi|^{2m} \quad \text{pour tout } (x,\xi)\in\overline{\Omega}\times\mathcal{R}^n,$$

où C soit une constante positive indépendante de (x, ξ). Autrement dit, nous supposons dorénavant que A soit fortement elliptique uniformément sur $\overline{\Omega}$ et que tous les termes d'ordre $2m$ de la différence $A - A^\star$ s'annulent seulement sur la frontière Γ.

Comme l'ensemble R des ordres des opérateurs au bord $\{B_r\}_{r\in R}$, nous prenons toujours R_j $(1\leqq j\leqq m)$, donc

$$\{\text{H.4}\}\qquad R=R_j \qquad (1\leqq j\leqq m).$$

Pour préciser une hypothèse {H.3}, qui se remplace à $[\widetilde{\text{H.3}}]$, nous allons construire des matrices $\mathcal{B}_j(P;\xi',\lambda)$ à chaque point $P\in\Gamma$. Nous esquissons le procédé :

Soient P un point quelconque de Γ, T_P l'hyperplan tangent à Γ au point P et $\vec{n}_P$ la normale intérieure à Γ au point P de longueur 1. Soit $x\to\tilde{x}$ une transformation linéaire isométrique de coordonnée $\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$ telle que P s'applique à l'origine, que T_P s'applique à l'hyperplan $\tilde{x}_n=0$ et que $\vec{n}_P$ corresponde à $(0,\ldots,0,1)$.

Nous considérons maintenant le système $\left\{A_0\left(P;\dfrac{\partial}{\partial x}\right);\left\{B_{0r}\left(P;\dfrac{\partial}{\partial x}\right)\right\}_{r\in R_j}\right\}$ formé du $\{A;\{B_r\}_{r\in R_j}\}$ seulement par les parties principales avec les coefficients fixés au point P. Nous pouvons le récrire sous la forme de (1.7) et de (1.8) au moyen de la coordonnée $\tilde{x}$, et obtenons un système au bord $\left\{A_0\left(P;\dfrac{\partial}{\partial\tilde{x}}\right);\left\{B_{0r}\left(P;\dfrac{\partial}{\partial\tilde{x}}\right)\right\}_{r\in R_j}\right\}$ défini dans le demi-espace $\mathbf{R}^n_+$. Les $\alpha_k(D_{\tilde{x}'})$ et les $\beta_{r\rho}(D_{\tilde{x}'})$ deviennent, cette fois, des opérateurs tangentiels homogènes d'ordres $(2m-k)$ et $(r-\rho)$ respectivement à coefficients constants dépendant du paramètre P et de la transformation choisie $x\to\tilde{x}$. Nous suivons les mêmes constructions faites au paragraphe 1 et enfin obtenons une matrice $\mathcal{B}_j(P;\tilde{\xi}',\lambda)$ [*voir* les formules (1.11) $\sim$ (1.25)].

Alors, pour $P \in \Gamma$ fixé, la condition $[\widetilde{H.3}]$ posée sur $\mathcal{B}_j(P; \tilde{\xi}', \lambda)$ (surtout la constante c) est indépendante du choix de la transformation isométrique $x \to \tilde{x}$. Notre nouvelle hypothèse se pose donc

$\{H.3\}$ A tout point P de Γ, la matrice $\mathcal{B}_j(P; \tilde{\xi}', \lambda)$ satisfasse à $[\widetilde{H.3}]$ avec une constante $c > 0$ indépendante de P.

Les deux constantes positives C et c, qui interviennent dans les $\{H.2\}$ et $\{H.3\}$, jouent un rôle très important dans ce qui suit.

Nous avons les lemmes analogues aux lemmes 1.2 et 1.3.

Le but de ce paragraphe est de démontrer le

Théorème 7. — *Un système au bord $\{A; \{B_r\}_{r \in R}\}$ défini dans Ω satisfaisant aux hypothèses $\{H.1\}$, $\{H.2\}$, $\{H.4\}$ (avec $R = R_j$, $1 \leqq j \leqq m$) et $\{H.3\}$ est stablement variationnel. Et de plus, pour un opérateur différentiel quelconque K d'ordre $\leqq 2m - 1$ à coefficients de classe $\mathcal{B}(\overline{\Omega})$, il existe des constantes β réelle et γ positive telles que l'on ait*

$$\gamma^{-1} \| u \|^2_{H^m(\Omega)} \leqq \mathcal{R}e\,((A + K + \beta)\, u, u) \leqq \gamma \| u \|^2_{H^m(\Omega)} \quad \text{pour tout } u \in \mathcal{D}[A],$$

Pour avoir ce résultat, nous devons montrer une inégalité

$$c_1 \| u \|^2_{H^m(\Omega)} - c_2 \| u \|^2 \leqq \mathcal{R}e\,(Au, u) \leqq c_3 \| u \|^2_{H^m(\Omega)} \quad \text{pour tout } u \in \mathcal{D}[A], \tag{6.1}$$

où c_1, c_2 et c_3 sont des constantes positives.

Le point essentiel de la démonstration de (6.1) est de vérifier que la constante c_1 ne dépend que de C et de c dans les hypothèses $\{H.2\}$ et $\{H.3\}$, comme elle l'était dans les paragraphes 1 à 5.

Nous commençons par un calcul de la forme (Au, u).

Nous écrivons d'abord l'opérateur A sous la forme

$$A = A\left(x; \frac{\partial}{\partial x}\right) = \sum_{|\mu|, |\nu| \leqq m} (-1)^{|\nu|} \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{\nu} \left\{ a_{\mu\nu}(x) \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{\mu} \right\}. \tag{6.2}$$

Les coefficients $a_{\mu\nu}(x) \in \mathcal{B}(\overline{\Omega})$ ne sont pas déterminés de la manière unique, mais en tout cas, nous pouvons fixer une forme de (6.2). Et, nous écrivons les B_r sous la forme

$$\left\{\begin{aligned} & B_r = \left(\frac{\partial}{\partial n}\right)^r - \sum_{\substack{\rho < r \\ \rho \in S}} b_{r\rho}\left(x'; \frac{\partial}{\partial x'}\right)\left(\frac{\partial}{\partial n}\right)^{\rho}, \qquad r \in R_j, \\ & \text{où} \\ & b_{r\rho}\left(x'; \frac{\partial}{\partial x'}\right) = \sum_{|\mu'| \leqq r - \rho} b_{r\rho\mu'}(x') \left(\frac{\partial}{\partial x'}\right)^{\mu'}. \end{aligned}\right. \tag{6.3}$$

