Annales scientifiques de l'É.N.S.

Michel Artola

Sur les perturbations des équations d'évolution : application à des problèmes de retard

Annales scientifiques de l'É.N.S. 4e série, tome 2, nº 2 (1969), p. 137-253
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1969_4_2_2_137_0>

Ann. scient. Éc. Norm. Sup.,
4e série, t. 2, 1969, p. 137 à 253.

SUR LES PERTURBATIONS DES ÉQUATIONS D'ÉVOLUTION, APPLICATION A DES PROBLÈMES DE RETARD

PAR MICHEL ARTOLA.

TABLE DES MATIÈRES.

5. *Problèmes non linéaires.*

CHAPITRE II.

ÉQUATIONS D'ÉVOLUTION DU DEUXIÈME ORDRE.

§ 1. *Perturbations linéaires de la forme* $M_0 + M_1 \frac{\partial}{\partial t}$.

2. *Problèmes non linéaires.*

INTRODUCTION.

Plusieurs auteurs ont étudié les problèmes de *retards* dans les cas scalaire et vectoriel (en dimension finie) usuels. On peut, par exemple, renvoyer à Bellmann-Cooke [5], Halanay [9], Hale [10], Levin-Nohel [13], Volterra [29], ainsi qu'à leurs bibliographies et encore à Myskis ([21], [22]) pour deux rapports récents et très complets sur ces questions.

L'extension au cas *opérationnel* et à l'étude des *problèmes aux limites* restait à faire et l'objet de ce travail est justement d'apporter une contribution à l'étude des *phénomènes retardés* dans le cadre proposé par J.-L. Lions pour l'étude des problèmes aux limites usuels (*voir* [14] à [18]).

Nous avons ainsi été conduit à considérer par exemple des problèmes du type suivant :

(I) H *étant un espace de Hilbert complexe,*

Trouver $u \in \mathrm{F}(\mathrm{H})$ [F(H), espace de fonctions à valeurs dans H] *vérifiant dans un sens faible* (*à préciser*)

$$\frac{du}{dt}(t) + \mathrm{A}(t)\,u(t) + \mathrm{M}\,u(t) = f(t),$$

$$u(0) = u_0 \qquad (u_0 \textit{ donné dans } \mathrm{H}),$$

où :

f, fonction convenable donnée;
$\mathrm{A}(t)$, opérateur linéaire (ou non) non borné dans H;
M, une « perturbation » convenable de $\mathrm{A}(t)$.

Ce type de problème a été très étudié lorsque $\mathrm{A}(t)$ est *un opérateur de nature elliptique* et $\mathrm{M} = 0$ (problème *non* perturbé). Nous renvoyons pour cela à [14] pour le cas linéaire, à [20] pour le cas non linéaire et à leurs bibliographies.

Nous montrons qu'en perturbant de manière raisonnable l'opérateur $\mathrm{A}(t)$, les solutions du problème perturbé vérifient en général les mêmes propriétés que les solutions du problème non perturbé et que rentrent (entre autres) dans le cadre des perturbations considérées des problèmes de retards tels que le suivant :

(II) *Soit* $t \to \omega(t)$ *une fonction mesurable dans* (0, T)

$$\mathrm{E}_0 = \{t;\ \psi(t) = t - \omega(t) > 0 \quad p.p.\}$$

E_1 *complémentaire de* E_0 *dans* (0, T)

Trouver $u \in F(H)$ *vérifiant* (*dans un sens faible*)

$$u'(t) + A(t)\,u(t) + B(t)\,u(t-\omega(t)) + \int_0^t k(s,t)\,u(s)\,ds = f(t) \quad \text{p. p. en } t \in (0, T),$$

avec

$$u(0) = u_0 \quad \textit{donné dans } H,$$
$$u(t) = \tilde{u}(t) \quad \text{p. p.}, \qquad t \in \check{E}_1 = \psi(E_1)$$

(*problème de Cauchy à données épaisses*), où :

($A(t)$, $B(t)$, $K(t, s)$, opérateurs convenables de H, f, et $\tilde{u}$ donnée).

L'outil fondamental utilisé est en général la *Méthode de Galerkine* qui consiste à étudier d'abord le problème dans un sous-espace de dimension finie, puis à l'aide d'inégalités *a priori* et par utilisation de propriétés de compacité faible, de construire la solution par passage à la limite (*voir* [14]-[15]).

Notons que C. Baiocchi [4] a (simultanément et par une méthode différente qui semble moins naturelle que la nôtre) obtenu un théorème général qui peut s'appliquer à des problèmes du type considéré plus haut sans cependant atteindre au même degré de généralité.

Dans le chapitre 0, nous rappelons quelques propriétés indispensables et fixons des notations.

Au chapitre I (§ 1, n° I), nous introduisons des opérateurs de *perturbation* $M \in \mathcal{L}(L^\infty(H), L^\infty(H))$ *de type local* [i. e. tels qu'il existe $\mu(T)$, Cte > 0 telle que $\forall\, t_0 \in (0, T)$

$$| r_{t_0} M u |_{L^\infty(H)} < \mu \, | r_{t_0} u |_{L^\infty(H)}$$

(r_{t_0}, opérateur « restriction à $(0, t_0)$ »)].

Nous démontrons ensuite un théorème d'existence et d'unicité en *dimension finie* pour le *problème de Cauchy ponctuel :*

Trouver u dans $\mathcal{C}(0, T; H)$

$$\frac{du(t)}{dt} + M\,u(t) = f(t) \quad \text{p. p.}, \qquad t \in (0, T),$$
$$u(0) = u_0,$$

où $M \in \mathcal{L}(L^\infty(H), L^\infty(H))$ est de type local.

Le reste de ce n° I est consacré à l'étude du problème opérationnel (I), où $A(t)$ est donné par une *forme sesquilinéaire continue* sur un *espace de Hilbert* V (avec $V \subset H$ algébriquement et topologiquement). La principale difficulté résidant (une fois obtenues des inégalités *a priori*) dans le passage à la limite, on utilise pour réussir des méthodes introduites pour les équations de Navier-Stokes dans [16], ce qui suppose $V \to H$ *compacte*.

Si $A(t)$ est *assez régulier*, il est possible de prendre $M \in \mathcal{L}(L^\infty(V), L^\infty(H))$ de type local. Ce cas est examiné au n° III. Enfin au n° III, nous donnons un résultat de *stabilité en les données* (u_0, M, f).

Dans le paragraphe 2, nous montrons que les difficultés rencontrées au paragraphe 1 disparaissent *si* M *est plus régulier*. Il est alors possible de s'affranchir de l'hypothèse « $V \mapsto H$ compacte » dans le cas où les perturbations $M \in \mathcal{L}(L^\infty(H), L^\infty(H))$ de type local vérifient en outre, soit :

— M *est* L^2-*régulier* [i. e. $M \in \mathcal{L}(L^2(H), L^2(H))$],

soit :

— M *est de type quasi-temporel*

(c'est-à-dire admet une décomposition $M = M_1 \circ M_0$, où M_0 « agit bien » sur les espaces alors que M_1 n'agit que sur la variable temporelle).

Un exemple de *perturbation de la partie principale* de $A(t)$ est donné au n° IV.

Au paragraphe 3, nous nous plaçons dans les conditions du paragraphe 2 et nous envisageons une *méthode de décomposition* des opérateurs qui nous a été suggérée par R. Temam (que nous sommes heureux de remercier ici) et qui consiste à remplacer l'équation initiale

$$\frac{du}{dt} + (A(t) + M)\, u = f$$

par le système

$$\begin{cases} \text{(A)} \quad \dfrac{du_1}{dt} + A(t)\, u_1 = f_1, \\ \text{(B)} \quad \dfrac{du_2}{dt} + M u_2 \quad = f_2, \end{cases}$$

(A) étant *une équation parabolique*, (B) *une équation différentielle « ordinaire»* (c'est-à-dire dans la pratique une équation intégro-différentielle, à retard, etc. ordinaire).

La méthode utilisée, signalée à propos de systèmes paraboliques dans [27], consiste en des approximations *de type mêlé;* c'est-à-dire *approximations discrètes* pour (A), *semi-discrètes pour* (B).

Dans le cadre du paragraphe 1, la difficulté consiste dans l'approche des dérivées fractionnaires de u; elle n'est pas résolue ici

Le paragraphe 4 donne des exemples et montre que certains problèmes retardés se ramènent à la solution des problèmes considérés dans les paragraphes précédents. Quelques exemples comportant des retards (temporels et spatiaux) dans les conditions aux limites sont envisagés.

Le paragraphe 5 est consacré à l'étude de problèmes non linéaires et nous étendons au cas opérationnel une situation étudiée dans le cas scalaire et vectoriel (dimension finie) par Levin-Nohel [13], Hale [10] et Volterra [29].

Dans le chapitre II, nous considérons le cas *d'équations du second ordre linéaires ou non.* Pour certaines équations du second ordre du type considéré, il est certainement possible d'obtenir le résultat par application de la *méthode de régularisation parabolique* et du théorème principal du chapitre I (§ 1). Cela n'est pas considéré ici.

Dans le paragraphe 2 (équations non linéaires), nous donnons un théorème d'existence pour une équation différente de celle considérée dans [20]. L'unicité n'est acquise seulement que dans une situation du type « Levin-Nohel » généralisé.

Certains résultats du chapitre I (§ 1, n° I) ont été résumés dans une Note aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* [1].

Je remercie vivement les Professeurs de la Faculté des Sciences de Bordeaux dont je fus l'étudiant.

Je suis très heureux de pouvoir exprimer ma profonde gratitude à M. Jacques-Louis Lions qui a bien voulu s'intéresser à mes recherches depuis les premiers jours, qui m'a signalé ces problèmes, m'a conseillé, dirigé, toujours efficacement, ne ménageant ni ses encouragements ni son indulgence, en bref sans qui ce travail n'aurait jamais vu le jour.

CHAPITRE 0.

NOTATIONS. RAPPELS.

1. DONNÉES SPATIALES GÉNÉRALES. — De manière générale, nous considérons deux *espaces de Hilbert complexes séparables* V et H dans la situation suivante :

(1.1) V *est inclus dans* H *avec injection continue,*
V *est dense dans* H.

Nous *identifions toujours* H *et son antidual* H′. Si V′ désigne *l'antidual* de V, nous avons les inclusions :

$$V \subset H \subset V', \tag{1.2}$$

les *injections étant continues*, chaque espace étant *dense* dans le suivant.

Nous noterons :

$((u, v))$, $\|u\|$ le produit scalaire et la norme dans V;

(f, g) le produit scalaire dans H ou dans l'antidualité entre V et V′;

$|f|$ la norme dans H.

Si X est un *Banach* (distinct de V et H) la *norme* de $u \in X$ sera notée $|u|_X$ ou $\| \ \|_X$.

Soit $1 \leqq p \leqq +\infty$, a et b deux réels; $L^p(a, b; X)$ désigne *l'espace des (classes de) fonctions de puissance $p^{ième}$ sommable sur (a, b), pour la mesure de Lebesgue, à valeurs dans* X. (Cet espace est muni de la norme usuelle qui en fait un *Banach*.)

Dans la suite les espaces $L^p(0, T; X)$ interviendront souvent, aussi dans le but d'alléger les notations nous écrirons (lorsque aucune confusion n'est possible)

$$L^p(0, T; X) = L^p(X). \tag{1.3}$$

Enfin si X et Y sont deux *espaces vectoriels topologiques*, $\mathcal{L}(X, Y)$ désignera *l'espace des applications linéaires continues de*

$$X \mapsto Y.$$

2. Les opérateurs Λ, J. — V et H sont donnés vérifiant (1.1).

Soit

$$N = \{u \mid u \in V,\ v \to ((u, v)) \textit{ continue sur } V \textit{ pour la topologie de } H\}, \tag{2.1}$$

alors

$$((u, v)) = (\Lambda u, v), \qquad u \in N,\ v \in V, \tag{2.2}$$

où

(2.3) Λ *est un opérateur autoadjoint* > 0 *de domaine* $D(\Lambda) = N$ *dense dans* H.

Maintenant *la forme*

$$\begin{cases} v \mapsto (f, v), \qquad f \in H \\ \textit{est continue sur } H, \textit{ donc sur } V, \end{cases} \tag{2.4}$$

donc peut s'écrire

$$(f, v) = ((Jf, v)), \tag{2.5}$$

ce qui définit

$$J \in \mathcal{L}(H, V) \qquad (J = \Lambda^{-1}). \tag{2.6}$$

Nous aurons souvent recours à la *décomposition spectrale* de l'opérateur Λ.

A cet effet, on utilise le *théorème de diagonalisation de von Neumann* dans le cas *séparable* (*voir* [6], [7]) et l'on rappelle

Il existe :

$$(2.7)\quad \left\{\begin{array}{l} 1^{\circ}\ \textit{une somme } \nu\textit{-mesurable d'espaces de Hilbert } \mathcal{H}(\lambda)\ (\lambda \geqq \lambda_0 > 0), \\ d\nu, \textit{ mesure positive sur } (\lambda_0, +\infty); \\ 2^{\circ}\ \textit{une isométrie} : f \to \hat{f} \textit{ de } \mathrm{H} \textit{ sur l'espace} \\ \qquad \mathcal{H} = \int^{\oplus} \mathcal{H}(\lambda)\, d\nu(\lambda) \\ \textit{des champs de vecteurs de carré sommable (pour } d\nu) \textit{ à valeurs} \\ \textit{dans } \mathcal{H}(\lambda), \textit{ envoyant } \mathrm{V} \textit{ sur l'espace des champs de vecteurs } g \textit{ tels} \\ \textit{que } g,\ \lambda^{\frac{1}{2}} g \in \mathcal{H}, \textit{ avec} \\ \qquad \Lambda \hat{f} = \lambda \hat{f} \quad \text{si} \quad f \in \mathrm{D}(\Lambda). \end{array}\right.$$

Dans ces conditions,

$$(2.8)\qquad f \in \mathrm{D}(\Lambda^{\rho}) \iff \left\{\begin{array}{l} f \in \mathcal{H}, \\ \lambda^{\rho} f \in \mathcal{H}. \end{array}\right.$$

3. Les formes $a(t; u, v)$. — Soit pour chaque $t \in (0, \mathrm{T})$ une *forme sesquilinéaire continue* sur $\mathrm{V} \times \mathrm{V}$, avec la propriété :

$$(3.1)\quad \left\{\begin{array}{l} \textit{Pour tout } u, v \in \mathrm{V} \textit{ la fonction } t \to a(t; u, v) \textit{ est mesurable et} \\ \qquad |a(t; u, v)| \leqq \mathrm{M}\, \|u\| . \|v\| \qquad [\mathrm{M} = \mathrm{Cte},\ t \in (0, \mathrm{T})]. \end{array}\right.$$

Alors, d'une part (*cf.* [15])

$$(3.2)\quad \left\{\begin{array}{l} \text{si } u, v \in \mathrm{L}^2(\mathrm{V}), \textit{ la fonction} \\ \qquad t \mapsto a(t; u(t), v(t)) \quad \textit{est dans } \mathrm{L}^1(\mathbf{C}); \end{array}\right.$$

d'autre part,

$$(3.3)\quad \left\{\begin{array}{l} \text{soit} \quad \mathrm{N}(t) = \{u \mid u \in \mathrm{V},\ v \to a(t; u, v) \textit{ continue sur } \mathrm{V}\} \\ \qquad \textit{pour la topologie de } \mathrm{H}, \end{array}\right.$$

alors

$$(3.4)\qquad a(t; u, v) = (\mathrm{A}(t)u, v), \qquad u \in \mathrm{N}(t), \quad v \in \mathrm{V}.$$

Ce qui définit :

$$(3.5)\quad \left\{\begin{array}{l} \textit{Pour tout } t \in (0, \mathrm{T}),\ \mathrm{A}(t) \textit{ opérateur non borné dans } \mathrm{H} \textit{ de domaine} \\ \quad \mathrm{D}(\mathrm{A}(t)) = \mathrm{N}(t) \textit{ dense dans } \mathrm{H}. \end{array}\right.$$

Cet opérateur se *prolonge* en un opérateur $\in \mathcal{L}(\mathrm{V}, \mathrm{V}')$ [*noté encore* $\mathrm{A}(t)$] et d'après (3.1) et (3.2), on a

$$(3.6)\qquad \mathrm{A}(.) \in \mathcal{L}[\mathrm{L}^2(\mathrm{V}), \mathrm{L}^2(\mathrm{V}')].$$

Enfin, comme

$$(3.7)\quad \begin{cases} \textit{Pour chaque } t \in (0, T), \\ \qquad v \mapsto a(t; u, v) \quad \textit{est continue sur } V, \quad \forall u \in V. \end{cases}$$

Cela définit

$$(3.8)\quad \begin{cases} \textit{Pour chaque } t \in (0, T) \\ \qquad \mathcal{A}(t) \in \mathcal{L}(V, V) \end{cases}$$

par

$$(3.9)\qquad a(t; u, v) = ((\mathcal{A}(t)u, v)), \quad \forall u, v \in V.$$

4. Espaces de Sobolev. — 1° *Espaces* $W^{m,p}(\Omega)$ *et* $H^m(\Omega)$. — Soit Ω *un ouvert de* R^n. On désigne par $L^p(\Omega)$ *l'espace des (classes de) fonctions f de puissance* $p^{\text{ième}}$ *sommable sur* Ω. La *norme* de f dans $L^p(\Omega)$ est

$$(4.1)\qquad \|f\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |f(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

On suppose toujours : $1 \leq p \leq +\infty$.

Les *espaces de Sobolev* $W^{m,p}(\Omega)$ *généralisent l'espace* $L^p(\Omega)$.

$$(4.2)\quad \begin{cases} W^{m,p} = \{u \mid u \in L^p(\Omega), \quad D^j u \in L^p(\Omega) \quad (^1), \quad \forall |j| \leq m\} \\ \quad \text{si} \quad m = 0, \quad W^{0,p}(\Omega) = L^p(\Omega) \quad (D^0 u = u). \end{cases}$$

Muni de la norme

$$(4.3)\qquad \|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \left(\sum_{|j| \leq m} \int_\Omega |D^j u|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}};$$

(4.4) $W^{m,p}(\Omega)$ *est un espace de Banach réflexif,* $\forall p$, $1 < p < +\infty$,
$W^{m,2}(\Omega) = H^m(\Omega)$ *est un espace de Hilbert* $(p = 2)$.

On désigne par

(4.5) $W_0^{m,p}(\Omega)$ *l'adhérence de* $D(\Omega)$ *dans* $W^{m,p}(\Omega)$

[où $D(\Omega)$ est *l'espace de Schwartz des fonctions à valeurs complexes indéfiniment différentiables à support compact dans* Ω].

et par

(4.6) $W^{-m,p'}(\Omega)$ *le dual topologique de* $W_0^{m,p}(\Omega)$.

C'est un *espace à distributions sur* Ω.

D'une *manière générale,*

$$(4.7)\qquad W_0^{m,p}(\Omega) \subset W^{m,p}(\Omega) \quad \textit{l'inclusion étant stricte.}$$

---

(1) $D^j u$, notation de L. Schwartz. Les dérivées sont prises au sens des distributions.

2° *Espaces* $H^s(\Gamma)$. — Soit pour simplifier Ω *ouvert borné de* R^n *de frontière* Γ *variété indéfiniment différentiable de dimension* $n-1$.

$L^2(\Gamma)$ désignant *l'espace des (classes de) fonctions de carré sommable sur* Γ *pour la mesure superficielle sur* Γ,

$$(4.8)\quad \left\{\begin{array}{l}\text{Pour } s = m \text{ entier} \geq 0\,;\\ \quad H^s(\Gamma) \textit{ est l'espace des fonctions dont toutes les dérivées distributions}\\ \quad \textit{sur } \Gamma \textit{ d'ordre} \leq m, \textit{ sont dans } L^2(\Gamma) - H^0(\Gamma) = L^2(\Gamma).\end{array}\right.$$

On définit alors $H^s(\Gamma)$ pour $0 < s < m$ à l'aide de la Théorie de l'Interpolation.

Soit

$$\mathcal{W}_\alpha = \{\, u \mid t^\alpha u \in L^2(0, +\infty\,;\, H^m(\Gamma)),\ t^\alpha u' \in L^2(0, +\infty\,;\, H^0(\Gamma))\,\},$$

$$\alpha + \frac{1}{2} = \theta \in\,]0, 1[$$

qui est un *Hilbert* pour la norme

$$\| u \|_{W_\alpha} = \left(\int_0^{+\infty} (\| t^\alpha u(t) \|^2_{H^m(\Gamma)} + \| t^\alpha u'(t) \|^2_{H^0(\Gamma)})\, dt \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Alors pour $u \in \mathcal{W}_\alpha$ on peut définir *la valeur* $u(0)$ *à l'origine et lorsque* u *parcourt* $\mathcal{W}_\alpha$ $u(0)$ *parcourt* T_α *(espace de traces)*.

Soit

$$\| a \|_{T_\alpha} = \inf \| v \|_{\mathcal{W}_\alpha}, \qquad v \in \mathcal{W}_\alpha, \quad v(0) = a.$$

Ce qui munit T_α d'une *structure hilbertienne*.

Par *définition*, on pose

$$H^{(1-\theta)m}(\Gamma) = T_\alpha, \qquad \theta = \frac{1}{2} + \alpha \in\,]0, 1[.$$

On a alors le

THÉORÈME (2). — *Soit* Ω *un ouvert borné de* R^n *de frontière* Γ *variété de dimension* $n-1$ *indéfiniment différentiable,* Ω *étant d'un seul côté de* Γ.

Pour tout $u \in H^m(\Omega)$ *on peut définir de façon unique :*

$$\gamma_j u = \frac{\partial^j}{\partial \nu^j} u \in H^{m-j-\frac{1}{2}}(\Gamma) \qquad (0 \leq j \leq m-1),$$

l'application $u \to \gamma_j u$ *étant continue de* $H^m(\Omega) \mapsto H^{m-j-\frac{1}{2}}(\Gamma)$.

Pour tous ces résultats on renvoie à la bibliographie de [14] et à [26].

---

(2) La conclusion du théorème vaut pour Γ borné, Ω borné ou non (*cf.* [14], p. 17).

5. Le lemme de Gronwall. — Nous nous servirons constamment du

Lemme. — *Soient u, $v \in L^1_{\mathrm{loc}}(R)$, avec u, $v \geq 0$ vérifiant*

$$u(t) \leq C_1 + \int_0^t u(\sigma)\, v(\sigma)\, d\sigma \quad p.p. \qquad (C_1 \text{ Cte} > 0), \tag{5.1}$$

alors

$$u(t) \leq C_1 \exp\left(\int_0^t v(\sigma)\, d\sigma\right) \quad p.p. \tag{5.2}$$

Démonstration. — De (5.1) nous déduisons :

$$\frac{u(t)\, v(t)}{C_1 + \int_0^t u(\sigma)\, v(\sigma)\, d\sigma} \leq v(t) \quad \text{p. p.}, \tag{5.3}$$

d'où

$$\mathrm{Log}\left(C_1 + \int_0^t u(\sigma)\, v(\sigma)\, d\sigma\right) - \mathrm{Log}\, C_1 \leq \int_0^t v(\sigma)\, d\sigma \tag{5.4}$$

et

$$u(t) \leq C_1 + \int_0^t u(\sigma)\, v(\sigma)\, d\sigma \leq C_1 \exp \int_0^t v(\sigma)\, d\sigma. \tag{5.5}$$

C. Q. F. D.

CHAPITRE I.

Équations d'évolution du premier ordre.

§ 1. Une classe de perturbations de la forme $+\,M$.

I. — Perturbations $M \in \mathcal{L}(L^\infty(X),\ L^\infty(X))$.

0. Opérateurs de type local. — *Soit X un espace de Banach réel ou complexe.*

Pour t fixé dans $(0, T)$, $L^\infty(0, t;\, X) = L^\infty_t(X)$ *sera identifié au sous-espace fermé de* $L^\infty(X)$:

$$\{ u \mid u \in L^\infty(X),\ u(s) = 0 \text{ p. p.},\ s > t \}. \tag{0.1}$$

Si $u \in L^\infty(X)$, nous posons

$$r_t u(s) = \begin{cases} u(s) & \text{p. p.}, \quad s \in (0, t) \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \tag{0.2}$$

Alors la fonction $r_t u$ [*restriction de u à* $(0, t)$] est dans $L^\infty_t(X)$ et

$$| r_t u |_{L^\infty_t(X)} = | r_t u |_{L^\infty(X)}. \tag{0.3}$$

DÉFINITION. — *Un opérateur* $M \in \mathcal{L}(L^\infty(X), L^\infty(X))$ *sera dit être de type local si l'on a*

$$(0.4)\quad \begin{cases} \exists\, \mu = \mu(T) \text{ constante } > 0 \text{ ne dépendant que de } T \text{ telle que} \\ \qquad \forall\, t_0 \in (0, T), \quad |r_{t_0} M u|_{L^\infty(X)} \leq \mu |r_{t_0} u|_{L^\infty(X)}. \end{cases}$$

Exemples :

1° Soit $t \to \omega(t)$ *une fonction mesurable* définie dans $(0, T)$. On pose

$$(0.5)\quad \forall\, u \in L^\infty(X), \qquad (Mu)(t) = \text{p. p.} \begin{cases} u(t-\omega(t)) & \text{si } t-\omega(t) > 0 \text{ p. p.,} \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

Si t_0 est fixé dans $(0, T)$:

$$\forall\, u \in L^\infty(X) \qquad \textit{telle que} \quad \operatorname{supp} u \subset (0, t_0) \quad (^3),$$

on a

$$(0.6)\qquad \operatorname{supp} Mu \subset (0, t_0)$$

et la condition (0.4) est trivialement vérifiée.

2° Considérons

$$(s, t) \to K(s, t)$$

une *application* de $(0, T)\times(0, T) \to \mathbf{C}$ (corps des complexes), avec :

$$(0.7)\quad \begin{cases} 1^\circ & \forall\, t \in (0, T), \quad K(.\,, t) \in L^1(C) = Y; \\ 2^\circ & \textit{la fonction } K : (0, T) \mapsto Y \textit{ définie par } t \mapsto K(.\,, t) = K(t), \textit{ est dans } L^\infty(Y). \end{cases}$$

Définissons l'opérateur M *par*

$$(0.8)\qquad (Mu)(t) = \int_0^t K(s, t)\, u(s)\, ds \quad \text{p. p. en } t \in (0, T);$$

ici,

$$\textit{si} \quad \operatorname{supp} u \subset (0, t_0), \qquad \textit{on a} \quad \operatorname{supp} Mu \supset (0, t_0),$$

mais (0.4) *reste cependant vérifiée.*

De manière précise :

$$(0.9)\qquad \forall\, t \in (0, T), \quad |r_t M u|_{L^\infty(X)} \leq |K|_{L^\infty(Y)} |r_t u|_{L^\infty(X)}.$$

3° *Soit* $\forall\, t \in (0, T)$, $N(t) \in \mathcal{L}(X, X)$, avec

$$(0.9)\qquad |N(t) u|_X \leq k(T) |u|_X, \quad \forall\, t \in (0, T), \quad \forall\, u \in X.$$

Alors l'opérateur N défini par

$$(0.10)\qquad \forall\, u \in L^\infty(X), \quad Nu(t) = N(t)\, u(t) \quad \text{p. p.}$$

est dans $\mathcal{L}(L^\infty(X), L^\infty(X))$ *et de type local.*

---

(3) supp u = support de la fonction u.

4° *Soit* $\Omega =]0, 1[$ (pour fixer les idées).
On prend $X = L^2(\Omega)$.

On se donne *deux fonctions à valeurs dans* $\mathbf{R}$:

$$(0.11) \quad \begin{cases} \text{(i)} \ \omega \mid t \mapsto \omega(t) \quad \textit{est mesurable définie dans } (0, T); \\ \text{(ii)} \ \chi \mid (t, x) \mapsto \chi(t, x) \ \textit{définie dans }]0, T[\times \Omega; \textit{ mesurable en } t, \textit{ une} \\ \qquad \textit{fois continûment différentiable en } x, \textit{ avec} \\ \qquad\qquad \forall x \in \Omega, \quad 0 \leq \chi(t, x) \leq x, \quad \forall t \in (0, T), \\ \qquad \left| \dfrac{\partial}{\partial x} \chi(t, x) \right| \geq \chi_0 > 0 \qquad [\chi_0 \textit{ indépendant de } (t, x)]. \end{cases}$$

On définit M par

$$(Mu)(t, x) = \text{p. p.} \begin{cases} u(t - \omega(t), \quad \chi(t, x)) & \text{si } t - \omega(t) > 0 \text{ p. p.} \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

Alors

$$(0.11) \qquad \sup_{0 \leq s \leq t} \int |Mu(s, x)|^2 \, dx \leq \frac{1}{\chi_0} \sup_{0 \leq s \leq t} \int_\Omega |u(s, y)|^2 \, dy$$

et $M \in \mathcal{L}(L^\infty(X), L^\infty(X))$ *est de type local.*

Remarque. — L'opérateur M *ne conserve donc pas en général les supports.* Ainsi,

$$\textit{si} \quad \operatorname{supp} u = [a, b], \quad a, b \in (0, T), \qquad \textit{on n'a pas} \quad \operatorname{supp} Mu \subset (a, b).$$

1. Un théorème préliminaire. — Dans ce numéro nous nous donnons :

$$(1.1) \quad \begin{cases} 1^\circ \ \textit{un espace de Banach X réel ou complexe;} \\ 2^\circ \ \textit{un opérateur } M \in \mathcal{L}(L^\infty(X), L^\infty(X)) \textit{ de type local.} \end{cases}$$

Nous allons démontrer le

Théorème. — *Étant donnés*

$$(1.2) \qquad f \in L^1(0, T; X), \qquad u_0 \in X,$$

il existe une fonction u unique vérifiant

$$(1.3) \qquad u \in \mathcal{C}(0, T; X), \qquad u' \in L^1(0, T; X);$$

$$(1.4) \qquad \begin{cases} u'(t) = M u(t) + f(t) \quad \textit{p.p. dans } (0, T), \\ u(0) = u_0. \end{cases}$$

Démonstration du théorème préliminaire. — *Première étape : On suppose* $T = T_0 < \frac{1}{\mu}$.

(i) *Unicité :* Soit

$$(1.5) \qquad u \textit{ une solution de } (1.4), \qquad \textit{avec} \quad u_0 = 0; \qquad f = 0.$$

Alors u vérifie

(1.6)
$$\begin{cases} u(t) = \int_0^t (\mathrm{M}u)(\sigma)\, d\sigma, \\ |u(t)|_{\mathrm{X}} \leq \mu t \sup_{\sigma \in (0, t)} |u(\sigma)|_{\mathrm{X}}, \end{cases}$$

d'où l'on déduit que

(1.7)
$$(1 - \mu \mathrm{T}_0) \sup_{\sigma \in (0, \mathrm{T}_0)} |u(\sigma)|_{\mathrm{X}} \leq 0, \qquad 1 - \mu \mathrm{T}_0 > 0.$$

Ainsi $u = 0$ *sur* $(0, \mathrm{T}_0)$.

(ii) *Existence :* Nous définissons *les approximations successives* sur $(0, \mathrm{T}_0)$ par

(1.8)
$$\begin{cases} u_0(t) = u_0, \\ u_n(t) = u_0 + \int_0^t [(\mathrm{M}u_{n-1})(\sigma) + f(\sigma)]\, d\sigma. \end{cases}$$

Alors $\forall\, n \geq 0$:

(1.9)
$$u_n \in \mathcal{C}(0, \mathrm{T}_0; \mathrm{H}).$$

Maintenant de

$$u_n(t) - u_{n-1}(t) = \int_0^t \mathrm{M}(u_{n-1} - u_{n-2})(\sigma)\, d\sigma$$

nous déduisons l'inégalité :

(1.10)
$$\sup_{\sigma \in (0, t)} |u_n(\sigma) - u_{n-1}(\sigma)|_{\mathrm{X}} < t \sup_{\sigma \in (0, t)} |u_{n-1}(\sigma) - u_{n-2}(\sigma)|_{\mathrm{X}}$$

et de

(1.11)
$$\sup_{\sigma \in (0, t)} |u_1(\sigma) - u_0(\sigma)|_{\mathrm{X}} < \mu t |u_0|_{\mathrm{X}} + \int_0^t |f(\sigma)|_{\mathrm{X}}\, d\sigma.$$

Nous obtenons, par récurrence :

(1.12)
$$\sup_{\sigma \in (0, t)} |u_n(\sigma) - u_{n-1}(\sigma)|_{\mathrm{X}} < (\mu t)^n |u_0|_{\mathrm{X}} + (\mu t)^{n-1} \int_0^t |f(\sigma)|_{\mathrm{X}}\, d\sigma.$$

Mais $\mathrm{T} = \mathrm{T}_0$ *vérifie* $\mathrm{T}_0 \mu < 1$, alors

(1.13) $\{u_n\}$ *converge vers* u *dans* $\mathcal{C}(0, \mathrm{T}; \mathrm{X})$ *fort*

et comme $\mathrm{M} \in \mathcal{L}(\mathrm{L}^\infty(\mathrm{X}), \mathrm{L}^\infty(\mathrm{X}))$,

(1.14)
$$\mathrm{M}u_n \to \mathrm{M}u \quad \textit{dans } \mathrm{L}^\infty(\mathrm{X}), \qquad \textit{donc dans } \mathrm{L}^1(\mathrm{X}) \textit{ fort}.$$

Par suite, u satisfait :

(1.15)
$$\begin{cases} u(t) = u_0 + \int_0^t \{(\mathrm{M}u)(\sigma) + f(\sigma)\}\, d\sigma, \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

et admet *une dérivée au sens des distributions localement sommable sur* $(0, T_0)$ *vérifiant*

$$(1.16) \qquad \{ u'(t) = (Mu)(t) + f(t) \quad \text{p. p. dans } (0, T_0).$$

Le théorème est ainsi démontré pour $T = T_0 < \frac{1}{\mu}\cdot$

Deuxième étape : Cas général, $T > \frac{1}{\mu}\cdot$ — *Désignons par* u^0 *la solution trouvée sur* $(0, T_0)$. *Il suffit de prouver qu'il est possible de la prolonger à* $(T_0, 2T_0)$.

Définissons les approximations successives par

$$(1.17) \quad u_0(t) = \begin{cases} u^0(t), & t \in (0, T_0), \\ u^0(T_0), & t \in (T_0, 2T_0); \end{cases}$$

$$(1.18) \quad u_n(t) = \begin{cases} u^0(t), & t \in (0, T_0), \\ u^0(T_0) + \int_{T_0}^{t} [(Mu_{n-1})(\sigma) + f(\sigma)]\, d\sigma, & t \in (T_0, 2T_0) \end{cases}$$

et posons

$$(1.19) \qquad v_n = u_n - u_{n-1}.$$

Dans ces conditions,

$$(1.20) \quad \forall n \geq 1, \quad |v_n(t)|_X \leq (t - T_0) \sup_{\sigma \in (0, t)} |r_t(Mv_{n-1})(\sigma)|_X, \qquad t \in]T_0, 2T_0[,$$

mais, d'après sa définition,

$$(1.21) \qquad \operatorname{supp}(v_n) \subset (T_0, t),$$

donc (1.20) et (0.4) entraînent, compte tenu de (1.21),

$$(1.22) \quad \forall n \geq 2, \quad |v_n(t)|_X \leq (t - T_0) \sup_{\sigma \in (T_0, t)} |v_{n-1}(\sigma)|_X, \qquad t \in]T_0, 2T_0[.$$

D'autre part,

$$(1.23) \quad \sup_{\sigma \in (T_0, t)} |v_1(\sigma)|_X \leq (t - T_0)\, \mu \sup_{\sigma \in (0, t)} |u_0(\sigma)|_X + \int_{T_0}^{t} |f(\sigma)|_X\, d\sigma$$

notant que

$$(1.24) \qquad \sup_{\sigma \in (0, t)} |u_0(\sigma)|_X = \sup_{\sigma \in (0, T_0)} |u^0(\sigma)|_X,$$

nous aurons

$$(1.25) \quad \sup_{\sigma \in (T_0, 2T_0)} |v_n(\sigma)|_X \leq \mu^n (t - T_0)^n \sup_{\sigma \in (0, T_0)} |u^0(\sigma)|_X + \mu^{n-1} (t - T_0)^{n-1} \int_{T_0}^{t} |f(\sigma)|_X\, d\sigma.$$

Ce qui prouve que l'on peut prolonger u^0 sur $(T_0, 2T_0)$ en une fonction u^1 vérifiant

$$(1.26) \quad \Big\{ \forall t \in [T_0, 2T_0], \quad u^1(t) = u^0(T_0) + \int_{T_0}^{t} (Mu^1)(\sigma)\, d\sigma + \int_{T_0}^{t} f(\sigma)\, d\sigma.$$

Comme dans la *première étape*, il est aisé de voir que u^1 est *unique*.

Si $2T_0 \geqq T$, le théorème est démontré, sinon on recommence sur $(2T_0, 3T_0)$ et ainsi de suite jusqu'à atteindre T.

2. Le problème. Énoncé du théorème principal.

2.1. *Hypothèses.* — Nous considérons ici *deux espaces de Hilbert complexes* V *et* H *dans la situation décrite au chapitre* o (chapitre auquel nous renvoyons pour les notations).