En désignant les traces $\left(\frac{\partial}{\partial n}\right)^l u|_\Gamma$ par $\gamma_l u$, et en remplaçant

$$\gamma_r u \quad \text{par } \mathrm{B}_r u + \sum_{\substack{\rho<r\\ \rho\in \mathrm{S}_j}} b_{r\rho}\left(x'; \frac{\partial}{\partial x'}\right)\gamma_\rho u$$

pour $r \in \mathrm{R}_j$, $m \leqq r \leqq m+j-1$, nous calculons $(\mathrm{A}u, v)$ pour les u et v de la classe $\mathcal{B}(\overline{\Omega}) \cap \mathrm{H}_0^{m-j}(\Omega)$ et obtenons

$$(6.4)\qquad (\mathrm{A}u, v) = \mathrm{A}[u, v] + \mathrm{B}[u, v] \qquad \text{pour} \quad u, v \in \mathcal{B}(\Omega) \cap \mathrm{H}_0^{m-j}(\Omega),$$

avec

$$(6.5)\qquad \mathrm{A}[u, v] = \sum_{|\mu|, |\nu| \leqq m} \left(a_{\mu\nu}(x)\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\mu u(x), \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\nu v(x)\right) + \sum_{\substack{\rho, \sigma \in \mathrm{S}_j\\ \rho, \sigma \leqq m-1}} \int_\Gamma t_{\rho\sigma}\left(x'; \frac{\partial}{\partial x'}\right)\gamma_\rho u(x') . \overline{\gamma_\sigma v(x')}\, d\mathrm{S}$$

et

$$(6.6)\qquad \mathrm{B}[u, v] = \sum_{m \leqq r \leqq m+j-1} \int_\Gamma (-1)^{r-m} a(x') \mathrm{B}_r u(x') . \overline{\gamma_{2m-1-r} v(x')}\, d\mathrm{S} + \sum_{\substack{r \in \mathrm{R}_j, \rho \in \mathrm{S}_j\\ r+\rho \leqq 2m-2}} \int_\Gamma t_{r\rho}\left(x'; \frac{\partial}{\partial x'}\right) \mathrm{B}_r u(x') . \overline{\gamma_\rho v(x')}\, d\mathrm{S},$$

où les $t_{\rho\sigma}$ et les $t_{r\rho}$ sont des opérateurs différentiels tangentiels d'ordres $\leqq (2m-1-\rho-\sigma)$ et $\leqq (2m-1-r-\rho)$ respectivement, et la fonction $a(x')$ est la restriction du coefficient de $(-1)^m \left(\frac{\partial}{\partial n}\right)^{2m}$ de A sur Γ.

On obtient, en particulier,

$$(6.7)\qquad (\mathrm{A}u, v) = \mathrm{A}[u, v] \qquad \text{pour} \quad u \in \mathcal{D}[\mathrm{A}] \quad \text{et pour} \quad v \in \mathcal{B}(\overline{\Omega}) \cap \mathrm{H}_0^{m-j}(\Omega).$$

La forme $\mathrm{A}[u, v]$ définie par (6.5) peut être prolongée continûment jusqu'à l'espace

$$(6.8)\qquad \mathcal{H}_j = \mathrm{H}^m(\Omega) \cap \mathrm{H}_0^{m-j}(\Omega).$$

Donc, l'existence d'une constante $c_3 > 0$ dans l'inégalité (6.1) est démontrée.

6.2. Nous démontrons ensuite un principe d'approximation sous la forme de la proposition 6.1 ci-dessous.

Nous donnons, de nouveau, un autre système au bord dans $\Omega\{\overline{\mathrm{A}}; \{\overline{\mathrm{B}}_r\}_{r\in \mathrm{R}_j}\}$ défini également par (6.2) et par (6.3) avec le même R_j, où les coefficients sont désignés par $\overline{a}_{\mu\nu}(x)$ et par $\overline{b}_{r\rho\mu'}(x')$ respectivement.

Nous allons comparer maintenant deux systèmes au bord $\{A; \{B_r\}_{r\in R_j}\}$ et $\{\overline{A}; \{\overline{B}_r\}_{r\in R_j}\}$. Plus précisément, nous allons comparer deux formes $A[u, u]$ et $\overline{A}[u, u]$ définies sur $\mathcal{K}_j$, où $\overline{A}[u, u]$ est définie analoguement à (6.5).

Posons

$$(6.9)\quad M_0(A, \overline{A}) = \max_{\substack{|\mu|=|\nu|=m \\ |\mu'|=r-\rho}} \Big\{ \sup_{\Omega} |a_{\mu\nu}(x) - \overline{a}_{\mu\nu}(x)|, \sup_{\Gamma} |b_{r\rho\mu'}(x') - \overline{b}_{r\rho\mu'}(x')|, \sup_{\Gamma} |a_{\mu\nu}(x')\, b_{r\rho\mu'}(x') - \overline{a}_{\mu\nu}(x')\, \overline{b}_{r\rho\mu'}(x')| \Big\},$$

c'est-à-dire, la quantité $M_0(A, \overline{A})$ désigne le maximum des moduli de toutes les différences entre les coefficients (ou leurs produits) des parties principales des deux systèmes. Si, donc, $M_0(A, \overline{A})$ est suffisamment petite, les parties principales des deux systèmes sont assez proches l'une de l'autre. On pourrait dire alors que les deux systèmes au bord sont *voisins* dans un certain sens. Nous avons en effet un

LEMME 6.1. — *Il existe une constante numérique* $K > 0$ *dépendante seulement de la géométrie de* Γ *telle que l'on ait*

$$(6.10)\quad |A[u, u] - \overline{A}[u, u]| \leq K M_0(A, \overline{A}) \|u\|_m^2 + c(A, \overline{A}) \|u\|^2 \qquad pour \quad u \in \mathcal{K}_j,$$

où $M_0(A, \overline{A})$ *est la quantité définie par* (6.9), *et* $c(A, \overline{A})$ *est une autre constante.*

Preuve. — Nous écrivons pour le moment :

$$(6.11)\quad A[u, u] - \overline{A}[u, u] = \sum_{|\mu|=|\nu|\leq m} \left(D_{\mu\nu}(x) \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{\mu} u(x), \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{\nu} u(x) \right) + \sum_{\substack{\rho,\sigma\in S_j \\ \rho,\sigma\leq m-1}} \int_{\Gamma} d_{\rho\sigma}\left(x'; \frac{\partial}{\partial x'}\right) \gamma_\rho u(x') \cdot \overline{\gamma_\sigma u(x')}\, dS,$$

où, par (6.5),

$$(6.12)\quad \begin{cases} D_{\mu\nu}(x) = a_{\mu\nu}(x) - \overline{a}_{\mu\nu}(x) \\ \text{et} \\ d_{\rho\sigma}\left(x'; \dfrac{\partial}{\partial x'}\right) = t_{\rho\sigma}\left(x'; \dfrac{\partial}{\partial x'}\right) - \overline{t}_{\rho\sigma}\left(x'; \dfrac{\partial}{\partial x'}\right). \end{cases}$$

D'abord, on a évidemment

$$(6.13)\qquad |D_{\mu\nu}(x)| \leq M_0(A, \overline{A}) \qquad \text{si} \quad |\mu| = |\nu| = m.$$

Ensuite, regardons de plus près la formule (6.5). Nous voyons que chaque coefficient des parties principales des opérateurs $t_{\rho\sigma}$ a la forme suivante :

$$(6.14) \qquad \alpha_0(x') + \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa_0} \alpha_\varkappa(x')\, \beta_\varkappa(x'),$$

où les $\alpha_\varkappa(x')$ $(0 \leqq \varkappa \leqq \varkappa_0)$ sont des combinaisons linéaires des $a_{\mu\nu}(x')$ avec $|\mu| = |\nu| = m$, et les $\beta_\varkappa(x')$ $(1 \leqq \varkappa \leqq \varkappa_0)$ sont certains $b_{r\rho\mu'}(x')$, avec $|\mu'| = r - \rho$. Donc, chaque coefficient des parties principales des $d_{\rho\sigma}\left(x'; \frac{\partial}{\partial x'}\right)$, qui est la différence entre deux fonctions ayant la forme (6.14), peut être majoré, à son module, par $M_0(A, \overline{A})$ multipliée par une constante numérique dépendante seulement de la géométrie de Γ.

En tenant compte de (6.13), la somme de tous les termes principaux dans le membre à droite de (6.11) est évaluée par

$$\frac{K}{2} M_0(A, \overline{A}) \| u \|_m^2 + \text{Cte} \| u \|^2,$$

et le reste est au plus une constante fois de $\| u \|_m \| u \|_{m-1}$. Donc on a (6.10).

C. Q. F. D.

Nous définissons maintenant « ε-voisinage » pour les systèmes au bord.

DÉFINITION 6.1. — *Étant donnés deux systèmes au bord* $\{A; \{B_r\}_{r \in R_j}\}$ *et* $\{\overline{A}; \{\overline{B}_r\}_{r \in R_j}\}$ *définis dans* Ω *par* (6.2) *et par* (6.3), *nous disons que l'un appartient au* ε-*voisinage de l'autre, si* $M_0(A, \overline{A}) < \varepsilon$.

Voici un principe d'approximation :

PROPOSITION 6.1. — *Étant donnés deux systèmes au bord* $\{A; \{B_r\}_{r \in R_j}\}$ *et* $\{\overline{A}; \{\overline{B}_r\}_{r \in R_j}\}$, *supposons que le dernier satisfasse à*

$$(6.15) \qquad \bar{c}_1 \| u \|_m^2 - \bar{c}_2 \| u \|^2 \leqq \mathcal{R}e\, \overline{A}[u, u] \leqq \bar{c}_3 \| u \|_m^2 \quad \textit{pour tout } u \in \mathcal{K}_j$$

avec certaines constantes $\bar{c}_1$, $\bar{c}_2$ *et* $\bar{c}_3$ *positives. Alors, le premier vérifie*

$$(6.16) \qquad c_1 \| u \|_m^2 - c_2 \| u \|^2 \leqq \mathcal{R}e\, A[u, u] \leqq c_3 \| u \|_m^2 \quad \textit{pour tout } u \in \mathcal{K}_j,$$

s'il appartient au $(\bar{c}_1/K)$-*voisinage du dernier* $\left[\textit{avec } c_1 = \bar{c}_1 - K M_0(A, \overline{A}),\right.$ *si* $\left. M_0(A, \overline{A}) \neq 0\right]$.

La démonstration est triviale, si l'on utilise le lemme 6.1.

L'inégalité (6.16) est tout à fait équivalente à l'inégalité (6.1) en question.

Comme un corollaire de la proposition 6.1, nous avons le lemme 6.2 suivant qui sera également utile pour démontrer le théorème 7.

Soit $\alpha(x) \in \mathcal{B}(\overline{\Omega})$ une fonction positive partout sur $\overline{\Omega}$:

$$(6.17) \qquad 0 < \inf_{\overline{\Omega}} \alpha(x) \leq \sup_{\overline{\Omega}} \alpha(x) < \infty.$$

Lemme 6.2. — *Soit* $\{A; \{B_r\}_{r \in R_j}\}$ *un système au bord satisfaisant à* (6.1) [*ou à* (6.16)]. *Soit* $\alpha(x) \in \mathcal{B}(\overline{\Omega})$ *une fonction vérifiant* (6.17). *On a alors aussi* (6.1) *pour le système au bord* $\{\alpha A; \{B_r\}_{r \in R}\}$, *avec* c_1 *convenablement modifiée.*

Preuve. — On écrit, pour $u \in \mathcal{D}[A]$,

$$(\alpha(x) A u(x), u(x)) = (A(\sqrt{\alpha(x)}\, u(x)), \sqrt{\alpha(x)}\, u(x)) + ([\sqrt{\alpha(x)}\,., A]\, u(x), \sqrt{\alpha(x)}\, u(x)),$$

où la fonction $v(x) = \sqrt{\alpha(x)}\, u(x)$ vérifie la condition aux limites

$$\overline{B}_r v(x) \equiv \sqrt{\alpha(x')}\, B_r\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha(x)}} v(x)\right) = 0 \qquad \text{pour} \quad r \in R_j.$$

En posant donc $\overline{A} = A$, nous pouvons utiliser la proposition 6.1. Comme $M_0(A, \overline{A}) = 0$, nous avons, pour tout $0 < c_1 < c_1$,

$$\mathcal{R}e(A(\sqrt{\alpha}\, u), \sqrt{\alpha}\, u) \geq \tilde{c}_1 \|\sqrt{\alpha}\, u\|_m^2 - \text{Cte}\, \|\sqrt{\alpha}\, u\|^2 \qquad \text{pour} \quad u \in \mathcal{D}[A].$$

On majore $\|\sqrt{\alpha}\, u\|$ par $(\sup \sqrt{\alpha}) . \|u\|$ et l'on estime

$$\|\sqrt{\alpha}\, u\|_m^2 \geq C(\alpha) . \|u\|_m^2 - \text{Cte}\, \|u\|^2,$$

qui est valable pour $u \in H^m(\Omega)$, *a fortiori* pour $u \in \mathcal{D}[A]$, où $C(\alpha)$ est une constante quelconque telle que $0 < C(\alpha) < \inf \alpha(x)$. D'autre part, pour $\varepsilon > 0$ quelconque, on a

$$|([\sqrt{\alpha}, A]u, \sqrt{\alpha}\, u)| \leq \varepsilon \|u\|_m^2 + C(\varepsilon) \|u\|^2 \qquad \text{pour} \quad u \in \mathcal{D}[A].$$

On a enfin,

$$\mathcal{R}e(\alpha A u, u) \geq c_1' \|u\|_m^2 - \text{Cte}\, \|u\|^2 \qquad \text{pour} \quad u \in \mathcal{D}[A],$$

où c_1' est une constante quelconque telle que $0 < c_1' < c_1 \inf \alpha(x)$.