Pour $t \in (0, T)$, $T > 0$ donné, soit $a(t; u, v)$ *une famille de formes sesquilinéaires continues sur* $V \times V$ vérifiant les hypothèses :

$$(2.1)\quad \begin{cases} \text{(i)}\ \forall (u, v) \in V \times V,\ t \mapsto a(t; u, v) \text{ est mesurable sur } (0, T); \\ \text{(ii)}\ \exists\, c, \text{ constante indépendante de } t, \text{ avec} \\ \qquad |a(t; u, v)| \leqq C \|u\| . \|v\|, \quad \forall t \in (0, T), \quad \forall u, v \in V; \end{cases}$$

(2.2) $\exists\, \alpha > 0$, α *constante indépendante de* $t \in (0, T)$ *avec*

$$\operatorname{Re} a(t; u, u) \geqq \alpha [u]^2$$

où [ ] est une *semi-norme* sur V telle que

$$[|u|^2 + [u]^2]^{\frac{1}{2}} \simeq \|u\|, \quad \forall u \in V.$$

Nous introduisons ensuite un opérateur M (*opérateur de perturbation*), avec

$$(2.3)\qquad M \in \mathcal{L}(L^\infty(H), L^\infty(H)) \quad \textit{de type local.}$$

2.2. Nous posons le

Problème P_1. — *Étant donnés*

$$u_0 \in H, \quad f \in L^2(V') \quad \text{ou} \quad f \in L^1(H),$$

existe-t-il

$$u \in L^2(V) \cap L^\infty(H)$$

vérifiant

$$(2.4)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_0^T \{a(t; u(t), \varphi(t)) - (u(t), \varphi'(t))\}\, dt + \int_0^T (Mu(t), \varphi(t))\, dt \\ \displaystyle\qquad = (u_0, \varphi(0)) + \int_0^T (f(t), \varphi(t))\, dt \end{cases}$$

pour toute φ, *telle que :* $\varphi \in L^2(V)$, $\varphi' \in L^2(H)$, $\varphi(T) = 0$?

P_1 est un problème de Cauchy faible pour l'équation parabolique perturbée :

$$(2.5)\qquad \frac{\partial u}{\partial t} + (A + M)\, u = f,$$

où A est défini par $a(t; u, v)$.

L'équation non perturbée ($M = 0$) a été étudiée dans [14].

2.3. Nous faisons maintenant les hypothèses supplémentaires :

(2.6) *L'injection* $V \to H$ *est compacte* (complètement continue);

(2.7) *Si* $u_n \to u$ *p. p. dans* H *sur* $(0, T)$, $Mu_n \to Mu$ *dans les mêmes conditions*

et nous énonçons le

THÉORÈME 1. — *Les hypothèses* (2.1), (2.2), (2.3), (2.6), (2.7) *étant satisfaites, il existe une solution unique au problème* P_1, *avec notamment :*

L'application $(f, u_0) \mapsto u$ *est continue :*

a. de $L^2(V') \times H$ [*resp.* $L^1(H) \times H$] $\mapsto \mathcal{C}(0, T; H)$;

b. de $L^2(V') \times H$ [*resp.* $L^1(H) \times H$] $\mapsto L^2(V)$.

Le théorème exprime *la stabilité sous la perturbation* $+ M$ *des résultats* obtenus par M. Lions dans ([14], [15], [17]) pour le problème non perturbé.

3. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 1.I. — Nous allons utiliser *la méthode de Faedo-Galerkine* pour laquelle on renvoie à ([14], [15]).

Le plan de la démonstration sera le suivant :

3.1. Le système approché;

3.2. Inégalités *a priori*;

3.3. Inégalités *a priori* pour les dérivées fractionnaires;

3.4. Passage à la limite;

3.5. Régularité de la solution. Unicité.

3.1. *Le système approché.* — Soit $\{w_j\}$, $j = 1, \ldots$ une base de V.

Posons

$$u_m(t) = \sum_{i=1}^{m} g_{im}(t)\, w_i, \tag{3.1}$$

les g_{im} étant *solutions du système*

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{d}{dt}(u_m(t), w_j) + a(t; u_m(t), w_j) + ((Mu_m)(t), w_j) = (f(t), w_j) \\ &\qquad (1 \leq j \leq m), \\ &g_{im}(0) = \alpha_{im} \end{aligned}\right. \tag{3.2}$$

et les α_{im} étant choisis de manière que

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_{im} w_i \to u_0 \quad \textit{dans H fort lorsque } m \to +\infty. \tag{3.3}$$

LEMME 3.1. — *Il existe une solution unique au système* (3.2) *avec*

(3.4) $$u_m \in \mathrm{L}^\infty(\mathrm{V}), \qquad u'_m \in \mathrm{L}^1(\mathrm{V}).$$

Démonstration du lemme 3.1. — Désignons par $\vec{g}_m(t)$ le vecteur de $\mathbf{C}^m$

$$\forall\, t \in (0, \mathrm{T}), \quad \vec{g}_m(t) = (g_{1m}(t), \ldots, g_{m,m}(t)).$$

Les $\{w_j\}_{j=1,\ldots,m}$ étant *linéairement indépendants*, (3.2) est équivalent à

(3.4) $$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\vec{g}_m(t) = \mathcal{A}_m(t)\,\vec{g}_m(t) + \mathcal{M}_m(\vec{g}_m)(t) + \vec{\mathcal{F}}_m(t), \\ \vec{g}_m(0) = \vec{\alpha}_m, \end{cases}$$

où

(3.5) $$\begin{cases} \text{(i)} \ \forall\, t \in (0, \mathrm{T}), \quad \mathcal{A}_m(t) \in \mathcal{L}(\mathbf{C}^m, \mathbf{C}^m); \\ \text{(ii)} \ \mathcal{M}_m \in \mathcal{L}(\mathrm{L}^\infty(\mathbf{C}^m), \mathrm{L}^\infty(\mathbf{C}^m)), \text{ de type local.} \end{cases}$$

[On utilise ici l'hypothèse (3.2).]

Comme pour m fixé, la famille $\mathcal{A}_m$ *est uniformément bornée par rapport à t*, il en résulte (*voir* exemple n° 3 du n° 0)

(3.6) $$\mathcal{A}_m + \mathcal{M}_m \in \mathcal{L}(\mathrm{L}^\infty(\mathbf{C}_m), \mathrm{L}^\infty(\mathbf{C}_m)), \quad \textit{de type local.}$$

Ainsi, *d'après le théorème préliminaire :*

(3.7) $$\begin{cases} \textit{Pour m fixé, il existe une solution (et une seule) } \vec{g}_m \textit{ vérifiant (3.4) et} \\ \vec{g}_m \in \mathcal{C}(0, \mathrm{T}; \mathbf{C}^m), \quad \vec{g}'_m \in \mathrm{L}^1(\mathbf{C}^m), \end{cases}$$

d'où le lemme 3.1.

3.2. *Inégalités* a priori. — De (3.2), on déduit

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u_m(t)|^2 + \operatorname{Re} a(t; u_m(t), u_m(t)) + \operatorname{Re}((\mathrm{M}u_m)(t), u_m(t)) = \operatorname{Re}(f(t), u_m(t)),$$

puis, en intégrant sur (0, s),

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}|u_m(s)|^2 &+ \operatorname{Re}\int_0^s a(\sigma; u_m(\sigma), u_m(\sigma))\,d\sigma \\ &= \frac{1}{2}|u_m(0)|^2 - \int_0^s \operatorname{Re}(\mathrm{M}u_m(\sigma), u_m(\sigma))\,d\sigma \\ &\quad + \int_0^s \operatorname{Re}(f(\sigma), u_m(\sigma))\,d\sigma, \end{aligned}$$

d'où

(3.8) $$\begin{aligned} \frac{1}{2}|u_m(s)|^2 + \alpha\int_0^s \|u_m(\sigma)\|^2\,d\sigma \leq \frac{1}{2}|u_m(0)|^2 &+ \int_0^s |\mathrm{M}u_m(\sigma)|.|\tilde{u}_m(\sigma)|\,d\sigma \\ &+ \left|\int_0^s \operatorname{Re}(f(\sigma), u_m(\sigma))\,d\sigma\right|. \end{aligned}$$

D'après (3.2), on peut écrire

$$(3.9)\qquad \int_0^s |\mathrm{M}u_m(\sigma)|.|u_m(\sigma)|\,d\sigma \leqq \mu \sup_{\sigma\in(0,s)} |u_m(\sigma)| \int_0^s |u_m(\sigma)|\,d\sigma,$$

donc en prenant dans (3.8) le sup en $s\in(0, t)$:

$$(3.10)\qquad \begin{aligned} &\frac{1}{2}\sup_{s\in(0,t)}|u_m(s)|^2+\alpha\int_0^t [u_m(\sigma)]^2\,d\sigma \\ &\leqq \frac{1}{2}|u_0|^2+\frac{1}{4}\sup_{s\in(0,t)}|u_m(s)|^2+\mu^2\left(\int_0^t |u_m(\sigma)|\,d\sigma\right)^2 \\ &\quad +\int_0^t \mathrm{Re}(f(\sigma),\, u_m(\sigma))\,d\sigma|. \end{aligned}$$

Nous considérons maintenant deux cas :

Premier cas : $f\in \mathrm{L}^2(\mathrm{V}')$. — Alors

$$(3.11)\qquad \left|\int_0^t \mathrm{Re}(f(\sigma),\, u_m(\sigma))\,d\sigma\right| \leqq \int_0^t |f(\sigma)|_{\mathrm{V}'}\|u_m(\sigma)\|\,d\sigma$$

et il existe une constante C_0, telle que l'on ait

$$(3.12)\qquad \left|\int_0^t \mathrm{Re}(f(\sigma),\, u_m(\sigma))\,d\sigma\right| \leqq \mathrm{C}_0\int_0^t |f(\sigma)|_{\mathrm{V}'}^2\,d\sigma+\frac{\alpha}{2}\int_0^t \{[u_m(\sigma)]^2+|u_m(\sigma)|^2\}\,d\sigma.$$

Donc, d'après (3.10) et utilisation de *Cauchy-Schwartz*, il vient

$$(3.13)\qquad \begin{aligned} &\frac{\alpha}{2}\int_0^t [u_m(\sigma)]^2+d\sigma+\frac{1}{4}\sup_{s\in(0,t)}|u_m(s)|^2 \\ &\leqq \frac{1}{2}|u_0|^2+\left(\frac{\alpha}{2}+\mu^2 t\right)\int_0^t |u_m(\sigma)|^2\,d\sigma+\mathrm{C}_0\int_0^t |f(\sigma)|_{\mathrm{V}'}^2\,d\sigma. \end{aligned}$$

De (3.13) il vient *a fortiori*

$$(3.14)\qquad \left\{\begin{aligned} &\forall s\in(0, t),\quad |u_m(s)|^2\leqq \mathrm{C}_1\left(|u_0|^2+\int_0^t |f(\sigma)|_{\mathrm{V}'}^2\,d\sigma\right)+\gamma(t)\int_0^t |u_m(\sigma)|^2\,d\sigma, \\ &\qquad \mathrm{C}_1,\ \text{Constante indépendante de } t\in(0, \mathrm{T}),\quad \gamma(t)=\left(\frac{\alpha}{2}+\mu^2 t\right) \end{aligned}\right.$$

et *l'inégalité de Gronwall* donne

$$(3.15)\qquad |u_m(s)|^2\leqq \mathrm{C}_2(\mathrm{T})\left(|u_0|^2+\int_0^{\mathrm{T}} |f(\sigma)|_{\mathrm{V}'}^2\,d\sigma\right),\quad \forall s\in(0, \mathrm{T}).$$

Cette inégalité jointe à (3.13) et à la définition de la semi-norme [ ], prouve

$$(3.16)\qquad \forall t\in(0, \mathrm{T}),\quad \int_0^t \|u_m(\sigma)\|^2\,d\sigma\leqq \mathrm{C}_3(\mathrm{T}).$$

Deuxième cas : $f \in L^1(H)$. — Nous aurons, cette fois :

$$\left| \int_0^t \operatorname{Re}(f(\sigma),\, u_m(\sigma))\, d\sigma \right| \leq \frac{1}{8} \sup_{\sigma \in (0,t)} |u_m(\sigma)|^2 + 2\left(\int_0^T |f(\sigma)|\, d\sigma \right)^2.$$

Dans ces conditions, nous aboutirons à

$$(3.15)' \qquad |u_m(s)|^2 \leq C'_2(T) \left\{ |u_0|^2 + \left(\int_0^T |f(\sigma)|\, d\sigma \right)^2 \right\}, \quad \forall s \in (0,\, T);$$

$$(3.16)' \qquad \int_0^t \|u_m(\sigma)\|^2\, d\sigma \leq C'_3(T), \quad \forall t \in (0,\, T).$$

En résumé, nous avons obtenu le

LEMME 3.2.

(i) u_m *reste dans un borné de* $L^\infty(H)$;

(ii) u_m *reste dans un borné de* $L^2(V)$.

Remarque 3.1.

(i) *L'hypothèse* $V \to H$ *compacte n'est pas intervenue ici;*

(ii) Comme nous l'expliquerons au paragraphe 2, nº o, *les conclusions du lemme* 3.2 *sont*, contrairement au cas $M = 0$, *insuffisantes* pour le passage à la limite.

3.3. *Inégalités* a priori *pour les dérivées fractionnaires.* — Nous allons exploiter ici une idée et des méthodes de J.-L. Lions utilisées dans [16] à propos des équations de *Navier-Stockes.*

1º *Commençons par prolonger f*, M, $a(t;\, u,\, v)$ *sur toute la droite* comme suit :

$$(3.17) \quad \begin{cases} \tilde f(t) = 0 & \text{si } t < 0 \text{ et } t > T; \quad \tilde f(t) = f(t), \quad t \in (0,\, T), \\ \tilde M = 0 & \text{si } t < 0 \text{ et } t > T; \quad \tilde M = M, \quad t \in (0,\, T), \\ \tilde a(t;\, u,\, v) = 0 & \text{si } t < 0, \quad \tilde a(t;\, u,\, v) = a(t;\, u,\, v), \quad t \in (0,\, T), \\ \tilde a(t;\, u,\, v) = ((u,\, v)) & \text{si } t > T. \end{cases}$$

Dans ces conditions :

$$(3.18) \quad \begin{cases} \textit{Soit } U_m \textit{ la solution du système obtenu en remplaçant } f,\, M,\, a(t;\, u,\, v) \\ \textit{par } \tilde f,\, \tilde M,\, \tilde a(t;\, u,\, v) \textit{ dans } 3.2. \end{cases}$$

U_m vérifie *au sens des distributions*

$$(3.19) \quad \begin{cases} \dfrac{d}{dt}(U_m(t),\, w_j) = (\tilde f(t),\, w_j) + (U_m(0),\, w_j)\, \delta \\ \qquad\qquad - (\tilde M U_m(t),\, w_j) - ((\tilde{\mathfrak{a}}(t)\, U_m(t),\, w_j)) \\ \qquad\qquad (0 \leq j \leq m), \end{cases}$$

où

$$(3.20)\quad \begin{cases} \text{(i)}\ \tilde{\mathfrak{A}}(t) \in \mathcal{L}(V, V)\ (\textit{pour chaque } t) \text{ est } \textit{définie par } a(t;\, u,\, v); \\ \text{(ii)}\ \tilde{a}(t;\, u,\, u) \geqq \tilde{\alpha}[u]^2,\ \forall u \in V,\ \tilde{\alpha} = \inf(\alpha, 1). \end{cases}$$

Comme pour $t \to +\infty$, $U_m(t)$ *décroît exponentiellement vers zéro*, à cause du choix de $\tilde{a}(t;\, u,\, v)$, on voit en reprenant les estimations faites dans le nº 3.2, que l'on a

$$(3.21)\quad \begin{cases} U_m = u_m \quad \text{p. p. sur } (0, T), \\ U_m \in L^2(0, +\infty; V) \cap L^\infty(0, +\infty; H), \qquad \widetilde{M U}_m \in L^2(0, +\infty; H), \\ U_m = 0 \qquad \text{pour} \quad t < 0. \end{cases}$$

2º $\hat{g}$ *désignant ici la transformée de Fourier de* g, nous aurons (τ variable duale)

$$(3.22)\quad \begin{cases} i\tau(\hat{U}_m(\tau), w_j) = \big(\hat{\hat{f}}(\tau), w_j\big) + (u_m(0), w_j) + (h_1(\tau), w_j) + ((h_2(\tau), w_j)), \\ h_1(\tau) = -\big(\widehat{MU_m}\big)(\tau), \qquad h_2(\tau) = -\big(\widehat{\tilde{\mathfrak{A}}(t)\, U_m}\big)(\tau), \\ h_1 \in L^2(R; H), \qquad h_2 \in L^2(R; V). \end{cases}$$

Dans (3.22) il est possible de remplacer w_j par $\hat{U}_m(\tau)$, donc de

$$(3.23)\quad \begin{aligned} i\tau\, |\hat{U}_m(\tau)|^2 = \big(\hat{\hat{f}}(\tau), U_m(\tau)\big) + (u_m(0), \hat{U}_m(\tau)) \\ + (h_1(\tau), \hat{U}_m(\tau)) + ((h_2(\tau), \hat{U}_m(\tau)) \end{aligned}$$

nous déduirons (les C désignant des constantes diverses)

$$(3.24)\quad \begin{cases} |\tau|.|\hat{U}_m(\tau)|^2 \leqq C\big\{ |\hat{\hat{f}}(\tau)|^2_{V'} + |h_1(\tau)|^2 + \|h_2(\tau)\|^2 \\ \qquad + \|\hat{U}_m(\tau)[\,\|\hat{U}_m(\tau)\| + |u_0|\,]\big\} \\ \qquad \text{si} \quad f \in L^2(V'), \\ |\tau|.|\hat{U}_m(\tau)|^2 \leqq C\big\{ |h_1(\tau)|^2 + \|h_2(\tau)\|^2 \\ \qquad + \|\hat{U}_m(\tau)\|\big[\|\hat{U}_m(\tau)\| + |\hat{\hat{f}}(\tau)| + |u_0|\big]\big\} \\ \qquad \text{si} \quad f \in L^1(H). \end{cases}$$

Comme pour $\gamma \in \left]0, \frac{1}{4}\right[$, *il est possible de déterminer* $\beta \in \left]\frac{1}{2}, 1\right[$ de manière que

$$|\tau|^{2\gamma} \leqq C(\gamma, \beta)\, \frac{1 + |\tau|}{1 + |\tau|^\beta} \qquad [C(\gamma, \beta) = \text{Cte dépendant de } \beta, \gamma],$$

nous pouvons noter que ($C_1 = $ Cte)

$$(3.25)\quad \int |\tau|^{2\gamma} |U_m(\tau)|^2\, d\tau \leqq C_1 \left[\int |\hat{U}_m(\tau)|^2\, d\tau + \int \frac{|\tau|}{1 + |\tau|^\beta} |\hat{U}_m(\tau)|^2\, d\tau \right].$$

D'où nous déduisons, par utilisation de (3.24), de l'inégalité de *Cauchy-Schwarz* et de

$$\| h_2 \|_{L^2(R;V)} \leq C_2 \| U_m \|_{L^2(R;V)} \qquad (C_2 = \text{Cte}); \tag{3.26}$$

$$\int |\tau|^{2\gamma} |U_m(\tau)|^2 d\tau \leq \left\{ \begin{array}{l} C[\,|U_m|^2_{L^2(V)} + |\tilde{f}|^2_{L^2(V')} + |h_1|^2_{L^2(H)} + |u_0|.|U_m|_{L^2(V)} I_0] \\ \qquad \text{si} \quad f \in L^2(V'), \\ C[\,|U_m|^2_{L^2(V)} + |h_1|^2_{L^2(H)} + K_0 |U_m|_{L^2(V)} I_0] \\ \qquad \text{si} \quad f \in L^1(H), \\ C = \text{Cte}; \quad I_0 = \left(\int \dfrac{d\tau}{(1 + |\tau|^\beta)^2} \right)^{\frac{1}{2}}, \\ K_0 = |\hat{f}|_{L_0^\infty(H)} + |u_0| \quad (^1). \end{array} \right. \tag{3.27}$$

Vu (3.21), nous avons obtenu le

Lemme 3.3. — *Pour* $\gamma \in \left]0, \frac{1}{4}\right[$, $D^\gamma U_m$ *reste dans un borné de* $L^2(H)$.

3.4. *Passage à la limite.*

1° *Introduisons tout d'abord l'espace :*

$$\mathcal{H}_\gamma(V, H) = \left\{ u \mid u \in L^2(R; V),\ D^\gamma u \in L^2(R; H);\ \gamma \in \left]0, \frac{1}{4}\right[\right\}. \tag{3.28}$$

C'est *un espace de Hilbert* pour la norme

$$u \to \left(|u|^2_{L^2(V)} + \left| |\tau|^\gamma \hat{u} \right|^2_{L^2(H)} \right)^{\frac{1}{2}}, \qquad u \in \mathcal{H}_\gamma(V, H). \tag{3.29}$$

Soit maintenant

(3.30) $\mathcal{H}_\gamma^T(V, H)$ *l'espace des restrictions à* (0, T) *des fonctions de* $\mathcal{H}_\gamma(V, H)$.

C'est un *espace de Hilbert* pour la norme

$$\left\{ \begin{array}{l} v \to \inf\limits_u |u|_{\mathcal{H}_\gamma(V,H)}, \text{ le inf étant pris sur toutes les fonctions } u \in \mathcal{H}_\gamma(V, H) \\ \quad \text{telles que } u = v \quad p.p. \text{ sur } (0, T). \end{array} \right. \tag{3.31}$$

Nous allons énoncer (et démontrer pour la commodité du lecteur) le lemme suivant qui est un résultat de compacité de [14] :

Lemme 3.4. — *Soit* $\{u_m\}$ *une suite bornée de* $\mathcal{H}_\gamma^T(V, H)$. *Il est possible d'extraire une sous-suite notée encore* $\{u_m\}$ *qui converge p. p. sur* (0,T) *dans* H *fort.*

Démonstration du lemme 3.4. — Soit $\{u_m\}$ une *suite bornée* de $\mathcal{H}_\gamma^T(V, H)$.
(3.32) *Il existe alors une suite* $\{U_m\}$ *bornée dans* $\mathcal{H}_\gamma(V, H)$, *avec*

$$U_m = u_m \quad p.p. \text{ sur } (0, T).$$

(1) $L_0^\infty(H)$, espace des $u \in L^\infty(R; H)$ qui tendent vers zéro à l'infini.

D'après le *caractère local* [5] de $\mathcal{H}_\gamma(V, H)$, il est loisible de supposer

$$\text{(3.33)} \qquad \operatorname{supp} U_m \subset K \qquad (K, \textit{compact fixe}).$$

Supposons établi :

$$\text{(3.34)} \quad \begin{cases} \textit{De } \{U_m\} \textit{ il est possible d'extraire une sous-suite (notée encore } \{U_m\}) \\ \quad \textit{qui converge dans } L^2(R; H) \textit{ fort.} \end{cases}$$

Alors (par nouvelle extraction) $\{U_m\}$ *converge sur* (o, T) *dans* H *fort et comme* $U_m = u_m$ *sur* (o, T) *le lemme* 3.4 *est démontré sous réserve de vérifier* (3.34).

Vérification de (3.34). — D'après la *Compacité faible* des boules d'un *Hilbert séparable*, on commence par extraire une sous-suite notée toujours $\{U_m\}$:

$$\text{(3.35)} \qquad U_m \to U \quad \textit{dans } \mathcal{H}_\gamma(V, H) \textit{ faible}$$

et comme l'on ne perd rien en généralité en supposant

$$\text{(3.36)} \qquad U = o,$$

nous allons montrer que

$$\text{(3.37)} \qquad \forall \varepsilon > o, \quad \exists\, m_\varepsilon, \quad |\, m > m_\varepsilon \Rightarrow |U_m|_{L^2(R;H)} \leq \varepsilon.$$

Pour A *fixé assez grand*, on a [$\{U_m\}$ étant borné dans $\mathcal{H}_\gamma(V, H)$]

$$\text{(3.38)} \qquad \forall \varepsilon > o, \quad |U_m|_{L^2(R;H)} = |\hat{U}_m|_{L^2(R;H)} \leq \frac{\varepsilon}{2} + \int_{-A}^{+A} |\hat{U}_m(\tau)|^2\, d\tau$$

reste donc à voir que l'on peut trouver m assez grand avec

$$\text{(3.39)} \qquad \int_{-A}^{+A} |\hat{U}_m(\tau)|^2\, d\tau \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Or χ_K désignant la *fonction caractéristique du compact* K, nous avons

$$\text{(3.40)} \quad ((\hat{U}_m(\tau), v)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} ((U_m(t), \chi_K(t), \exp(-it\tau)\, v)), \quad \forall v \in V.$$

Comme U_m converge *faiblement vers zéro* dans $\mathcal{H}_\gamma(V, H)$ dont la topologie est *plus fine* que celle de $L^2(R; V)$, il résulte de (3.40) *que* $\hat{U}_m(\tau) \to o$ *dans* V *faible, donc l'injection* $V \to H$ *étant compacte,* $\hat{U}_m(\tau) \to o$ *dans* H *fort.*

Ainsi, d'après le *théorème de Lebesgue*, nous obtenons (3.39), d'où (3.34).

---

(5) *Voir* [14], par exemple.

2° Des lemmes 3.2 à 3.4, nous déduisons le

LEMME 3.5. — *De* $\{u_m\}$ *il est possible d'extraire une sous-suite, notée encore* $\{u_m\}$ *possédant les propriétés suivantes :*

(3.41) $$u_m \to w \quad \textit{dans} \begin{cases} L^2(V) \textit{ faible}, \\ L^\infty(H) \textit{ faible } [\textit{dual faible de } L^1(H)], \\ \textit{p.p. sur } (0, T) \textit{ dans } H \textit{ fort}. \end{cases}$$

Alors, compte tenu de l'hypothèse (2.7) :

(3.42) $$M u_m \to M w \quad \textit{p.p. sur } (0, T) \textit{ dans } H \textit{ fort}.$$

Dans ces conditions nous avons le

LEMME 3.6. — w *est solution du problème* P_1.

Démonstration du lemme 3.6. — Soit

(3.43) $$\Psi \in \mathcal{C}^1(0, T) \quad \textit{nulle dans un voisinage de } T.$$

Pour j *fixé* $< m$, on pose

(3.44) $$\psi_j = \psi \otimes w_j.$$

alors de (3.2) on déduit :

(3.45) $$\begin{cases} \textit{Pour tout } j < m : \\ \left(\dfrac{d}{dt} u_m(t), \psi_j(t)\right) + a(t; u_m(t), \psi_j(t)) + (M(U_m(t), \psi_j(t)) = (f(t), \psi_j(t)). \end{cases}$$

Par intégration par parties sur (0, T) et passage à la limite loisible on obtient :

(3.46) $$\begin{cases} \textit{Pour tout } j : \\ -\displaystyle\int_0^T (w(t), \psi'_j(t))\, dt + \int_0^T [a(t; w(t), \psi_j(t)) + (M(w)(t), \psi_j(t))]\, dt \\ \quad = \displaystyle\int_0^T (f(t), \psi_j(t))\, dt + (u_0, \psi_j(0)). \end{cases}$$

Ainsi (3.46) *reste vraie pour toute combinaison linéaire finie de* ψ_j, puis *par densité pour toute fonction* φ *vérifiant*

(3.47) $$\varphi \in L^2(V), \qquad \varphi' \in L^2(H), \qquad \varphi(T) = 0,$$

d'où *l'existence* pour le théorème 1.I.

3.5. *Régularité de la solution. Unicité.*

LEMME 3.7.

(i) *Toute solution* u *du problème* P_1 *est* (*p. p. égale à*) *une fonction continue de* $(0, T) \to H$.

(ii) *Toute solution u du problème* P_1 *vérifie l'égalité d'énergie*

$$(3.48)\quad \begin{cases} \frac{1}{2}|u(t)|^2 + \operatorname{Re}\int_0^t [a(s;\, u(s),\, u(s)) + (\mathrm{M}u(s),\, u(s))]\, ds \\ \qquad = \frac{1}{2}|u_0|^2 + \operatorname{Re}\int_0^t (f(s),\, u(s))\, ds, \\ \qquad\qquad t \in (0, \mathrm{T}). \end{cases}$$

Démonstration du lemme 3.7. — Toute solution u du problème P_1 *vérifie p. p. dans* V' :

$$(3.49)\quad \frac{du(t)}{dt} + \mathrm{A}(t)\, u(t) + (\mathrm{M}u)(t) = f(t).$$

Alors

$$(3.50)\quad u \in L^2(V), \qquad u' \in L^2(V') + L^1(H)$$

et le point (i) résulte de [17].

(ii) *Nous utilisons ici les notations du chapitre* 0.

Pour toute solution u du problème P_1, nous avons

$$(3.51)\quad \frac{d}{dt}(u(t),\, v) + ((u(t),\, v)) = ((g(t),\, v)) + (u_0,\, v)\,\delta, \quad \forall v \in V,$$

avec

$$(3.52)\quad g = u - \mathrm{JM}u - \mathcal{A}(t)\, u + \mathrm{J}f \in L^2(V) \qquad (\delta, \text{ mesure de Dirac}).$$

Considérons la *diagonalisation avec somme mesurable de l'opérateur* Λ et introduisons *les champs de vecteurs :*

$$(3.53)\quad \begin{cases} \hat{u}(t): \quad \lambda \to \hat{u}(t, \lambda); \qquad \hat{u}(t;\, \lambda) = \hat{u}(t)\,(\lambda), \\ \hat{g}(t): \quad \lambda \to \hat{g}(t;\, \lambda); \qquad \hat{g}(t;\, \lambda) = \hat{g}(t)\,(\lambda); \end{cases}$$

(3.51) équivaut à

$$(3.54)\quad \frac{d}{dt}\hat{u}(t, \lambda) + \hat{u}(t, \lambda) = \lambda\, \hat{g}(t, \lambda) + \hat{u}_0(\lambda)\,\delta,$$

d'où nous déduisons :

$$(3.55)\quad \begin{cases} \frac{1}{2}|\hat{u}(t, \lambda)|_\lambda^2 + \lambda\int_0^t |\hat{u}(s, \lambda)|_\lambda^2\, ds = \int_0^t \lambda \operatorname{Re}(\hat{g}(s, \lambda),\, \hat{u}(s, \lambda))_\lambda\, ds + \frac{1}{2}|\hat{u}_0(\lambda)|_\lambda^2 \\ \text{pour } t \in (0, \mathrm{T}), \quad d\nu \text{ p.}p. \text{ en } \lambda. \end{cases}$$

Par *intégration en* $d\nu(\lambda)$, il vient (3.48), *d'où le point* (ii).

Enfin, par des majorations analogues à celles faites dans le n° 3.2, il vient

$$(3.56)\quad \sup_{t \in (0, \mathrm{T})} |u(t)|^2 + \int_0^{\mathrm{T}} |u(s)|^2\, ds \leq \begin{cases} c_1\{|u_0|^2 + |f|_{L^2(V')}\} \\ C_2\{|u_0|^2 + |f|_{L^1(H)}^2\} \end{cases} \text{suivant les cas,}$$

ce qui achève la démonstration du théorème 1.I.

3.6. *Remarque et problème.* — 1° *Remarque : La conclusion du théorème* 1.I *subsiste encore,* si l'on prend

$$M \in \mathcal{L}(L^{2}(H), L^{2}(V')) \quad \textit{de type local.} \tag{3.57}$$

Pour les inégalités *a priori* (*cf.* 3.2) nous aurons en effet

$$\left|\int_0^s \operatorname{Re}(M u_m(\sigma), u_m(\sigma))\,d\sigma\right| \leq \int_0^s |M u_m(\sigma)|_{V'} \|u_m(\sigma)\|\,d\sigma$$
$$\leq \frac{1}{4}\sup|u_m(\sigma)|^2 + \mu^2 T\int_0^s \|u_m(\sigma)\|^2\,d\sigma \qquad \sigma \in (0, s).$$

Par suite, nous aurons la conclusion du théorème 1.I, *si la relation suivante est vérifiée :*

$$T\mu^2 < \alpha \tag{3.58}$$

(où μ est la borne uniforme de M).

Si T, μ, α étaient donnés tels que (3.58) ne soit pas vérifiée, on commencerait par déterminer une solution du problème 1 sur $(0, T_0)$, T_0 *vérifiant* (3.58), puis on *prolongerait* la solution dans $(T_0, 2T_0)$ et ainsi de suite jusqu'à atteindre T.

2° *Problème :* Il est naturel de se poser le

Problème P₂. — *Dans quelle mesure peut-on perturber davantage l'opérateur* A *et prendre par exemple*

$$M \in \mathcal{L}(L^{2}(V), L^{2}(H)) \tag{3.59}$$

ou, ce qui est plus intéressant,

$$M \in \mathcal{L}(L^{2}(V), L^{2}(V')) \quad ? \tag{3.60}$$

Avec des *hypothèses de régularité* (minima ?) *sur* $a(t; u, v)$, *mais pas sur* M, nous apportons une contribution au problème P_2 pour M *vérifiant* (3.59) dans le n° II.

Un *exemple* de la situation (3.60), *mais aussi avec des hypothèses supplémentaires sur* M est considéré au paragraphe 2.

II. — Perturbations $M \in \mathcal{L}(L^2(V), L^2(H))$.

1. Hypothèses. — *Les données spatiales étant celles du n°* I, nous nous donnons pour tout $t \in (0, T)$, *une famille de formes sesquilinéaires* $a(t; u, v)$ *continues sur* $V \times V$ vérifiant :

(1.1) *Les hypothèses* (2.1) *et* (2.2) *du n°* I;

(1.2) $a(t; u, v)$ *est hermitienne :* $\forall\, t \in (0, T)$, $a(t; u, v) = \overline{a(t; v, u)}$;

(1.3) $t \to a(t; u, v)$ *a une dérivée au sens des distributions mesurable et bornée* [6], $\forall\, u, v \in V$.

Suivant les notations du chapitre 0, $\forall\, t \in (0, T)$, $D(A(t))$ désignera le domaine de l'opérateur $A(t)$ (non borné dans H) défini par $a(t; u, v)$.

L'opérateur M *vérifie*

(1.4) $$M \in \mathcal{L}(L^\infty(V), L^\infty(H));$$

(1.5) $$\begin{cases} \forall\, t \in (0, T), \quad \exists\, \mu = \mu(T), \quad \textit{avec} \quad \forall\, u \in L^\infty(V), \\ |r_t M u|_{L^\infty(H)} \leq \mu |r_t u|_{L^\infty(V)} \quad (\textit{type local}). \end{cases}$$

2. Énoncé du résultat. — *Introduisons l'espace*

(2.1) $$H^{\infty,2} = \{ u \mid u \in L^\infty(V),\ u' \in L^2(H) \}$$

qui est un *espace de Banach* pour la norme

(2.2) $$u \mapsto |u|_{H^{\infty,2}} = |u|_{L^\infty(V)} + |u'|_{L^2(H)}$$

et supposons

(2.3) *L'injection* $V \to H$ *est compacte;*

(2.4) *Si* $u_n \to u$ *p. p. sur* (0, T) *dans* H, $Mu_n \to Mu$ *p. p. sur* (0, T) *dans* H.

Nous pouvons alors énoncer le :

Théorème 1.II. — *Moyennant* :

(i) $u_0 \in D(A_0)$, $f \in L^2(H)$;

(ii) *les hypothèses* (1.1) *à* (1.5), (2.3), (2.4) *vérifiées.*

Il existe une solution unique au problème P_1 *possédant les propriétés suivantes :*

1° $u \in H^{\infty,2}$;

2° u *est (p. p. égale à) une fonction continue de* $(0, T) \mapsto V$ *fort vérifiant*

(2.5) $$\begin{cases} \forall\, t \in (0, T), \quad u(t) \in D(A(t)), \qquad u(0) = u_0 \\ A(t)\, u(t) + (Mu)(t) + u'(t) = f(t) \quad \textit{p.p. sur } (0, T) \textit{ dans } H. \end{cases}$$

3. Démonstration du théorème 1.II (i). — Montrons l'existence, l'unicité se vérifiant comme pour le théorème 1.I. Le plan de la démonstration est analogue à celui du *n*° I.

---

[6] Ceci équivaut à dire que $t \to a(t; u, v)$ vérifie une *condition de Lipschitz d'ordre* 1, $\forall\, u, v \in V$.

3.1. *Le système approché.* — $\{W_i\}$ désignant toujours une *base* de V, nous posons

$$(3.1)\qquad u_m(t) = \sum_{i=1}^{m} g_{im}(t)\, W_i.$$

Les g_{im} étant *solutions du système*

$$(3.2)\qquad \begin{cases} \dfrac{d}{dt}(u_m(t), w_j) + a(t; u_m(t), w_j) + (\mathrm{M}u_m)(t), w_j) = (f(t), w_j) \qquad (j = 1, 2, \ldots, m), \\ g_{im}(0) = \alpha_{im} \end{cases}$$

avec

$$(3.3)\qquad \sum_{i=1}^{m} \alpha_{im} W_i \to u_0 \quad \textit{dans V fort lorsque } m \to +\infty.$$

D'après le *théorème préliminaire*, on a le

LEMME 3.1. — *Il existe une solution unique à* (3.2), *avec*

$$u_m \in L^\infty(V), \qquad u'_m \in L^2(V).$$

3.2. *Inégalités* a priori. — Nous allons démontrer le

LEMME 3.2. — *Il existe* $T_0 > 0$ *avec :*

(i) u_m *reste dans un borné de* $L^\infty_{T_0}(V)$;

(ii) u'_m *reste dans un borné de* $L^2_{T_0}(H)$.

Démonstration du lemme 3.2. — Posons

$$(3.4)\qquad \psi_m(t) = \int_0^t |u'_m(\sigma)|^2\, d\sigma + a'(t; u'_m(t), u_m(t)).$$

De (3.2) nous déduisons, *en prenant le produit scalaire avec* $u'_m(t)$,

$$(3.5)\qquad \frac{d}{dt}\psi_m(t) = \mathrm{Re}(f(t), u'_m(t)) + a'(t; u_m(t), u_m(t)) - \mathrm{Re}((\mathrm{M}u_m)(t), u'_m(s)),$$

puis par intégration sur $(0, s)$

$$(3.6)\qquad \psi_m(t) = \psi_m(0) + \int_0^s a'(\sigma; u_m)(\sigma), u_m(\sigma))\, d\sigma + \int_0^s \mathrm{Re}[(f(\sigma), n'_m(\sigma)) - (\mathrm{M}u_m(\sigma), u'_m(\sigma))]\, d\sigma,$$

d'où (*les* C_i *désignant des constantes diverses*)

$$(3.7)\qquad \forall\, \delta > 0, \quad \psi_m(t) \leq C_0 \|u_0\|^2 + \int_0^t \left[C_1 \|u_m(\sigma)\|^2 + \frac{1}{2\delta}|u'_m(t)|^2 + \frac{\delta}{2}|f(\sigma)|^2 \right] d\sigma + \sup |\mathrm{M}u_m(\sigma)| \int_0^t |u'_m(\sigma)|\, d\sigma \qquad \sigma \in (0, t),$$

mais, M *étant de type local :*

$$(3.8) \qquad \sup_{\sigma \in (0,t)} |\mathrm{M} u_m(\sigma)| \leq \mu \sup_{\sigma \in (0,t)} \| u(\sigma) \|,$$

nous avons

$$(3.9) \quad \left\{ \begin{aligned} &\forall \delta, \delta_1 > 0, \quad \alpha\left(1 - \frac{1}{\delta_1}\right) \sup_{s \in (0,t)} [u_m(s)]^2 + \mathrm{K}(t) \int_0^t | u'_m(\sigma) |^2 \, d\sigma \leq \mathrm{C}_0 \| u_0 \|^2 \\ &\qquad + \frac{\alpha}{\delta_1} \sup_{s \in (0,t)} | u_m(s) |^2 + \mathrm{C}_2 \int_0^t \| u_m(\sigma) \|^2 \, d\sigma + \frac{\delta}{2} \int_0^t |f(\sigma)|^2 \, d\sigma, \\ &\text{où} \quad \mathrm{K}(t) = 1 - \frac{1}{2\delta} - \frac{\mu^2 t}{2\alpha}. \end{aligned} \right.$$

Par ailleurs, en prenant le *produit scalaire avec* $u_m(t)$ *dans* 3.2, il vient

$$(3.10) \quad \left\{ \begin{aligned} &\sup_{s \in (0,t)} | u_m(s) |^2 + \int_0^t \alpha [u_m(s)]^2 \, ds \\ &\quad \leq \mu \sup_{s \in (0,t)} \| u_m(s) \| \int_0^t | u_m(s) | \, ds + \mathrm{Re} \int_0^t (f(s), u_m(s)) \, ds + | u_0 |^2. \end{aligned} \right.$$

En additionnant (3.9) et (3.10) *et par choix convenable de* δ_1, on obtient

$$(3.11) \quad \left\{ \begin{aligned} &\mathrm{C}_3 \sup_{s \in (0,t)} \| u_m(s) \|^2 + \mathrm{K}(t) \int_0^t | u'_m(s) |^2 \, ds \\ &\quad \leq \mathrm{C}_4 \| u_0 \|^2 + \mathrm{C}_5 \int_0^t \| u_m(\sigma) \|^2 \, d\sigma + \mathrm{C}_6 \int_0^t |f(\sigma)|^2 \, d\sigma, \end{aligned} \right.$$

choisissons maintenant $\delta = 1$; *alors pour* $\mathrm{T}_0 < \frac{\alpha}{\mu^2}$, on déduit de (3.11) (par utilisation de *l'inégalité de Gronwall*) :

$$(3.12) \quad \forall t \in (0, \mathrm{T}_0), \quad \| u_m(t) \|^2 + \int_0^t | u'_m(s) |^2 \, ds \leq \mathrm{C}(\mathrm{T}_0) \left\{ \| u_0 \|^2 + \int_0^t |f(\sigma)|^2 \, d\sigma \right\},$$

d'où le lemme 3.2.

3.3. *Passage à la limite.* — 1° Montrons le

Lemme 3.3. — *De* $\{ u_m \}$ *nous pouvons extraire une sous-suite (notée encore* $\{ u_m \}$*) vérifiant :*

(i) $u_m \to u$ *dans* $\mathrm{L}^\infty_{\mathrm{T}_0}(\mathrm{V})$ *faible;*

(ii) $u'_m \to u'$ *dans* $\mathrm{L}^\infty_{\mathrm{T}_0}(\mathrm{H})$ *faible;*

(iii) $u_m \to u$ *p. p. dans* H *fort.*

Démonstration du lemme 3.3. — Les points (i), (ii) résultent du lemme 3.2. Montrons le (iii).

Soit $\{u_m\}$ *une suite extraite* vérifiant (i), (ii); alors

$$(3.13)\quad \begin{cases} \forall\, t,\, t' \in (0, T_0), \\ |u_m(t) - u_m(t')| \leq (t-t')^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^{T_0} |u'_m(\sigma)|^2\, d\sigma \right)^{\frac{1}{2}} \leq \text{Cte } \textit{dépendant de } T_0, \end{cases}$$

donc $\{u_m\}$ *est équicontinue dans* $\mathcal{C}(0, T_0; H)$.

Pour t fixé, $\{u_m(t)\}$ *est dans un borné de* V donc, d'après 2.3, dans *une partie relativement compacte de* H. Le (iii) du lemme en résulte.

2° Comme pour le théorème 1.I, on vérifie que u est solution du problème P_1 sur $(0, T_0)$.

Si $T_0 > T$, l'existence est prouvée sur $(0, T)$.

Sinon il est possible de prolonger u sur $(T_0, 2T_0)$ et ainsi de suite jusqu'à atteindre T.

4. Démonstration du théorème 1.II (ii). — 4.1. *Continuité de la solution.* — Comme $u \in H^{\infty, 2}$, on sait déjà que

(4.1) *u est (p. p. égale à) une fonction continue de* $(0, T) \to H$.

La continuité de u de $(0, T) \to V$ résulte alors du

Lemme 4.1.

(i) $t \to u(t)$ *est continue dans* V *faible* [*i. e.* : $t \to ((u(t), v))$] *est continue dans* $(0, T)$, $\forall\, v \in V$);

(ii) $t \to \| u(t) \|$ *est continue de* $(0, T) \to R^+$.

Démonstration du lemme 4.1. — (i) *Il suffit de faire la démonstration pour* $(0, T_0)$.

D'après la conclusion du lemme 3.2 :

$$(4.2)\qquad \| u(t) \| \leq \text{Cte}, \quad \forall\, t \in (0, T_0).$$

Soit $t_0 \in (0, T_0)$ et $\tau_n \in (0, T_0)$, avec

$$(4.3)\qquad \tau_n \to t_0 \quad \text{lorsque} \quad n \to +\infty.$$

Alors, d'après (4.2),

$$(4.4)\qquad \| u(\tau_n) \| \leq \text{Cte}, \quad \forall\, n.$$

Il est donc possible d'extraire de $\{\tau_n\}$ une sous-suite (notée encore $\{\tau_n\}$) telle que

$$(4.5)\qquad u(\tau_n) \to \xi_0 \quad \textit{dans V faible},$$

donc, d'après 3.2, *dans* H *fort*.

$t \to u(t)$ étant continue dans H *fort*, on a

$$u(t_0) = \xi_0 \tag{4.6}$$

d'où le point (i).

(ii) En utilisant par exemple (7) *la diagonalisation avec somme mesurable de l'opérateur* Λ, on démontre le

Lemme 4.2. — *Si* u [*fonction continue de* $(0, T) \mapsto H$] *est solution du problème* P_1 (*associée aux hypothèses du n*° II), *on a*

$$\left\{\begin{array}{l} t \in (0, T), \quad a(t; u(t)) - a(0; u_0, u_0) \\ \quad + \displaystyle\int_0^t [2\,\mathrm{Re}(Mu(\sigma), u(\sigma)) - a'(\sigma; u(\sigma), u(\sigma))]\, d\sigma \\ \quad + 2\displaystyle\int_0^t |u'(\sigma)|^2\, d\sigma = 2\,\mathrm{Re}\displaystyle\int_0^t (f(\sigma), u'(\sigma))\, d\sigma. \end{array}\right. \tag{4.7}$$

D'après le lemme 4.2 :

$$t \to a(t; u(t), u(t)) \quad \textit{est continue, de } (0, T) \to R^+. \tag{4.8}$$

Comme pour t_1 *fixé*,

$$v \to |v|^2 + a(t_1; v, v) \ \textit{est une norme sur V équivalente à } \|v\|. \tag{4.9}$$

La fonction $t \to \|u(t)\|$ *est continue*, d'où le point (ii).

4.2. *Démonstration de* $\forall\, t \in (0, T)$, $u(t) \in D(A(t))$. — 1° u étant solution du problème P_1, nous avons :

$$A(t)\, u(t) + (Mu)(t) + u'(t) = f(t) \quad \textit{dans } V' \quad \textit{p. p. sur } (0, T) \tag{4.10}$$

Soit τ *fixé* $\in (0, T_0)$; d'après le lemme 3.2 il est loisible de supposer que la suite extraite $\{u_m\}$ vérifie

$$\left\{\begin{array}{l} \textit{Les conclusions du lemme } 3.3 : \\ u_m(\tau) \to U(\tau) \quad \textit{dans V faible, lorsque } m \to +\infty, \\ u'_m(\tau) \to U_1(\tau) \quad \textit{dans H faible, lorsque } m \to +\infty. \end{array}\right. \tag{4.11}$$

De (3.2) nous déduisons

$$\left\{\begin{array}{l} \forall\, v \in V, \quad \tau \textit{ fixé } \varepsilon\, (0, T_0) \\ a(\tau; U(\tau), v) + (U_1(\tau), v) + M\,U(\tau), v) = (f(\tau), v), \end{array}\right. \tag{4.12}$$

ce qui montre

(4.13) *La forme antilinéaire :* $v \to a(\tau; U(\tau), v)$ (τ fixé) *est continue sur* V *pour la topologie de* H,

---

(7) On peut aussi utiliser une variante de [28]. *Voir* [2].

donc d'après la définition de $D(A(\tau))$ (*cf.* chap. 0)

$$(4.14) \qquad \forall \tau \in (0, T_0), \qquad U(\tau) \in D(A(\tau)).$$

De plus, V étant dense dans H,

$$(4.15) \qquad \begin{cases} A(\tau)\, U(\tau) + U_1(\tau) + M(U)(\tau) = f(\tau) & \text{dans H,} \\ u = U \quad \text{p. p.,} \qquad u' = U_1 \quad \text{p. p.} \end{cases}$$

2° Désignons *provisoirement* par

(4.16) *u_* la fonction continue telle que $u = u_*$ p. p.*

Pour *achever* la démonstration du théorème 1.II, il suffit de prouver que l'on a

$$(4.17) \qquad u_*(0) = u_0, \qquad u_*(t) = U(t), \quad \forall t \in (0, T_0).$$

Pour le vérifier, considérons

$$(4.18) \qquad \begin{cases} \psi \in \mathcal{C}^1(0, T_0), & \psi(T_0) = 0, \\ \varphi = \psi \otimes v, & v \in V. \end{cases}$$

Dans ces conditions :

$$(4.19) \qquad \begin{cases} -\displaystyle\int_0^{T_0} (u'_m(t), \varphi(t))\, dt = \int_0^{T_0} (u_m(t), \varphi'(t))\, dt + (u_m(\sigma), \varphi(\sigma)), \\ \qquad\qquad \forall \sigma \in (0, T_0). \end{cases}$$

Par utilisation du lemme 3.3 et passage à la limite,

— *le premier membre de* (4.19) *tend vers*

$$(4.20) \qquad \begin{cases} -\displaystyle\int_0^{T_0} (u'(t), \varphi(t))\, dt = (u_*(\sigma), \varphi(\sigma)) + \int_0^{T_0} (u(t), \varphi(t))\, dt, \\ \qquad\qquad \sigma \text{ fixé dans } [0, T_0[; \end{cases}$$

— *le second membre de* (4.19) *tend vers*

$$(4.21) \qquad \begin{cases} \displaystyle\int_0^{T_0} (u(t), \varphi'(t))\, dt + (U(\sigma)) & \text{si} \quad \sigma \text{ fixé} \neq 0, \\ \displaystyle\int_0^{T_0} (u(t), \varphi'(t))\, dt + (u_0, \varphi(0)) & \text{si} \quad \sigma = 0. \end{cases}$$

Par confrontation de (4.20) et (4.21), nous obtenons

$$(4.22) \qquad \begin{cases} u_*(\sigma) = U(\sigma), & \forall \sigma \in]0, T_0[, \\ u_*(0) = U(0) = u_0 & \text{si} \quad \sigma = 0. \end{cases}$$

Une modification évidente du raisonnement précédent donne

$$(4.23) \qquad u_*(T_0) = U(T_0),$$

d'où le théorème 1.II.

5. Remarques. — *Remarque* 5.1. — Si l'on suppose que M *vérifie les hypothèses du n° I*, le théorème 1.II subsiste *a fortiori* et donne *une régularité de la solution sous la condition de régularité du n° II pour l'opérateur* $A(t)$.

Remarque 5.2. — Notons encore que si l'on prend

$$(5.1) \qquad a(t;\, u,\, v) = a_0(t;\, u,\, v) + a_1(t;\, u,\, v) \qquad t \in (0,\, T),$$

avec

(5.2) $a_0(t;\, u,\, v)$ *vérifie les hypothèses du n° II.*

$$(5.3) \quad \left\{ \begin{array}{l} a_1(t;\, u,\, v) \textit{ est une famille de formes sesquilinéaires continues sur} \\ \quad V \times H \textit{ telles que :} \\ \quad \text{(i) } t \to a_1(t;\, u,\, v) \textit{ soit mesurable, } \forall\, (u,\, v) \in V \times H; \\ \quad \text{(ii) } \forall\, u,\, v \in V, \quad \forall\, t \in (0,\, T), \quad |\, a_1(t;\, u,\, v) \,| \leq C_1 \|\, u \,\| . |\, v \,| \\ \qquad\qquad (C_1 = \text{Cte} > 0 \textit{ indépendante de } t). \end{array} \right.$$

Le résultat du théorème 1.II subsiste encore.

D'ailleurs, notant $A_1(t) \in \mathcal{L}(V,\, H)$ *l'opérateur défini pour chaque* $t \in (0,\, T)$ *par la forme* $a_1(t;\, u,\, v)$ *la perturbation* M_1 *définie par,*

$$(5.4) \qquad \forall\, u \in L^\infty(V), \quad M_1 u(t) = A_1(t)\, u(t)$$

vérifie les hypothèses (1.4) et (1.5).

Remarque 5.3. — Le théorème 1.II complète, dans le cas $M = 0$, les résultats de [14].

III. — Stabilité en $\{ u_0,\, M,\, f \}$.

1. Hypothèses. Énoncé du résultat. — On se donne

$$(1.1) \qquad \forall\, n > 0, \quad \textit{le triplet } \{ u_{0n},\, M_n,\, f_n \}$$

vérifiant les hypothèses du n° I et l'on note

(1.2) P_1^n *le problème correspondant à* P_1.

Faisons les hypothèses :

(1.3) $\exists\, k > 0$, *indépendant de n, avec* $|\, M_n g \,|_{L^\infty(H)} \leq k \,|\, g \,|_{L^\infty(H)}$;

(1.4) $u_{0n} \to u_0$ *dans* H *fort lorsque* $n \to +\infty$;

(1.5) $M_n g \to Mg$ *dans* $L^1(H)$ *fort lorsque* $n \to +\infty$, $\forall\, g$ *fixé dans* $\mathcal{C}(0,\, T;\, H)$;

(1.6) $f_n \to f$ *dans* $L^2(V')$ [*resp. dans* $L^1(H)$] *fort lorsque* $n \to +\infty$.

Théorème 1.III. — *Moyennant les hypothèses* (1.3) *à* (1.6), *la solution* u_n *du problème* P_1^n *converge vers la solution u du problème* P_1 *dans* $\mathcal{C}(0,\, T;\, H)$ *et* $L^2(0,\, T;\, V)$ *forts lorsque* $n \to +\infty$.

2. Démonstration du théorème 1.III. — Posons

$$(2.1)\qquad w_n(t) = u_n(t) - u(t), \qquad w_0^n = u_0^n - u_0.$$

Du lemme 3.5, nº I, nous déduisons

$$(2.2)\qquad \frac{1}{2}|w_n(t)|^2 + \operatorname{Re}\int_0^t a(\sigma; w_n(\sigma), w_n(\sigma))\,d\sigma$$
$$= \frac{1}{2}|w_{0n}|^2 + \operatorname{Re}\int_0^t (f_n(\sigma) - f(\sigma), w_n(\sigma))\,d\sigma$$
$$- \operatorname{Re}\int_0^t (\mathrm{M}_n w_n(\sigma), w_n(\sigma))\,d\sigma - \operatorname{Re}\int_0^t (\mathrm{M}_n u(\sigma) - \mathrm{M}u(\sigma), w_n(\sigma))\,d\sigma.$$

Par des majorations analogues à celles faites dans le nº I (3.2), nous obtenons

$$(2.3)\qquad |\mathrm{W}_n(t)|^2 + \int_0^t a(\sigma; w_n(\sigma), w_n(\sigma))\,d\sigma$$
$$\leq \mathrm{C}(t)\left[|\mathrm{W}_{0n}|^2 + \|f_n - f\|_p^2 + \|\mathrm{M}_n u - \mathrm{M}u\|_1^2 + \int_0^{\mathrm{T}} |w_n(t)|^2\,dt\right]$$

où

$$\|\ \|_p = \begin{cases} \text{la norme dans } \mathrm{L}^2(\mathrm{V}') & \text{si } p = 2, \\ \text{la norme dans } \mathrm{L}^1(\mathrm{H}) & \text{si } p = 1. \end{cases}$$

En utilisant *l'inégalité de Gronwall*, le théorème 1.III suit.

§ 2. **Perturbations** $+\mathrm{M}$ **plus régulières.**

0. — Introduction.

Nous allons indiquer dans ce paragraphe des cas dans lesquels il est possible de s'affranchir de l'hypothèse trop restrictive :

(0.1) *l'injection* $\mathrm{V} \to \mathrm{H}$ *est compacte.*

Au nº I du paragraphe 1, l'obtention des inégalités *a priori* est indépendante de cette hypothèse qui n'intervient que pour le passage à la limite.

De manière précise, *la difficulté est la suivante :*

D'après la conclusion du lemme 3.2, nº I, (3.1),

(0.2) u_m *reste dans un borné de* $\mathrm{L}^\infty(\mathrm{H})$ *et de* $\mathrm{L}^2(\mathrm{V})$.

Comme $\mathrm{M} \in \mathcal{L}(\mathrm{L}^\infty(\mathrm{H}), \mathrm{L}^\infty(\mathrm{H}))$,

(0.3) $\mathrm{M}u_m$ *reste dans un borné de* $\mathrm{L}^\infty(\mathrm{H})$.

Il est donc possible *d'extraire de* $\{u_m\}$ *une sous-suite notée encore* $\{u_m\}$ possédant les propriétés suivantes :

$$(0.4)\qquad \begin{cases} u_m \to w & \textit{dans } \mathrm{L}^\infty(\mathrm{H}) \textit{ faible dual faible de } \mathrm{L}^1(\mathrm{H}), \\ \mathrm{M}u_m \to \psi & \textit{dans } \mathrm{L}^\infty(\mathrm{H}) \textit{ faible dual faible de } \mathrm{L}^1(\mathrm{H}). \end{cases}$$

Mais $L^\infty(H)$, $L^1(H)$ *n'étant pas réflexifs*, nous ne pouvons pas affirmer

$$\psi = M w. \tag{0.5}$$

C'est ce qui a motivé l'introduction de l'hypothèse (0.1) et l'utilisation de résultats de *Compacité forte* pour réussir au paragraphe 1.

I. — Perturbations L^2-régulières.

Dans ce numéro (ainsi que dans tous les autres numéros de ce paragraphe) nous nous donnons

I.1. *Deux espaces de Hilbert séparables* V, H *avec* $V \subset H$;

I.2. *L'injection* $V \to H$ *est continue*, V *dense dans* H;

I.3. *Une famille de formes sesquilinéaires continues sur* $V \times V$ $a(t; u, v)$ *vérifiant les hypothèses du paragraphe* 1, n° I.

Définition 2.I. — *Soit* $M \in \mathcal{L}(L^\infty(H), L^\infty(H))$ *de type local.*

Nous dirons que M *est* L^2*-régulier si, en outre,* $M \in \mathcal{L}(L^2(H), L^2(H))$.

Remarque 2.I. — La définition 2.I s'étend avec des modifications évidentes à des perturbations $M \in \mathcal{L}(L^\infty(X), L^\infty(Y))$, où X et Y Hilberts différents *a priori* de H.

Nous avons alors de manière évidente le

Théorème 2.I. — *Si* M *est* L^2*-régulier et si les hypothèses* I.1 *à* I.3 *sont vérifiées*, les conclusions du théorème 1.I sont valables.

Remarque 2.I. — En fait, une perturbation L^2-régulière rentre dans la classe des perturbations $M \in \mathcal{L}(L^2(H), L^2(H))$ et cette seule *hypothèse est suffisante pour assurer la validité du théorème* 2.I. D'ailleurs, les inégalités *a priori* du n° I, 3.2 s'obtiennent autrement et bien plus simplement dans ce cas, qui ne diffère que trivialement du cas $M = 0$.

II. — Perturbations quasi-temporelles.

Définition 2.II. — *Nous dirons qu'une perturbation* $M \in \mathcal{L}(L^\infty(H), L^\infty(H)$ *de type local est quasi-temporelle si* M *admet une décomposition*

$$M = M_1 \circ M_0, \tag{II.1}$$

où :

(i) M_0 *est une famille d'opérateurs définie pour* $t \in (0, T)$ *vérifiant :*

$$\forall\, t \in (0, T), \quad M_0(t) \in \mathcal{L}(H, H); \tag{II.2}$$

$$\left\{\begin{array}{l} \exists\, \mu_0 = \mu_0(T), \quad \text{Cte} > 0, \quad \textit{avec} \\ \qquad \forall\, u \in H, \quad |M_0(t)\, u| \leq \mu_0 |u|, \quad \forall\, t \in (0, T); \end{array}\right. \tag{II.3}$$

(ii) $M_1 \in \mathcal{L}(L^\infty(\mathbf{C}), L^\infty(\mathbf{C}))$ ($\mathbf{C}$, *corps des complexes*), *avec*

(II.4) *si* $v_n \to v$ *p. p. sur* $(0, T)$ *dans* $\mathbf{C}$, $M_1 v_n \to M_1 v$ *p. p. sur* $(0, T)$ *dans* $\mathbf{C}$.

Remarque 2.II. — La définition 2.II s'étend avec des modifications évidentes au cas d'une perturbation $M \in \mathcal{L}(L^\infty(X), L^\infty(Y))$ où X et Y sont des Hilberts *a priori* distincts de H.

Nous avons le .

THÉORÈME 2.II. — *Supposons* $M \in \mathcal{L}(L^\infty(H), L^\infty(H))$ *de type local, quasi temporel alors si les hypothèses* I.1 *à* I.3 *sont vérifiées nous avons les conclusions du théorème* 1.I.

Démonstration du théorème 2.II. — Notons tout d'abord que, d'après la définition 2.II, nous avons

(II.5)
$$\begin{cases} (M\,u(t), v) = M_1(M_0\,u(t), v) \quad p.p.\ en\ t, \\ \forall\, u \in L^\infty(H), \quad \forall\, v \in H. \end{cases}$$

Ceci posé, d'après la conclusion du lemme 3.2 (*cf.* n° I, 3.2) nous aurons (0.2). Alors comme $M_0 \in \mathcal{L}(L^2(H), L^2(H))$, il sera possible d'extraire $\{u_m\}$, avec

(II.6)
$$M_0\,u_m \to M_0\,w \quad dans\ L^2(H)\ faible.$$

On en déduit que

(II.7)
$$(M_0\,u_m, v) \to (M_0\,w, v) \quad dans\ L^2(\mathbf{C})\ fort, \quad \forall\, v \in H$$

et (*quitte à faire une nouvelle extraction*) que

(II.8)
$$(M_0\,u_m, v) \to (M_0\,w, v) \quad p.p.\ sur\ (0, T), \quad \forall\, v \in H,$$

donc, d'après (II.4) et (II.5),

(II.9)
$$(M\,u_m, v) \to (M\,w, v) \quad p.p.\ sur\ (0, T), \quad \forall\, v \in H,$$

et, grâce au *théorème de Lebesgue*,

(II.10)
$$\begin{cases} \displaystyle\int_0^T (M\,u_m(t), \varphi(t))\,dt \to \int_0^T (M\,w(t), \varphi(t))\,dt, \\ \forall\, \varphi \in \mathcal{C}(0, T) \otimes V \qquad [\text{i. e. } \varphi(t) = \psi(t)\,v,\ \psi \in \mathcal{C}(0, T),\ v \in V], \end{cases}$$

d'où le théorème 2.II.

Exemples. — Les opérateurs M considérés dans les exemples n^{os} 1, 2, 3 donnés au n° I.0, § 1 sont des opérateurs de *type quasi-temporel* (*voir* aussi § 4).

III. — Une variante du problème P_1.

Nous allons démontrer ici un théorème qui va nous permettre dans les applications de considérer *un retard dans les conditions aux limites.*

1. Problème. Énoncé du résultat. — Nous nous donnons

(III.1) *Deux espaces de Hilbert* V *et* H *vérifiant* I.1, I.2;

(III.2) *Un troisième espace de Hilbert* W;

(III.3) *Une application* $\pi : V \to W$, $\pi \in \mathcal{L}(V, W)$.

On suppose

$$\text{(III.4)} \quad \begin{cases} \forall\, \varepsilon > 0, \quad \exists\, C(\varepsilon) > 0, \quad \text{Cte} > 0, \quad \textit{avec} \\ \qquad\qquad |\pi u|_W^2 \leq \varepsilon \| u \|^2 + C(\varepsilon) |u|^2, \quad \forall\, u \in V. \end{cases}$$

W′ désignant *l'antidual* de W, on considère une *famille d'opérateurs* définie pour $t \in (0, T)$, soit

$$\text{(III.5)} \qquad B(t) \in \mathcal{L}(W, W') \quad \textit{pour chaque } t \in (0, T)$$

et l'on pose

$$\text{(III.6)} \qquad \beta(t;\, u, v) = \langle B(t)\, \pi u, \pi v \rangle.$$

Le crochet désignant *l'antidualité entre* W *et* W′.

Nous faisons l'hypothèse :

$$\text{(III.7)} \quad \begin{cases} \exists\, \mu_1 > 0, \quad \textit{constante indépendante de } t \in (0, T), \\ \qquad |\beta(t;\, u, v)| \leq \mu_1 |\pi u|_W |\pi v|_W, \quad \forall\, u, v \in V, \quad \forall\, t \in [0, T]. \end{cases}$$

Soit encore

$$\text{(III.8)} \qquad a(t;\, u, v) \quad \text{vérifiant I.3,}$$

avec pour simplifier l'exposé :

$$\text{(III.9)} \qquad \exists\, \alpha = \alpha(T) > 0, \quad \operatorname{Re} a(t;\, u, u) \geq \alpha \| u \|^2, \quad \forall\, u \in V, \quad \forall\, t \in (0, T).$$

Enfin, soit

$$\text{(III.10)} \qquad M \in \mathcal{L}(L^\infty(H), L^\infty(H)) \quad \textit{de type local}$$

vérifiant *la condition de* L^2*-régularité :*

$$\text{(III.11)} \qquad M \in \mathcal{L}(L^2(V), L^2(V)).$$

PROBLÈME P'_1. — *Étant donnés :*

$$u_0 \in H, \qquad f \in L^1(H) + L^2(V')$$

Trouver u avec

(i) $u \in L^\infty(H) \cap L^2(V)$

(ii) $$\int_0^T [a(t; u(t), \varphi(t)) \, (u(t), \varphi'(t))] \, dt + \int_0^T \beta(t; Mu(t), \varphi(t)) \, dt$$
$$= (u_0, \varphi(0)) + \int_0^T (f(t), \varphi(t)) \, dt,$$

$\forall \varphi$ *telle que* $\varphi \in L^2(V)$, $\varphi' \in L^2(H)$, $\varphi(T) = 0$.

THÉORÈME 2.III. — *Moyennant les hypothèses* III.1 *à* III.11 *il existe une solution unique au problème* P'_1 *vérifiant les conclusions du théorème* 1.I.

2. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 2.III (EXISTENCE). — 2.1. *Système approché.* — Soit $\{w_i\}$ *une base de* V ; on définit

$$u_m(t) = \sum_{i=1}^m g_{im}(t) \, w_i \tag{III.12}$$

vérifiant

$$\left\{ \begin{array}{c} \dfrac{d}{dt}(u_m(t), w_j) + a(t; u_m(t), w_j) + \beta(t; Mu_m(t), w_j) = (f(t), w_j) \\ (1 \leq j \leq m) \\ u_m(0) = \displaystyle\sum_{i=1}^m \alpha_{im} w_i, \end{array} \right. \tag{III.13}$$

avec

$$u_m(0) \to u_0 \quad \textit{dans } H \textit{ lorsque } m \to +\infty. \tag{III.14}$$

D'après le *théorème préliminaire* du paragraphe 1 :

$$\left\{ \begin{array}{l} \textit{Il existe une solution unique à } \mathrm{III.13}, \textit{ avec} \\ \qquad\qquad u_m \in L^\infty(V), \qquad u'_m \in L^1(V). \end{array} \right. \tag{III.15}$$

2.2. *Inégalités* a priori. — En prenant le *produit scalaire avec* $u_m(t)$ dans III.13, il vient

$$\frac{1}{2}|u_m(s)|^2 + \alpha \int_0^s \|u_n(s)\|^2 \, ds \tag{III.16}$$
$$\leq \frac{1}{2}|u_m(0)|^2 + \int_0^s |\beta(\sigma; M u_m(\sigma), u_m(\sigma))| \, d\sigma + \int_0^s |(f(\sigma), u_m(\sigma))| \, d\sigma,$$

d'où, par utilisation de (III.4) :

$$\text{(III.17)}\quad \left\{\begin{array}{l} \forall\, \varepsilon > 0, \\ \displaystyle\int_0^s |\beta(\sigma;\, \mathrm{M}\, u_m(\sigma),\, u_m(\sigma))|\, d\sigma \\ \displaystyle\quad \leq \mu_1 \Big[\varepsilon^2 \int_0^s \|\mathrm{M}\, u_m(\sigma)\|^2\, d\sigma + \mathrm{C}_1(\varepsilon) \int_0^s |u_m(\sigma)|^2\, d\sigma \\ \displaystyle\qquad + \mathrm{C}^2(\varepsilon) \int_0^s |\mathrm{M}\, u_m(\sigma)\,||\, u_m(\sigma))|\, d\sigma \Big], \\ \displaystyle \mathrm{C}^2(\varepsilon) = \frac{\varepsilon^2 + \mathrm{C}_1^2(\varepsilon)}{2}. \end{array}\right.$$

Mais comme $\mathrm{M} \in \mathscr{L}(\mathrm{L}^2(\mathrm{V}), \mathrm{L}^2(\mathrm{V}))$,

$$\text{(III.18)}\quad \left\{\begin{array}{l} \textit{Il existe } m_0,\ \mathrm{Cte} > 0, \\ \qquad |\mathrm{M}\, u|_{\mathrm{L}^2(\mathrm{V})} \leq m_0\, |u|_{\mathrm{L}^2(\mathrm{V})}. \end{array}\right.$$

Ainsi par la technique utilisée au paragraphe 1, nos 1, 3, 2, nous allons aboutir à

$$\text{(III.19)}\quad \left\{\begin{array}{l} \displaystyle\frac{1}{4} \sup_{s \in (0, \mathrm{T})} |u_m(s)|^2 + \left(\frac{\alpha}{2} - \varepsilon^2 m_0 \mu\right) \int_0^{\mathrm{T}} \|u_m(\sigma)\|^2\, d\sigma \\ \displaystyle\quad \leq |u_m(0)|^2 + \gamma_1 \int_0^{\mathrm{T}} |u(\sigma)|^2\, d\sigma + \gamma_2 \left(\int_0^{\mathrm{T}} |f_1(\sigma)|\, d\sigma\right)^2 + \gamma_3 \int_0^{\mathrm{T}} |f_2(\sigma)|_{\mathrm{V}'}^2\, d\sigma, \\ \qquad \textit{avec}\quad f = f_1 + f_2, \quad f_1 \in \mathrm{L}^1(\mathrm{H}), \quad f_2 \in \mathrm{L}^2(\mathrm{V}'), \\ \qquad \varepsilon \textit{ choisi assez petit}, \quad \gamma_i \textit{ constantes diverses}. \end{array}\right.$$

De (III.19) par utilisation de l'inégalité de Gronwall, on déduit le lemme (3.2) du paragraphe 1, no I.

La démonstration de l'existence s'achève alors sans difficulté, le passage à la limite étant immédiat, M étant L^2-régulier.

3. Démonstration du théorème 2.III (Unicité. — La méthode utilisée ici est une variante de [14] et de [28].

3.1. Soit

$$\text{(III.20)}\quad \left\{\begin{array}{l} \rho \in \mathscr{E}(\mathrm{R}), \quad \textit{positive, paire, nulle en dehors de } [-1, +1], \\ \displaystyle\qquad \int_{\mathrm{R}} \rho(t)\, dt = 1. \end{array}\right.$$

Alors

$$\text{(III.21)}\quad \forall\, n > 0, \quad t \to \rho_m(t) = m\, \rho(mt) \ \textit{ est nulle en dehors de } \left[-\frac{1}{m}, \frac{1}{m}\right] \ \textit{ et jouit des mêmes propriétés que } \rho$$

si X est un *Hilbert*,

$$\text{(III.22)}\qquad \forall\, u \in \mathrm{L}^2(\mathrm{R};\, \mathrm{X}), \quad \mathrm{T}_m u = \rho_m \star u \in \mathrm{L}^2(\mathrm{R};\, \mathrm{X}).$$

Introduisons

$$(\text{III}.23)\qquad \forall\,\tau\in(0,T),\quad \theta_n(\tau)=\begin{cases} 1 & \text{si } t<\tau-\dfrac{2}{n},\\ n\left(\tau-\dfrac{1}{n}-t\right) & \text{si } t\in\left[\tau-\dfrac{2}{n},\,\tau-\dfrac{1}{n}\right],\\ 0 & \text{si } t\geqq\tau-\dfrac{1}{n}.\end{cases}$$

3.2. Considérons *une solution u du problème* P'_1 *correspondant à* $u_0=0$, $f=0$, et dans la *formulation variationnelle de ce problème*, prenons

$$(\text{III}.24)\qquad \varphi=\varphi_{n,m}=\theta_n T_m^2(\theta_n u),$$

ce qui est *loisible*.

Alors par *passage à la limite sur m*, $(m\to+\infty)$, on obtient aisément (*voir* [14])

$$(\text{III}.25)\qquad -\int_0^T\theta'_n\,\theta_n\,|u(t)|^2\,dt+\text{Re}\int_0^T a(t;\,\theta_n u(t),\,\theta_n u(t))\,dt$$
$$+\text{Re}\int_0^T\beta(t;\,\theta_n M u(t),\,\theta_n u(t))\,dt=0.$$

Pour $n\to+\infty$ et par utilisation du *théorème de Lebesgue*, il vient

$$(\text{III}.26)\qquad \begin{cases}\forall\,\tau\in(0,T),\\ \dfrac{1}{2}|u(\tau)|^2+\text{Re}\displaystyle\int_0^\tau a(t;\,u(t),\,u(t))\,dt+\text{Re}\int_0^\tau\beta(t;\,Mu(t),\,u(t))\,dt=0.\end{cases}$$

On déduit de

$$(\text{III}.27)\qquad \frac{1}{2}|u(\tau)|^2+(\alpha-\varepsilon^2 m_0\mu)\int_0^\tau\|u(t)\|^2\,dt$$
$$\leqq\mu_1\left[C_1(\varepsilon)\int_0^\tau|u(t)|^2\,dt+C(\varepsilon)\int_0^\tau|Mu(t)|.|u(t)|\,dt\right],$$

d'où (ε *étant choisi tel que* $\alpha-\varepsilon^2 m_0\mu>0$)

$$(\text{III}.28)\qquad \frac{1}{4}\sup_{s\in(0,T)}|u(\tau)|^2\leqq C(T)\int_0^T|u(\tau)|^2\,d\tau,$$

ce qui entraîne $u=0$ *sur* $(0,T)$.

D'où l'unicité.

IV. — Une classe de perturbations de la « partie principale $A(t)$ ».

1. L'opérateur M. — *Les espaces de Hilbert* V *et* H *sont toujours donnés comme au n° I.*

Considérons une famille de formes sesquilinéaires $k(t, s; u, v)$, *définie pour* $(t, s) \in (0, T) \times (0, T)$, vérifiant les propriétés suivantes :

(IV.1) (i) $\forall (t; s) \in (0, T) \times (0, T)$, $k(t, s; u, v)$ *est continue sur* $V \times V$;
(ii) $\exists\, k_0 = k_0(T)$, $\mathrm{Cte} > 0$ *telle que*

$$|k(t, s; u, v)| \leq k_0 \|u\| . \|v\|, \qquad \forall (t, s) \in (0, T) \times (0, T), \quad \forall (u, v) \in V \times V;$$

(IV.2) $\forall\, t \in (0, T)$, *la fonction* $s \to k(t, s; u, v)$ *est mesurable sur* $(0, T)$, $\forall\, u, v \in V$;

(IV.3) *Pour presque tout* s *fixé* $\in (0, T)$, *la fonction* $t \to k(t, s; u, v)$ *a une dérivée au sens des distributions mesurable en* (t, s) *et uniformément bornée en* s, *i. e.*

$$\exists\, k_1 = k_1(T), \quad avec \quad \left|\frac{\partial k}{\partial t}(t, s; u, v)\right| \leq k_1 \|u\| . \|v\| \quad p.p.$$
$$(s, t) \in (0, T) \times (0, T), \quad \forall\, u, v \in V;$$

(IV.4) Pour $(t, s) \in (0, T) \times (0, T)$, la forme $k(s, t; u, v)$ définit

$$K(t, s) \in \mathcal{L}(V, V').$$

Remarquons qu'*aucune condition d'ellipticité n'est requise pour la forme* $k(t, s; u, v)$.

L'opérateur M *est défini par*

$$\text{(IV.5)} \qquad M u(t) = \int_0^t K(t, s)\, u(s)\, ds, \qquad \forall\, u \in L^\infty(V),$$

intégrale prise dans V'.