C. Q. F. D.

6.3. Nous nous mettons enfin à la démonstration du théorème 7.

Ce que nous allons faire dans la suite est une approximation du système au bord donné $\{A; \{B_r\}_{r \in R_j}\}$ par un autre système au bord $\{\mathfrak{A}; \{\mathcal{B}_r\}_{r \in R_j}\}$. Celui-ci dépend d'une partition d'unité de Ω, $\{U_k; \varphi_k\}_{k=0}^N$, suffisamment fine dans un voisinage de la frontière Γ, et il satisfait à une inégalité du type (6.1), où la constante correspondante à c_1 est indépendante de cette partition d'unité, elle sera déterminée par les deux constantes C et c intervenant dans $\{H.2\}$ et dans $\{H.3\}$. Nous finirons la démonstration en réduisant la question à la proposition 6.1.

Soit $\{A; \{B_r\}_{r\in R_j}\}$ un système au bord défini dans Ω par (6.2) et par (6.3) satisfaisant aux hypothèses $\{H.1\}$, $\{H.2\}$, $\{H.4\}$ et $\{H.3\}$, où les constantes C et c dans les $\{H.2\}$ et $\{H.3\}$ seront essentielles dans la suite.

Nous nous sommes permis de poser à l'avance

$$a(x') \equiv 1 \quad \text{sur } \Gamma \quad [\textit{voir } (6.6)]. \tag{6.18}$$

[En effet, il existe une fonction $\alpha(x) \in \mathcal{B}(\overline{\Omega})$ de sorte que $\frac{1}{2C} \leqq \alpha(x) \leqq 2C$ sur $\overline{\Omega}$ et que $\alpha(x') = \frac{1}{a(x')}$ sur Γ. Nous considérons l'opérateur αA au lieu de A. Alors, la fonction $a(x')$ dans la formule (6.6) devient identiquement 1. Et, grâce au lemme 6.2, l'inégalité (6.1), démontrée pour cet opérateur modifié, implique celle pour l'opérateur original. Par cette modification, les hypothèses $\{H.1\}$, $\{H.2\}$, $\{H.4\}$ et $\{H.3\}$ restent invariantes, où la constante C devient $2C^2$ et la constante c demeure la même. Quant à la constante c_1 dans (6.1), son changement dépend seulement de C.]

Nous supposons donc $\{H.1\}$, $\{H.2\}$, $\{H.4\}$, $\{H.3\}$ et (6.18) sur le système $\{A; \{B_r\}_{r\in R_j}\}$, et nous démontrons que l'inégalité (6.1) est vraie et que la constante c_1 est déterminée par C et c dans les $\{H.2\}$ et $\{H.3\}$.

D'abord, nous définissons une partition d'unité $\{U_k; \varphi_k\}_{k=0}^{N}$:

$$\bigcup_{k=0}^{N} U_k \supset \Omega; \quad U_0 \Subset \Omega; \quad \text{chaque } U_k \cap \Omega \, (1 \leqq k \leqq N), \text{ soit difféomorphe} \tag{6.19}$$
(de classe C^∞) à un certain voisinage de l'origine de $\mathbf{R}^n_+$;

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi_k(x) \in \mathcal{B}(\overline{\Omega}); \quad 0 \leqq \varphi_k(x) \leqq 1 \quad \text{sur } \overline{\Omega}; \quad \text{Supp.}[\varphi_k] \subset U_k \quad (0 \leqq k \leqq N); \\ \displaystyle\sum_{k=0}^{N} \varphi_k^2(x) \equiv 1 \quad \text{sur } \overline{\Omega}. \end{array} \right. \tag{6.20}$$

Fixons de plus un point P_k de chaque $U_k \cap \Gamma$ $(1 \leqq k \leqq N)$.

Associée à cette partition d'unité, nous choisissons une famille des systèmes au bord comme suit :

(6.21)^0 Soit $\{A^0; \{\gamma_l\}_{l=0}^{m-1}\}$ le système au bord défini par $A^0\left(x; \frac{\partial}{\partial x}\right) \equiv A\left(x; \frac{\partial}{\partial x}\right)$ avec la condition de Dirichlet;

et, pour $1 \leq k \leq N$,

(6.21)^k Soit $\{A^k; \{B_r^k\}_{r \in R_j}\}$ le système au bord défini par $A^k\left(x; \frac{\partial}{\partial x}\right) \equiv A\left(P_k; \frac{\partial}{\partial x}\right)$ et par $B_r^k\left(x'; \frac{\partial}{\partial x}\right) \equiv B_r\left(P_k; \frac{\partial}{\partial x}\right)$ pour $r \in R_j$,

pour $1 \leq k \leq N$; où les $\{A^k; \{B_r^k\}_{r \in R_j}\}$ $(1 \leq k \leq N)$ sont considérés comme les systèmes au bord définis dans $\mathbf{R}_+^n$ par les difféomorphismes. Ils sont à coefficients constants. Nous pouvons supposer que chaque difféomorphisme $U_k \cap \Omega \to \mathbf{R}_+^n$ $(1 \leq k \leq N)$ soit isométrique au point P_k (cette dernière hypothèse est posée pour ne pas changer les constantes C et c).

D'abord, quant au système au bord $\{A^0; \{\gamma_l\}_{l=0}^{m-1}\}$, nous avons, grâce à un résultat bien connu de Gårding,

$$\mathcal{R}e\,(A^0 w, w) \geq \gamma_{01} \| w \|_m^2 - \gamma_{02} \| w \|^2 \qquad \text{pour} \quad w \in H_0^m(\Omega).$$

Donc, en posant

$$(6.22)^0 \quad \begin{cases} A^0[w, w'] = \displaystyle\sum_{|\mu|, |\nu| \leq m} \left(a_{\mu\nu}(x)\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\mu w(x), \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\nu w'(x)\right) \\ \qquad \text{pour} \quad w, w' \in H_0^m(\Omega) \quad [\mathit{voir}\ (6.5)], \end{cases}$$

nous avons

$$(A^0 w, w') = A^0[w, w']$$

et

$$(6.23)^0 \quad \begin{cases} \gamma_{01} \| w \|_m^2 - \gamma_{02} \| w \|^2 \leq \mathcal{R}e\, A^0[w, w] \leq \gamma_{03} \| w \|_m^2 \\ \qquad \text{pour} \quad w \in H_0^m(\Omega), \end{cases}$$

avec des constantes positives γ_{01}, γ_{02} et γ_{03}, où γ_{01} est déterminée seulement par C dans $\{H.2\}$.