Alors

$$\text{(IV.6)} \qquad M \in \mathcal{L}(L^\infty(V), L^\infty(V')) \quad \textit{est de type local et quasi temporel}$$

2. Le résultat. — Soit

(IV.7) $\left\{ \begin{array}{l} a(t; u, v) \textit{ une famille de formes sesquilinéaires continues sur} \\ V \times V \textit{ vérifiant les hypothèses du théorème 1.II.} \end{array} \right.$

Alors :

THÉORÈME 2.IV. — *Moyennant les hypothèses* (IV.1) *à* (IV.7) *et étant donnés* $u_0 \in D(A(0))$, $f \in L^2(H)$.

Il existe une solution unique au problème P_1 *vérifiant les conclusions du théorème* 1.II.

3. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 2.IV. — Il suffit seulement de montrer comment nous obtenons les inégalités *a priori*, le reste de la démonstration étant analogue à celle du théorème 1.II.

Partant du système approché (3.2), § 1, n° II, le point crucial est la majoration du terme

$$\Phi_m(t) = \left| \int_0^t (M\, u_m(\sigma),\, u'_m(\sigma))\, d\sigma \right|, \tag{IV.8}$$

or

$$\Phi_m(t) = \left| \int_0^t k(t, s; u(s), u(t))\, ds - \int_0^t k(\sigma, \sigma; u(\sigma), u(\sigma))\, d\sigma - \int_0^t \int_0^\sigma k'_\sigma(\sigma, s; u(s), u(\sigma))\, ds\, d\sigma \right| \tag{IV.9}$$

et en utilisant (IV.1), (IV.3),

$$\Phi_m(t) \leq k_0 \left\{ \int_0^t \| u_m(\sigma) \|\, d\sigma \, \| u_m(t) \| + \int_0^t \| u(\sigma) \|^2\, d\sigma \right\} + k_1 \left\{ \int_0^t \| u_m(s) \| \left(\int_0^s \| u_m(\sigma) \|\, d\sigma \right) ds \right\}. \tag{IV.10}$$

Ainsi

$$\begin{cases} \forall\, \varepsilon > 0, \quad \Phi_m(t) \leq \varepsilon \sup\limits_{\sigma \in (0,t)} \| u_m(\sigma) \| + C(\varepsilon, T) \displaystyle\int_0^t \| u_m(s) \|^2\, ds, \\ \textit{où } C(\varepsilon, T) \textit{ est une constante indépendante de } t \in (0, T). \end{cases} \tag{IV.11}$$

Nous aboutirons alors [au lieu de (3.11), § 1, n° II] à

$$\begin{cases} \sup\limits_{s \in (0,\tau)} \| u_m(s) \|^2 + \displaystyle\int_0^t | u'_m(s) |^2\, ds \\ \qquad \leq C \left[\| u_0 \|^2 + \displaystyle\int_0^t | f(\sigma) |^2\, d\sigma + \int_0^t \| u_m(s) \|^2\, ds \right], \\ \textit{ceci } \forall\, t \in (0, T),\ C = \text{Cte } \textit{dépendant de } \varepsilon \textit{ et de } T \\ (\textit{aucune condition n'est ici imposée à } T\,!). \end{cases} \tag{IV.12}$$

Ainsi

(IV.13) u_m *reste dans un borné de* $H^{\infty, 2}$.

C. Q. F. D.

§ 3. Approximations de type Mélé.

0. Introduction.

Nous allons utiliser, à propos du problème P_1 (avec les hypothèses du paragraphe 2 en ce qui concerne M et les espaces V, H) une méthode de décomposition qui nous a été suggérée par R. Temam.

Nous employons des *approximations de type Mélé*, c'est-à-dire faisant intervenir simultanément des *approximations discrètes* et *semi-discrètes*. Une telle méthode est signalée à propos de problèmes différents dans [27].

I. — Le problème exact.

1. Hypothèses. — Nous nous donnons deux espaces de *Hilbert complexes séparables* avec

(I.1) *l'injection* $V \to H$ *est continue;*

(I.2) $V \subset H \subset V'$, V *dense dans* H, V′ *antidual de* V.

Soit $a(t; u, v)$, $t \in (0, T)$ une *famille de formes sesquilinéaires continues* sur $V \times V$ vérifiant

(I.3) *les hypothèses du* paragraphe 1, n° I.

Cependant, pour simplifier quelque peu l'exposition, nous faisons *l'hypothèse de* V-*ellipticité* suivante :

(I.4) $\exists\, \alpha = \alpha(T) > 0$, *constante indépendante de* $t \in (0, T)$, *avec*

$$\mathrm{Re}\, a(t; u, v) \geq \alpha \| u \|^2, \quad \forall u \in V, \qquad t \in (0, T). \tag{I.4}$$

Soit, d'autre part, *une perturbation* + M, avec

$$M \in \mathcal{L}(L^\infty(H), L^\infty(H)) \quad \textit{de type local} \tag{I.5}$$

vérifiant *l'une ou l'autre des conditions de régularité* suivantes :

(I.6) M *est* L^2-*régulier;*

(I.7) M *est de type quasi-temporel.*

Dans ces conditions :

2. Définition. — *Nous appelons le « problème exact » le problème* P_1.

La « *solution exacte* » est donnée, d'après les paragraphes 1 et 2, par le

Théorème 3.1. — *Étant donnés* $u_0 \in H$, $f \in L^2(V') + L^1(H)$.

Il existe u (*unique*) *avec*

$$u \in L^\infty(H) \cap L^2(V); \tag{I.8}$$

$$\begin{cases} u'(t) + A(t)\, u(t) + (Mu)(t) = f(t) & \textit{dans } V' \textit{ p.p. sur } (0, T); \\ u(0) = u_0. \end{cases} \tag{I.9}$$

II. — Équations et fonctions approchées.

1. Fonctions approchées. — N *étant un entier*, nous introduisons le *paramètre*

(II.1) $k = \frac{1}{N}$ *destiné à tendre ultérieurement vers zéro.*

Nous posons

$$\text{(II.2)} \quad \begin{cases} \text{pour} \quad n = 0, 1, \ldots, N-1, \\ \quad a^{n+\frac{1}{2}}(u, v) = \frac{1}{k}\int_{nk}^{(n+1)k} a(t; u, v)\, dt, \quad \forall\, u, v \in V \end{cases}$$

et notons

$$\text{(II.3)} \qquad \mathcal{A}^{n+\frac{1}{2}} \in \mathcal{L}(V, V') \quad \textit{l'opérateur défini par } a^{n+\frac{1}{2}}(u, v).$$

D'après (I.4) nous avons

$$\text{(II.4)} \qquad \operatorname{Re} a^{n+\frac{1}{2}}(u, u) \geqq \alpha \| u \|^2, \quad \forall\, u \in V.$$

Écrivons maintenant :

$$\text{(II.5)} \qquad f = f_1 + f_2, \quad f_1 \in L^2(V'), \quad f_2 \in L^1(H)$$

et définissons

$$\text{(II.6)} \qquad f^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{k}\int_{nk}^{(n+1)k} f_1(t)\, dt \qquad (n = 0, 1, \ldots, N-1).$$

Nous avons

$$\text{(II.7)} \qquad f^{n+\frac{1}{2}} \in V' \qquad \text{pour} \quad n = 0, 1, \ldots, N-1.$$

Nous allons maintenant considérer une *décomposition particulière* de l'opérateur M :

$$\text{(II.8)} \qquad M = \sum_n M_n.$$

Pour cela, soit

(II.9) χ_n *la fonction caractéristique de* $I_n = (nk, (n+1)k)$ $(n = 0, 1, \ldots, N-1)$.

Notant encore

(II.10) χ_n *l'opérateur de multiplication par la fonction* χ_n.

Nous posons

$$\text{(II.11)} \qquad M_n = M \circ \chi_n,$$

alors (I.4) a lieu.

Par ailleurs, si $u \in L^{\infty}(I_n, H)$, *d'après le type local de* M, on a

$$\sup_{t \in I_n} | M_n u(t) | \leq | r_{(n+1)k} M_n u |_{L^\infty(H)} \leq \mu | r_{(n+1)k} \chi_n u |_{L^\infty(H)}, \tag{II.12}$$

donc

$$\sup_{t \in I_n} | M_n u(t) | \leq \mu \sup_{t \in I_n} | u(t) |. \tag{II.13}$$

2. Équations approchées. — 2.1. *Fonction* u_{1k}. — Nous définissons par *récurrence* pour $n = 0, 1, \ldots, N-1$,

$$u^{n+\frac{1}{2}} \in V; \tag{II.14}$$

$$\frac{u^{n+\frac{1}{2}} - u^n}{k} + \mathcal{A}^{n+\frac{1}{2}} u^{n+\frac{1}{2}} = f^{n+\frac{1}{2}}, \tag{II.15}$$

avec

$$\left\{ \begin{array}{l} u^0 = u_0 \in H \\ \textit{et où } u^n \in H \ (n = 1, 2n, \ldots, N-1) \textit{ est précisé plus loin.} \end{array} \right. \tag{II.16}$$

Pour u^n *donné dans* H, *il existe* $u^{n+\frac{1}{2}}$ *vérifiant* (II.14), (II.15) d'après un résultat de [14].

Connaissant $u^{n+\frac{1}{2}}$, nous définissons la *fonction* u_{1k} *sur* (0, T) *en posant*

$$u_{1k}(t) = u^{n+\frac{1}{2}} \quad \textit{pour tout } t \in [nk, (n+1)k]. \tag{II.17}$$

2.2. *Fonction* u_{2k}. — Nous déterminons maintenant une fonction de $(0, T) \to H$, soit

$$t \to u_{2k}(t). \tag{II.18}$$

Comme solution du *problème de Cauchy :*

$$\left\{ \begin{array}{l} u'_{2k}(t) + (M_n u_{2k})(t) = f_2(t) \text{ p. p. } t \in]nk, (n+1)k[, \\ u_{2k}(nk+0) = u^{n+\frac{1}{2}} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots, N-1). \end{array} \right. \tag{II.19}$$

D'après le *théorème préliminaire* du paragraphe 1, n° I, pour $u^{n+\frac{1}{2}}$ *donné dans* H, *il existe une solution unique à* (II.19) *dans l'ouvert* $]nk, (n+1)k[$, *qui est absolument continue*, ce qui permet de définir

$$u_{2k}(n+1)k - 0 = u^{n+1} \qquad \textit{pour} \quad n = 0, 1, \ldots, N-1. \tag{II.20}$$

Il est aisé de vérifier que les fonctions u_{1k} et u_{2k} sont bien déterminées par récurrence de manière unique.

III. Inégalités *a priori*.

Lemme III.1. — *Pour* $n = 0, 1, \ldots, N-1$, *on a l'inégalité*

$$\left|u^{n+\frac{1}{2}}\right|^2 + \left|u^{n+\frac{1}{2}} - u^n\right|^2 + \alpha k \left\|u^{n+\frac{1}{2}}\right\|^2 \leq |u^n|^2 + \frac{k}{\alpha}\left|f^{n+\frac{1}{2}}\right|^2. \tag{III.1}$$

Démonstration du lemme III.1. — Nous partons de (II.16) *en prenant le produit scalaire avec* $u^{n+\frac{1}{2}}$, d'où l'on tire

$$2\,\mathrm{Re}\left(\frac{u^{n+\frac{1}{2}} - u^n}{k}, u^{n+\frac{1}{2}}\right) + 2\,\mathrm{Re}\,a^{n+\frac{1}{2}}\left(u^{n+\frac{1}{2}}, u^{n+\frac{1}{2}}\right) = 2\,\mathrm{Re}\left(f^{n+\frac{1}{2}}, u^{n+\frac{1}{2}}\right) \tag{III.2}$$

après *multiplication par* k et en observant que

$$2\,\mathrm{Re}\left(u^{n+\frac{1}{2}} - u^n, u^{n+\frac{1}{2}}\right) = \left|u^{n+\frac{1}{2}}\right|^2 - |u^n|^2 + \left|u^{n+\frac{1}{2}} - u^n\right|^2, \tag{III.3}$$

il vient

$$\left|u^{n+\frac{1}{2}}\right|^2 + \left|u^{n+\frac{1}{2}} - u^n\right|^2 + 2\alpha k \left\|u^{n+\frac{1}{2}}\right\|^2 \leq |u^n|^2 + 2k\left|f^{n+\frac{1}{2}}\right|\left|u^{n+\frac{1}{2}}\right| \tag{III.4}$$

et, compte tenu de

$$2k\left|f^{n+\frac{1}{2}}\right|\left|u^{n+\frac{1}{2}}\right| \leq \frac{k}{\alpha}\left|f^{n+\frac{1}{2}}\right|^2 + \alpha k\left\|u^{n+\frac{1}{2}}\right\|^2. \tag{III.5}$$

Nous obtenons (III.1) et le lemme.

Lemme III.2. — *Pour* $n = 0, 1, 2, \ldots, N-1$, *on a les inégalités*

$$\begin{cases} |u_{2k}(t)| \leq \left[\left|u^{n+\frac{1}{2}}\right| + 2\displaystyle\int_{nk}^{(n+1)k} |f_2(s)|\,ds\right] \exp 2\mu(t - nk), \\ \qquad t \in]nk, (n+1)k[; \end{cases} \tag{III.6}$$

$$|u^{n+1}| \leq \left[\left|u^{n+\frac{1}{2}}\right| + 2\int_{nk}^{(n+1)k} |f_2(s)|\,ds\right] \exp 2\mu k. \tag{III.7}$$

Démonstration du lemme III.2. — Pour $\sigma \in]nk, (n+1)k[$, nous prenons *le produit scalaire avec* $u_{2k}(\sigma)$ dans (II.19).

Nous obtenons

$$\frac{d}{dt}|u_{2k}(\sigma)|^2 = 2\,\mathrm{Re}(f_2(\sigma), u_{2k}(\sigma)) - 2\,\mathrm{Re}(M_n u_{2k}(\sigma), u_{2k}(\sigma)), \tag{III.8}$$

puis, par *intégration sur* $]nk, s[$, il vient

$$\begin{aligned} |u_{2k}(s)|^2 - |u_{2k}(nk+0)|^2 = {} & 2\,\mathrm{Re}\int_{nk}^{s} (f_2(\sigma), u_{2k}(\sigma))\,d\sigma \\ & - 2\,\mathrm{Re}\int_{nk}^{s} (M_n u_{2k}(\sigma), u_{2k}(\sigma))\,d\sigma. \end{aligned} \tag{III.9}$$

De (III.9) nous déduisons, en notant que (II.13) *reste vraie si* I_n *est remplacée par* (nk, s) :

$$\text{(III.10)}\quad |u_{2k}(s)|^2 \leq \sup_{\sigma\in(nk,s)} |u_{2k}(\sigma)| \times \left[u_{2k}(nk+0) + 2\mu \int_{nk}^{s} |u_{2k}(\sigma)|\, d\sigma + 2\int_{nk}^{s} |f_2(\sigma)|\, d\sigma \right],$$

d'où *en prenant le* sup *en* $s \in]nk, t[$, $t < (n+1)k$, il vient, après simplification :

$$\text{(III.11)}\quad \sup_{s\in]nk,t[} |u_{2k}(s)| \leq \left[|u_{2k}(nk+0)| + 2\int_{nk}^{t} |f_2(s)|\, ds \right] + 2\mu \int_{nk}^{t} |u_{2k}(s)|\, ds.$$

Ainsi, *a fortiori*,

$$\text{(III.12)}\quad \begin{cases} |u_{2k}(t)| \leq \left[|u_{2k}(nk+0)| + 2\displaystyle\int_{nk}^{(n+1)k} |f_2(s)|\, ds \right] + 2\mu \displaystyle\int_{nk}^{t} |u_{2k}(s)|\, ds, \\ \qquad \forall\, t \in]nk, (n+1)k[\end{cases}$$

et *l'inégalité de Gronwall* donne (III.6).

(III.7) s'obtient alors immédiatement de (III.6) *en faisant tendre* t *vers* $(n+1)k$. D'où le lemme III.2.

Lemme III.3. — *Pour* $n = 0, 1, \ldots, N-1$, *nous avons l'inégalité*

$$\text{(III.13)}\quad |u^{n+1}| \leq e^{2\mu T}\left[|u_0| + \left(\frac{1}{\alpha}\int_0^T |f_1(\sigma)|_{V'}^2\, d\sigma \right)^{\frac{1}{2}} + 2\int_0^T |f_2(\sigma)|\, d\sigma \right].$$

Démonstration du lemme III.3. — De (III.1) nous déduisons *a fortiori*

$$\text{(III.14)}\quad \left|u^{n+\frac{1}{2}}\right| \leq |u^n| + \sqrt{\frac{k}{\alpha}} \left|f^{n+\frac{1}{2}}\right|_{V'},$$

d'où, en portant dans (III.7) :

$$\text{(III.15)}\quad \begin{cases} |u^{n+1}| \leq K\left[|u^n| + \sqrt{\dfrac{k}{\alpha}} \left|f^{n+\frac{1}{2}}\right|_{V'} + 2\displaystyle\int_{nk}^{(n+1)k} |f_2(\sigma)|\, d\sigma \right] \\ \qquad (K = \exp 2\mu k;\ n = 0, 1, \ldots, N-1). \end{cases}$$

On déduit de (III.15) :

$$\text{(III.16)}\quad |u^{n+1}| \leq K^{n+1} |u_0| + \sum_{r=0}^{n} K^{n+1-r} \left[\sqrt{\frac{k}{\alpha}} \left|f^{r+\frac{1}{2}}\right|_{V'} + 2\int_{rk}^{(r+1)k} |f_2(\sigma)|\, d\sigma \right].$$

Comme $K > 1$, il en résulte

$$\text{(III.17)}\quad \begin{cases} |u^{n+1}| \leq K^{n+1} \left\{ |u_0| + \sqrt{\dfrac{k}{\alpha}} \displaystyle\sum_{r=0}^{n} \left|f^{r+\frac{1}{2}}\right| + 2\sum_{r=0}^{n} \int_{rk}^{(r+1)k} |f_2(\sigma)|\, d\sigma \right\} \\ \qquad (n = 0, 1, \ldots, N-1). \end{cases}$$

Or, *d'une part :*

$$(n+1)k \leqq \mathrm{T} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{K}^{n+1} \leqq e^{2\mu \mathrm{T}} \tag{III.18}$$

et, *d'autre part :*

$$\left\{\begin{aligned} &\sum_{r=0}^{n} \left| f^{r+\frac{1}{2}} \right| \leqq \frac{1}{\sqrt{k}} \left(\int_0^{\mathrm{T}} | f_1(\sigma) |_{\mathrm{V}'}^2 \, d \right)^{-} \quad \text{Cauchy-Schwartz}), \\ &\sum_{r=0}^{n} \int_{rk}^{(r+1)k} | f_2(\sigma) | \, d\sigma = \int^{\mathrm{T}} | f_2(\sigma) | \, d\sigma. \end{aligned}\right. \tag{III.19}$$

Portant dans (III.17) nous obtenons (III.13) et le lemme III.3.
Des lemmes III.1 à III.3 nous déduisons le

LEMME III.4. — *Pour* $n = 0, 1, \ldots, \mathrm{N}-1$, *on a les inégalités*

$$\left| u^{n+\frac{1}{2}} \right|^2 + \left| u^{n+\frac{1}{2}} - u^n \right|^2 + \alpha k \left\| u^{n+\frac{1}{2}} \right\|^2 \leqq \mathrm{C}_1 \mathrm{L}(u_0, f_1, f_2); \tag{III.20}$$

$$| u_{2k}(t) |^2 \leqq \mathrm{C}_2 \mathrm{L}(u_0, f_1, f_2), \qquad t \in]nk, (n+1)k[, \tag{III.21}$$

où les C_i *sont des constantes indépendantes de* k, *et où l'on a posé*

$$\mathrm{L}(u_0, f_1, f_2) = | u_0 |^2 + \int_0^{\mathrm{T}} | f_1(\sigma) |_{\mathrm{V}'}^2 \, d\sigma + \left(\int_0^{\mathrm{T}} | f_2(\sigma) | \, d\sigma \right)^2. \tag{III.22}$$

Il en résulte pour les fonctions approchées u_{1k} et u_{2k} le

LEMME III.5. — $\forall k > 0$:

(i) u_{1k} *reste dans un borné de* $\mathrm{L}^\infty(\mathrm{H})$ *et dans un borné de* $\mathrm{L}^2(\mathrm{V})$;
(ii) u_{2k} *reste dans un borné de* $\mathrm{L}^\infty(\mathrm{H})$.

IV. — THÉORÈME DE CONVERGENCE FAIBLE.

D'après le lemme III.4.

Il existe u_i $(i = 1, 2)$ *et une sous-suite* $k' \to 0$, *avec*

$$u_{1k'} \to u_1 \left\{ \begin{array}{l} \textit{dans } \mathrm{L}^\infty(\mathrm{H}) \textit{ faible dual faible de } \mathrm{L}^1(\mathrm{H}), \\ \textit{dans } \mathrm{L}^2(\mathrm{V}) \textit{ faible}; \end{array} \right.$$

$$u_{2k} \to u_2 \quad \textit{dans } \mathrm{L}^\infty(\mathrm{H}) \textit{ faible.}$$

Nous allons montrer le

LEMME IV.1.

(i) $u_1(t) = u_2(t)$ $(= w(t))$ *p. p.;*
(ii) $w \in \mathrm{L}^\infty(\mathrm{H}) \cap \mathrm{L}^2(\mathrm{V})$.

Démonstration du lemme IV.1. — Tout revient à montrer le point (i), le point (ii) étant alors immédiat.

(i) Si $t \in]nk, (n+1)k[$, on obtient *par intégration de* (II.19)

$$u_{2k}(t) - u_{1k}(t) = \int_{nk}^{t} \mathrm{M}_n u_{2k}(\sigma)\, d\sigma + \int_{nk}^{t} f_2(\sigma)\, d\sigma, \tag{IV.1}$$

d'où

$$| u_{2k}(t) - u_{1k}(t) | \leq k\mu \, | u_{2k} |_{\mathrm{L}^\infty(\mathrm{H})} + \int_{nk}^{t} | f_2(\sigma) | \, d\sigma. \tag{IV.2}$$

Comme

(IV.3) u_{2k} *est dans un borné de* $\mathrm{L}^\infty(\mathrm{H})$ *et que* $f_2 \in \mathrm{L}^1(\mathrm{H})$,

on déduit de (IV.3) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \textit{Pour } t \textit{ fixé, } t \in]nk, (n+1)k[, \\ \qquad\qquad \lim\limits_{k=0} | u_{2k}(t) - u_{1k}(t) | = 0. \end{array} \right. \tag{IV.4}$$

Mais

(IV.5) $\left\{\begin{array}{l}\textit{La fonction } t \to | u_{2k}(t) - u_{1k}(t) | \textit{ est essentiellement bornée} \\ \quad \textit{sur } (0, \mathrm{T}), \textit{ indépendamment de } k,\end{array}\right.$

donc le *théorème de Lebesgue* implique (par exemple)

$$u_{2k} - u_{1k} \to 0 \quad \textit{dans } \mathrm{L}^1(\mathrm{H}) \textit{ lorsque } k \to 0; \tag{IV.6}$$

utilisant (IV.1), nous obtenons

$$u_2(t) = u_2(t) \quad \text{p. p.} \quad \text{sur } (0, \mathrm{T}) \quad (= w(t)), \tag{IV.7}$$

d'où le lemme IV.1.

Nous allons maintenant vérifier le

LEMME IV.2. — *w est la solution du problème exact.*

Démonstration du lemme IV.2. — *Soit t fixé dans* $(0, \mathrm{T})$ et *soit ρ le premier entier* $< \frac{t}{k}$.

De (II.15) et (II.19) nous déduisons :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Pour } q = 0, 1, \ldots, \rho - 1 : \\ \qquad u^{q+\frac{1}{2}} - u^q + \displaystyle\int_{qk}^{(q+1)k} \mathrm{A}(s)\, u_{1k}(s)\, ds = \int_{qk}^{(q+1)k} f_1(s)\, ds, \\ \qquad u^{q+1} - u^{q+\frac{1}{2}} + \displaystyle\int_{qk}^{(q+1)k} \mathrm{M}_q\, u_{2k}(s)\, ds = \int_{qk}^{(q+1)k} f_2(s)\, ds. \end{array} \right. \tag{IV.8}$$

Par addition des deux égalités (IV.8), puis par sommation sur q variant de o à $\rho - 1$, nous obtenons

$$(IV.9)\quad u^\rho + \int_0^{\rho k} A(s)\, u_{1k}(s)\, ds + \int_0^{\rho k} M r_{\rho k} u_{2k}(s)\, ds = u^0 + \int_0^{\rho k} [f_1(s) + f_2(s)]\, ds.$$

Mais, nous avons aussi

$$(IV.10)\quad \left\{\begin{aligned} & u^{\rho+\frac{1}{2}} - u^\rho + \int_{\rho k}^{(\rho+1)k} A(s)\, u_{1k}(s)\, ds = \int_{\rho k}^{(\rho+1)k} f_1(s)\, ds, \\ & u_{2k}(t) - u^{\rho+\frac{1}{2}} + \int_{\rho k}^{t} M_\rho(u_{2k}(s))\, ds = \int_{\rho k}^{t} f_2(s)\, ds \end{aligned}\right.$$

et, par addition des deux égalités (IV.10), on obtient

$$(IV.11)\quad \left\{\begin{aligned} & u_{2k}(t) - u^\rho + \int_{\rho k}^{t} [A(s)\, u_{1k}(s) + M_\rho\, u_{2k}(s)]\, ds \\ & \quad = \int_{\rho k}^{t} [f_1(s) + f_2(s)]\, ds + \int_{t}^{(\rho+1)k} [f_1(s) - A(s)\, u_{1k}(s)]\, ds. \end{aligned}\right.$$

Enfin, par addition de (IV.9), (IV.11), il vient

$$(IV.12)\quad \left\{\begin{aligned} & u_{2k}(t) + \int^{t} A(s)\, u_{1k}(s)\, ds + \int^{t} M\, u_{2k}(s)\, ds \\ & \quad = u_0 + \int_0^{t} [f_1(s) + f_2(s)]\, ds + \int_{t}^{(\rho+1)k} [f_1(s) - A(s)\, u_{1k}(s)]\, ds. \end{aligned}\right.$$

Nous allons passer à la limite dans (IV.12), *avec* $k = k'$, *t étant fixé :*

L'opérateur $A(.)$ *étant continu de* $L^2(V) \to L^2(V')$, et d'après l'*hypothèse* (I.6) *ou* (I.7) faite *sur* M, nous avons :

$$(IV.13)\quad \left.\left\{\begin{aligned} & \int_0^{t} A(s)\, u_{1k'}(s)\, ds \to \int_0^{t} A(s)\, w(s)\, ds \quad \textit{dans } V' \textit{ faible} \\ & \int_0^{t} M_{2k'}(s)\, ds \to \int_0^{t} M\, w(s)\, ds \qquad \textit{dans } H \textit{ faible} \end{aligned}\right.\right\} \textit{lorsque } k' \to 0.$$

Comme

$$(IV.14)\quad (r+1)k' \to t \quad \textit{lorsque } k' \to 0,$$

on a

$$(IV.15)\quad \int_{t}^{(r+1)k'} [f_1(s) - A(s)\, u_{1k'}(s)]\, ds \to 0 \quad \textit{dans } V' \textit{ faible lorsque } k' \to 0.$$

Des propriétés (IV.13) à (IV.15) et de (IV.12) il découle

$$(IV.16)\quad \left\{\begin{aligned} & \textit{lorsque } k' \to 0,\ u_{2k'}(t) \to \tilde{w}(t), \textit{ avec} \\ & \quad \tilde{w}(t) = u_0 + \int_0^{t} [f(s) - A(s)\, \tilde{w}(s) - M\, \tilde{w}(s)]\, ds \quad \textit{dans } V'. \end{aligned}\right.$$

Comme $u_{2k'}(t) \to \tilde{w}(t)$ *dans* V *faible pour chaque* $t \in (o, T)$ et que $|u_{2k'}(t)|_{V'}$ *est essentiellement bornée sur* (o, T), *indépendamment de* k', nous déduisons du *théorème de Lebesgue :*

$$(IV.17) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\int_0^T (u_{2k'}(t), v)\, \varphi(t)\, dt \to \int_0^T (\tilde{w}(t), v)\, (t)\, dt, \\ \forall v \in V \quad \text{et} \quad \forall \varphi \in \mathcal{C}(o, T) \quad \text{lorsque } k' \to o, \end{array} \right.$$

mais, d'autre part,

$$(IV.18) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\int_0^T (u_{2k'}(t)\,;\, v)\, \varphi(t)\, dt \to \int_0^T (w(t), v)\, \varphi(t)\, dt, \\ \forall v \in V \quad \text{et} \quad \forall \varphi \in \mathcal{C}(o, T) \quad \textit{lorsque } k' \to o. \end{array} \right.$$

Par confrontation des résultats (IV.17) et (IV.18) et compte tenu de la *densité de* $\mathcal{C}[o, T] \otimes V$ *dans* $L^1(V)$, on obtient

$$(IV.19) \qquad \tilde{w}(t) = w(t) \quad p.p. \textit{ sur } (o, T).$$

D'après (IV.16), on a

$$(IV.20) \qquad \tilde{w}(o) = u_0$$

et, par *dérivation au sens des distributions à valeurs vectorielles de* $]o, T[\to V'$,

$$(IV.21) \qquad \tilde{w}(t)' + A(t)\,\tilde{w}(t) + M\,\tilde{w}(t) = f(t) \quad p.p. \textit{ sur } (o, T) \textit{ dans } V'.$$

Ce qui achève de démontrer le lemme IV.2.

En résumé nous avons établi le *théorème de convergence faible* suivant :

Théorème 3.II. — *u désignant la solution du problème exact, il existe une suite* $k' \to o$ *telle que :*

(i) $u_{1k'} \to u$ *dans* $L^\infty(H)$ *et* $L^2(V)$ *faibles;*

(ii) $u_{2k'} \to u$ *dans* L(H) *faible.*

Remarque. — Les hypothèses (I.6), (I.7) de régularité sur l'opérateur M ne sont intervenues que pour le passage à la limite dans la démonstration du lemme IV.2.

Il serait intéressant de savoir si la conclusion du paragraphe 3, n° II a lieu sous les hypothèses du paragraphe 1. Pour pouvoir répondre à cette question, il suffirait de savoir approcher convenablement les dérivées d'ordre fractionnaire.

§ 4. Équations d'évolution avec retard. Exemples.

Nous allons appliquer ici les résultats des paragraphes précédents à des exemples de *problèmes à retardement.*

I. — Retards constants.

Nous considérons *deux espaces de Hilbert complexes séparables* V et H, avec $V \subset H$ *algébriquement et topologiquement* (*injection continue*).

Nous nous donnons $a(t; u, v)$ *une famille de formes sesquilinéaires continues sur* $V \times V$ vérifiant les hypothèses du théorème 1.I.

Par ailleurs, soit *une famille d'opérateurs* $B(t)$, avec

(i) $\forall t \in (0, T)$, $B(t) \in \mathcal{L}(V, V')$;

(ii) $\exists \beta = \beta(T)$, Cte > 0, *avec*

$$|(B(t)u, v)| \leq \beta \|u\| . \|v\|, \quad \forall t \in (0, T), \quad \forall u, v \in V. \tag{I.1}$$

Nous posons [8] le

Problème R_1. — *Soit* $\zeta_0 > 0$ *fixé, f donné dans* $L^1(H) + L^2(V')$.

Trouver u vérifiant

$$u'(t) + A(t)\,u(t) + B(t)\,u(t - \zeta_0) = f(t) \quad p.p. \textit{ dans } V'; \tag{I.2}$$

$$u = 0 \quad \textit{pour} \quad t \in]-\zeta_0, 0[; \tag{I.3}$$

$$u \in L^2(V); \tag{I.4}$$

$$u(0) = \xi_0, \qquad \xi_0 \textit{ donné dans } H. \tag{I.5}$$

Théorème 4.I. — *Il existe une solution unique au problème* R_1 *vérifiant les conclusions du théorème* 1.I *sur* (0, T).

Remarque 4.I. — Le problème R_1 rentre dans le cas général du n° II et se trouve donc résolu au n° II.

Notons cependant que sa solution est immédiate et qu'il n'est pas besoin de la théorie des paragraphes précédents pour le résoudre.

Démonstration du théorème 4.I. — Notons que le théorème 1.I est *valable sans supposer* $V \to H$ *compacte lorsque* $M = 0$.

Par ailleurs, dans $]0, t_0[$, (I.2) se réduit, compte tenu de (I.3), à

$$u'(t) + A(t)\,u(t) = f(t) \qquad (t \in (0, \tau_0)). \tag{I.6}$$

Ce qui, joint au théorème 1.I (avec $M = 0$), *définit* $u = u^0$ *de manière unique* dans $(0, \tau_0)$ avec

$$u^0 \in L^2(0, \tau_0; V) \cap L^\infty(0, \tau_0 H). \tag{I.7}$$

---

[8] *Voir* aussi Lattes-Lions [12].

Dans $(\tau_0, 2\tau_0)$ (I.2) s'écrit alors

$$u'(t) + A(t)u = -B(t)u^0(t-\tau_0) + f(t). \tag{I.8}$$

Comme, d'après (I.1),

$$t \to B(t)u^0(t - T_0) \quad \textit{est dans } L^2(\tau_0, 2T_0), \tag{I.9}$$

le même théorème 1.I (avec $M = 0$) *définit* $u = u^1$ *de manière unique dans* $(\tau_0, 2\tau_0)$, *la donnée initiale de Cauchy étant ici*

$$u^1(\tau_0) = u^0(\tau_0).$$

Si $T > 2\tau_0$ on recommence jusqu'à atteindre T.

II. — Retards dépendant de t.

1. Le problème. — Les espaces V et H sont donnés comme au n° I.

Soit une famille $a(t; u, v)$ vérifiant

(II.1) *Les hypothèses du théorème* 1.I (*resp. les hypothèses du théorème* 1.II).

Par ailleurs, *soit une famille d'opérateurs* $B(t)$, avec

(i) $\forall t \in (0, T)$, $B(t) \in \mathcal{L}(H, H)$ [*resp.* $B(t) \in \mathcal{L}(V, H)$];

(ii) $\exists \beta > 0$, *avec*

$$|B(t)g| \leq \beta |g| \qquad [\textit{resp.}\ |B(t)g| \leq \beta \|g\|]. \tag{II.2}$$

Introduisons *une fonction scalaire* ω telle que

(II.3) $t \to \omega(t)$ *définie pour* $t \in (0, T)$ *soit mesurable* (9);

(II.4) *il existe* $t_0 \in (0, T)$, *avec* $t - \omega(t) > 0$ *pour* $t \in (t_0, T)$.

Nous poserons

$$-\tau_0 = \inf_{t \in (0, t_0)} [t - \omega(t)]. \tag{II.5}$$

Considérons enfin

$$g \in L^1(-\tau_0, 0; H) \qquad (\text{resp. } L^2(-\tau_0, 0; H)]. \tag{II.6}$$

Le *problème de retard le plus usuel* est le

Problème R_2. — *Soit* ξ_0 *donné dans* H [*resp. dans* D(A(0)]

$$f \in L^1(H) + L^2(V') \qquad [\textit{resp.}\ f \in L^2(H)].$$

---

(9) Nous pouvons nous placer aussi dans le cas plus général de l'introduction (p. ++).

Trouver u vérifiant

(II.7) $u'(t)+A(t)\,u(t)+B(t)\,u(t-\omega(t))=f(t)$ *dans* V', *p.p.* $t\in\,]0, T]$;

(II.8) $u(t)=g(t)$ *p.p. pour* $t\in[-\tau_0, 0[$;

(II.9) $u\in L^\infty(H)\cap L^2(V)$;

(II.10) $u(0)=\xi_0$.

2. Théorème 4.II. — *Sous les hypothèses* (II.1) *à* (II.6), *il existe une solution unique au problème* R_2.

Démonstration du théorème 4.II. — On se ramène aux hypothèses du théorème 1.I (resp. du théorème 2.I).

En effet, *définissons* M par

(II.11) $$M\,u(t)=p.p.\begin{cases} B(t)\,u(t-\omega(t)) & si\ \ t\in(t_0, T),\\ 0 & si\ \ t\in(0, t_0).\end{cases}$$

Alors

(II.12) $M\in\mathcal{L}(L^\infty(H), L^\infty(H))$ [resp. $\mathcal{L}(L^\infty(V), L^\infty(H))$] *est de type local et quasi temporel.*

Soit, *par ailleurs*, f_1 avec

(II.13) $$f_1(t)=\begin{cases} B(t)\,g(t-\omega(t))\ \ p.p. & si\ \ t\in(0, T_0),\\ 0 & si\ \ t\in(t_0, T);\end{cases}$$

dans ces conditions, d'après (II.2), on a

(II.14) $f_1\in L^1(H)$ [resp. $L^2(H)$]

et, par suite,

(II.15) $\tilde f=f+f_1\,L^1(H)+L^2(V')$ [resp. $L^2(H)$].

Ceci posé, (II.7), (II.8) *est équivalent à* (II.8), (II.16), où

(II.16) $u'(t)+A(t)\,u(t)+M\,u(t)=\tilde f(t)$ *p.p. sur* (0, T) *dans* V' [10].

Alors d'après le paragraphe 2, n° II, les théorèmes 1.I et 1.II s'appliquent.

3. Remarques. — 1° Supposons par exemple que nous soyons dans les conditions d'application du théorème 1.I.

Alors :

(II.17) $$\begin{cases} \textit{l'application } (\xi_0, g, f)\to u \textit{ est continue de}\\ H\times L^1(-\tau_0, 0; H)\times[L^1(H)+L^2(V')]\to L^2(V)\quad [\text{resp. } \mathcal{C}(0, T; H)].\end{cases}$$

---

[10] L'inconnue u du problème R_2 est définie sur $(-\tau_0, T)$. Dans (II.7) ou (II.16) u est défini sur (0, T) et l'on prolonge cet u par $u(t) = g(t)$ p. p. sur $(-\tau_0, 0)$.

3° Nous pouvons bien entendu *ajouter à* M *une perturbation* M_1 définie par

(II.18) $$M_1 u(t) = \int_0^t K(t, s)\, u(s)\, ds,$$

où

(II.19) $$\begin{cases} \forall\,(t, s) \in (0, T) \times (0, T), \\ K(t, s) \in \mathcal{L}(H, H) \qquad [\text{resp. } \mathcal{L}(V, H)], \end{cases}$$

avec $\exists\, k \in L^1(\mathbf{R}^+)$ *telle que*

(II.20) $$\begin{cases} \forall\,(t, s) \in (0, T) \times (0, T), \quad \forall\, u \in H \quad (\text{resp. } u \in V), \\ |K(t, s)\, u| \leq k(s)\, |u| \qquad [\text{resp. } |K(t, s)\, u| \leq k(s)\, \|u\|]. \end{cases}$$

Ainsi

(II.21) $$|r_t M_1 u|_{L^\infty(H)} \leq |k|_{L^1(R^+)}\, |r_t u|_{L^\infty(H)}$$

et

$$M_1 \in \mathcal{L}(L^\infty(H), L^\infty(H)) \qquad [\text{resp. } \mathcal{L}(L^\infty(V), L^\infty(K))]$$

est de type local et même quasi temporel.

4. Stabilité en ω. — Il est facile de donner une *condition suffisante assez large portant sur les retards* ω permettant d'assurer la validité du théorème 1.III.

Soit en effet $\{\omega_n\}$ *une suite de fonctions vérifiant la condition* (II. 3) et désignons par M_n les opérateurs correspondants.

Faisons l'hypothèse :

(II.22) $\omega_n \to 0$ *en mesure lorsque* $n \to +\infty$;

alors

(II.23) $\forall\, u$ *fixé dans* $\mathcal{C}(0, T; H)$; $M_n u \to M u$ *dans* $L^1(H)$ *fort.*

En effet, *comme il est loisible de supposer* $t \to \omega_n(t) > 0$ *p. p. en* $t \in (0, T)$ *sans altérer la généralité,* nous aurons

(II.24) $$\begin{cases} |M_n u - M u|_{L^1(H)} \leq \beta \displaystyle\int_0^T |u(t - \omega_n(t)) - u(t)|\, dt, \\ \qquad \forall\, n \text{ et } \forall\, u \in \mathcal{C}(0, T; H). \end{cases}$$

Posons

(II.25) $$X_n^\delta = \{t : t \in (0, T),\ \omega_n(t) > \delta > 0\}$$

et désignons par

(II.26) $\overline{X}_n^\delta$ *le complémentaire de* X_n^δ *dans* $(0, T)$.

D'après (II.22),

(II.27) $$\operatorname{mes}(X_n^\delta) \to 0, \qquad \forall\, \delta > 0 \quad \textit{lorsque } n \to +\infty,$$

mais u étant *uniformément continue* sur (o, T) *à valeurs dans* H, on a

$$\text{(II.28)}\quad \left\{\begin{array}{l} \forall\,\varepsilon > 0,\quad \exists\,\eta(\varepsilon),\quad n_0(\varepsilon)\quad \textit{tels que}\ \forall\,\delta < \eta(\varepsilon)\quad \textit{et}\quad \forall\,n > n_0(\varepsilon),\ \textit{on ait} \\ \qquad \operatorname{mes}(X_n^\delta) \leqq \dfrac{\varepsilon}{2K_0\beta},\qquad |u(t-\omega_n(t)) - u(t)| \leqq \dfrac{\delta}{2T\beta},\quad \forall\,t \in \overline{X}_n^\delta, \\ \qquad\qquad\qquad \textit{avec}\quad \sup\limits_{t\in(0,T)} |u(t)| \leqq K_0, \end{array}\right.$$

d'où (II.23).

III. — Un autre exemple.

Nous allons appliquer ici le théorème 2.IV.

Les notations étant par ailleurs celles du n° II, nous introduisons *une famille de formes sesquilinéaires continues sur* $V \times V$ *définies pour* $t \in \mathbf{R}^+$, soit $k_0(t; u, v)$, avec

(III.1) $t \to k_0(t; u, v)$ *est continue et bornée*;

(III.2) $\left\{\begin{array}{l} t \to k_0(t; u, v) \ \textit{a une dérivée au sens des distributions dans} \\ \quad]0, +\infty[\ \textit{qui est mesurable et bornée.} \end{array}\right.$

Il en résulte :

$$\text{(III.3)}\quad \left\{\begin{array}{l} \exists\,K_0,\,K_1,\ \textit{constantes telles que} \\ \qquad \left.\begin{array}{l} |k_0(t; u, v)| \leqq K_0 \|u\|.\|v\| \\ |k'_0(t; u, v)| \leqq K_1 \|u\|.\|v\| \end{array}\right\}\quad \forall\,t,\quad \forall\,u, v \in V. \end{array}\right.$$

Dans ces conditions, nous posons le

Problème R_3. — *Étant donnés* $g \in L^1(-\infty, 0, V)$, $\xi_0 \in \mathcal{D}(A_0)$, $f \in L^2(H)$. *Trouver* $u \in L^2(-\infty, T; V)$ *vérifiant*

$$\text{(III.4)}\qquad u|_{(-\infty,0)} = g \quad p.p.;$$

$$\text{(III.5)}\qquad u(0) = \xi_0;$$

$$\text{(III.6)}\quad u'(t) + A(t)\,u(t) + \int_{-\infty}^{t} K_0(t-\sigma)\,u(\sigma)\,d\sigma = f(t)\quad p.p.\ t \in (0, T)\ \textit{dans}\ V'.$$

Théorème 4.III. — *Il existe une solution unique au problème* R_3 *vérifiant les propriétés suivantes :*

1° *La restriction de u à* (o, T) *est dans* $H^{\infty,2}$;

2° *u est continue de* (o, T) $\to$ V *fort;*

3° *L'application* $(\xi, g, f) \to u$ *est continue de*

$$D(A(0)) \times L^1(-\infty, 0; V) \times L^2(H) \to H^{\infty,2}.$$

Démonstration du théorème 4.III. — [(III.4), (III.5), (III.6)] est équivalent à

$$\text{(III.7)}\quad \begin{cases} u'(t)+\mathrm{A}(t)\,u(t)+\displaystyle\int_0^t \mathrm{K}_0(t-\sigma)\,u(\sigma)\,d\sigma = f(t)+\rho(t) \quad \text{p. p.}, \qquad t\in(0,\mathrm{T}),\\ u(0)=\xi_0,\end{cases}$$

où

$$\text{(III.8)}\qquad \rho(t)=-\int_{-\infty}^{0}\mathrm{K}(t-\sigma)\,g(\sigma)\,d\sigma;$$

$$\text{(III.9)}\qquad \rho\in\mathrm{L}^\infty(\mathrm{V}'),\qquad \text{avec}\quad \rho'\in\mathrm{L}^\infty(\mathrm{V}).$$

Le second membre de (III.7) n'étant pas dans $\mathrm{L}^2(\mathrm{H})$, nous ne sommes pas tout à fait dans les conditions d'application du théorème 2.IV. Notons cependant que ce théorème est encore valable dans les conditions actuelles.

Pour cela, il suffit de constater que les inégalités *a priori* [§ 2, (IV.12)] restent valables.

Or

$$\text{(III.10)}\quad \int_0^t\int_{-\infty}^0 k_0(s-\sigma;\, g(\sigma),\, u'_m(s))\,d\sigma\,ds$$
$$= \int_{-\infty}^0 k_0(t-\sigma;\, g(\sigma),\, u_m(t))\,d\sigma - \int_{-\infty}^0 k_0(-\sigma;\, g(\sigma),\, u_m(0))\,d\sigma$$
$$-\int_0^t\int_{-\infty}^0 k'_0(s-\sigma;\, g(\sigma),\, u_m(s))\,d\sigma\,ds = \mathrm{X}_1+\mathrm{X}_2+\mathrm{X}_3$$

et

$$\text{(III.11)}\quad \begin{cases} \forall\, \varepsilon'>0,\\ |\mathrm{X}_1|\leq \mathrm{K}_0\,|g|_{\mathrm{L}^1(-\infty,0;\mathrm{V})}\,\|u_n(t)\|\leq\varepsilon' \sup\limits_{s\in(0,t)}\|u_m(\sigma)\|^2+\mathrm{C}(\varepsilon')\,|g|_{\mathrm{L}^1(-\infty,0;\mathrm{V})},\\ |\mathrm{X}_2|\leq \mathrm{K}_0\,|g|_{\mathrm{L}^1(-\infty,0;\mathrm{V})}\,\|\varepsilon_0\|\leq\varepsilon' \sup\limits_{s\in(0,t)}\|u_m(\sigma)\|^2+\mathrm{C}(\varepsilon')\,|g|_{\mathrm{L}^1(-\infty,0;\mathrm{V})},\\ |\mathrm{X}_3|\leq \mathrm{K}_1\displaystyle\int_0^t\|u_m(s)\|\,ds\,|g|_{\mathrm{L}^1(-\infty,0;\mathrm{V})}.\end{cases}$$

Par suite

$$\text{(III.12)}\quad \forall\,\varepsilon>0,\quad \int_0^t \mathrm{Re}\,(\rho(s),\, u'_m(s))\,ds\leq\varepsilon \sup_{s\in(0,t)}\|u_m(\sigma)\|^2$$
$$+\,\mathrm{C}_1\int_0^t\|u_m(s)\|^2\,ds+\mathrm{C}_2\,|g|_{\mathrm{L}^1(-\infty,0;\mathrm{V})}.$$

d'où le résultat.

IV. — Problèmes aux limites a « données épaisses ».

1. Problèmes du deuxième ordre en x. — 1.1. *Application du théorème* 1.I. — *Soit* Ω *un ouvert de* $\mathbf{R}^n$ *suffisamment régulier.*

Nous prendrons $\mathrm{H}=\mathrm{L}^2(\Omega)$ *muni de la norme usuelle.*

L'espace V *sera un sous-espace fermé de* $\mathrm{H}^1(\Omega)$ avec

$$\text{(1.0)}\qquad \mathrm{H}^1_0(\Omega)\subset\mathrm{V}\subset\mathrm{H}^1(\Omega).$$

Nous rappelons (chap. 0) que la norme dans $H^1(\Omega)$ dérive du produit scalaire.

$$(1.1)\qquad ((u, v)) = (u, v) + \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial v}{\partial x_i}\right) \qquad [(\quad,\quad), \text{ produit scalaire dans } L^2(\Omega)].$$

Soit

$$(1.2)\qquad a(t; u, v) = \sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega a_{ij}(x, t) \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x_i} dx + \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega a_i\,(x, t) \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \bar{v}\, dx + \int_\Omega a_0(x, t)\, u \bar{v}\, dx,$$

où, si $Q_T = \Omega \times]0, T[$,

$$(1.3)\qquad a_{ij}, a_i, a_0 \in L^\infty(Q_T) \qquad (i, j = 1, \ldots, n).$$

Nous supposons vérifiée *l'hypothèse de coercivité :*

$$(1.4)\qquad \operatorname{Re} \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x, t)\, \zeta_j \bar{\zeta}_i \geq \alpha \sum_{i=1}^{n} |\zeta_i|^2, \qquad \alpha, \text{ Cte} > 0, \quad \forall \zeta_i \in \mathbf{C} \quad p.p. \text{ dans } Q_T.$$

Dans ces conditions, les hypothèses du théorème 1.I sont satisfaites (*voir* [14]).

L'opérateur $A(t)$ défini par $a(t; u, v)$ sera

$$A(t) = A\left(x, t, \frac{\partial}{\partial x}\right) = -\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x, t) \frac{\partial}{\partial x_j}\right) + \sum_{i=1}^{n} a_i(x, t) \frac{\partial}{\partial x_i} + a_0(x, t).$$

Soit $M \in \mathcal{L}(L^\infty(\Omega))$, $L^\infty(L^2(\Omega))$ vérifiant les hypothèses du théorème 1.I.

D'après le théorème 1.I, si $f \in L^1(H) + L^2(V')$ et si Ω est, par exemple, borné et assez régulier,

$$(1.5)\qquad \begin{cases} \exists\, u, \textit{ unique vérifiant :} \\ \qquad u \in L^2(V) \cap \mathcal{C}(0, T; H) \\ \text{avec, } \textit{au sens des distributions dans l'ouvert }]0, T[: \\ \qquad a(t; u(t), v) + (M u(t), v) + \dfrac{\partial}{\partial t}(u(t), v) = (f(t), v), \\ \qquad u(0) = u_0 \qquad (u_0 \textit{ donné dans } H). \end{cases}$$

On déduit de (1.5), compte tenu de (1.4),

$$(1.6)\qquad \begin{cases} A\left(x, t, \dfrac{\partial}{\partial x}\right) u + M u + \dfrac{\partial u}{\partial t} = f \quad \text{dans } Q_T, \\ u, \quad \dfrac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(Q_T) \qquad (i = 1, \ldots, n) \end{cases}$$

et, en outre,

$$\text{(1.7)} \qquad \text{p. p.} \quad u(t) \in \mathrm{V}.$$

La condition (1.7) *n'étant une condition aux limites que si* $\mathrm{V} \subset \mathrm{H}^2(\Omega)$ *strictement.*

Par ailleurs, si v est dans V, on a d'après (1.6) *formellement* puisqu'aucune précision n'est donnée sur Ω et sur sa frontière Γ.

$$\text{(1.8)} \qquad \int_\Omega \left(\mathrm{A}\left(x,\, t,\, \frac{\partial}{\partial x}\right) u + \mathrm{M}u + \frac{\partial u}{\partial t}\right) \bar{v}\, dx = \int_\Omega f(x,\, t)\, v(x)\, dx,$$

ce qui, d'après (1.5), doit être égal à

$$\text{(1.9)} \qquad a(t;\, u,\, v) + (\mathrm{M}u,\, v) + \int_\Omega \left(\frac{\partial}{\partial t} u\right) \bar{v}\, dx, \quad \forall\, v \in \mathrm{V}.$$

Donc *les conditions aux limites* sont en général de deux sortes :

$$\text{(1.10)} \qquad \begin{cases} \text{(i)} & u \textit{ vérifie } (1.7) \quad [\text{sauf } \mathrm{V} = \mathrm{H}^1(\Omega)]; \\ \text{(ii)} & \displaystyle\int_\Omega \mathrm{A}\left(x,\, t,\, \frac{\partial}{\partial x}\right) u\bar{v}\, dx = a(t,\, u,\, t),\, v), \quad \forall\, v \in \mathrm{V}. \end{cases}$$

Posons

$$\text{(1.11)} \qquad \begin{cases} \displaystyle\frac{\partial}{\partial \nu_{\mathrm{A}}} = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,\, t) \cos(n,\, x_i) \frac{\partial}{\partial x_j} \\ (\nu,\ \textit{normale extérieure en } x \textit{ à } \Gamma), \end{cases}$$

alors, par utilisation de la *formule de Green*, [(1.10), (ii)] donne la condition équivalente :

$$\text{(1.12)} \qquad \int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial \nu_{\mathrm{A}}} \bar{v}\, d\sigma = 0, \quad \forall\, v \in \mathrm{V} \qquad (d\sigma,\ \textit{mesure sur } \Gamma).$$

Dans ces conditions :

1° *Si* $\mathrm{V} = \mathrm{H}_0^1(\Omega)$, la condition (1.12) est toujours vérifiée et (1.7) donne

$$\text{(1.13)} \qquad u(x,\, t) = 0 \quad \text{pour} \quad x \in \Gamma, \quad t \in (0,\, \mathrm{T}),$$

condition de Dirichlet.

2° *Si* $\mathrm{V} = \mathrm{H}^1(\Omega)$, (1.7) est toujours vérifiée et (1.12) donne

$$\text{(1.14)} \qquad \frac{\partial u}{\partial \nu_{\mathrm{A}}} = 0 \quad \textit{pour} \quad x \in \Gamma, \quad t \in (0,\, \mathrm{T}),$$

condition de Neumann.

3° Si la frontière Γ *est assez régulière* et si Γ_1 *est une partie de* Γ *de capacité* > 0. Soit

$$\text{(1.15)} \qquad \mathrm{V} = \{\textit{adhérence dans } \mathrm{H}^1(\Omega) \textit{ des } v \in \mathrm{H}^1(\Omega),\ v|_{\Gamma_1} = 0\}.$$

Nous aurons *des conditions aux limites mêlées :*

$$(1.16)\qquad \begin{cases} u(x, t) = 0, & x \in \Gamma_1, \quad t \in (0, T), \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu_A} = 0, & x \in \Gamma - \Gamma_1, \quad t \in (0, T). \end{cases}$$

M *n'ayant pas été jusqu'ici explicité,* le problème de Cauchy considéré est un *problème à donnée ponctuelle.* D'après les n^os^ I à III, *nous pouvons résoudre des problèmes à données de Cauchy « épaisses ».*

Par exemple, prenons (*avec les notations du n*° II) $M \in \mathcal{L}(L^\infty(H), L^\infty(H))$, avec

$$(1.17)\qquad \left\{ \begin{array}{l} \forall\, u \in L^\infty(H), \\ M\,u(t) = \begin{cases} B(t)\,(u(t-\omega(t)) + \displaystyle\int_0^t K(s, t)\,u(s)\,ds, & t \in (t_0, T), \\ \displaystyle\int_0^t K(s, t)\,u(s)\,ds & \text{ailleurs.} \end{cases} \end{array} \right.$$

Pour g donnée dans $L^1(-\tau_0, 0; L^2(\Omega))$, nous aurons

$$(1.18)\qquad \left\{ \begin{array}{l} \exists\, u, \textit{ unique, avec :} \\ \qquad u \in L^1(-\tau_0, T; H), \\ \qquad u(x, t) = g(x, t) \quad \textit{p.p. dans } \Omega \times]-\tau_0, 0[, \\ \qquad u \in L^2(V) \cap \mathcal{C}(0, T; H), \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x, t) + A\left(x, t, \dfrac{\partial}{\partial x}\right) u + B(x, t)\,u(x, t-\omega(t)) \\ \qquad + \displaystyle\int_0^t K(x, s, t)\,u(x, s)\,ds = f(x, t), \\ \qquad u(x, 0) = u_0(x) \qquad [u_0 \textit{ donné dans } L^2(\Omega) \textit{ dans } Q_T]. \end{array} \right.$$

Les conditions aux limites étant suivant le choix de V (1.19) ou (1.14) ou (1.16).

1.2. *Une application du théorème* 1.II. — Nous prenons ici

$$(1.19)\qquad \begin{cases} a(t; u, v) = a(u, v) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x_i}\, dx, \\ A(t) = A = -\Delta. \end{cases}$$

Considérons *des fonctions scalaires* $\omega_i = 0, 1, \ldots, n$, avec

$$(1.20)\qquad \left\{ \begin{array}{l} \textit{Pour } i = 0, 1, \ldots, n : \\ \qquad t \to \omega_i(t) \textit{ est mesurable sur } (0, T), \\ \qquad \exists\, t_i \in [0, T[, \quad t - \omega_i(t) > 0 \quad \textit{pour } t \in]t_i, T[. \end{array} \right.$$

Nous posons

$$(1.21)\qquad \begin{cases} -\tau_i = \inf\,(t-\omega_i(t)), & t\in(0,\,t_i) \qquad (i=0,\,1,\,\ldots,\,n), \\ -r_0 = \inf\limits_i\,(-\tau_i), & \end{cases}$$

$M \in \mathcal{L}(L^\infty(V),\, L^\infty(H))$ (H, V comme dans 1.1) est défini par

$$(1.22)\qquad \begin{cases} \forall\, u \in L^\infty(V), \\ M u\,(t,\,x) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} b_i(x,\,t)\,\frac{\partial}{\partial x_i}\,u\,(x,\,t-\omega_i(t)) + b_0(x,\,t)\,u\,(x,\,t-\omega_0(t)) \\ \qquad\qquad \textit{si}\quad t-\omega_i(t) > 0 \\ \qquad\qquad 0 \quad \textit{ailleurs}, \end{cases} \end{cases}$$

où

$$(1.23)\qquad b_i \in L^\infty(Q_T) \qquad \textit{pour}\quad i=0,\,1,\,\ldots,\,n).$$

Soit

$$(1.24)\qquad \begin{cases} g & \textit{donnée dans } L^1(-r_0,\,0;\,V), \\ f & \textit{donnée dans } L^2(H), \\ u_0 & \textit{donné dans } D(-\Delta). \end{cases}$$

Alors

$$(1.25)\qquad \begin{cases} \exists\, u \in L^1(-r_0,\,T;\,V), \textit{ avec :} \\ \text{(i)}\quad r_T u \in H^{\infty,\,2} \quad [r_T u,\ \textit{restriction de } u \textit{ à } (0,\,T)]; \\ \text{(ii)}\quad \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,\,t) - \Delta u\,(x,\,t) + \displaystyle\sum_{i=1}^{n} b_i(x,\,t)\,\frac{\partial}{\partial x_i}\,u\,(x,\,t,\,t-\omega_i(t)) \\ \qquad\qquad + b_0(x,\,t)\,u\,(x,\,t-\omega_0(t)) = f(x,\,t) \quad \textit{dans } Q_T; \\ \text{(iii)}\quad u\,(x,\,t) = g\,(x,\,t)\ \textit{p.p. dans } \Omega\times]-r_0,\,0[; \\ \text{(iv)}\quad u\,(0,\,x) = u_0(x), \qquad x\in\Omega. \end{cases}$$

Les conditions aux limites dépendent du choix de V comme dans 1.1.

1.3. *Un autre exemple.* — Dans les exemples précédents M est *quasi temporel.* Dans ce qui suit, *ce n'est plus le cas en général.*

Soit $\Omega =]0,\,1[$ pour fixer les idées.

On se donne *deux fonctions à valeurs dans* $\mathbf{R}$:

$$(1.26)\qquad \begin{cases} \text{(i)}\ t\to\omega(t)\ \textit{mesurable définie dans } (0,\,T)\ \textit{vérifiant les hypothèses} \\ \qquad \textit{du n}^{\text{o}}\ \text{II}. \\ \text{(ii)}\ (x,\,t)\to(x,\,t)\ \textit{définie dans } \Omega\times]0,\,T[,\ \textit{mesurable en } t,\ \textit{une fois} \\ \qquad \textit{continûment différentiable en } x,\ \textit{avec} \\ \qquad\qquad \forall\, x\in\Omega,\quad 0\leq\chi(x,\,t)\leq x,\quad \forall\, t\in(0,\,T), \\ \qquad\qquad \left|\dfrac{\partial}{\partial x}\chi(x,\,t)\right| \geq \chi_0 > 0, \qquad \chi_0\ \textit{indépendant de } (x,\,t). \end{cases}$$

Alors :

(1.27) *Pour g donnée dans* $L^1(L^2(\Omega))$, *f dans* $L^1(H)+L^2(Q_T)$, u_0 *dans* $L^2(\Omega)$.

On a, d'après le théorème 1.I,

$$(1.28)\quad \left\{\begin{array}{l} \exists\, u \in L^1(-r_0;\, T;\, L^2(\Omega)), \\ r_T u \in L^2(V) \cap \mathcal{C}(0,\, T;\, L^2(\Omega)), \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(x,t) - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) + u(\chi(x,t),\, t-\omega(t)) = f(x,t) \quad \textit{dans } Q_T. \\ \textit{avec :} \\ \text{(i)}\quad u(0,t) = u(1,t) = 0 \quad \textit{si}\ V = H_0^1(\Omega), \\ \text{(ii)}\quad \dfrac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \dfrac{\partial u}{\partial x}(1,t) = 0 \quad \textit{si}\ V = H^1(\Omega). \end{array}\right.$$

2. Problèmes d'ordre $2m$ en x. — *Ω étant un ouvert de* R^n, *on prend* $H = L^2(\Omega)$. V *est un sous-espace vectoriel fermé de* $H^m(\Omega)$, *avec* :

$$(2.0)\qquad H_0^m(\Omega) \subset V \subset H^m(\Omega).$$

Dans *le cas de Ω quelconque*, on prend

$$(2.1)\qquad a(t;\, u,\, v) = \sum_{|p|,|q|\le m} \int_\Omega a_{pq}(x,t)\, D^q u\, D^p \bar{v}\, dx;$$

$$(2.2)\qquad a_{p,q} \in L^\infty(Q_T) \quad \text{resp. suffisamment réguliers en } t).$$

Si Ω *est un ouvert de frontière* Γ *bornée, variété indéfiniment différentiable de dimension* $n-1$, on prend

$$(2.3)\qquad a(t;\, u,\, v) = \textit{forme}\ (2.1) + \sum_{j=0}^{m-1} \langle T_j(t)\, u,\, \gamma_j \bar{v}\rangle;$$

$$(2.4)\qquad T_j(t) \in \mathcal{L}\left(H^m(\Omega),\, H^{-\left(m-j-\frac{1}{2}\right)}(\Gamma)\right),$$

avec

$$(2.5)\qquad t \to \langle T_j(t)\, u,\, \varphi\rangle, \quad u \in H^m(\Omega), \quad \varphi \in H^{\left(m-j-\frac{1}{2}\right)}(\Gamma)$$

étant mesurables (*resp. suffisamment régulières en t*);

$$(2.6)\quad \left\{\begin{array}{l} |\langle T_j(t)\, u,\, \varphi\rangle| \le C_j \|u\|_{H^m(\Omega)} \|\varphi\|_{H^{m-j-\frac{1}{2}}(\Gamma)}, \qquad t \in (0,\, T) \qquad (C_j = \text{Cte}) \\ \left[\text{resp. } |\langle T'_j(t)\, u,\, \varphi\rangle| \le C'_j \|u\|_{H^m(\Omega)} \|\varphi\|_{H^{m-j-\frac{1}{2}}(\Gamma)} \quad (C'_j = \text{Cte})\right]. \end{array}\right.$$

On prend ensuite

(2.7) $M \in \mathcal{L}(L^\infty(H),\, L^\infty(H))$ *de type local* $\quad$ [resp. $M \in \mathcal{L}(L^\infty(V),\, L^\infty(H))$]

vérifiant

$$(2.8)\quad \begin{cases} \text{(i) M } \textit{est quasi temporel ou } \mathrm{L}^2\textit{-régulier dans le cas } (2.1)\,; \\ \text{(ii) M } \textit{vérifie les hypothèses du théorème } 1.\mathrm{I} \text{ (resp. du théorème } 1.\mathrm{II}) \\ \qquad \textit{dans le cas } (2.3). \end{cases}$$

Alors si $a(t;\, u,\, v)$ *est* V-*elliptique* (resp. V-elliptique hermitienne), on obtiendra *l'existence et l'unicité de* u vérifiant

$$(2.9)\quad \begin{cases} \mathrm{A}\left(x,\, t,\, \dfrac{\partial}{\partial x}\right) u + \dfrac{\partial}{\partial t} u + \mathrm{M} u = f \quad \textit{dans } \mathrm{Q}_{\mathrm{T}}, \\ f \textit{ donnée dans } \mathrm{L}^2(\mathrm{H}) \text{ (par exemple)}, \end{cases}$$

où

$$(2.10)\quad \mathrm{A}\left(x,\, t,\, \frac{\partial}{\partial x}\right) = \sum_{p,q} (-1)^p\, \mathrm{D}_x^p (a_{pq}(x)\, t)\, \mathrm{D}_x^q u),$$

avec *condition de Cauchy ponctuelle*,

$$(2.11)\quad u(x,\, 0) = u_0(x).$$

Les *conditions aux limites* seront :

$$(2.12)\quad \begin{cases} \text{(i) } \textit{l'appartenance de } u \textit{ à } \mathrm{L}^2(\mathrm{V}) \text{ [resp. } \mathrm{L}^\infty(\mathrm{V})] \textit{ si } \mathrm{V} \neq \mathrm{H}^m(\Omega)\,; \\ \text{(ii) } \displaystyle\int_\Omega \left[\mathrm{A}\left(x,\, t,\, \frac{\partial}{\partial x}\right) u\right] \bar{v}\, dx = a(t;\, u,\, v) \textit{ pour tout } v \in \mathrm{V} \textit{ si } \mathrm{V} \neq \mathrm{H}_0^m(\Omega). \end{cases}$$

On transforme encore (2.12), (ii) par la *formule de Green*

$$(2.13)\quad \int_\Omega \left[\mathrm{A}\left(x,\, t,\, \frac{\partial}{\partial x}\right) u\right] \bar{v}\, dx = \int_\Omega a_{jp}(x,\, t)\, \mathrm{D}^q u\, \mathrm{D}^p \bar{v}\, dx + \sum_{j=0}^{m-1} \langle \mathrm{S}_j(t) u,\, \gamma_j \bar{v} \rangle,$$

ce qui donne

$$(2.14)\quad \begin{cases} \displaystyle\sum_{j=0}^{m-1} \langle \mathrm{S}_j(t) u,\, \gamma_j \bar{v} \rangle = 0, \qquad \forall\, v \in \mathrm{V} \quad \text{dans le cas } (2.1), \\ \displaystyle\sum \langle \mathrm{S}_j(t) - \mathrm{T}_j(t) u,\, \gamma_j \bar{v} \rangle = 0, \quad \forall\, v \in \mathrm{V} \quad \text{dans le cas } (2.3). \end{cases}$$

Donc, par exemple,

$$(2.15)\quad \begin{cases} 1^{\circ} \text{ si } \mathrm{V} = \mathrm{H}_0^m(\Omega),\ (2.12),\ \text{(i) } \textit{donne} \\ \qquad \mathrm{D}_x^p u(x,\, t) = 0, \quad \forall\, x \in \Gamma, \qquad t \in (0,\, \mathrm{T}), \qquad |p| \leq m-1\,; \end{cases}$$

$$(2.16)\quad \begin{cases} 2^{\circ} \text{ i } \mathrm{V} = \mathrm{H}^m(\Omega),\ (2.12),\ \text{(ii) } \textit{donne} \\ \textit{soit} \quad \mathrm{S}_j(t) u = 0, \qquad \forall\, x \in \Gamma, \qquad t \in (0,\, \mathrm{T}) \qquad (j = 0,\, \ldots,\, m-1), \\ \textit{soit} \quad [\mathrm{S}_j(t) - \mathrm{T}_j(t)] u = 0, \quad \forall\, x \in \Gamma, \qquad t \in (0,\, \mathrm{T}) \qquad (j = 0,\, \ldots,\, m-1). \end{cases}$$

Comme dans le cas des problèmes d'ordre 2 en x, *on peut ramener au cas considéré plus haut des problèmes de Cauchy à données épaisses.*

Par exemple, résoudre

$$(2.17)\quad \begin{cases} A\left(x, t, \dfrac{\partial}{\partial x}\right) u(x, t) + \displaystyle\sum_{|i+j| \leq m-1} (-1)^{|i|} D_x^i [b_{ij}(x, t)\, D_x^j u(x, t - \omega_j(t))] \\ \qquad + \dfrac{\partial}{\partial t} u(x, t) = f(x, t) \quad \textit{dans } Q_T, \\ u(x, t) = g(x, t) \quad \textit{sur} \quad \Omega \times]-r_0, 0[, \quad g \textit{ dans } L^1(-r_0, 0; H), \\ u(x, 0) = u_0(x), \end{cases}$$

les fonctions ω_j(resp. r_0) vérifiant les propriétés analogues à (1.20) [resp. *défini* par (1.21)], et les *conditions aux limites dépendant du choix de* V.

V. — Retards dans les conditions aux limites.

1. Application du théorème 2.III. — Soit Ω *un ouvert de* $\mathbf{R}^n$ *suffisamment régulier*. On prend $H = L^2(\Omega)$. Γ désigne *la frontière de* Ω.

L'espace V *est un sous-espace fermé de* $H^1(\Omega)$, avec

$$(1.0)\qquad H_0(\Omega) \subset V \subset H^1(\Omega) \quad \textit{injections compactes.}$$

Soit

$$(1.1)\quad \begin{cases} a(t; u, v) = \displaystyle\sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega a_{ij}(x, t) \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x_i} dx + \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega a_i(x, t) . \\ \qquad \dfrac{\partial u_i}{\partial x_i} \bar{v}\, dx + \displaystyle\int_\Omega a_0(x, t) u \bar{v}\, dx, \end{cases}$$

où, si $\Omega_T = \Omega \times]0, T[$,

$$(1.2)\qquad a_{ij}, \quad a_i, \quad a_0 \in L^\infty(\Omega_T).$$

Nous faisons encore *l'hypothèse de coercivité :*

$$(1.3)\qquad \mathrm{Re} \sum_{ij} a_{ij}(x, t) \zeta_j \bar{\zeta}_i \geq \alpha \sum_{i=1}^{n} |\zeta_i|^2, \qquad \alpha, \text{ Cte} > 0, \quad \forall \zeta_i \mathbf{C}.$$

Rappelons (*cf.* chap. 0) que

$$(1.4)\qquad \text{si } u \in H^1(\Omega), \quad u|_\Gamma = \gamma_0 u \text{ est dans } H^{\frac{1}{2}}(\Gamma).$$

Posons

$$(1.5)\qquad W = H^{\frac{1}{2}}(\Gamma), \qquad W' = H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$$

et soit *une famille d'opérateurs* $B_0(t)$, avec

$$(1.6)\qquad \forall t \in (0, T), \quad B_0(t) \in \mathcal{L}\left(H^{\frac{1}{2}}(\Gamma), H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)\right);$$

(1.7) (i) $t \to \beta(t; u, v) = \langle B_0(t) \gamma_0 u, \gamma_0 \bar{v} \rangle$ *est mesurable sur* (0, T), $\forall u, v \in H'(\Omega)$;

(ii) $\exists\, \beta$ Cte > 0 *indépendante de* $t \in (0, T)$ *telle que*

$$|\beta(t; u, v)| \leq C |\gamma_0 u|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} |\gamma_0 v|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)}.$$

Si les $B_0(t)$ forment *une famille d'opérateurs différentiels tangents à* Γ, alors on sait d'après [14],

$$(1.8)\quad \begin{cases} \forall\, \varepsilon > 0, \quad \exists\, C(\varepsilon),\ \text{Cte} > 0, \text{ avec} \\ \qquad\qquad |\operatorname{Re}(\beta(t;\, u, v)| \leq \varepsilon \| u \|^2 + C(\varepsilon)\, | v |^2. \end{cases}$$

Introduisons maintenant

$$(1.9)\qquad M \in \mathcal{L}(L^\infty(H),\, L^\infty(H)) \quad \textit{de type local.}$$

Si M *est* L^2*-régulier* au sens de $M \in \mathcal{L}(L^2(V),\, L^2(V))$, nous avons droit au théorème 2.III

Donc

$$(1.10)\quad \begin{cases} \exists\, u, \quad u \in L^\infty(L^2(\Omega)) \cap L^2(V) \ \textit{vérifiant} \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x, t) + A(x, t)\, u(x, t) + M\, u(x, t) = f(x, t) \quad \textit{p.p. dans } \Omega_T \end{cases}$$

et si, par exemple, nous choisissons :

$$(1.11)\quad \begin{cases} V = \textit{L'adhérence dans } H^1(\Omega) \textit{ des } v \in H^1(\Omega),\ v|_{\Gamma_1} = 0, \textit{ où } \Gamma_1, \\ \qquad \textit{partie de } \Gamma \textit{ de capacité} > 0. \end{cases}$$

Les conditions aux limites seront :

$$(1.12)\quad \begin{cases} \text{(i)}\ u(x, t) = 0 \ \textit{sur } \Gamma_1, \quad t \in (0, T); \\ \text{(ii)}\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu_A}(t, x) + B_0(t)\, M\, u(t, x) = 0 \ \textit{sur } \Gamma - \Gamma_1, \quad t \in (0, T). \end{cases}$$

Pour fixer les idées, prènons

$$(1.13)\qquad M\, u(t) = \begin{cases} u(t - \omega) & \text{si } t > \omega, \\ 0 & \text{ailleurs}, \quad \omega,\ \text{Cte} > 0, \quad \omega < T, \end{cases}$$

alors pour $V = H^1(\Omega)$, *les conditions aux limites seront cette fois :*

$$(1.14)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial \nu_A}(x, t) = 0, & x \in \Gamma, \quad t \in (0, \omega), \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu_A}(t, x) + B_0(t)\, u(t - \omega, x) = 0, & x \in \Gamma, \quad t \in (\omega, T). \end{cases}$$

Nous obtenons ainsi *la transformation d'un problème de Neumann en un problème de dérivées obliques à retardement.*

Remarque. — L'exemple considéré ici est relatif à des opérateurs *d'ordre* 2 *en x.* Il est facile (*cf.* n° IV, 1.2) de donner des exemples de *retard dans les conditions aux limites* par application du théorème 2.III, pour *des opérateurs d'ordre* 2 *m en x.*

2. Application du théorème 4.III. — Soit Ω *un ouvert borné de* $\mathbf{R}^n$ *de frontière* Γ, *assez régulière,*

(2.0) $$\mathrm{H} = \mathrm{L}^2(\Omega), \quad \mathrm{V} \textit{ sous-espace fermé de } \mathrm{H}^m(\Omega);$$

(2.1) $$\mathrm{H}_0^m(\Omega) \subset \mathrm{V} \subset \mathrm{H}^m(\Omega);$$

(2.2) $$a(t;\, u,\, v) = \sum_{|p|,\, |q| \leqq m} \int_\Omega a_{p,q}(x,\, t)\, \mathrm{D}^q u\, \mathrm{D}^p \bar{v}\, dx.$$

On suppose

(2.3) $a(t;\, u,\, v)$ *hermitienne,* V-*elliptique*;

(2.4) *Les coefficients* $a_{pq}(x,\, t)$ *suffisamment réguliers pour que* $a(t;\, u,\, v)$ *vérifie les hypothèses du théorème* 1.II.