Quant à chaque $\{A^k; \{B_r^k\}_{r \in R_j}\}$ $(1 \leq k \leq N)$, nous l'écrivons terme à terme comme (6.2) et (6.3). Nous définissons les formes $A^k[.,.]$ et $B^k[.,.]$ analoguement aux (6.5) et (6.6) en considérant $\Omega = \mathbf{R}_+^n$ et $\Gamma = \mathbf{R}^{n-1}$. Il satisfait aux $\{H.1\}$, $\{H.2\}$, $\{H.4\}$, $\{H.3\}$ et (6.18). Surtout, les constantes C et c sont celles pour $\{A; \{B_r\}_{r \in R_j}\}$. On obtient donc

$$(6.23)^k \quad \begin{cases} \gamma_{k1} \| v \|_m^2 - \gamma_{k2} \| v \|^2 \leq \mathcal{R}e\, A^k[v, v] \leq \gamma_{k3} \| v \|^2 \\ \text{pour} \quad v \in H^m(\mathbf{R}_+^n) \cap H_0^{m-j}(\mathbf{R}_+^n); \qquad 1 \leq k \leq N. \end{cases}$$

Nous remarquons ici que les constantes γ_{k1} $(1 \leq k \leq N)$ ne dépendent que des C et c grâce au résultat obtenu dans les paragraphes 1 à 5. Donc, les γ_{k1} $(1 \leq k \leq N)$ sont indépendantes de k, c'est-à-dire, de la partition d'unité $\{U_k; \varphi_k\}_{k=0}^N$. Nous posons

$$\gamma_I = \min_{0 \leq k \leq N} \gamma_{k1}, \qquad \gamma_{II} = \max_{0 \leq k \leq N} \gamma_{k2} \qquad \text{et} \qquad \gamma_{III} = \max_{0 \leq k \leq N} \gamma_{k3}.$$

Alors, nous avons, par $(6.23)^k$ $(0 \leqq k \leqq N)$,

$$(6.24) \quad \begin{cases} \gamma_{\rm I} \| w \|_m^2 - \gamma_{\rm II} \| w \|^2 \leqq \mathcal{R}e\, A^0[w, w] \leqq \gamma_{\rm III} \| w \|_m^2 \\ \qquad \text{pour} \quad w \in H_0^m(\Omega); \\ \gamma_{\rm I} \| v \|_m^2 - \gamma_{\rm II} \| v \|^2 \leqq \mathcal{R}e\, A^k[v, v] \leqq \gamma_{\rm III} \| v \|_m^2 \qquad (1 \leqq k \leqq N) \\ \qquad \text{pour} \quad v \in H^m(\mathbf{R}_+^n) \cap H_0^{m-j}(\mathbf{R}_+^n), \end{cases}$$

où $\gamma_{\rm I}$ est déterminée seulement par C et c, et ne dépend pas de la partition d'unité, bien que les $\gamma_{\rm II}$ et $\gamma_{\rm III}$ le font probablement.

Soit maintenant $u \in \mathcal{K}_j \equiv H^m(\Omega) \cap H_0^{m-j}(\Omega)$. Alors, $\varphi_0(x)\, u(x)$ appartient à $H_0^m(\Omega)$, tandis que chaque $\varphi_k(x)\, u(x)$ $(1 \leqq k \leqq N)$ peut être identifiée avec un élément v de $H^m(\mathbf{R}_+^n) \cap H_0^{m-j}(\mathbf{R}_+^n)$. Nous pouvons donc considérer les formes $A^k[\varphi_k u, \varphi_k u']$ $(0 \leqq k \leqq N)$ pour u, $u' \in \mathcal{K}_j$.

Posons alors

$$(6.25) \qquad \mathfrak{A}[u, u'] = \sum_{k=0}^{N} A^k[\varphi_k u, \varphi_k u'] \qquad \text{pour} \quad u, u' \in \mathcal{K}_j.$$

Nous appliquons (6.24) pour les $\varphi_k u$ $(0 \leqq k \leqq N)$. Nous obtenons tout de suite

$$(6.26) \qquad \frac{\gamma_{\rm I}}{2} \| u \|_m^2 - \gamma'_{\rm II} \| u \|^2 \leqq \mathcal{R}e\, \mathfrak{A}[u, u] \leqq \gamma'_{\rm III} \| u \|_m^2 \qquad \text{pour} \quad u \in \mathcal{K}_j,$$

où les $\gamma'_{\rm II}$ et $\gamma'_{\rm III}$ dépendent de $\{ U_k;\ \varphi_k \}_{k=0}^{N}$.

Associés à la forme $\mathfrak{A}[u, u']$, nous définissons maintenant un opérateur différentiel $\mathfrak{A}$ et un espace linéaire $\mathcal{D}[\mathfrak{A}]$ comme suit :

$$(6.27) \qquad \mathfrak{A} u = \sum_{k=0}^{N} \varphi_k(x)\, A^k \{ \varphi_k(x)\, u(x) \} \qquad \text{pour} \quad u \in \mathcal{K}_j \cap H^{2m}(\Omega)$$

et

$$(6.28) \qquad \mathcal{D}[\mathfrak{A}] = \{ u \in \mathcal{K}_j \cap H^{2m}(\Omega);\ \mathfrak{A}[u, u'] = (\mathfrak{A} u, u') \text{ pour tout } u' \in \mathcal{K}_j \}.$$

La signification du membre à droite de (6.27) est claire par les identifications des $\varphi_k u$ $(1 \leqq k \leqq N)$ avec les éléments de $H^{2m}(\mathbf{R}_+^n) \cap H_0^{m-j}(\mathbf{R}_+^n)$. L'opérateur $\mathfrak{A}$ défini sur Ω satisfait aux $\{H.1\}$ et $\{H.2\}$ (sans changer la constante C). La définition (6.28) de $\mathcal{D}[\mathfrak{A}]$ détermine, à son tour, exactement m conditions aux limites $\{\mathcal{B}_r\}_{r \in R_j}$ pour ses éléments. Nous allons les chercher.

Il est évident, d'abord, que

$$(6.29) \qquad \mathcal{B}_r u \equiv \gamma_r u = 0 \qquad \text{pour} \quad r \in R_j, \qquad r < m \quad \text{si } u \in \mathcal{D}[\mathfrak{A}].$$

Ensuite, en calculant les différences

$$(A^k(\varphi_k u), \varphi_k u') - A^k[\varphi_k u, \varphi_k u'] \qquad \text{pour} \quad 1 \leqq k \leqq N,$$

on obtient une identité suivante [*voir* (6.6) et (6.18)] ·

$$(6.30)\qquad \sum_{k=1}^{N}\left\{\sum_{m\leq r\leq m+j-1}\int_{\Gamma}(-1)^{r-m}\,B_r^k(\varphi_k u)\,.\,\overline{\gamma_{2m-1-r}(\varphi_k u')}\,dS + \sum_{\substack{r\in R_j,\,\rho\in S_j\\ r+\rho\leq 2m-2}}\int_{\Gamma} t_{r\rho}^k\left(x';\frac{\partial}{\partial x'}\right)B_r^k(\varphi_k u)\,.\,\overline{\gamma_\rho(\varphi_k u')}\,dS\right\}\equiv 0,$$

pour tout $u\in\mathcal{D}[\mathcal{A}]$ et pour tout $u'\in\mathcal{K}_j$.