L'opérateur $\mathrm{A}(t)$ *correspondant* est

(2.3) $$\mathrm{A}(t) = \mathrm{A}\left(x,\, t,\, \frac{\partial}{\partial x}\right) = \sum_{p,q} (-1)^p\, \mathrm{D}_x^p(a_{p,q}(x,\, t)\, \mathrm{D}_x^q).$$

On se donne encore :

(2.6) $$\forall\, t \geqq 0, \quad k(t;\, u,\, v) = \sum_{|p|,\, |q| \leqq m} \int_\Omega k_{p,q}(x,\, t)\, \mathrm{D}^q u\, \mathrm{D}^p \bar{v}\, dx + \sum_{j=0}^{m-1} \langle \mathrm{T}_j(t)\, u,\, \gamma_j \bar{v} \rangle,$$

où

(2.7) (i) *les coefficients* $k_{p,q}(x,\, t)$;

(2.7) (ii) *les opérateurs* $\mathrm{T}_j(t) \in \mathcal{L}\left(\mathrm{H}^m(\Omega),\, \mathrm{H}^{-\left(m-j-\frac{1}{2}\right)}(\Gamma)\right)$ *sont suffisamment réguliers pour que les hypothèses du théorème* 4.III *soient vérifiées.*

L'*opérateur correspondant* est

(2.8) $$k(t) = k\left(x,\, t,\, \frac{\partial}{\partial x}\right) = \sum_{p,q} (-1)^p\, \mathrm{D}_x^p(a_{pq}(x,\, t)\, \mathrm{D}_x^q)$$

[*ici aucune coercivité n'est imposée à* $k(t;\, u,\, v)$].

Soit, par ailleurs,

(2.9) $$\begin{cases} g \in \mathrm{L}^1(-\infty,\, 0;\, \mathrm{V}), \\ \xi_0 \in \mathrm{D}(\mathrm{A}(0)), \\ f \in \mathrm{L}^2(\mathrm{H}). \end{cases}$$

Alors, d'après le théorème 4.III, on obtient *formellement*

$$
(2.10)\quad \left\{
\begin{array}{l}
\exists\, u, \quad \textit{unique dans } \mathrm{L}^1(\infty, \mathrm{T}; \mathrm{V}) \textit{ vérifiant} \\
\qquad u(x, t) = g(x, t) \quad p.p. \quad t \in (-\infty, 0), \quad x \in \Omega, \\
\qquad\qquad u(x_0, 0) = \xi_0(x), \quad x \in \Omega, \\
\qquad \dfrac{\partial}{\partial t} u(x, t) + \mathrm{A}\left(x, t, \dfrac{\partial}{\partial x}\right) u(x, t) \\
\qquad\quad + \displaystyle\int_{-\infty}^{t} \mathrm{K}\left(x, t-\sigma, \dfrac{\partial}{\partial x}\right) u(x, \sigma)\, d\sigma = f(x, t) \quad \textit{dans } \Omega_{\mathrm{T}}.
\end{array}
\right.
$$

Les *conditions aux limites* sont données par :

(i) *l'appartenance de u à* $\mathrm{H}^{\infty, 2}$;

$$
(2.11)\quad \left\{
\begin{array}{l}
\text{(ii)} \quad \displaystyle\int_{\Omega} \left[\mathrm{A}\left(x, t, \dfrac{\partial}{\partial x}\right) u \right] \bar{v}\, dx + \int_{-\infty}^{t} \int_{\Omega} \left[\mathrm{K}\left(x, t, \dfrac{\partial}{\partial x}\right) u \right] \bar{v}\, dx\, d\sigma \\
\qquad = a(t; u, v) + \displaystyle\int_{-\infty}^{t} k(t-\sigma; u, v)\, d\sigma, \\
\qquad\qquad \gamma_j u = \gamma_j g, \quad x \in \Gamma, \quad t \in]-\infty, 0[.
\end{array}
\right.
$$

Par utilisation de la *formule de Green*, (2.11), (ii) s'écrit

$$
(2.12)\quad \left\{
\begin{array}{l}
\displaystyle\sum_{j=1}^{m-1} \langle \Lambda_j(t)\, u, \gamma_j \bar{v} \rangle + \sum_{j=1}^{m-1} \langle \mathrm{R}_j(t)\, u, \gamma_j \bar{v} \rangle = 0, \quad \forall\, v \in \mathrm{V}, \quad t \in (0, \mathrm{T}), \\
\qquad \mathrm{R}_j(t)\, u = \displaystyle\int_{-\infty}^{t} [\mathrm{S}_j(t-\sigma) - \mathrm{T}_j(t-\sigma)]\, u(\sigma)\, d\sigma, \quad t \in (0, \mathrm{T}), \\
\qquad \gamma_j u = \gamma_j g, \quad x \in \Gamma, \quad t \in]-\infty, 0[\quad (j = 0, 1, \ldots, m-1).
\end{array}
\right.
$$

Exemples. — 1° *Si* $\mathrm{V} = \mathrm{H}_0^m(\Omega)$, (2.11), (ii) *est toujours vérifiée et* (2.11), (i) *donne* $\mathrm{D}_x^p u(x, t) = 0$, $\forall\, x \in \Gamma$, $t \in (0, \mathrm{T})$, $|p| \leqq m-1$.

2° *Si* $\mathrm{V} = \mathrm{H}^m(\Omega)$, (2.11), (i) *est toujours vérifiée*, (2.12) *donne*

$$
(2.13)\quad \left\{
\begin{array}{l}
\qquad \gamma_j u(x, t) = \gamma_j g(x, t), \quad x \in \Gamma, \quad t \in]-\infty, 0[, \\
\Lambda_j(t)\, u(x, t) + \displaystyle\int_{-\infty}^{t} [\mathrm{S}_j(t-\sigma) - \mathrm{T}_j(t-\sigma)]\, u(x, \sigma)\, d\sigma = 0, \quad \forall\, x \in \Gamma, \\
\qquad t \in (0, \mathrm{T}) \quad (j = 0, 1, \ldots, m-1).
\end{array}
\right.
$$

Nous avons donc ici un exemple de problème avec *données épaisses* dans les *conditions aux limites*.

VI. — Retards dans le temps et les espaces.

1. Le problème. — Soit $\mathcal{H}$ *un espace de Hilbert complexe* admettant la décomposition

$$
(1.0)\qquad \mathcal{H} = \mathrm{H}_0 \oplus \mathrm{H},
$$

P_0, *projecteur orthogonal* de $\mathcal{H} \to \mathrm{H}_0$; $\mathrm{P} = \mathrm{I} - \mathrm{P}_0$.

Introduisons *l'opérateur de retard spatial*

(1.1) $$R \in \mathcal{L}(\mathcal{H}, H)$$

et donnons-nous par ailleurs :

(1.2) *Un espace de Hilbert* V *séparable dense dans* H, $V \subset H \subset H'$ *injections continues;*

(1.3) $a(t; u, v)$ *une famille de formes sesquilinéaires continues sur* $V \times V$; V-*elliptique vérifiant les hypothèses du théorème* 1.I;

(1.4) $$\begin{cases} t \to \omega(t) \text{ fonction scalaire mesurable définie sur } (0, T), \text{ avec :} \\ \text{(i) } t - \omega(t) > 0, \quad t > t_0, \quad t_0 \in]0, T[; \\ \text{(ii) } -T_0 = \inf\limits_{t \in (0, t_0)} (t - \omega(t)); \end{cases}$$

(1.5) $$v_0 \in L^1(H_0), \qquad g \in L^1(-\tau_0, 0; H);$$

(1.6) $$f \in L^1(H), \qquad \xi_0 \in H.$$

Problème R. — *Trouver* $U \in L^1(\mathcal{H})$ *vérifiant :*

(I) $P_0 U(t) = v_0(t)$ *p. p. dans* (0, T);

(II) *si* $u = PU$:

$$\begin{aligned} & u'(t) + A(t)\, u(t) + u(t - \omega(t)) + \mathcal{R}\, U(t)) = f(t) && \textit{dans } V' \text{ p. p.}, \\ & u(0) = \xi_0 && \textit{dans } (0, T); \end{aligned}$$

(III) $u(t) = g(t)$ *p. p. si* $t \in (-\tau_0, 0)$.

2. Théorème 4.VI. — *Il existe* U *unique solution du problème* $\mathcal{R}$, *en outre :*

(IV) $u \in L^2(V) \cap L^\infty(H)$, $u = PU$;

(V) $u \in \mathcal{C}(0, T; H)$.

Démonstration du théorème 4.VI. — Nous pouvons écrire, d'après (I),

(2.0) $$U(t) = P_0 U(t) + PU(t) = v_0(t) + u(t) \quad \text{p. p.}$$

et, compte tenu de (I), (II), vérifie

(2.1) $$\begin{cases} u'(t) + A(t)\, u(t) + u(t - \omega(t)) + \mathcal{R}\, u(t) = f(t) - \mathcal{R}\, v_0(t), \\ \qquad u(0) = \xi_0 \quad \text{p. p. } t \in (0, T), \end{cases}$$

où

(2.2) $$\mathcal{R}\, v_0 \in L^1(H) \quad \text{d'après (1.1) à (1.5).}$$

Définissons M_0 par

(2.3) $$M_0 u(t) = \begin{cases} u(t - \omega(t)) & \text{p. p. si } t - \omega(t) > 0 \quad \text{(i. e. } t > t_0), \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

et soit

$$(2.4) \qquad \mathrm{M} = \mathrm{M}_0 + \mathcal{R}/\mathrm{H} \qquad (\mathcal{R}/\mathrm{H},\ \textit{restriction de } \mathcal{R} \textit{ à } \mathrm{H}).$$

Alors

$$(2.5) \qquad \mathrm{M} \in \mathcal{L}(\mathrm{L}^\infty(\mathrm{H}), \mathrm{L}^\infty(\mathrm{H})) \qquad \textit{est de type local et quasi temporel.}$$

Posons

$$(2.6) \qquad \tilde{f} = f - \mathcal{R} v_0 - f_0,$$

où

$$(2.7) \qquad f_0(t) = \begin{cases} g(t - \omega(t)) & \text{p. p. si } t \in (0, t_0), \\ 0 \end{cases}$$

Dans ces conditions,

(2.8) $[(\mathrm{I}), (\mathrm{III}), (2.1)]$ *est équivalent à* (2.9),

où

$$(2.9) \qquad \begin{cases} u'(t) + \mathrm{A}(t)\,u(t) + \mathrm{M}\,u(t) = \tilde{f}(t) & \text{p. p. sur } (0, \mathrm{T}) \text{ dans } \mathrm{V}', \\ u(0) = \xi_0 \end{cases}$$

et le problème se trouve résolu par application du théorème 1.I et les remarques du paragraphe 2, n° II.

3. Exemple. — Soit $a \in \mathrm{R}^+ - \{0\}$ *donné* :

$$(3.1) \qquad \begin{cases} \mathcal{H} = \{u \mid u \in \mathrm{L}^2(\mathrm{R}),\ u(x) = 0\ p.p.\ x < -a\}, \\ \mathrm{H}_0 = \mathrm{L}^2(-a, 0), \qquad \mathrm{H} = \mathrm{L}^2(0, +\infty) \quad \textit{identifiés à des sous-espaces de } \mathcal{H}. \end{cases}$$

Si

$$(3.2) \qquad \mathcal{R}\,u(x) = u(x - a), \quad \forall u \in \mathcal{H},$$

on a

$$(3.3) \qquad \mathcal{R}(\mathcal{H}) = \mathrm{H}.$$

Prenons

$$(3.4) \qquad \mathrm{V} = \mathrm{H}_0^1(]0, +\infty[), \qquad \mathrm{A}(t) = -\Delta.$$

Pour f, g, v_0, ξ_0 donnés vérifiant les conditions du théorème 4.VI

$$(3.5) \qquad \begin{cases} \exists\, \mathrm{U} \in \mathrm{L}^1(\mathcal{H}), \textit{ avec :} \\ \qquad \mathrm{P}_0\mathrm{U}(x, t) = v_0(x, t) \quad p.p.\ dans\ ]-a, 0[\times]0, \mathrm{T}[\,; \\ u = \mathrm{PU} \textit{ vérifie} \\ \qquad \dfrac{\partial u}{\partial t}(x, t) - \Delta\,u(x, t) + u(x, t - \omega(t)) + \mathrm{U}(x, -a, t) \\ \qquad\quad = f(x, t) \quad p.p.\ dans\ ]0, +\infty[\times]0, \mathrm{T}[, \\ \qquad u(x, 0) = u_0(x), \qquad x \in]0, +\infty[, \\ \qquad u(x, t) = g(x, t) \quad p.p.\ dans\ [0, +\infty[\times]-\tau_0, 0[\end{cases}$$

Les *conditions aux limites* données par l'appartenance à $H^1_0(]0, +\infty[)$, étant

(3.6) $$u(0, T) = u(+\infty, t) = 0.$$

§ 5. Problèmes non linéaires.

I. — Méthode du point fixe.

1. Application du théorème 1.I. — On considère ici un *espace de Banach* W, avec

(1.1) $$V \subset W \subset H;$$

(1.2) *Toutes les injections sont compactes.*

Dans ces conditions, nous savons d'après [14] et avec les notations du paragraphe 1, n° I, que

(1.3) $\forall \gamma > 0$, *l'injection* $\mathcal{H}^T_\gamma \mapsto L^2(W)$ *est compacte.*

Donnons-nous

(1.4) $\left\{\begin{array}{l} a(t;\, u, v;\, w) \text{ une famille de formes sesquilinéaires continues sur } V \times V \\ \quad \text{dépendant de } t \in (0, T) \text{ et de } w \in W, \text{ la dépendance en } w \text{ n'étant pas} \\ \quad \text{nécessairement linéaire,} \end{array}\right.$

vérifiant

(1.5) *Pour* $u, v \in L^2(V)$, w *dans* $L^2(W)$, *la fonction*

$$t \to a(t;\, u(t), v(t), w(t)) \quad \textit{est mesurable};$$

(1.6) *Il existe une constante* $M > 0$ *indépendante de* t *et* $w \in W$,

$$|a(t;\, u, v;\, w)| \leq M \|u\| . \|v\|, \quad \forall\, u, v \in V;$$

(1.7) $\mathrm{Re}\, a(t;\, u, u;\, w) \geq \alpha \|v\|^2$, α, Cte > 0 *indépendante de* t *et de* $w \in W$;

(1.8) *Si* $w_n \to w$ *dans* $L^2(W)$ *fort,*

$$\int_0^T |a(t;\, u(t), v(t);\, w_n(t)) - a(t;\, u(t), v(t), w(t))|\, dt \to 0$$

lorsque $n \to +\infty$, *u fixé dans* $L^2(V)$, *uniformément pour* v *dans un borné de* $L^2(V)$.

On introduit les *opérateurs de perturbation* M_i $(i = 1, 2)$, avec

(1.9) $$M_1 \in \mathcal{L}(L^2(W), L^2(W));$$

(1.10) M_2 *vérifie les hypothèses du théorème* 1.I.

Nous pouvons maintenant énoncer le

THÉORÈME 5.I. — *Les hypothèses* (1.1) *à* (1.10) *étant satisfaites et moyennant* $u_0 \in H$, $f \in L^1(H) + L^2(V')$, *il existe* $u \in L^2(V) \cap L^\infty(H)$ *vérifiant*

$$
(1.11)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\int_0^T [a(t;\, u(t)\, \varphi(t);\, M_1 u(t)) - (u(t), \varphi'(t))]\, dt + \int_0^T (M_2 u(t), \varphi(t))\, dt \\
&\quad = (u_0, \varphi(o) + \int_0^T (f(t), \varphi(t))\, dt \\
&\qquad\qquad \textit{pour tout} \quad \varphi \in L^2(V), \quad \varphi' \in L^2(H), \quad \varphi(T) = o.
\end{aligned}
\right.
$$

Démonstration du théorème 5.I. — *Pour* w *donné dans* $L^2(W)$, on applique le théorème 1.I, avec $a(t;\, u,\, v)$ *remplacé par* $a(t;\, u,\, v;\, M_1 w(t))$.

Compte tenu des propriétés de compacité (1.2), (1.3) et par application du *théorème du point fixe* de *Schauder-Tychonov* [7] [ce qui est loisible grâce à (1.8)] on obtient la conclusion du théorème 5.I.

2. APPLICATION DU THÉORÈME 1.II. — Les *hypothèses spatiales* étant celles de l'alinéa précédent, on se donne :

(2.1) *Une famille de formes sesquilinéaires* $a_0(t;\, u,\, v)$ *continues sur* $V \times V$, *hermitiennes, uniformément* V-*elliptiques vérifiant les conditions de régularité requises pour le théorème* 1.II;

(2.2) $a_1(t;\, u,\, v;\, w)$ *famille de formes sesquilinéaires continues sur* $V \times H$ *vérifiant* (1.4);

(2.3) *Il existe une constante* $C_1 > o$, *indépendante de t et* w *telle que l'on ait*

$$|a_1(t,\, u,\, v;\, w)| \leqq C_1 \|u\| . |v| \qquad (u, v) \in V \times H;$$

(2.4) $a_1(t;\, u,\, v,\, w)$ *vérifie* (1.8) [*uniformément pour* v *dans un borné de* $L^2(H)$].

On introduit

(2.5) $M_1 \in \mathcal{L}(L^\infty(W),\ L^2(W))$;

M_2 *vérifiant les hypothèses du théorème* 1.II.

Dans ces conditions, on a le

THÉORÈME 5.II. — *Moyennant :*

(i) $u_0 \in D(A(o))$, $f \in L^2(H)$;

(ii) *les hypothèses* (2.1) à (2.5),

il existe u unique [*p. p. égale à une fonction continue de* $(o, T) \mapsto V$] *vérifiant :*

1° $u \in H^{\infty, 2}$;

2° $\forall t \in (o, T)$, $u(t) \in D(A_0(t))$, $u(o) = u_0$;

$A_0(t)\, u(t) + A_1[t;\, M_1 u(t)]\, u(t) + M_2 u(t) + u'(t) = f(t)$ *p. p. dans* H.

Démonstration du théorème 5.II. — 1° Pour $w \in L^\infty(W)$,

$$a(t;\, u,\, v) = a_0(t;\, u,\, v) + a_1(t;\, u,\, v;\, M_1\, w(t))$$

vérifie les hypothèses du théorème 1.II (*cf.* § 1, remarque 5.2).

(2.6) Nous avons donc $\exists\, u \in H^{\infty,2} \cap \mathcal{C}(o,\, T;\, V)$ *vérifiant*

$$\forall\, t \in [o,\, T],\quad u(t) \in D(A_0(t)),\qquad u(o) = u_0,$$
$$A_0(t)\, u(t) + A_1(t;\, M_1\, w(t))\, u(t) + M_2\, u(t) + u'(t) = f(t)\quad p.p.\ dans\ H.$$

2° Montrons maintenant le

LEMME 5.I. — *L'injection* $H^{\infty,2} \mapsto L^\infty(W)$ *est compacte.*

Démonstration du lemme 5.I. — Si u est dans un borné de $H^{\infty,2}$, on a par *Cauchy-Schwarz*

$$|u(t) - u(t')| \leqq (t-t')^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^T |u'(t)|^2\, dt \right)^{\frac{1}{2}},\qquad o \leqq t \leqq t' \leqq T \tag{2.7}$$

et u décrit une *famille équicontinue* de $\mathcal{C}(o,\, T;\, H)$; donc

$$H^{\infty,2} \mapsto \mathcal{C}(o,\, T;\, H)\quad \text{est compacte.} \tag{2.8}$$

Soit $\{u_m\}$ *convergeant faiblement vers zéro* dans $H^{\infty,2}$. Cette suite qui *converge faiblement vers zéro* dans $L^\infty(V)$ par hypothèse *converge fortement vers zéro* dans $L^\infty(H)$, d'après ce qui précède.

Comme

$$\forall\, \varepsilon_1 > o,\quad \exists\, C(\varepsilon_1),\quad \text{avec}\quad \|u_m(t)\|_W \leqq \varepsilon_1 \|u_m(t)\| + C_1(\varepsilon)\, |u_m(t)|, \tag{2.9}$$

on en déduit

$$\forall\, \varepsilon > o,\quad \exists\, \eta_0(\varepsilon)\quad \textit{tel que}\ \forall\, n > \eta_0(\varepsilon),\qquad \textit{on ait}\quad \|u_m(t)\|_W < \varepsilon, \tag{2.10}$$

d'où le lemme 5.I.

3° Soit *l'application non linéaire*

$$w \mapsto u = \chi(w),\quad de\ L^\infty(W) \to H^{\infty,2}. \tag{2.11}$$

Lorsque w décrit $L^\infty(W)$, u reste dans un borné de $H^{\infty,2}$, donc d'après le lemme 5.I dans un *compact* de $L^\infty(W)$. Par conséquent, en *admettant provisoirement* le

LEMME 5.II. — *Si* $w_m \to w$ *dans* $L^\infty(W)$, *alors* $u_m = \chi(w_m)$ *converge vers* $u = \chi(w)$ *dans* $L^\infty(W)$ *fort.*

Il suffit d'appliquer à χ le *théorème du point fixe de Schauder-Tychonov* pour obtenir le théorème 5.II.

4° *Démonstration du lemme* 5.II. — Posant $v_m = u_m - u$, on déduit de (2.6) :

$$\text{(2.11)} \qquad A_0(t)\, v_m(t) + \{ A_1(t;\, M_1 w_m) - A_1(t;\, M_1 w) \}\, u(t) + A_1[t;\, M_1 w_m]\, v_m(t) + M_2 v_m(t) + v'_m(t) = 0,$$

d'où [*en prenant le produit scalaire avec* $v'_m(t)$ et en utilisant des méthodes analogues à celles utilisées pour le théorème 1.II]

$$\text{(2.12)} \quad \begin{cases} \dfrac{\alpha}{2} \| v_m(t) \|^2 + \left(1 - \dfrac{\mu^2 t}{\alpha}\right) \displaystyle\int_0^t | v'_m(\sigma) |^2 \, d\sigma \leqq \psi_m(t) + C_1 \int_0^t \| v_m(\sigma) \|^2 \, d\sigma, \\ \psi_m(t) = \displaystyle\int_0^t [a_1(\sigma;\, u(\sigma),\, v'_n(\sigma);\, M_1 w_m(\sigma)) - a_1(\sigma;\, u(\sigma),\, v'_m(\sigma);\, M_1 w(\sigma))]\, d\sigma, \\ C_1,\ \text{Cte} > 0 \textit{ ne dépendant que de } T. \end{cases}$$

Ainsi par Gronwall :

$$\text{(2.13)} \qquad \| v_m(t) \|^2 \leqq C_2(T, T_0)\, \psi_m(T_0),$$

où T_0 *est choisi de manière que* $1 - \frac{\mu^2}{2} T_0 \geqq 0$; $C_2(T, T_0)$, Cte > 0 *dépendant de* T *et* T_0.

Or, d'une part comme $M \in \mathcal{L}[L^\infty(W), L^2(W)]$,

(2.14) *Si* $w_m \to w$ *dans* $L^\infty(W)$ *fort, alors* $M w_n \to M w$ *dans* $L^2(W)$ *fort, et, d'autre part,*

(2.15) v'_m *est dans un borné de* $L^2(H)$, $\forall\, n$.

Donc, par (2.4),

(2.16) $\psi_m(T_0) \to 0$ *lorsque* $m \to +\infty$,

et, par (2.13),

(2.17) $v_m \to 0$ *dans* $L^\infty(V)$, *donc dans* $L^\infty(W)$,

d'où le lemme 5.II.

3. Exemple. — On prend

$$\text{(3.1)} \qquad H = L^2(\Omega), \qquad H_0^m(\Omega) \subset V \subset H^m(\Omega), \qquad W = H^{m-1}(\Omega)$$

et l'on suppose

$$\text{(3.2)} \qquad H^m(\Omega) \to H^{m-1}(\Omega) \quad \textit{compacte.}$$

Ce qui a lieu si

(3.3) Ω *est borné de frontière assez régulière* [11]

---

[11] On peut supposer « Ω borné quelconque » si $V = H_0^m(\Omega)$.

Pour $w \in H^{m-1}(\Omega)$, $D^{m-1} w$ désigne l'ensemble des dérivées d'ordre $\leqq m-1$ et N est le nombre de ces dérivées.

On se donne

$$(3.4) \qquad a_{pq} : \ (x, t, z) \mapsto a_{pq}(x, t, z), \qquad |p|, |q| \leqq m$$

une application de $\Omega \times (0, T) \times \mathbf{C}^N \mapsto \mathbf{C}$ *mesurable en* (x, t) *pour* z *fixé, continue en* z *pour* (x, t) *fixé,*

avec

$$(3.5) \qquad a_{pq}(x; t, 0) = 0, \qquad |a_{pq}(x, t, z)| \leqq M.$$

Dans ces conditions, la *forme sesquilinéaire* (en u, v)

$$(3.6) \qquad \begin{cases} a(t; u, v; w) = \displaystyle\sum_{|p|, |q| \leqq m} \int_\Omega a_{pq}(x, t, D^{m-1} w(x))\, D^q u(x)\, D^p \overline{v(x)}\, dx, \\ \qquad\qquad u, v \in H^m(\Omega), \qquad w \in H^{m-1}(\Omega) \end{cases}$$

est *continue sur* $V \times V$ et *vérifie les hypothèses* (1.5) à (1.8) (12) si l'on fait l'hypothèse de *coercivité* sur V :

$$(3.7) \qquad \operatorname{Re} a(t; v, v; w) + |v|^2 \geqq \lambda \|v\|^2, \quad \alpha > 0, \quad \forall v \in V.$$

Soit, par ailleurs,

(3.8) $t \to \omega(t)$ une fonction scalaire une fois continûment dérivable vérifiant les propriétés suivantes :

$$(3.9) \qquad \begin{cases} \exists\, t_0 \in]0, T[, \quad \textit{avec} \quad t - \omega(t) > 0 \quad \textit{si } t > t_0, \\ \quad -\tau_0 = \inf(t - \omega(t)), \qquad t \in (0, t_0), \\ \quad |1 - \omega'(t)| \geqq \omega_0 > 0, \quad \forall\, t \in (0, T). \end{cases}$$

Alors :

(3.10) $\exists\, u$ *unique dans* $L^2(V) \cap L^\infty(H)$, *vérifiant :*

$$\frac{\partial}{\partial t} u + \sum_{|p|, |q| \leqq m} D_x^p a_{pq}(x, t, D^{m-1} u(x, t - \omega(t)))\, D_x^q u = f \quad \text{p. p. dans } \Omega \times]0, T[,$$

f *donnée dans* $L^1(H) + L^2(V')$;

$$u(0, x) = u_0(x), \quad u_0 \textit{ donné dans } H = L^2(\Omega);$$
$$u(t, x) = g(t, x) \quad p.p., \qquad t \in [-\tau_0, 0], \qquad x \in \Omega,$$

g *donnée dans* $L^2(-\tau_0, 0; W)$ (*donnée épaisse*).

En effet, on définira $M \in \mathcal{L}(L^2(W), L^2(W))$ par

$$(3.11) \qquad M u(t) = p.p. \begin{cases} u(t - \omega(t)) & \text{si } t - \omega(t) \geqq 0, \qquad u \in L^2(W), \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

(12) Pour (1.8), le résultat est dû à Gagliardo, *voir* [14], p. 214.

et l'on remarquera que

(3.12) *Pour tout* $w \in L^2(W)$, *avec* $w(t) = g(t)$ *p. p. si* $t \in (-\tau_0, 0)$, *on a*

$$a(t;\, u, v;\, w(t - w(t))) = a(t;\, u, v;\, M\, w(t)) + a_1(t;\, u, v),$$

où

$$a_1(t;\, u, v) = \begin{cases} a(t;\, u, v;\, g(t - \omega(t))) & \text{si } t \in (0, t_0), \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

(3.10) résulte alors du théorème 5.I appliqué avec $M_1 = M$, $M_2 = 0$. Les conditions aux limites dépendent comme dans le paragraphe 4, n° IV.2 du choix de V et ne sont pas explicitées ici.

II. — Méthode de Galerkine.

1. Le problème. Énoncé du résultat. — Nous nous donnons deux espaces de *Hilbert complexes* V et H et un espace de *Banach réflexif* W, tels que V et W soient *inclus* dans H, les *injections* étant *continues*.

Nous supposons que $V \cap W$ est *séparable*, *dense* dans V, dans W et dans H.

$((u, v))$ et $\|u\|$ [resp. $(f;\, g)$ et $|f|$] désignent le produit scalaire et la norme dans V (resp. H); $\|u\|_W$ désigne la norme dans W.

Identifiant H *à son antidual*, X′ désignant l'*antidual* de X, nous avons alors les inclusions suivantes :

$$(1.0) \qquad \begin{cases} V \cap W \subset V \subset H \subset V' \subset (V \cap W)', \\ V \cap W \subset W \subset H \subset W' \subset (V \cap W'), \end{cases}$$

injections continues, chaque espace étant *dense* dans le suivant.

Donnons-nous une famille de formes sesquilinéaires sur V, soit $a(t;\, u, v)$, $t \in (0, T)$ avec

(1.1) $\quad t \to a(t;\, u, v)$ *est une fonction mesurable*, $\forall\, u, v \in V$;

(1.2) $\quad |a(t;\, u, v)| \leqq C_0 \|u\| . \|v\|$, $\quad C_0$, Cte > 0, $\quad \forall\, u, v \in V$ p. p. $t \in (0, T)$;

$$(1.3) \qquad \begin{cases} \operatorname{Re} a(t;\, u, u) \geqq \alpha [u]^2, \quad \alpha, \text{ Cte} > 0, \quad \forall\, u \in V \text{ p. p. } t \in (0, T), \\ [\ \ ], \text{ semi-norme sur V telle que } \quad (|u|^2 + [u]^2)^{\frac{1}{2}} \simeq \|u\|. \end{cases}$$

Pour presque tout t, $A(t)$ désigne l'opérateur linéaire appliquant V dans V′ défini par

$$(1.4) \qquad \langle A(t)\, u, v \rangle = a(t;\, u, v), \quad \forall\, u, v \in V \cap W,$$

où $\langle\ ,\ \rangle$ désigne l'antidualité entre $V \cap W$ et $(V \cap W)'$.

On sait que, grâce à (1.1) et (1.2), l'application $u \mapsto A(.)\, u$ est continue de $L^2(V) \mapsto L^2(V')$.

Nous nous donnons encore une famille d'opérateurs (non linéaires) $B(t)$, $t \in (0, T)$ qui envoient W dans W′, avec :

(1.5) *Pour presque tout t,* $B(t)$ *est continue des sous-espaces de dimension finie de* W *dans* W′ *faible;*

$$(1.6) \quad \begin{cases} \operatorname{Re}\langle B(t)\,u - B(t)\,v,\ u - v\rangle \geqq 0, \\ \forall\, u, v \in W \quad \text{p. p. } t \in (0, T) \quad (\textit{hypothèse de monotonie}); \end{cases}$$

$$(1.7) \quad \begin{cases} \operatorname{Re}\langle D(t)\,u,\ u\rangle + \beta_0 |u|^p \geqq \beta_1 \|u\|_W^p, \\ \forall\, u \in W \quad \text{p. p. } t \in (0, T); \qquad \beta_0 \geqq 0,\ \beta_1 > 0 \quad (1 < p < +\infty,\ p \textit{ donné}); \end{cases}$$

(1.8) *Si* $u \in L^p(W)$, *alors* $B(.)\,u \in L^{p'}(W)$ *et l'application* $u \to B(.)\,u$ *envoie les bornés de* $L^p(W)$ *dans les bornés de* $L^{p'}(W')$ *et est faiblement continue des droites de* $L^p(W)$.

Nous introduisons maintenant une perturbation M avec

$$(1.9) \qquad M \in \mathcal{L}(L^\infty(H), L^\infty(H)) \quad \textit{de type local}$$

et pour simplifier, nous supposerons

(1.10) M *quasi temporel.*

Dans ces conditions, on considère le

PROBLÈME P 3. — *Données :* $u_0 \in H$, $f \in L^1(H) + L^2(V') + L^{p'}(W')$. *Trouver u, avec*

(i) $u \in L^\infty(H) \cap L^2(V) \cap L^p(W)$;

(ii) $u'(t) + A(t)\,u(t) + B(t)\,u(t) + M\,u(t) = f(t)$ *p. p.*;

(iii) $u(0) = u_0$.

Nous allons établir le théorème d'existence et d'unicité suivant :

THÉORÈME 5.III. — *Sous les hypothèses* (1.1) *à* (1.10), *le problème* P 3 *admet une solution unique.*

La fonction u est (*p. p. égale à*) *une fonction continue de* $(0, T) \to H$ *qui vérifie* $\forall\, t \in (0, T)$ *l'égalité énergétique :*

$$(\mathrm{I}) \qquad \begin{aligned} &|u(t)|^2 + 2\operatorname{Re}\int_0^t a(s;\, u(s),\, u(s))\, ds \\ &\quad + 2\operatorname{Re}\int_0^t \langle B(s)\,u(s),\, u(s)\rangle\, ds + 2\operatorname{Re}\int_0^t (M\,u(s),\, u(s))\, ds \\ &= |u_0|^2 + 2\operatorname{Re}\int_0^t \langle f(s),\, u'(s)\rangle\, ds. \end{aligned}$$

Remarque 5.I. — Le théorème 5.III qui est une généralisation du théorème 1.I est dû pour $M = 0$ à Lions-Strauss [20].

2. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 5.III. — Notons que

(2.0) *Quitte à remplacer* $f(t)$ *par* $f(t) - \mathrm{B}(t)\, 0$, *on peut supposer* $\mathrm{B}(t)\, 0 = 0$.

2.1. *Unicité.* — Si u et v sont deux solutions *distinctes* du problème 5.II,

$$w = u - v \tag{2.1}$$

vérifie

$$\left\{\begin{aligned} &w(0) = 0,\\ &(w'(t), w(t)) + a(t; w(t), w(t))\\ &\quad + (\mathrm{B}(t)\, u(t) - \mathrm{B}(t)\, v(t), w(t)) + (\mathrm{M}\, w(t), w(t)) = 0. \end{aligned}\right. \tag{2.2}$$

Compte tenu de (1.3) et (1.6) on déduit de (2.2)

$$|w(t)|^2 + \alpha \int_0^t |u(\sigma)|^2\, d\sigma < \int_0^t |(\mathrm{M}\, w(\sigma), w(\sigma))|\, d\sigma, \tag{2.3}$$

d'où, en utilisant le caractère local de M,

$$|\mathrm{W}(t)|^2 < \mathrm{C}(\mathrm{T}) \int_0^t |\mathrm{W}(\sigma)|^2\, d\sigma, \qquad \mathrm{C}(\mathrm{T}),\ \mathrm{Cte} > 0. \tag{2.4}$$

Ce qui implique $\mathrm{W} = 0$.

2.2. *Existence.* — (i) *Le système approché :* Soit w_j ($j = 1, 2, \ldots$) une base de $\mathrm{V} \cap \mathrm{W}$.

Posons

$$u_m(t) = \sum_{i=1}^{m} g_{im}(t)\, w_i, \tag{2.7}$$

les g_{im} étant *solutions du système*

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{d}{dt}(u_m(t), w_j) + a(t; u_m(t), w_j)\\ &\quad + (\mathrm{B}(t)\, u_m(t), w_j) + (\mathrm{M}\, u_m(t), w_j) = (f(t), w_j) \quad ({}^{13}) \qquad (1 \leqq j \leqq m),\\ &g_{im}(0) = \alpha_{im}, \end{aligned}\right. \tag{2.8}$$

les α_{im} *étant choisis* de manière que

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_{im}\, w_i \to u_0 \quad \textit{dans } \mathrm{H} \textit{ fort lorsque } m \to +\infty. \tag{2.9}$$

Grâce à l'hypothèse (1.5) et du fait que $\mathrm{A}(.) + \mathrm{M}$ est de *type local*, on voit en opérant comme pour le théorème 1.I que la solution u_m du système (2.8) est *définie localement* [c'est-à-dire qu'il existe un intervalle $(0, \delta_m) \subset (0, \mathrm{T})$ dans lequel u_m est définie]. Nous allons voir en établissant des inégalités *a priori* qu'en fait $\delta_m = \mathrm{T}$.

---

[13] On note ici (,) l'antidualité entre $\mathrm{V} \cap \mathrm{W}$ et $(\mathrm{V} \cap \mathrm{W})'$.

(ii) *Inégalités* a priori : De manière habituelle, nous obtenons

$$(2.10)\quad |u_m(t)|^2 + 2\,\mathrm{Re}\int_0^t (\mathrm{A}(\sigma)\,u_m(\sigma),\,u_m(\sigma))\,d\sigma + 2\,\mathrm{Re}\int_0^t (\mathrm{B}(\sigma)\,u_m(\sigma),\,u_m(\sigma))\,d\sigma$$
$$= |u_m(0)|^2\,2\,\mathrm{Re}\int_0^t (\mathrm{M}\,u_m(\sigma),\,u_m(\sigma))\,d\sigma + 2\,\mathrm{Re}\int_0^t (f(\sigma),\,u_m(\sigma))\,d\sigma.$$

Or

$$(2.11)\quad \left|-2\,\mathrm{Re}\int_0^t (\mathrm{M}\,u_m(\sigma),\,u_m(\sigma))\,d\sigma\right| \leqq \delta \sup_{\sigma\in(0,\,t)} |u_m(\sigma)|^2 + \gamma_0\int_0^t |u_m(\sigma)|^2\,d\sigma$$

et en écrivant :

$$(2.12)\quad \begin{cases} f = f_1 + f_2 + f_3, \\ f_1 \in \mathrm{L}^1(\mathrm{H}), \qquad f_2 \in \mathrm{L}^2(\mathrm{V}'), \qquad f_3 \in \mathrm{L}^{p'}(\mathrm{W}'), \end{cases}$$

on a

$$(2.13)\quad \begin{cases} \left|\displaystyle\int_0^t (f_1(\sigma),\,u_m(\sigma))\,d\sigma\right| \leqq \delta \sup_{\sigma\in(0,\,t)} |u_m(\sigma)|^2 + \gamma_1 \|f_1\|^2_{\mathrm{L}^1(\mathrm{H})}, \\ \left|\displaystyle\int_0^t (f_2(\sigma),\,u_m(\sigma))\,d\sigma\right| \leqq \delta \displaystyle\int_0^t \|u_m(\sigma)\|^2\,d\sigma + \gamma_2 \|f_2\|^2_{\mathrm{L}^2(\mathrm{V}')}, \\ \left|\displaystyle\int_0^t (f_3(\sigma),\,u_m(\sigma))\,d\sigma\right| \leqq \delta\,\mathrm{Re}\displaystyle\int_0^t \mathrm{B}(\sigma)\,u_m(\sigma),\,u_m(\sigma))\,d\sigma \\ \qquad\qquad + \delta \sup_{\sigma\in(0,\,t)} |u_m(\sigma)|^2 + \gamma_3\{\|f_3\|^{p'}_{\mathrm{L}^{p'}(\mathrm{W})} + \|f_3\|^2_{\mathrm{L}^{p'}(\mathrm{W}')}\} \\ \qquad\qquad [\textit{on utilise ici } (1.7)] \qquad (\gamma_i = \mathrm{Ctes}). \end{cases}$$

Choisissant δ assez petit, il vient

$$(2.14)\quad \begin{cases} |u_m(t)|^2 + \displaystyle\int_0^t \|u_m(\sigma)\|^2\,d\sigma + \mathrm{Re}\displaystyle\int_0^t (\mathrm{B}(\sigma)\,u_m(\sigma),\,u_m(\sigma))\,d\sigma \\ \qquad \leqq \gamma_4 \left\{ |u_m(0)|^2 + \mathrm{K}(f) + \displaystyle\int_0^t |u_m(\sigma)|^2\,d\sigma \right\}, \\ \textit{où} \quad \mathrm{K}(f) = \|f_1\|^2_{\mathrm{L}^1(\mathrm{H})} + \|f_2\|^2_{\mathrm{L}^2(\mathrm{V}')} + \|f_3\|^2_{\mathrm{L}^{p'}(\mathrm{W}')} + \|f_3\|^{p'}_{\mathrm{L}^{p'}(\mathrm{W}')}. \end{cases}$$

Ainsi

(2.15) *u_m reste dans un borné de* $\mathrm{L}^\infty(\mathrm{H}) \cap \mathrm{L}^2(\mathrm{V}) \cap \mathrm{L}^p(\mathrm{W})$.

(iii) *Passage à la limite :* De (2.15) on déduit) :

(2.16) *Il est possible d'extraire de $\{u_m\}$ une sous-suite $\{u_\nu\}$ telle que*

$$u_\nu \to u \begin{cases} \textit{dans } \mathrm{L}^2(\mathrm{V}),\ \mathrm{L}^p(\mathrm{W}) \textit{ faibles et dans } \mathrm{L}^\infty(\mathrm{H}), \\ \textit{dual faible de } \mathrm{L}^1(\mathrm{H}), \end{cases}$$
$$\mathrm{R}(.)\,u_\nu \to \chi \quad \textit{dans } \mathrm{L}^{p'}(\mathrm{W}') \textit{ faible.}$$

Comme M est supposé de *type quasi temporel*, on voit en raisonnant comme au paragraphe 2 que u vérifie au sens des distributions de $(0, \mathrm{T}) \to (\mathrm{V} \cap \mathrm{W})]$

$$(2.17)\quad u' + \mathrm{A}(t)\,u + \mathrm{M}\,u + \chi = f.$$

En utilisant le *procédé de Minty*, il en résulte (*voir* [20], p. 93)

$$\chi(t) = \mathrm{B}(t)\, u(t) \quad \text{p. p. } t \in (0, \mathrm{T}). \tag{2.18}$$

L'égalité énergétique annoncée résulte encore sans changement notable de [20], c'est pourquoi nous ne la démontrons pas ici.

Remarque 5.II. — Des considérations précédentes, il résulte que si l'on se donne

$$f \in \mathrm{L}^1(\mathrm{H}) + \mathrm{L}^{p'}(\mathrm{W}'),$$

le théorème 5.III *reste valable avec* $\mathrm{A}(t) = 0$, la solution u étant dans

$$\mathrm{L}^\infty(\mathrm{H}) \cap \mathrm{L}^p(\mathrm{W}).$$

Remarque 5.III. — Il est, bien entendu, possible de considérer une variante non linéaire (du type précédent) du théorème 2.IV. C'est-à-dire avec *perturbation de la partie principale linéaire* $\mathrm{A}(t)$ par un opérateur $\mathrm{M} \in \mathcal{L}(\mathrm{L}^\infty(\mathrm{V}), \mathrm{L}^\infty(\mathrm{V}'))$ vérifiant

$$\mathrm{M}\, u(t) = \int_0^t \mathrm{K}(t, s)\, u(s)\, ds, \quad \forall\, u \in \mathrm{L}^\infty(\mathrm{V}). \tag{2.19}$$

Par exemple, si

(2.20) *f est donné dans* $\mathrm{L}^2(\mathrm{H})$;

(2.21) $a(t; u, v)$ *vérifie les hypothèses du théorème* 2.IV;

(2.22) $\mathrm{B}(t)$ *vérifie les hypothèses du théorème* 5.III *et, en outre,*

$$\mathrm{Re}(\mathrm{B}(t)\, u(t), u'(t)) = \frac{d}{dt}\mathrm{H}[u(t)], \qquad \textit{avec} \quad \mathrm{C}_0 \| u(t) \|_{\mathrm{W}}^p \leq \mathrm{H}[u(t)] \leq \mathrm{C}_1 \| u(t) \|_{\mathrm{W}}^p,$$

alors

(2.23) $\exists\, u$ *unique solution du problème* P 3 [correspondant aux hypothèses (2.20) à (2.23) *avec* $u \in \mathrm{L}^\infty(\mathrm{V} \cap \mathrm{W})$, $u' \in \mathrm{L}^2(\mathrm{H})$].

Ce qui résulte, par des *méthodes analogues* à celles du paragraphe 2, n° IV et du paragraphe 5, n° II de *l'inégalité* a priori :

$$\left\{ \begin{aligned} & \int_0^t | u'_m(\sigma) |^2\, d\sigma + \| u_m(t) \|^2 + \| u_m(t) \|_{\mathrm{W}}^p \leq \mathrm{K}(u_0, f) + \mathrm{C} \int_0^t \| u(\sigma) \|^2\, d\sigma, \\ & \mathrm{K}(u_0, f) = \mathrm{C} \left\{ \| u_0 \|^2 + \| u_0 \|_{\mathrm{W}}^p + \int_0^t | f(\sigma) |^2\, d\sigma \right\}. \end{aligned} \right. \tag{2.24}$$

Ici *l'hypothèse* $A(t) \neq 0$ semble *indispensable* pour réussir par cette méthode.

3. Exemples. — 3.1. *Cas de la partie principale linéaire.* — Soit Ω un ouvert borné de R^n de frontière Γ et soit $H = L^2(\Omega)$.

On prend

$$V = H_0^1(\Omega), \qquad W = L^2(\Omega) \cap L^p(\Omega); \tag{3.1}$$

$$\| u \|_W = | u |_{L^2(\Omega)} + | u |_{L^p(\Omega)}; \tag{3.2}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a(t; u, v) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \int_\Omega a_i(x, t)\, D_i u(x)\, D_i \overline{v(x)}\, dx, \\ D_i = \dfrac{\partial}{\partial x_i}, \quad \text{les fonctions } a_i(x, t) \text{ sont dans } L^\infty(\Omega_T),\ \Omega_T = \Omega \times]0, T[, \\ \qquad \operatorname{Re} a_i(x, t) \geq \alpha > 0; \end{array} \right. \tag{3.3}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} B(t) = B \textit{ est défini par} \\ (B(t) u, v) = \displaystyle\int_\Omega | u(x) |^{p-2} u(x)\, \overline{v(x)}\, dx, \quad \forall\, u, v \in W. \end{array} \right. \tag{3.4}$$

On vérifie facilement que B satisfait les hypothèses du théorème 5. III.

Prenons ω comme dans l'exemple du paragraphe 4, n° II, et soit

$$\left\{ \begin{array}{l} f \textit{ donnée dans } L^1(L^2(\Omega)) + L^2(H^{-1}(\Omega)) + L^{p'}(W') \ (p > 1); \\ g \textit{ donnée dans } L^1(-\tau_0, 0; H),\ \tau_0 \textit{ défini comme dans } \S\ 2, \text{ n° II} \\ \xi_0 \textit{ donné dans } L^2(\Omega). \end{array} \right. \tag{3.5}$$

Alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} \exists\, u \text{ unique vérifiant :} \\ \quad u'(x, t) - \displaystyle\sum_{i+1}^{n} D_i[a_i(x, t)]\, D_i u(x, t)] + | u(x, t) |^{p-2} u(x, t) \\ \quad + u(x, t - \omega(t)) = f(x, t) \quad \textit{dans } \Omega_T, \\ \qquad u(x, 0) = \xi_0(x), \qquad x \in \Omega, \\ \qquad u(x, t) = g(x, t), \qquad x \in \Omega, \quad t \in]-\tau_0, 0[, \\ \qquad u(x, t) = 0, \qquad (x, t) \in \Gamma \times]0, T[; \\ \textit{Condition aux limites de Dirichlet non formelles si } \Omega \textit{ est assez régulier.} \end{array} \right. \tag{3.9}$$

Remarque 5. IV. — Il est possible de reprendre dans ce cadre les exemples du paragraphe 4.

3.2. *Cas de la partie principale non linéaire.* — Soit encore Ω un *ouvert borné* de R^n de frontière Γ; $\Omega_T = \Omega \times]0, T[$.

On prend

$$\text{(3.7)} \qquad H = L^2(\Omega), \qquad V = H;$$

$$\text{(3.8)} \qquad W = \{ u \mid u \in L^2(\Omega),\ D_i u \in L^p(\Omega),\ i = 1, \ldots, n \};$$

$$\text{(3.9)} \qquad \| u \|_W = \left(| u |^p_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega | D_i u(x) |^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}};$$

$$\text{(3.10)} \qquad \begin{cases} B(t) = B \textit{ défini par} \\ (Bu, v) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \int_\Omega | D_i u(x) |^{p-2} D_i u(x)\, D_i \overline{v(x)} \, dx, \quad \forall\, u, v \in W. \end{cases}$$

Alors avec

$$\text{(3.11)} \qquad \begin{cases} \omega \textit{ donné comme dans le n° 3.1 précédent}, \\ f \in L^1(L^2(\Omega)) + L^{p'}(W'), \\ g \in L^1(-\tau_0, 0; L^2(\Omega)), \end{cases}$$

on a

$$\text{(3.12)} \qquad \begin{cases} \exists\, u \in L^\infty(L^2(\Omega)), \quad D_i u \in L^p(\Omega_T) \qquad (i = 1, \ldots, n), \\ u'(x, t) - \displaystyle\sum_{i=1}^{n} D_i | D_i u(x, t) |^{p-2} D_i u(x, t) + u(x, t - \omega(t)) = f(x, t) \quad \textit{dans } \Omega_T, \end{cases}$$

avec les *conditions initiales :*

$$\text{(3.13)} \qquad \begin{cases} u(x, 0) = \xi_0(x) & (x \in \Omega), \\ u(x, t) = g(x, t), & (x, t) \in \Omega \times]-\tau_0, 0[\end{cases}$$

et la *condition aux limites* (*formelle*) *:*

$$\text{(3.14)} \qquad \begin{cases} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} | D_i u(x, t) |^{p-2} D_i u(x, t) \cos(\nu, x_i) = 0 \quad \textit{sur } \Gamma \times (0, T) \\ \qquad\qquad (\nu \textit{ normale}). \end{cases}$$

III. — Équation du type de « Levin-Nohel » généralisé.

0. Introduction. — Dans le cas scalaire ordinaire, Hale, Levin, Nohel ont étudié les solutions d'un type d'équation intégro-différentielles que l'on rencontre dans les applications dans l'étude des réacteurs nucléaires (*cf.* [10], [13]). Nous pensons qu'une généralisation de telles équations au cas opérationnel présente un intérêt en lui-même sinon pour les applications.

Pour ne pas alourdir, outre mesure, ce travail, nous ne nous sommes pas placé ici dans la situation la plus générale. Cela sera fait dans un article ultérieur.

1. Le problème. — Soit Ω un *ouvert* de $\mathbf{R}^n$, de *frontière* Γ.

A est l'opérateur *auto-adjoint* dans $L^2(\Omega) = H$ de *domaine*

$$D(A) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \tag{1.0}$$

donné sur D(A) par

$$Av = -\Delta v, \quad \forall v \in D(A). \tag{1.1}$$

On considère une *fonction scalaire*

$$t \mapsto \gamma(t)$$

définie sur (o, T), avec

$$\begin{cases} \gamma \in \mathcal{C}^{(2)}(0, T), \\ (-1)^k \gamma^{(k)}(t) \geq 0, \qquad t \in (0, T). \end{cases} \tag{1.2}$$

Problème P 4. — Soit $\rho > 1$, $p = \rho + 1$, $\Omega_T = \Omega \times]0, T[$

Trouver u avec

$$u \in L^\infty[L^2(\Omega)] \cap L^2[H_0^1(\Omega)] \cap L^p[\Omega_T]] \tag{1.3}$$

vérifiant (*dans un sens généralisé*)

$$\begin{cases} u'(x, t) - \Delta u(x, t) + \displaystyle\int_0^t \gamma(t-\sigma) \,|\, u(x, \sigma)\,|^{\rho-1} u(x, \sigma)\, d\sigma = f(x, t) \quad \textit{dans } \Omega_T, \\ u(x, 0) = u_0(x), \qquad u(x, t) = 0, \qquad (x, t) \in \Gamma \times (0, T), \end{cases} \tag{1.4}$$

f et u_0 sont donnés respectivement dans un sous-espace de $L^1[L^2(\Omega)]$ *et de* $L^2(\Omega)$.

Remarques. — 1. Il s'agit d'un problème de *Dirichlet* non *formel* si Ω est *assez régulier.*

2. $u' \in L^1(H) + L^2(H^{-1}(\Omega)) + L^{p'}(\Omega_T)$, $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1$,

donc, d'après [20], u est (*p. p. égale à*) *une fonction continue* de $(0, T) \mapsto L^2(\Omega)$ et la condition $u(x, 0) = u_0(x)$ *a un sens* p. p. en x.

3. L'équation du *type Levin-Nohel scalaire* est

$$u'(t) + \int_0^t \gamma(t-\sigma)\, g(u)\, du = 0,$$

où γ vérifie (1.2) et g est une fonction monotone convenable (*voir* [13]).

Le travail de Hale (*voir* [10]) concerne un problème de retard pour une équation du même type mais plus générale.

2. Théorème d'existence et d'unicité. Régularité. — Nous supposons

$$H^1(\Omega) \subset L^p(\Omega) \quad (\textit{injection continue}), \tag{2.0}$$

condition qui a lieu (Sobolev [26]) pour Ω *suffisamment régulier* avec ρ et n tels que

$$\left\{\begin{array}{ll} n \geqq 3, & \dfrac{1}{\rho+1} \geqq \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{n}, \\ n \leqq 2, & \rho \textit{ quelconque.} \end{array}\right. \tag{2.1}$$

Nous allons démontrer les

THÉORÈME 5.IV. — *Les hypothèses* (1.0) *à* (1.2) *et* (2.0) *étant satisfaites et moyennant*

$$\left\{\begin{array}{l} u_0 \in L^2(\Omega) \cap L^p(\Omega), \\ f \in L^1[H^1(\Omega)], \end{array}\right. \tag{2.2}$$

il existe une solution unique au problème P 4.

THÉORÈME 5.V. (*Régularité*). — *Les hypothèses étant par ailleurs celles du théorème* 5.IV, *on prend*

$$\left\{\begin{array}{l} u_0 \in H_0^1(\Omega), \\ f \in L^2[H^1(\Omega)] \end{array}\right. \quad ou \quad \left\{\begin{array}{l} f \in L^1[H^1(\Omega)], \\ f' \in L^1[L^2(\Omega)]. \end{array}\right. \tag{2.3}$$

Alors la solution du problème P 4 *vérifie*

$$\left\{\begin{array}{l} u \in L^\infty[H_0^1(\Omega)], \\ u' \in L^\infty[L^2(\Omega)]. \end{array}\right. \tag{2.4}$$

3. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 5.IV. — 3.1. *Le système approché.* — Désignons par E la mesure spectrale de A : *voir* [7]

$$E = \{ E(\mathcal{B}) \mid \mathcal{B} \textit{ boréliens de la droite} \} \tag{3.0}$$

et posons

$$P_m = E(-m, +m). \tag{3.1}$$

On sait que :

(3.2) *Les* P_m *sont autoadjoints et uniformément bornés de* D(A) [resp. $H_0^1(\Omega)$] $L^2(\Omega)$ *dans lui-même.*

Notons que l'on a aussi

(3.3) *Les* P_m *sont continus et uniformément bornés de* $H^1(\Omega) \to H^1(\Omega)$.

[En effet, pour chaque m, $P_m \in \mathcal{L}(H^1(\Omega); H^1(\Omega))$ (graphe fermé) et $\forall u \in H^1(\Omega)$, $u = u_1 + u_2$, $u_1 \in \mathrm{Im}(P_m)$, $u_2 \in \mathrm{Ker}(P_m)$, donc

$$|P_m u|_{H^1(\Omega)} = |P_m u_1|_{H_0^1(\Omega)} \leqq C\,|u_1|_{H_0^1(\Omega)} \leqq C\,|u|_{H^1(\Omega)}$$

(C, Cte indépendante de m d'après (3.2)).]

Donc, grâce à (2.0),

(3.4) *Les* P_m *sont aussi uniformément bornés de* $H^1(\Omega) \to L^p(\Omega)$ *et (en notant encore* P_m *l'adjoint) les restrictions de* P_m *à* $L^2(\Omega) \cap L^{p'}(\Omega)$ *restent uniformément bornées de* $L^{p'}(\Omega) \to D(A))'$ [*antidual de* $D(A)$].

Ceci posé, le *système approché* est défini par

$$(3.5)\quad \begin{cases} u'_m(t) + P_m A P_m u_m(t) + \displaystyle\int_0^t \gamma(t-\sigma)\, P_m g[P_m u_m(\sigma)]\, d\sigma = P_m f(t), \\ u_m(0) = P_m u_0, \qquad [g(v) = |v|^{\rho-1} v,\ v \in \mathbf{C}]. \end{cases}$$

Le système (3.5) admet [*cf.* [24]-[25]) une *solution locale unique* vérifiant

$$(3.6)\quad \begin{cases} \exists\, \delta_m > 0, \qquad \text{avec} \quad \forall\, t \in (0, \delta_m), \\ u_m(t) \in \operatorname{Im}(P_m) = P_m(H) \subset D(A). \end{cases}$$

3.2. *Démonstration de l'existence.* — 1° *Inégalités* a priori : Nous allons démontrer le

LEMME 5.III. — *Avec les hypothèses du théorème* 5.IV :

(i) u_m *reste dans un borné de*

$$L^\infty(L^p(\Omega)) \cap L^\infty[L^2(\Omega)] \cap L^2(H_0^1(\Omega));$$

(ii) u'_m *reste dans un borné de* $L^2[D(A))']$.

Démonstration du lemme 5.III. — (i) Notons tout d'abord que, grâce à (2.0) et au fait que

$$(3.7)\qquad u'_m(t) \in H_0^1(\Omega) \quad \text{p. p. } t \in (0, \delta_m),$$

on a

$$(3.8)\qquad \operatorname{Re}(P_m g[u_m](t),\ u'_m(t)) = \operatorname{Re}(g(u_m(t),\ u'_m(t)),$$

d'où, en utilisant (3.5),

$$(3.9)\qquad \operatorname{Re}(g[u_m(t)],\ u'_m(t)) = \operatorname{Re}(P_m g[u_m(t)],\ P_m f(t)) + X_1 + X_2,$$

où

$$(3.10)\quad \begin{cases} X_1 = -\operatorname{Re} a(g[u_m(t)],\ u_m(t)) \leq 0 \quad (^{14}), \\ X_2 = -\displaystyle\int_0^t \gamma'(t-\sigma) \operatorname{Re}(P_m g[u_m(\sigma)],\ P_m g[u_m(\sigma)])\, d\sigma. \end{cases}$$

Introduisons la « *fonction de Levin* » :

$$(3.11)\quad \begin{cases} t \to \mathcal{N}_m(t) = \dfrac{1}{p} \| u_m(t) \|_p^p + \dfrac{\gamma(t)}{2} \left\| \displaystyle\int_0^t P_m g[u_m](\sigma)\, d\sigma \right\|_2^2 \\ \qquad - \dfrac{1}{2} \displaystyle\int_0^t \gamma'(t-\sigma) \left\| \int_\sigma^t P_m g[u_m(s)]\, ds \right\|_2^2 d\sigma, \\ \qquad \textit{où } \|\ \|_q = \textit{norme dans } L^q(\Omega) \end{cases}$$

(14) $a(u, v) = \langle -\Delta u, v \rangle$, $\forall\, u \in D(A)$, $\forall\, v \in H(\Omega)$.

qui vérifie

(3.12) $$\forall\, t \in (0, \delta_m), \quad \frac{d}{dt}\mathcal{N}_m(t) \leqq \operatorname{Re}(P_m g[u_m(t)], P_m f(t)) \quad (^{15}).$$

En effet, on a

$$\frac{d}{dt}\mathcal{N}_m(t) = \operatorname{Re}(g[u_m(t)], u'_m(t)) + Y_1(t) + Y_2(t) + Y_3(t),$$

avec

$$Y_1(t) = \frac{\gamma'(t)}{2}\left\| \int_0^t P_m g[u_m](\sigma)\, d\sigma \right\|_2^2 - \frac{1}{2}\int_0^t \gamma''(t-\sigma)\left\| \int_0^t P_m g[u_m](s)\, ds \right\|_2^2 d\sigma,$$

$$Y_1(t) \leqq 0,$$

$$Y_2(t) = \gamma(t)\operatorname{Re}\left(\int_0^t g[u_m](\sigma)\, d\sigma, P_m g[u_m](t)\right),$$

$$Y_3(t) = -\int_0^t \gamma'(t-\sigma)\operatorname{Re}\left(\int_0^t P_m g[u_m(s)]\, ds, P_m g[u_m](t)\right) d\sigma.$$

On tient compte de (3.9) et (3.10), d'où

$$\frac{d\mathcal{N}_m(t)}{dt} \leqq \operatorname{Re}(P_m g[u_m(t)], P_m f(t)) + X_2 + Y_2 + Y_3,$$

avec

$$X_2 + Y_2 + Y_3 = 0.$$

Ce qui donne (3.12).

De (3.4) on déduit

(3.13) $$\begin{aligned} |\operatorname{Re}(P_m g[u_m](t), P_m f(t))| &\leqq C\, \|u_m(t)\|_p^p \|P_m f\|_p \\ &\leqq C_1 \|u_m(t)\|_p^p \|f(t)\|_{H^1(\Omega)}, \end{aligned}$$

puis

(3.14) $$\mathcal{N}_m(t) \leqq \mathcal{N}_m(0) + C_1 \int_0^t \|u_m(s)\|_p^p \|f(s)\|_{H^1(\Omega)}\, ds.$$

Ainsi

(3.15) $$\sup_{s\in(0,t)} \mathcal{N}_m(s) \leqq \mathcal{N}_m(0) + C_1 \sup_{s\in(0,t)} \|u_m(s)\|_p^p \int_0^t \|f(s)\|_{H^1(\Omega)}\, ds,$$

d'où

(3.16) $$\left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\sup_{s\in(0,t)} \mathcal{N}_m(s) \leqq K\left[\|u_0\|_p^p + \left(\int_0^t \|f(s)\|_{H^1(\Omega)}\, ds \right)^p \right] \\ \qquad\qquad (K = \text{Cte indépendante de } m) \end{array} \right.$$

et

(3.17) u_m *reste dans un borné de* $L^\infty[L^p(\Omega)]$.

Pour achever la démonstration du point (i), on prend dans (3.5) le produit scalaire avec $u_m(t)$.

([15]) Vérification immédiate à l'aide d'intégrations par parties.

Si l'on pose :

$$(3.18)\quad \begin{cases} \chi_m(t) = \frac{1}{2}\| u_m(t)\|_2^2 + \int_0^t a(u_m(\sigma), u_m(\sigma))\, d\sigma, \\ G_{m,s}[u_m](s) = \int_0^s \gamma(s-\sigma)\, P_m g[u_m](\sigma)\, d\sigma, \end{cases}$$

on obtient

$$(3.19)\quad \chi_m(t) \leq \chi_m(0) + \int_0^t |(G_{m,s}[u_m](s), u_m(s))|\, ds + \left| \int_0^t \operatorname{Re}(f(s), u_m(s))\, ds \right|.$$

Or

$$(3.20)\quad \begin{cases} |(G_{m,s}[u_m](s), u_m(s))| \\ \quad \leq K(T) \sup_{\sigma \in (0,t)} \| u_m(\sigma)\|_p^p < K_0(T, f, u_0) \quad \text{d'après } (3.17) \\ \qquad\qquad (K, K_0, \text{Ctes}), \\ \left| \int_0^t \operatorname{Re}(f(s), u_m(s))\, ds \right| \leq \sup_{\sigma \in (0,t)} \| u_m(\sigma)\|_2 \int_0^t \| f(s)\|_{H^1(\Omega)}\, ds, \end{cases}$$

donc de (3.19) et (3.20), il résulte

$$(3.21)\quad \forall t \in (0, \delta_m),\quad \chi_m(t) \leq C(T, f, u_0) \qquad (C = \text{Cte dépendant de } T, f, u_0),$$

d'où le point (i).

(ii) Notons que, d'après (3.4) à (3.16),

(3.22) $P_m g[u_m]$ *reste dans un borné de* $L^\infty[D(A)']$,
$P_m f$ *reste dans un borné de* $L^\infty(L^2(\Omega))$,

donc

(3.23) $G_{m,t}[u_m]$ *reste dans un borné de* $L^\infty[D(A)']$.

Par ailleurs,

(3.24) A *étant continue de* $L^2(H_0^1(\Omega)) \mapsto L^2(H^{-1}(\Omega))$,
$A(u_m)$ *reste dans un borné de* $L^2(H^{-1}(\Omega))$ *d'après* (3.21).

Comme

$$(3.25)\qquad u'_m = P_m f - G_{m,t}[u_m] - A u_m,$$

on voit que

(3.26) u'_m *reste dans un borné de* $L^2(D(A)')$,
d'où le point (ii).

2° *Passage à la limite :* D'après un lemme analogue à (§ 1, lemme 3.III) (*voir* aussi Aubin [3]), il résulte du lemme 5.III, que :

(3.27) $\forall K$, K *compact* $\subset \Omega$ *il existe une sous-suite de* $\{u_m\}$ *qui converge fortement dans* $L^2(L^2(K))$.

Ainsi *quitte à effectuer une nouvelle extraction*, on peut supposer

(3.28) *Il existe une sous-suite de* $\{u_m\}$ (*notée toujours* $\{u_m\}$) *qui converge dans* $(0, T)\times K$ *p. p.*

En résumé, compte tenu de (3.28) :

(3.29) $\exists$ *une sous-suite* $\{u_m\}$ (*notée encore* $\{u_m\}$) *telle que*
1° $u_m \to u$ *dans* $L^\infty(L^2(\Omega))$ *et* $L^\infty(L^p(\Omega))$ *faibles;*
2° $|u_m|^{\rho-1}u_m \to |u|^{\rho-1}u$ *p. p. dans* $(0, T)\times K$.

D'où, en passant à la limite (comme il a été déjà fait plusieurs fois) par utilisation du *théorème de Lebesgue :*

(3.30) *u est solution du problème* P 4.

et *l'existence* est démontrée.

3.3. *Démonstration de l'unicité.* — Supposons deux *solutions distinctes* u_1 *et* u_2 du problème P 4.

Alors

$$(3.31)\quad \begin{cases} W = u_1 - u_2 \textit{ vérifie} \\ \dfrac{dW(t)}{dt} + A\,W(t) + \displaystyle\int_0^t \gamma(t-\sigma)\,(g[u_1]-g[u_2])\,d\sigma = 0, \\ W(0) = 0. \end{cases}$$

En prenant le produit scalaire dans l'antidualité avec $W(t)$, on obtient

$$(3.32)\quad \frac{1}{2}|W(t)|^2 + \int_0^t a(w(s), w(s))\,ds + \operatorname{Re}\int_0^t \left[\int_0^s (\gamma(s-\sigma)\,[g(u_1)-g(u_2)], W(s))\right] d\sigma = 0.$$

D'après le *théorème de la valeur moyenne* appliqué à la fonction de la variable complexe,

$$z \to g(z) = |z|^{\rho-1}z,$$

$$(3.33)\quad \begin{cases} |g(z)-g(\xi)| \leq |g'_\zeta|\,|z-\xi|, \\ \zeta \in \textit{au segment de droite } (z, \xi), \end{cases}$$

on déduit

$$(3.34)\quad \begin{cases} \textit{Il existe une constante } C > 0, \textit{ avec} \\ |g(z)-(\xi)| < C[|z|^{\rho-1}+|\xi|^{\rho-1}]\,|z-\xi|. \end{cases}$$

Donc

$$\begin{aligned} (3.35)\quad & |\operatorname{Re}(g[u_1](\sigma)-g[u_2](\sigma), w(s))| \\ & \leq \int_\Omega |g[u_2](x,\sigma)-g[u_2](x,\sigma)|.|w(x,s)\,dx \\ & \leq C\int_\Omega [|u_1|^{\rho-1}+|u_2|^{\rho-1}]\,|w(x,\sigma)|.|w(x,s)|\,dx. \end{aligned}$$

Par *Hölder*, compte tenu de ce que :

$$(3.36)\quad \begin{cases} w(\sigma)\in L^{\rho+1}(\Omega), \qquad u_i\in L^\infty[L^{\rho+1}(\Omega)] \qquad (i=1, 2), \\ \dfrac{\rho-1}{\rho+1}+\dfrac{2}{\rho+1}=1, \end{cases}$$

il vient

$$(3.37)\quad \begin{cases} |\operatorname{Re}(g[u_1](\sigma)-g[u_2](\sigma), w(s))| \leq C_1 \| w(\sigma)\|_{\rho+1}\| w(s)\|_{\rho+1}, \\ C_1 = C \sup\limits_{\sigma\in(0, T)} [|u_i(\sigma)|_{\rho+1}^{\rho-1}+|u_2(\sigma)|_{\rho+1}^{\rho-1}]. \end{cases}$$

Ainsi

$$(3.38)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_0^t \left|\operatorname{Re}\int_0^s \gamma(s-\sigma)\,(g(u_1)(\sigma)-g(u_2)(\sigma), w(s))\,d\sigma\right| ds \leq C_2\, t\int_0^t \| w(s)\|_{\rho+1}^2\, ds, \\ C_2 = C_1 \sup\limits_{\sigma\in(0, T)} (\gamma(\sigma)), \end{cases}$$

mais, d'après (2.0),

$$(3.39)\quad \begin{cases} \| w\|_{\rho+1}^2 \leq \gamma_0 \| w\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \leq \gamma_1\, a(w, w), \quad \forall\, w\in H_0^1(\Omega) \\ (\gamma_i,\ \text{Ctes diverses}), \end{cases}$$

donc

$$(3.40)\quad \begin{cases} \dfrac{1}{2}\| w(t)\|_2^2+\displaystyle\int_0^t a(w, w)\, d\sigma \leq C_3\, t\int_0^t a(w, w)\, d\sigma, \\ C_3=\gamma_1 C_2 \text{ dépend de T.} \end{cases}$$

Par suite,

$$(3.41)\qquad w(t)=0 \quad sur \left[0, \frac{1}{C_3}\right].$$

De proche en proche, on établit alors

$$(3.42)\qquad w(t)=0 \quad sur\ (0, T).$$

C. Q. F. D.

4. Démonstration du théorème 5.V. — Il suffit de montrer le lemme :

Lemme 5.IV. — *Sous les hypothèses du théorème* 5.V,

(i) u_m *reste dans un borné de* $L^\infty(H_0^1(\Omega))$;

(ii) u'_m *reste dans un borné de* $L^\infty(L^2(\Omega))$.

Démonstration du lemme 5.IV. — On prend cette fois le *produit scalaire avec* $u'_m(t)$ et l'on obtient

$$(4.1)\quad \int_0^t |u'_m(\sigma)|^2\, d\sigma + a(u_m(t), u_m(t)) + \operatorname{Re}\int_0^t (G_{m,s}[u_m](s), u'_m(s))\, ds$$
$$= \operatorname{Re}\int_0^t (P_m f(\sigma), u'_m(\sigma))\, d\sigma + a(u_m(0), u_m(0)).$$

On observe alors que :

$$(4.2)\qquad \operatorname{Re}\int_0^t (G_{m,s}[u_m](s),\, u'_m(s))\, ds$$

$$= \operatorname{Re}(G_{m,t}[u_m](t),\, u_m(t)) - \gamma(0)\int_0^t (g[u_m(s)],\, u_m(s))\, ds$$

$$-\int_0^t \operatorname{Re}\int_0^s \gamma'(t-\sigma)\,(g[u_m](\sigma),\, u_m(s))\, d\sigma\, ds$$

et comme le second membre de (4.2) est majoré par

$$(4.3)\qquad K \sup_{s\in(0,T)} \| u_m(s)\|_p^\rho < +\infty \quad \textit{d'après le lemme } 5.\text{III}.$$

Le lemme 5.IV suit.

5. Un problème de retard.

Problème P 5. — *Soit* $r\in R^+ = (0, +\infty)$ (*p et g comme pour le problème* P 3).

On se donne

$$\tilde{u}_0 \in L^p(-r, 0;\, L^p(\Omega)\cap L^2(\Omega)),\qquad f\in L^1[L^2(\Omega)],\qquad \xi_0\in L^2(\Omega)\cap L^p(\Omega).$$

Trouver u, vérifiant :

$$u\in L^\infty(L^2(\Omega))\cap L^2(H_0^1(\Omega))\cap L^p(0, T)\times\Omega),$$

$$(5.1)\qquad u'(t) + A\,u(t) + \int_{-r}^0 \gamma(-\theta)\, g[u(\theta+t)]\, d\theta = f(t)\quad p.p.\ t\in(0, T);$$

$$(5.2)\qquad u(0) = \xi_0;$$

$$(5.3)\qquad u(t) = \tilde{u}_0(t)\quad p.p.\ t\in\,]-r, 0[.$$

Remarque. — Un tel problème généralise [10].

On a le

Théorème 5.VI. — *Si* $r\geqq T$ *et*

$$(5.4)\qquad \begin{cases} \tilde{u}_0\in L^p(-r, 0;\, W^{1,2p}(\Omega)\cap L^2(\Omega), \\ f\in L^1(H_1(\Omega)), \end{cases}$$

alors il existe une solution au problème P 5 (*qui est unique*) *vérifiant les conditions du théorème* 5.III.

Démonstration du théorème 5.VI. — On se ramène au théorème 5.III en notant que, (5.1) s'écrit, compte tenu de (5.3),

$$(5.5)\qquad u'(t) + A\,u(t) + \int_0^t \gamma(t-\sigma)\, g\,|\, u(\sigma)\,|\, d\sigma = \tilde{f}(t),$$

où

$$(5.6)\qquad \tilde{f}(t) = f(t) - \int_{-r}^0 \gamma(t-\sigma)\, g[\tilde{u}_0(\sigma)]\, d\sigma,\qquad \text{avec}\quad \tilde{f}\in L^1(H^1(\Omega)).$$

CHAPITRE II.

ÉQUATIONS D'ÉVOLUTION DU DEUXIÈME ORDRE.

§ 1. Perturbations linéaires de la forme $M_0 + M_1 \dfrac{\partial}{\partial t}$.

I. — PERTURBATIONS GÉNÉRALES.

1. LE PROBLÈME. ÉNONCÉ DU RÉSULTAT. — On se donne deux espaces de Hilbert séparables V et H :

$$(1.0) \quad \begin{cases} V \subset H & \text{(injection compacte)}, \\ V & \text{dense dans H}. \end{cases}$$

Les notations sont celles du chapitre 0.

Soit $a(t; u, v)$ une famille de formes sesquilinéaires continues sur $V \times V$ pour chaque $t \in (0, T)$ avec :

$$(1.1) \quad \begin{cases} \text{(i)} \quad a(t; u, v) \text{ est hermitienne;} \\ \text{(ii)} \quad \exists\, C_0, \text{ Cte} > 0, \text{ avec} \\ \qquad \forall t \in (0, T), \quad |a(t; u, v)| \leqq C_0 \|u\| . \|v\|, \quad \forall u, v \in V; \\ \text{(iii)} \quad \exists\, \alpha, \text{ Cte} > 0, \text{ avec} \\ \qquad \forall t \in (0, T), \quad a(t, u, v) \geqq \alpha \|u\|^2 \quad (^{16}), \quad \forall u \in V; \end{cases}$$

$$(1.2) \quad \begin{cases} \forall u, v \in V, \quad t \to a(t; u, v) \text{ a une dérivée au sens des distributions} \\ \text{mesurable bornée} \\ (\exists\, \mu_1, \text{ Cte} > 0, \text{ avec } |a'(t; u, v)| \leqq C_1 \|u\| . \|v\|, \ \forall u, v \in V, \ t \in [0, T]). \end{cases}$$

On introduit *les perturbations*

$$(1.3) \quad \begin{cases} M_0 \in \mathcal{L}(L^\infty(V), L^\infty(H)) & \textit{de type local}, \\ M_1 \in \mathcal{L}(L^\infty(H), L^\infty(H) & \text{»} \quad \text{«} , \\ (\mu_i, \text{ Cte associée à } M_i \ (\textit{voir} \text{ Définition p. } 148) \end{cases}$$

et l'on pose le

PROBLÈME P 1. — *Étant donnés :*

$$u_0 \in V, \qquad u_1 \in H, \qquad f \in L^1(H),$$

([16]) Il est possible comme au chapitre I, § 1, de prendre une semi-norme [ ] sur V telle que $\|u\|$ $([u]^2 + |u|^2)^{1/2}$. Nous faisons cette hypothèse pour simplifier.

trouver u, vérifiant :

(i) $u \in L^\infty(V)$, $u' \in L^\infty(H)$;

(ii) $u''(t) + A(t)\,u(t) + M_0\,u(t) + M_1 u'(t) = f(t)$ *p. p. sur* $(0, T)$ *dans* V';

(iii) $u(0) = u_0$, $u'(0) = u_1$.