Cette identité nous donne exactement j conditions aux limites sur les u. Pour les avoir, prenons les $u'\in\mathcal{K}_j$ telles que $\gamma_\rho u'=0$ pour tout $\rho\in S_j$ sauf un $\sigma\in S_j$, où σ parcourt successivement de $m-j$, $m-j+1$, ..., jusqu'à $m-1$. Après un arrangement, nous avons

$$(6.31)\qquad \begin{cases} \mathcal{B}_r u=0 \quad \text{pour} \quad m\leq r\leq m+j-1 \quad \text{et pour} \quad u\in\mathcal{D}[A],\\ \text{où}\\ \mathcal{B}_r u\equiv\displaystyle\sum_{k=1}^{N}\varphi_k(x')\,B_r^k(\varphi_k(x)\,u(x))+\{\text{terme d'ordre} < r\}.\end{cases}$$

Donc, tout élément $u\in\mathcal{D}[\mathcal{A}]$ satisfait à m conditions aux limites $\mathcal{B}_r u=0$ pour $r\in R_j$ d'après (6.29) et (6.31). Réciproquement, si l'on remonte le raisonnement ci-dessus, on voit que chaque $u\in H^{2m}(\Omega)$ satisfaisant aux $\mathcal{B}_r u=0$ pour $r\in R_j$ appartient à $\mathcal{D}[\mathcal{A}]$. Ainsi, nous avons

$$(6.32)\qquad \mathcal{D}[\mathcal{A}]=\{u\in H^{2m}(\Omega)\,;\,\mathcal{B}_r u=0 \text{ pour } r\in R_j\},$$

c'est-à-dire, l'espace $\mathcal{D}[\mathcal{A}]$ est égal au domaine du système au bord $\{\mathcal{A};\{\mathcal{B}_r\}_{r\in R_j}\}$.

Nous allons maintenant appliquer la proposition 6.1 à la comparaison entre deux systèmes au bord $\{A;\{B_r\}_{r\in R_j}\}$ et $\{\mathcal{A};\{\mathcal{B}_r\}_{r\in R_j}\}$. Pour cela, nous devons estimer la quantité $M_0(A,\mathcal{A})$ [*voir* (6.9)]. Écrivons $\{\mathcal{A};\{\mathcal{B}_r\}_{r\in R_j}\}$ sous la forme des (6.2) et (6.3), où les coefficients soient $\bar{a}_{\mu\nu}(x)$ et $\bar{b}_{r\rho\mu'}(x')$. On a alors

$$a_{\mu\nu}(x)-\bar{a}_{\mu\nu}(x)=\sum_{k=1}^{N}\{a_{\mu\nu}(x)-a_{\mu\nu}(P_k)\}\,\varphi_k^2(x),$$

$$b_{r\rho\mu'}(x')-\bar{b}_{r\rho\mu'}(x')=\sum_{k=1}^{N}\{b_{r\rho\mu'}(x')-b_{r\rho\mu'}(P_k)\}\,\varphi_k^2(x'),$$

et

$$a_{\mu\nu}(x')\,b_{r\rho\mu'}(x')-\bar{a}_{\mu\nu}(x')\,\bar{b}_{r\rho\mu'}(x')$$
$$=\sum_{k=1}^{N}\{a_{\mu\nu}(x')\,b_{r\rho\mu'}(x')-a_{\mu\nu}(P_k)\,b_{r\rho\mu'}(P_k)\}\,\varphi_k^2(x'),$$

pour tous $|\mu| = |\nu| = m$ et $|\mu'| = r - \rho$. Donc, $M_0(A, \mathcal{A})$ peut être estimée par la finesse de la partition d'unité $\{U_k; \varphi_k\}_{k=0}^N$ au voisinage de la frontière Γ. Nous choisissons donc une $\{U_k; \varphi_k\}_{k=0}^N$ de sorte que $M_0(A, \mathcal{A})$ soit plus petite que $\gamma_1/(2K)$ [*voir* la proposition 6.1 et l'inégalité (6.26)]. Finalement, nous avons l'inégalité désirée (6.1), et la démonstration du théorème 7 est terminée.

C. Q. F. D.

6.4. Nous ajoutons deux remarques sur le théorème 7.

Premièrement, la condition $\{H.3\}$ nous donne un critère pour juger les variationnalités stables des opérateurs concrets. Par exemple, nous pourrions chercher des conditions aux limites $\{B_r\}_{r\in R_j}$ qui font $(-\Delta)^m$ (laplaciens itérés) variationnels, comme nous l'avons fait dans le paragraphe 5.

L'autre remarque est que nous pouvons énoncer les théorèmes 5 et 6 dans le paragraphe 5 sous les hypothèses du théorème 7.

APPENDICE.

Démonstration du lemme 4.3.

A.1. Le but de ce paragraphe est de montrer la positivité de la matrice $i^{-1}\tilde{\chi}_j$ définie avant l'énoncé du lemme 4.3. Nous répétons la définition.

Au système au bord défini dans $\mathbf{R}^1_+$,

$$A(D_y) = (-D_y)^{2m} + 1; \qquad \tilde{B}_r = (-D_y)^r \quad (r \in R_j), \tag{4.30}$$

nous avons fait correspondre un polynôme

$$p(z) \equiv \prod_{l=1}^{m} (z + \zeta^{2l-1}) \equiv \sum_{k=0}^{m} s_{m-k} z^k, \qquad \text{avec} \quad \zeta = \exp\frac{\pi i}{2m}, \tag{A.1}$$

où les $\{-\zeta^{2l-1}\}_{l=1}^m$ sont des racines de l'équation $\tilde{A}(-z) = 0$ avec $\mathcal{I}m\,\zeta^{2l-1} > 0$. Alors, nous avons eu les relations

$$\sum_{l=0}^{k} s_l \bar{s}_{k-l} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad k = 0 \quad \text{ou} \quad 2m, \\ 0 & \text{si} \quad 1 \leq k \leq 2m-1, \end{cases} \tag{A.2}$$

avec la convention $s_k = 0$ si $k < 0$ ou $k > m$. Et, la matrice $\tilde{\chi}_j$ a été définie par

$$\text{(A.3)}\quad \left\{ \begin{aligned} &\tilde{\chi}_j = \begin{bmatrix} \tilde{\chi}_{11} & \dots & \tilde{\chi}_{1j} \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \tilde{\chi}_{j1} & \dots & \tilde{\chi}_{jj} \end{bmatrix}; \\ &\tilde{\chi}_{pq} = \sum_{r=0}^{p-1} s_{q+r}\, \bar{s}_{p-1-r} \qquad (1 \leq p,\ q \leq m). \end{aligned} \right.$$

D'abord, pour transformer $i^{-1}\tilde{\chi}_j$ à une matrice réelle et symétrique, nous posons

$$\text{(A.4)}\qquad \sigma_k = i^{-k} s_k \qquad \text{pour } k = 0, 1, \dots, m;$$

$$\text{(A.5)}\qquad \sigma_{pq} = \sum_{r=0}^{p-1} (-1)^r \sigma_{q+r} \sigma_{p-1-r} \qquad \text{pour } 1 \leq p,\ q \leq m,$$

et considérons la matrice

$$\text{(A.6)}\qquad (\sigma)_j = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \dots & \sigma_{1j} \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \sigma_{j1} & \dots & \sigma_{jj} \end{bmatrix}.$$

Alors, nous voyons

$$\text{(A.7)}\qquad i^{-m} p(iz) = \sum_{k=0}^{m} \sigma_{m-k} z^k = \prod_{l=0}^{m} (z + \zeta^{2l-1-m}),$$

d'où l'on obtient

$$\text{(A.8)}\quad \left\{ \begin{aligned} &\sigma_0 = 1; \qquad \sigma_{m-k} = \sigma_k \qquad \text{pour } 0 \leq k \leq m; \\ &\sum_{l=0}^{k} (-1)^l \sigma_l \sigma_{k-l} = 0 \qquad \text{pour } 1 \leq k \leq 2m-1. \end{aligned} \right.$$

La matrice carrée d'ordre j, $(\sigma)_j$, ainsi obtenue est réelle. Et, de plus, nous avons

$$\text{(A.9)}\qquad \sigma_{pq} = \sigma_{qp} = \sigma_{m+1-q,\, m+1-p} \qquad \text{pour } 1 \leq p,\ q \leq m.$$

Donc $(\sigma)_j$ est symétrique. La relation entre $(\sigma)_j$ et $\tilde{\chi}_j$ est la suivante :

$$\text{(A.10)}\qquad i^{-1}\tilde{\chi}_j = \mathrm{J}_j^{*} (\sigma)_j \mathrm{J}_j, \qquad \text{où } \mathrm{J}_j = \begin{bmatrix} i & & & \\ & i^2 & & \bigcirc \\ & \bigcirc & \ddots & \\ & & & i^j \end{bmatrix}.$$

Pour vérifier la positivité de $i^{-1}\tilde{\chi}_j$, c'est-à-dire, de $(\sigma)_j$, il suffit de voir celle de la matrice $(\sigma)_m$ d'ordre m, parce que $(\sigma)_j$ est le premier j-mineur principal de $(\sigma)_m$ et que $(\sigma)_m$ est réelle. Nous allons donc chercher les propriétés de $(\sigma)_m$.

Le premier lemme suivant est facile à voir :

LEMME A.1. — *Nous avons*

$$(\text{A.11}) \qquad (\sigma)_m^{-1} = J^2 (\sigma)_m J^2, \qquad \textit{où} \quad J = J_m = \begin{bmatrix} i & & & \\ & i^2 & & \bigcirc \\ \bigcirc & & \ddots & \\ & & & i^m \end{bmatrix}.$$

Si, donc, λ est une valeur propre de $(\sigma)_m$, elle n'est pas nulle, et λ^{-1} est aussi une valeur propre de $(\sigma)_m$. Nous posons, de plus,

$$(\text{A.12}) \qquad \tau = \begin{bmatrix} \tau_{11} & \dots & \tau_{1m} \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \tau_{m1} & \dots & \tau_{mm} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} J \{ (\sigma)_m + (\sigma)_m^{-1} \} J^*,$$

où

$$(\text{A.13}) \qquad \tau_{pq} = \begin{cases} (-1)^{\frac{p-q}{2}} \sigma_{pq} & \text{si} \quad p+q = \text{pair}, \\ 0 & \text{sinon}, \\ \text{pour} \quad 1 \leqq p, \ q \leqq m. \end{cases}$$

Toutes les valeurs propres de τ, qui est réelle symétrique, ont des formes $\frac{\lambda + \lambda^{-1}}{2}$, où λ sont des valeurs propres de $(\sigma)_m$. Donc, nous allons voir que toutes les valeurs propres de τ sont positives.

A.2. La positivité de la matrice τ sera démontrée en utilisant des théorèmes classiques sur les signatures des matrices de Bézout liées avec la théorie de Sturm sur la séparation des zéros réels des polynômes à coefficients réels. La théorie générale algébrique se trouve dans [4] et [11]. Tout le contenu qui suit n'est qu'un extrait du livre de Takagi [11]. Nous nous bornerons à citer quelques constructions et résultats nécessaires sans aucune démonstration détaillée.

Au polynôme $p(z)$ défini par (A.1), nous faisons correspondre deux polynômes à coefficients réels

$$(\text{A.14}) \qquad \begin{cases} f_0(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\left[\frac{m}{2}\right]} (-1)^k \sigma_{2k} x^{m-2k} \\ \qquad = \sigma_0 x^m - \sigma_2 x^{m-2} + \dots; \\ f_1(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{\left[\frac{m+1}{2}\right]} (-1)^{k-1} \sigma_{2k-1} x^{m+1-2k} \\ \qquad = \sigma_1 x^{m-1} - \sigma_3 x^{m-3} + \dots. \end{cases}$$

Alors, nous avons

$$p(x) = f_0(x) + i f_1(x). \tag{A.15}$$

Comme un cas particulier d'un théorème de Hermite-Biehler, nous avons un

LEMME A.2. — *Soient* $\{x_k\}_{k=1}^{m}$ *et* $\{x'_l\}_{l=1}^{m-1}$ *les zéros de* $f_0(x)$ *et de* $f_1(x)$ *respectivement. Alors, ils sont tous réels simples et se séparent l'un de l'autre comme suit :*

$$x_1 < x'_1 < x_2 < x'_2 < \ldots < x'_{m-1} < x_m. \tag{A.16}$$

Nous voyons donc qu'il n'y a aucun facteur commun à $f_0(x)$ et à $f_1(x)$ autre que des constants. Nous effectuons ensuite l'algorithme euclidien par rapport au couple $(f_0(x), f_1(x))$:

$$\begin{cases} f_{h-1}(x) = q_h(x) f_h(x) - f_{h+1}(x) \quad \text{pour} \quad h = 1, 2, \ldots, r; \\ \deg(f_{h-1}) > \deg(f_h) \quad \text{pour} \quad h = 1, \ldots, r; \quad f_{r+1}(x) \equiv 0; \\ \quad \text{donc} \quad f_r(x) \text{ divise } f_{r-1}(x) \quad \text{et} \quad f_r(x) \not\equiv 0. \end{cases} \tag{A.17}$$

Nous avons ainsi obtenu une suite des polynômes de degrés décroissants :

$$\{f_0(x), f_1(x), \ldots, f_r(x)\}. \tag{A.18}$$

Soient maintenant $f(x)$ et $g(x)$ deux polynômes quelconques à coefficients réels. Posons, pour x réel,

$$v(f, g)(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } f(x) g(x) \geqq 0, \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{A.19}$$

Posons encore, pour la suite (A.18),

$$V(f_0, f_1)(x) = \sum_{h=1}^{r} v(f_{h-1}, f_h)(x). \tag{A.20}$$

La valeur $V(f_0, f_1)(x)$ est égale à la fréquence des changements des signes au point x dans la suite (A.18). Étant donnés deux réels y_0 et y_1, il nous convient d'écrire

$$V(f_0, f_1)_{y_1}^{y_0} = V(f_0, f_1)(y_0) - V(f_0, f_1)(y_1)$$

et

$$V(f_0, f_1)_{+\infty}^{-\infty} = \lim_{\substack{y_0 \to -\infty \\ y_1 \to +\infty}} V(f_0, f_1)_{y_1}^{y_0}.$$

LEMME A.3. — *Nous avons*

$$V(f_0, f_1)_{+\infty}^{-\infty} = m. \tag{A.21}$$

Nous le démontrons à l'aide du lemme A.2.

Maintenant, nous considérons les matrices de Bézout. Étant donnés, en général, deux polynômes f et g tels que

$$\text{(A.22)}\quad \begin{cases} f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n; & a_0 \neq 0; \\ g(x) = b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \ldots + b_n, & \text{donc}\quad \deg(f) \geqq \deg(g), \end{cases}$$

à coefficients réels, nous écrivons

$$\text{(A.23)}\quad \begin{cases} \dfrac{f(x)\,g(y) - f(y)\,g(x)}{x-y} = \displaystyle\sum_{p,q=1}^{n} d_{pq} x^{n-p} y^{n-q}, \\ \text{donc}\quad d_{pq} = \displaystyle\sum_{\substack{s+t=p+q-1 \\ 0 \leqq s \leqq p-1}} (a_s b_t - a_t b_s). \end{cases}$$

Alors, la matrice de Bézout par rapport au couple (f, g) est définie par

$$\text{(A.24)}\quad B(f, g) = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & \ldots & d_{1n} \\ d_{21} & d_{22} & \ldots & d_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ d_{n1} & d_{n2} & \ldots & d_{nn} \end{bmatrix}.$$

Il est facile de voir que

$$\text{(A.25)}\quad B(f_0, f_1) = \tau \quad [\textit{voir}\ (\text{A.12}) \sim (\text{A.14})].$$

Lemme A.4. — *Par un changement convenable de base, la matrice* $B(f_0, f_1)$ *se transforme en*

$$\text{(A.26)}\quad \begin{bmatrix} B(q_1, 1) & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & B(q_2, 1) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ldots\ldots\ldots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots\ldots\ldots & 0 & B(q_r, 1) \end{bmatrix}$$

[*voir* (A.17)].

La forme concrète de chacune des $B(q_h, 1)$ nous montre que

$$\text{(A.27)}\quad \text{La signature de } B(q_h, 1) = v(f_{h-1}, f_h)_{+\infty}^{-\infty} \quad \text{pour}\quad 1 \leqq h \leqq r,$$

où la signature d'une matrice signifie la différence entre les nombres des valeurs propres positives et négatives. Donc, nous avons le

Lemme A.5. — *Nous avons*

$$\text{(A.28)}\quad \text{La signature de } B(f_0, f_1) = V(f_0, f_1)_{+\infty}^{-\infty}.$$

Les lemmes A.3 et A.5 impliquent enfin que

$$\text{La signature de } B(f_0, f_1) = m,$$

ce qui achève la démonstration de la positivité de τ. On a enfin établi le lemme 4.3.

Remarque. — Nous pouvons suivre les raisonnements ci-dessus également pour la matrice originale $i^{-1}\{\varkappa_j(\lambda)-\varkappa_j(\lambda)^*\}$ définie par (4.19) et par (4.20) par rapport au polynôme $p_\lambda(z)$ défini par (4.8). La conséquence est la suivante : $i^{-1}\{\varkappa_j(\lambda)-\overline{\varkappa_j(\lambda)}\}$ est toujours définie positive pour tout $\lambda \geqq 0$, où $\overline{\varkappa_j(\lambda)}$ est la matrice $\varkappa_j(\lambda)$ avec ses éléments remplacés par leurs conjugués complexes. Malheureusement, la différence $\overline{\varkappa_j(\lambda)}-\varkappa_j(\lambda)^*$ n'est pas petite pour λ relativement petit. Donc, cette conséquence ne nous donne pas d'information favorable sur la matrice $\mathcal{B}_j(\lambda)$ pour λ petit.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] S. AGMON, *Comm. Pure and Appl. Math.*, t. 15, 1962, p. 119-147.
[2] S. AGMON, A. DOUGLIS et L. NIRENBERG, *Comm. Pure and Appl. Math.*, t. 12, 1959, p. 623-727.
[3] N. ARONSZAJN et A. N. NILGRAM, *Rend. Circ. Mat. Palermo*, 1952, p. 1-61.
[4] F. GANTMACHER, *Theory of matrices*, vol. 1 et 2.
[5] P. GRISVARD, *Archive for Rat. Mech. and Anal.*, 1967, p. 40-63.
[6] J.-L. LIONS, *Bull. Math. Soc. Math. Phys. de la R. P. R.*, t. 2, nº 50, 1958, p. 419-432.
[7] J.-L. LIONS et E. MAGENES, *Ann. Inst. Fourier*, t. 11, 1961, p. 137-178.
[8] J.-L. LIONS et P. PEETRE, *Sur une classe d'espaces d'interpolation*, Publ. Math. de l'I. H. E. S., nº 19, 1964.
[9] E. MAGENES, *Colloques internationaux du C. N. R. S.*, 1962, p. 95-111.
[10] M. SCHECHTER, *Comm. Pure and Appl. Math.*, t. 12, 1959, p. 457-486.
[11] T. TAKAGI, *Cours d'Algèbre* (*Daisûgaku Kôgi :* en japonais).
12] L. GÅRDING, *Mat. Scand.*, vol. 1, 1953.

(Manuscrit reçu le 15 mai 1968.)