Si $\tilde{H}$ est un *Hilbert quelconque* avec

$$H \subset \tilde{H} \subset V' \quad \text{(injection continue)}, \tag{1.4}$$

il est supposé que

$$\left\{ \begin{array}{l} \textit{lorsque } u_m^{(i)} \to u^{(i)} \textit{ p. p. dans } \tilde{H} \textit{ sur } (0, T), \\ \qquad\qquad M_i u_m^{(i)} \to M_i u^{(i)} \quad (i = 0, 1) \quad \textit{p. p. dans } \tilde{H} \textit{ sur } (0, T). \end{array} \right. \tag{1.5}$$

Dans ces conditions, nous avons le

Théorème 1.I. — *Moyennant* (1.0) *à* (1.5) *vérifiées, il existe une solution unique au problème* P 1.

En outre :

(i) *u est (p. p. égale à) une fonction de* $\mathcal{C}(0, T; V)$;
u' est (p. p. égale à) une fonction de $\mathcal{C}(0, T; H)$;

(ii) *L'application*

$$(u_0, u, f) \to (u, u')$$

est continue de

$$V \times H \times L^1(H) \to \mathcal{C}(0, T; V) \times \mathcal{C}(0, T; H).$$

2. Démonstration du théorème 1.I. — Comme au chapitre I, § 1, le plan de la démonstration est le suivant :

2.1. Le système approché;

2.2. Inégalités *a priori*;

2.3. Inégalités *a priori* pour les dérivées fractionnaires;

2.4. Passage à la limite;

2.5. Régularité de la solution-unicité.

2.1. *Le système approché.* — Soit (w_j) $(j = 1, 2, \ldots)$, une *base* de V.

Posons

$$u_m(t) = \sum_{i=1}^{m} g_{im}(t)\, w_i, \tag{2.1}$$

les g_{im} étant *solutions du système*

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{d^2}{dt^2}(u_m(t), w_j) + a(t; u_m(t), w_j) + (M_0 u_m(t), w_j) \\ \quad + (M_1 u'_m(t), w_j) = (f(t), w_j) \qquad (1 \leq j \leq m), \\ \qquad g_{im}(0) = \alpha_{im}^0, \qquad g'_{im}(0) = \alpha_{im}^1, \end{array} \right. \tag{2.2}$$

les α_{im}^k étant choisis de manière que

$$(2.3)\qquad \left.\begin{cases} \sum_{i=1}^{m} \alpha_{im}^0 w_i \to u_0 & \textit{dans } \mathrm{V} \textit{ fort} \\ \sum_{i=1}^{m} \alpha_i^1 \; w_i \to u_1 & \textit{dans } \mathrm{H} \textit{ fort} \end{cases}\right\} \textit{lorsque } m \to +\infty.$$

Comme au paragraphe 1 du chapitre I (p. 155) on a le

LEMME 2.1. — *Il existe une solution unique au système* (2.2) *avec*

$$(2.4)\qquad u_m,\ u'_m \in \mathrm{L}^\infty(\mathrm{V}), \qquad u''_m \in \mathrm{L}^1(\mathrm{V}).$$

2.2. *Inégalités* a priori. — On pose

$$(2.5)\qquad \begin{cases} \psi_m(s) = |u'_m(s)|^2 + \|u_m(s)\|^2, \\ k_0 = \inf\left(\frac{1}{2}, \alpha\right), \qquad k_1 = \sup\left(\frac{1}{2}, \mathrm{C}_0\right) \end{cases}$$

et en prenant le produit scalaire avec $u'_m(t)$, on déduit de (2.2)

$$(2.6)\qquad k_0\psi_m(s) \leq k_1\psi_m(0) + \int_0^s |a'(\sigma; u_m(\sigma), u_m(\sigma))|\,d\sigma + \int_0^s |(\mathrm{M}_0 u_m(\sigma), u'_m(\sigma))|\,d\sigma$$
$$+ \int_0^s |(\mathrm{M}_1 u'_m(\sigma), u'_m(\sigma))|\,d\sigma + \int_0^s |(f(\sigma), u'_m(\sigma))|\,d\sigma,$$

puis, en utilisant le type local de M^i et les procédés du paragraphe 1 (théor. 1.I), nous obtenons

$$(2.7)\qquad \begin{cases} k_0\psi_m(s) \leq k_1\psi_m(0) + k_2\int_0^s \psi_m(\sigma)\,d\sigma + \frac{3\delta}{2}\sup_{\sigma\in(0,s)}\psi_m(\sigma) + \frac{1}{2\delta}\left(\int_0^s |f(\sigma)|\,d\sigma\right)^2, \\ k_2 = \sup\left[\mathrm{C}_1,\ \mathrm{T}\left(\frac{\mu_0^2}{2\delta} + \frac{\mu_1^2}{2\delta}\right)\right]. \end{cases}$$

Soit alors t, avec $0 \leq s \leq t \leq \mathrm{T}$ et δ choisi de manière que

$$k_0 - \frac{3\delta}{2} = \frac{k_0}{2},$$

alors en prenant le sup en $s \leq t$, (2.7) donne

$$(2.8)\qquad \frac{k_0}{2}\sup_{s\in(0,t)}\psi_m(s) \leq k_1\psi_m(0) + k_2\int_0^t \psi_m(\sigma)\,d\sigma + \frac{1}{2\delta}\left(\int_0^{\mathrm{T}} |f(\sigma)|\,d\sigma\right)^2.$$

Comme

$$(2.9)\qquad \psi_m(0) \leq k_3(\|u_0\|^2 + |u_1|^2), \qquad k_3,\ \mathrm{Cte} > 0;$$

on déduit du *lemme de Gronwall*

$$(2.10)\qquad \forall\, t \in (0, \mathrm{T}), \quad \psi_m(t) \leq \mathrm{C}(\mathrm{T}, u_0, u_1, f) = \mathrm{Cte}.$$

Nous avons ainsi démontré le

LEMME 2.2.

(i) u_m *reste dans un borné de* $L^\infty(V)$,

(ii) u'_m *reste dans un borné de* $L^\infty(H)$.

2.3. *Inégalités* a priori *pour les dérivées fractionnaires.* — 1° On commence par *prolonger* f, M_i $(i=0, 1)$, $a(t;\, u, v)$ à la droite entière.

On note

(2.11) $\tilde{f}$, $\tilde{M}_i$, $\tilde{a}(t;\, u, v)$ les prolongements de f, M_i, $a(t;\, u, v)$ qui sont définis comme suit :

$$
(2.12)\quad \left\{\begin{array}{l}
\tilde{f},\ \tilde{M}_0 \text{ sont choisis comme au chapitre I [§ 1, n° I]} \\
\tilde{a}(t;\, u, v) = \begin{cases} 0 & si\ \ t<0, \\ a(t;\, u, v) & si\ \ t\in(0, T), \\ a(T;\, u, v) & si\ \ t>T, \end{cases} \\
\tilde{M}_1 = \begin{cases} 0 & si\ \ t<0, \\ M_1 & si\ \ t\in[0, T], \\ I_H\ (\textit{identité de } H) & si\ \ t>T. \end{cases}
\end{array}\right.
$$

U_m désigne *la solution* du système

$$
(2.13)\quad \left\{\begin{array}{l}
\dfrac{d^2}{dt^2}(U_m, w_j) + \tilde{a}(t;\, U_m, w_j) + (\tilde{M}_0 U_m, w_j) + (\tilde{M}_1 U'_m, w_j) \\
\qquad = (\tilde{M}_1 U'_m(0) + u'_m(0), w_j)\,\delta + (u_m(0), w_j)\,\delta', \\
\qquad U_m = 0 \quad \text{si} \quad t<0; \qquad 0 \leqq j \leqq m.
\end{array}\right.
$$

Nous allons démontrer le

LEMME 2.3. — *U_m vérifie :*

(i) $U_m = u_m$, $U'_m = u'_m$ *p. p. sur* $(0, T)$;

(ii) $U_m \in L^\infty(R;\, V) \cap L^2(R;\, V)$; $\tilde{M}_0 U_m \in L^2(R;\, H)$;

(iii) $U'_m \in L^\infty(R;\, H) \cap L^2(R;\, H)$, $\tilde{M}_1 U'_m \in L^2(R;\, H)$.

Démonstration du lemme 2.3. — *a.* — Le (i) est conséquence immédiate de *l'unicité* de la solution pour (2.13). Comme

$$
(2.14)\quad \tilde{M}_0 U_m(t) = \begin{cases} 0 & \text{si}\ \ t\notin(0, T), \\ M_0 U_m(t) & \text{si}\ \ t\in(0, T), \end{cases}
$$

le fait que $\tilde{M}_0 U_m$ est dans $L^2(R;\, H)$ résulte du lemme 2.2.

b. On déduit de (2.13) que pour $t > T$, U_m vérifie

$$(2.15)\quad \begin{cases} \text{(i)} & \frac{1}{2}|U'_m(t)|^2 + \tilde{a}(t; U_m(t), U_m(t)) + \int_T^t |U'_m(\sigma)|^2 d\sigma \\ & \quad = \frac{1}{2}|U'_m(T)|^2 + a(T; U_m(T), U_m(T)); \\ \text{(ii)} & (U'_m(t), U_m(t)) + \int_T^t a(\sigma; U_m(\sigma), U_m(\sigma))\, d\sigma \\ & \quad = (U'_m(T), U'_m(T)) + \int_T^t |U'_m(\sigma)|^2 d\sigma - \int_T^t (U'_m(\sigma), U_m(\sigma))\, d\sigma. \end{cases}$$

Du lemme 2.2 et de [(2.15), (i)] nous déduisons le (iii) du lemme et $U_m \in L^\infty(R; V)$.

Enfin, compte tenu de ce résultat, [(2.15), (ii)] implique :

$$(2.16)\qquad \int_T^{+\infty} \tilde{a}(\sigma; U_m(\sigma), U_m(\sigma))\, d\sigma < +\infty,$$

donc $U_m \in L^2(R; V)$ en vertu de la *coercivité* de $a(t; u, v)$. D'où le lemme 2.3.

2° Lemme 2.4. — *Soit une fonction u vérifiant :*

(i) $u \in L^2(R; V)$, $u' \in L^2(R; H)$, $u = 0$ si $t < 0$;

(ii) $\forall v \in V$,

$$(2.17)\qquad \frac{d^2}{dt^2}(u, v) + ((g, v)) = (h, v) + (\zeta_0, v)\,\delta + (\zeta_1, v)\,\delta',$$

où $g \in L^2(R; V)$, $h \in L^1(R; H)$, $\zeta_0, \zeta_1 \in H$.

Dans ces conditions :

— *si* $\zeta_1 \neq 0$, *pour toute fonction q, nulle pour* $t \leq 0$ *bornée sur* **R** *de classe* $\mathcal{C}^2$ *et pour tout* $\gamma \in]0, \frac{1}{4}[$,

$$(2.18)\qquad D^{1+\gamma}(qu) \in L^2\left(R; H^{\frac{1}{2}} V'^{\frac{1}{2}}\right);$$

— *si* $\zeta_1 = 0$, *même résultat avec qu remplacé par u.*

Démonstration du lemme 2.4. — L'espace V pouvant toujours être considéré comme le domaine d'un opérateur Λ autoadjoint positif de $V \mapsto V'$, donné sur V par $((u, v)) = (\Lambda u, v)$, on *diagonalise* l'opérateur Λ.

Soit π *l'isométrie :*

$$(2.19)\quad \begin{cases} u \mapsto \pi u \text{ qui envoie } V' \text{ sur la somme mesurable :} \\ \qquad\qquad \mathcal{V}' = \int^{\oplus} v'(\lambda)\, d\nu(\lambda), \\ \nu \text{ mesure} > 0,\ \lambda \geq \lambda_0 \gg 0. \end{cases}$$

Posons :

$$(2.20)\qquad \begin{cases} \mathrm{U}(t,\lambda) = \pi\, u(t)\,(\lambda) \quad \text{si } u \text{ vérifie } (2.17), \\ \mathrm{G}(t,\lambda) = \pi\, g(t)\,(\lambda), \\ \mathrm{F}(t,\lambda) = \pi\, f(t)\,(\lambda); \end{cases}$$

$$(2.21)\qquad (\;,\;)_\lambda \quad \text{produit scalaire dans } \mathcal{V}'(\lambda);$$

$$(2.22)\qquad \begin{cases} w = u', \\ \hat{\mathrm{W}}(\tau,\lambda) = i\tau\,\hat{\mathrm{U}}(\tau,\lambda) \quad (\text{par transformation de Fourier en } t,\ u \to \hat{u}). \end{cases}$$

En appliquant π, puis par transformation de Fourier en t, nous déduisons de (2.17)

$$(2.23)\qquad \begin{cases} |\tau|\,\lambda^{\frac{1}{2}}\,|\hat{\mathrm{W}}(\tau,\lambda)|_\lambda^2 \leq \left|\left(\lambda\,\hat{\mathrm{G}}(\tau,\lambda),\ \lambda^{\frac{1}{2}}\hat{\mathrm{W}}(\tau,\lambda)\right)_\lambda\right| \\ \qquad + \left|\left(\hat{\mathrm{F}}(\tau,\lambda),\ \lambda^{\frac{1}{2}}\hat{\mathrm{W}}(\tau,\lambda)\right)_\lambda\right| + \left|\left(\pi\xi_0(\lambda),\ \lambda^{\frac{1}{2}}\hat{\mathrm{W}}(\tau,\lambda)\right)_\lambda\right| \\ \qquad + |\tau|.\left|\left(\pi\xi_1(\lambda),\ \lambda^{\frac{1}{2}}\hat{\mathrm{W}}(\tau,\lambda)\right)_\lambda\right|; \end{cases}$$

ainsi, compte tenu de ce que

$$(2.24)\qquad u' \in \mathrm{L}^2(\mathrm{R},\mathrm{H}) \iff \text{le champ de vecteurs } \lambda \mapsto \lambda^{\frac{1}{2}}\hat{\mathrm{W}}(.,\lambda) \in \mathrm{L}^2(\mathrm{R},\mathcal{V}'),$$

nous obtenons, par intégrations en $d\nu(\lambda)$,

$$(2.25)\qquad \begin{cases} |\tau|.\|\hat{w}(\tau)\|^2_{\mathrm{H}^{\frac{1}{2}}(\mathrm{V}')^{\frac{1}{2}}} \leq \mathrm{C}\Big[\|g(\tau)\|^2 + |\hat{w}(\tau)|^2 \\ \qquad + \left(\sup_{\mathrm{R}}|\hat{f}(\tau)|\right)|\hat{\mathrm{W}}(\tau)| + |\xi_0|.|\hat{w}(\tau)| + |\xi_1|.|\hat{w}(\tau)|.|\tau|\Big] \\ \qquad (\mathrm{C} = \mathrm{Cte}). \end{cases}$$

Considérons deux cas :

Premier cas : $\xi_1 = 0$. — *Pour tout* $\gamma \in \left]0, \frac{1}{4}\right[$,

$$(2.26)\qquad \begin{cases} \displaystyle\int_{\mathrm{R}} |\tau|^{2\gamma}\,\|w(\tau)\|^2_{\mathrm{H}^{\frac{1}{2}}(\mathrm{V}')^{\frac{1}{2}}} \leq \mathrm{C}_1\left\{\int_{\mathrm{R}}\|g(t)\|^2\,dt + \int_{\mathrm{R}}|u'(t)|^2\,dt + \mathrm{I}_0\right\}, \\ \displaystyle\mathrm{I}_0 = \int_{\mathrm{R}}\frac{d\tau}{(1+|\tau|^\beta)^2}, \qquad \beta = 1 - 2\gamma \qquad (\mathrm{C}_1 = \mathrm{Cte}). \end{cases}$$

Deuxième cas : $\xi_1 \neq 0$. — On note que :

$$(2.27)\qquad \begin{cases} \textit{Pour tout } v \in \mathrm{V} \ (\textit{et pour tout } q \textit{ vérifiant l'hypothèse du lemme}). \\ \dfrac{d^2}{dt^2}(qu, v) = (qu'', v) + (2q'u', v) - ((g, v)) + (qf, v) \\ \qquad [u, \textit{sol de } (2.17)]; \end{cases}$$

observant alors :

$$(2.28)\qquad \begin{cases} \text{il existe } g_1 \in \mathrm{L}^2(\mathrm{R};\mathrm{V}), \textit{ avec} \\ (q''u(t), v) + 2(q'(t)\,u'(t), v) - ((g(t), v)) = ((g_1(t), v)) \end{cases}$$

et en posant

$$(2.29)\qquad u_1 = qu, \qquad f_1 = qf,$$

nous sommes ramené au premier cas, l'équation (2.17) étant remplacée par

$$(2.30)\qquad \frac{d^2}{dt^2}(u_1, v) + ((g_1, v)) = (f_1, v),$$

d'où le lemme 2.4.

3° Nous appliquons maintenant le lemme 2.4 à la situation de l'équation (2.17).

Soit V_m *le sous-espace de* V *engendré par* $\{W_j\}$ $(j = 1, 2, \ldots, m)$.

On pose

$$(2.31)\qquad \begin{cases} \forall v \in V_m, \quad \forall t \in R, \\ \tilde{a}(t; U_m(t), v) + (\tilde{M}_0 U_m(t) + \tilde{M}_1 U'_m(t), v) = ((g_m(t), v)), \end{cases}$$

ce qui, d'après le lemme 2.3, définit

(2.32) $g_m \in L^2(R; V)$, *avec* g_m *reste dans un borné de* $L^2(R; V)$.

En définitive, nous obtenons le

LEMME 2.5. — U_m *solution de* (2.17) *vérifie :*

1° *Si* $u_m(0) \neq 0$: $\forall \gamma \in \left]0, \frac{1}{4}\right[$ *et* $\forall q \in \mathcal{C}^2$ *nulle pour* $t \leq 0$ *et bornée,*

(2.33) $D^{1+\gamma}(qU_m)$ *reste dans un borné de* $L^2\left(R; H^{\frac{1}{2}}(V')^{\frac{1}{2}}\right)$;

2° *Si* $u_m(0) = 0$: *même résultat,* qU_m *étant remplacé par* U_m.

2.4. *Passage à la limite.* — 1° Nous avons le

LEMME 2.6. — *De* $\{u_m\}$ *il est possible d'extraire une sous-suite (notée encore* $\{u_m\}$*) possédant les propriétés suivantes :*

(i) $u_m \to u$ *dans* $L^\infty(V)$ *faible et p. p. dans H fort*;

(ii) $u'_m \to u'$ *dans* $L^\infty(V)$ *faible et p. p. dans* $H^{\frac{1}{2}}(V')^{\frac{1}{2}}$ *fort.*

Démonstration du lemme 2.6. — (i) D'après le lemme 2.2 et le lemme 3.3 [chap. I, § 1, n° II], il est possible d'extraire de $\{u_m\}$ *une sous-suite* $\{u_\nu\}$, avec

$$(2.34)\qquad \begin{cases} u_\nu \to u & \text{dans } L^\infty(V) \text{ faible}, \\ u'_\nu \to u' & \text{dans } L^\infty(H) \text{ faible}, \\ u_\nu \to u & p.p. \text{ dans } H \text{ fort}. \end{cases}$$

(ii) L'injection $V \mapsto H$ étant *compacte*, il en est de même de $V \mapsto V'$.

Alors, d'après [19],

(2.35) H et $H^{\frac{1}{2}}(V')^{\frac{1}{2}}$ *étant des interpolés de classe* $K_0(V, V')$, $\theta \in]0, 1[$, on sait que

(2.36) *l'injection* $H \mapsto H^{\frac{1}{2}}(V')^{\frac{1}{2}}$ *est compacte.*

Ainsi, d'après le lemme 2.5,

(2.37) $\{u'_\nu\}$ (resp. $\{qu'_\nu\}$ *est dans un borné de* $\mathcal{H}^T_\gamma\left(H, H^{\frac{1}{2}}(V')^{\frac{1}{2}}\right)$ (16), le résultat suit par application du lemme 3.4 du chapitre I (§ 1, n° I).

2° Nous utilisons maintenant l'hypothèse (1.5), avec successivement :

$$\tilde{H} = H \qquad \text{et} \qquad \tilde{H} = H^{\frac{1}{2}}(V')^{\frac{1}{2}},$$

d'où

$$(2.38) \qquad \begin{cases} \text{(i)} & M_0 u_m \to M_0 u \quad p.p. \ \textit{dans}\ H; \\ \text{(ii)} & M_1 u'_m \to M_1 u' \quad p.p. \ \textit{dans}\ H^{\frac{1}{2}}(V')^{\frac{1}{2}}; \end{cases}$$

la vérification de

(2.39) *u est la solution du problème* P 1

se fait alors sans difficulté.

2.5. *Régularité de la solution. Unicité.* — Comme

$$(2.40) \qquad u \in L^2(V), \qquad u' \in L^2(H), \qquad u'' \in L^2(V') + L^1(H),$$

on a

(2.41) u est (p. p. égale à) une fonction de $\mathcal{C}\left(0, T; V^{\frac{1}{2}}\ H^{\frac{1}{2}}\right)$,
u' est (p. p. égale à) une fonction de $\mathcal{C}(0, T; V')$,

alors par utilisation (par exemple) de la *méthode de diagonalisation*, on démontre comme au chapitre I, § 1, n° I, le

LEMME 2.7. — *u vérifie p. p. en t, l'égalité énergétique :*

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}|u'(t)|^2 + a(t; u(t), u(t)) - \int_0^t a'(\sigma; u(\sigma), u(\sigma))\, d\sigma \\ + \mathrm{Re}\int_0^t (M_0 u(\sigma), u(\sigma))\, d\sigma + \mathrm{Re}\int_0^t (M_1 u'(\sigma), u'(\sigma))\, d\sigma \\ = a(0; u(0), u(0)) + \frac{1}{2}|u_1|^2 + \mathrm{Re}\int_0^t (f(\sigma), u'(\sigma))\, d\sigma. \end{aligned}$$

(17) Notation du chapitre I, § 1, n° I.

On en déduit, comme pour les *inégalités a priori*,

$$(2.42)\quad \begin{cases} \frac{1}{2}|u'(t)|^2 + a(t;\, u(t),\, u(t)) \leq K(u_0,\, u_1,\, f), \\ K(u_0,\, u_1,\, f) = C(T)\left[\frac{1}{2}|u_1|^2 + \|u_0\|^2 + \left(\int_0^T |f(\sigma)|\, d\sigma\right)^2\right]. \end{cases}$$

L'unicité et le (ii) du théorème 1.I s'en déduisent.

Enfin, par les méthodes de [14] et [28], il est possible de voir que

$$(2.43)\quad \begin{cases} u \in \mathcal{C}(0,\, T;\, V), & u' \in \mathcal{C}(0,\, T;\, H), \\ u(0) = u_0 & u'(0) = u_1. \end{cases}$$

3. Remarque : Phénomène de perturbation singulière. — Il est possible de retrouver le théorème 2.I du chapitre I, § 1) comme conséquence du théorème que nous venons de montrer par utilisation d'un *phénomène de perturbation singulière*.

Supposons, en effet,

(3.1) *Les hypothèses du théorème* 2.I [chap. I, § 1, n° II) *satisfaites avec*

$$M_0 = M, \qquad M_1 = I_H \quad (\textit{identité dans } H);$$

d'après le théorème 1.I,

$$(3.2)\quad \begin{cases} \forall\, \varepsilon > 0, \quad \exists\, u_\varepsilon \textit{ unique vérifiant :} \\ \qquad u_\varepsilon \in L^\infty(V), \qquad u'_\varepsilon \in L^\infty(H), \\ \qquad \varepsilon u''_\varepsilon(t) + A(t)\, u_\varepsilon(t) + M\, u_\varepsilon(t) = f(t) \quad p.p., \\ \qquad u_\varepsilon(0) = u_0, \qquad u'_\varepsilon(0) = u_1; \end{cases}$$

on déduit de (3.2) :

$$(3.3)\quad \frac{\varepsilon}{2}|u'_\varepsilon(t)|^2 + a(t;\, u_\varepsilon(t),\, u_\varepsilon(t)) - \int_0^t a'(\sigma;\, u_\varepsilon(\sigma),\, u_\varepsilon(\sigma))\, d\sigma$$
$$+ \operatorname{Re}\int_0^t (M\, u_\varepsilon(\sigma),\, u_\varepsilon(\sigma))\, d\sigma + \int_0^t |u'_\varepsilon(\sigma)|^2\, d\sigma$$
$$= a(0;\, u_0,\, u_0) + \frac{\varepsilon}{2}|u_1|^2 + \operatorname{Re}\int_0^t (f(\sigma),\, u'_\varepsilon(\sigma))\, d\sigma.$$

Observons que u_0 est imposé alors que u_1 peut être arbitraire.

Choisissons u_1 de manière que :

$$|u_1| < \|u_0\|,$$

alors de (3.3), il vient :

$$(3.4) \qquad \varepsilon |u'_\varepsilon(t)|^2 + \int_0^t |u'_\varepsilon(t)|^2\,dt + a(t;\, u_\varepsilon(t),\, u_\varepsilon(t)) \leqq K(u_0, f),$$

d'où

(3.5) $\forall\, \varepsilon > 0$:

(i) u_ε *reste dans un borné de* $L^\infty(V)$;
(ii) $\sqrt{\varepsilon}\, u'_\varepsilon$ » » $L^\infty(H)$;
(iii) u'_ε » » $L^2(H)$;

il en résulte

(3.6) $\exists\, \varepsilon'$, $\varepsilon' \to 0$, *avec :*

(i) $u_{\varepsilon'} \to u$ *dans* $L^\infty(V)$ *faible;*
(ii) $u'_{\varepsilon'} \to u'$ *dans* $L^2(H)$ *faible*;
(iii) $u_{\varepsilon'} \to u$ *p. p.* $t \in (0, T)$ *dans* H *fort*;
(iv) $\varepsilon' u_{\varepsilon'} \to 0$ *dans* $L^\infty(H)$ *faible.*

Si

$$(3.7) \qquad \varphi \in L^2(V), \qquad \varphi' \in L^2(H), \qquad \varphi(T) = 0,$$

$u_{\varepsilon'}$ vérifie

$$(3.8) \qquad \varepsilon' \int_0^T (u'_{\varepsilon'}, \varphi')\,dt + \int_0^T [a(t;\, u_{\varepsilon'}, \varphi) + (M u_{\varepsilon'}, \varphi)]\,dt - \int_0^T (u_{\varepsilon'}, \varphi')\,dt$$
$$= (u_0, \varphi(0)) + \varepsilon'(u_1, \varphi(0)) + \int_0^T (f, \varphi)\,dt.$$

Lorsque $\varepsilon' \to 0$, le premier membre de (3.8) converge vers

$$(3.9) \qquad -\int_0^T (u(t), \varphi(t))\,dt + \int_0^T [a(t;\, u(t), \varphi(t)) + (M\,u(t), \varphi(t))]\,dt$$

et le second vers

$$(3.10) \qquad (u_0, \varphi(0)) + \int_0^T (f(t), \varphi(t))\,dt$$

et u vérifie les conclusions du théorème 2.II (chap. I, § 1, n° II).

II. — Perturbations plus régulières.

Ici encore, si l'on suppose

(II.1) M_i L^2-*régulier* $(i = 0, 1)$,

au sens

$$(II.2) \qquad \begin{cases} M_0 \in \mathcal{L}(L^2(V), L^2(H)), \\ M_1 \in \mathcal{L}(L^2(H), L^2(H)), \end{cases}$$

ou bien

(II.3) *L'hypothèse* (1.3 *du* n° I) *vérifiée et* M_i *quasi temporel,*

alors

(II.4) *L'hypothèse* $V \to H$ *compacte est superflue pour la validité du théorème* 1.I.

III. — Stabilité en $\{u_0, u_1, M_0, M_1, f\}$.

1. Hypothèses. Énoncé du résultat. — On se donne pour chaque entier $n \geqq 0$, le quintuplet

$$\{u_{0,n}, u_{1,n}, M_{0,n}, M_{1,n}, f_n\}$$

vérifiant les hypothèses du n° I et l'on note P_1^n le problème correspondant à P_1.

On suppose

$$(1.1)\quad \left\{\begin{array}{l} \exists\, h_i,\ i=0,1,\ \text{Ctes} > 0,\ \textit{indépendantes de } n,\ \textit{avec :} \\ \qquad |M_{0n}g|_{L^\infty(H)} \leqq h_0\, |g|_{L^\infty(V)}, \quad \forall g \in L^\infty(V), \\ \qquad |M_{1n}g|_{L^\infty(H)} \leqq k_1\, |g|_{L^\infty(H)}, \quad \forall g \in L^\infty(H); \end{array}\right.$$

$$(1.2)\quad \left\{\begin{array}{ll} u_{0n} \to u_0 & \textit{dans } V \textit{ fort lorsque } n \to +\infty, \\ u_{1n} \to u_1 & \textit{dans } H \textit{ fort lorsque } n \to +\infty; \end{array}\right.$$

$$(1.3)\quad \left\{\begin{array}{l} M_{in}g \to M_i g \quad (i=0,1) \quad \textit{dans } L^1(H) \textit{ fort lorsque } n \to +\infty, \\ \qquad \forall g, \textit{ fixé dans } \mathcal{C}(0, T; H); \end{array}\right.$$

$$(1.4)\quad f_n \to f \quad \textit{dans } L^1(H) \textit{ fort.}$$

Théorème 1.II. — *Moyennant les hypothèses* (1.1) *à* (1.4) *la solution* u_n *du problème* P_1^n *converge vers la solution* u *du problème* P_1 *au sens suivant :*

(i) $u_n \to u$ *dans* $\mathcal{C}(0, T; V)$ *fort;*

(ii) $u'_n \to u$ *dans* $\mathcal{C}(0, T; H)$ *fort.*

2. Démonstration du théorème 1.II. — Posons

$$(2.1)\quad \left\{\begin{array}{l} w_n = u_n - u, \\ \chi_n(t) = \frac{1}{2}|w'_n(t)|^2 + a(t; w_n(t), w_n(t)); \end{array}\right.$$

d'après le lemme 2.7 du n° I :

$$(2.2)\quad \left\{\begin{array}{l} w_n \textit{ vérifie p.p.} \\ \chi_n(t) - \int_0^t a'(\sigma; w_n, w_n)\, d\sigma + 2\,\mathrm{Re} \sum_{i=0}^{1} \int_0^t (M_{in} w_n^{(i)}, w')\, d\sigma \\ \quad = \chi_n(0) + \mathrm{Re} \sum_{i=0}^{1} \int_0^t (M_{in} u^{(i)} - M u^{(i)}, w')\, d\sigma + \mathrm{Re} \int_0^t (f_n - f, w')\, d\sigma; \end{array}\right.$$

on en déduit

$$(2.3)\qquad \chi_n(t) \leq C\left[\chi_n(o) + \sum_{i=0}^{1} \| M_{in}u^{(i)} - M_i u^{(i)} \|_{L^1(H)} + \| f_n - f \|_{L^1(H)}\right] \qquad (C,\ \mathrm{Cte} > o),$$

le théorème 1.II en résulte.

IV. — Perturbation de la « partie principale $A(t)$ ».

1. Le résultat. — Nous considérons ici l'analogue du théorème 2.4 du chapitre I (§ 2, n° IV).

(1.1) *Les espaces de Hilbert* V *et* H *et la famille* $a(t;\ u,\ v)$, M_1 *et* f *sont donnés comme au n° I;*

(1.2) Soit *une famille de formes sesquilinéaires* $k(t;\ s;\ u,\ v)$, *définie pour* $(t,\ s) \in (o,\ T) \times (o,\ T)$ *vérifiant les propriétés* IV.1 *à* IV.4 du chapitre I (§ 2, n° IV).

L'opérateur M_0 est alors défini par

$$(1.3)\qquad M_0 u(t) = \int_0^t K(t,\ s)\, u(s)\, ds, \quad \forall\, u \in L^\infty(V), \quad \textit{intégrale dans } V'$$

et

(1.4) $M_0 \in \mathcal{L}(L^\infty(V),\ L^\infty(V'))$ *est de type local et quasi temporel.*

Alors :

Théorème 1.III. — *Moyennant les hypothèses* (1.1) *à* (1.4), *il existe une solution unique au problème* P_1 *correspondant vérifiant les conclusions du théorème* 1.I.

La démonstration est analogue à celle du théorème 1.I en utilisant les estimations faites au chapitre I (§ 2, n° IV); nous ne la reproduirons pas ici.

Remarque IV.1. — Les théorèmes 1.I et 1.III demeurent valides si nous *ajoutons* à f une *fonction* ρ avec

$$(1.5)\qquad \rho \in L^\infty(V'), \qquad \rho' \in L^1(V').$$

En effet, pour les *inégalités a priori*, nous aurons

$$(1.6)\qquad \left| \int_0^t \mathrm{Re}\,(\rho(\sigma),\ u'_m(\sigma))\, d\sigma \right| \leq \| \rho(t) \|_{V'} \| u_m(t) \| + \| \rho(o) \|_{V'} \| u_0 \| + \int_0^t \| \rho'(\sigma) \|.\| u_m(\sigma) \|\, d\sigma,$$

donc

$$(1.7)\quad \left\{\begin{array}{l} \forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, C(\varepsilon T) \text{ et } K(T) \textit{ constantes telles que :} \\ \left|\displaystyle\int_0^t \mathrm{Re}\,(\rho(\sigma),\, u'_m(\sigma))\, d\sigma\right| \leqq K(T) + \varepsilon \sup_{\sigma \in (0,\, t)} \|\, u_m(\sigma)\, \| \\ \qquad\qquad + C(\varepsilon,\, T) \displaystyle\int_0^t \|\, u_m(\sigma)\, \|^2\, d\sigma. \end{array}\right.$$

Pour les dérivées fractionnaires la méthode utilisée pour le théorème 1.I reste valable en prolongeant ρ hors de $(0, T)$ de manière que

$$\tilde{\rho} \in L^2(R;\, V').$$

Cette remarque va être *utile* dans l'application qui suit.

2. Application a un problème de retard issu de la théorie de la Viscoélasticité. — Nous allons appliquer le théorème 1.III à un problème que nous a signalé R. Temam.

Pour les équations de la *viscoélasticité* concernées on renvoie à [8] et à [11].

Les hypothèses faites sont les suivantes :

$$(2.1)\quad \left\{\begin{array}{l} 1^\circ\ V,\ H,\ a(t;\, u,\, v), \textit{ sont donnés comme pour le } \text{théorème 1.III;} \\ 2^\circ\ k(t,\, s;\, u,\, v) = m_0(t - s;\, u,\, v), \textit{ les hypothèses du } \text{théorème 1.III} \\ \qquad \textit{étant vérifiées pour } t - s \in R^+. \end{array}\right.$$

On se donne, en outre,

$$(2.2)\quad \left\{\begin{array}{l} \forall\, t,\ B(t) \in \mathcal{L}(H,\, H), \textit{ avec } \exists\, \beta > 0,\ \beta = \mathrm{Cte} \textit{ telle que} \\ \qquad |(B(t)\, u,\, v)| \leqq \beta\, |u|.|v|, \quad \forall\, u,\, v \in H, \quad \forall\, t \in (0,\, T) \end{array}\right.$$

et l'on prend

$$(2.3)\qquad M_1(t) = B(t) \quad (^{17}).$$

On considère le

Problème P 2. — *Étant donnés :*

1° $u_0 \in L^1(-\infty,\, 0,\, V)$, $u_1 \in L^2(-\infty,\, 0;\, H)$;

2° $f \in L^1(0,\, T;\, H)$,

(17) Ce choix particulier est fait pour simplifier. Le théorème que l'on va démontrer subsiste encore pour une perturbation M_1 du type considéré au théorème 1.I.

trouver u vérifiant :

(i) $u \in L^1(-\infty, T; V)$, $u' \in L^2(-\infty, T; H)$;

(ii) $u|_{-\infty}^{0} = u_0$, $u'|_{-\infty}^{0} = u_1$ [18];

(iii) *p. p. pour* $t \in (0, T)$ *on a dans* V′

$$u''(t) + A(t)\,u(t) + B(t)\,u'(t) + \int_{-\infty}^{t} M(t-\sigma)\,u(\sigma)\,d\sigma = f(t).$$

Le résultat est consigné dans le

THÉORÈME 1.IV. — *Si*

1° $$u_0 \in L^1(-\infty, 0; V) \cap \mathcal{C}^0(-\infty, 0; V) \cap \mathcal{C}^1(-\infty, 0; H),$$
$$u_1 = u'_0 \in L^2(-\infty, 0; H),$$

2° *Les hypothèses* (2.1) *à* (2.2) *sont vérifiées. Alors il existe une solution unique au problème* P 2 *avec en outre*

(i) $u \in L^\infty(V)$, $u' \in L^\infty(H)$;

(ii) *Après modification éventuelle sur des ensembles de mesure nulle,*

$$u \in \mathcal{C}^0(-\infty, T; V), \qquad u' \in \mathcal{C}(-\infty, T; H).$$

Démonstration du théorème 1.IV. — D'après le théorème 1.III et la remarque IV.1 :

(2.4) *Il existe w unique vérifiant les conditions suivantes :*

1° *w est nulle p. p. pour* $t < 0$;

2° $w(0) = u_0(0)$, $w'(0) = u'_0(0)$;

3° *p. p. pour* $t \in (0, T)$ *dans* V′,

$$w''(t) + A(t)\,w(t) + \int_{0}^{t} \mathcal{M}_0(t-\sigma)\,u(\sigma)\,d\sigma = \rho(t) + f(t) \quad [19],$$

où

$$\rho(t) = -\int_{-\infty}^{0} \mathcal{M}_0(t-\sigma)\,u_0(\sigma)\,d\sigma \tag{2.5}$$

[on vérifie, en effet, immédiatement que : $\rho \in L^\infty(V')$, $\rho' \in L^1(V')$].

Alors la fonction u définie par

$$u(t) = \begin{cases} u_0(t) & si\ \ t < 0 \ \ \text{p. p.} \\ w(t) & si\ \ t \in (0, T) \ \ \text{p. p.} \end{cases} \tag{2.6}$$

vérifie les conclusions du théorème 1.IV.

---

[18] $g\text{-}|_{-\infty}^{0}$ signifie la restriction de g à $(-\infty, 0)$.

[19] $\mathcal{M}_0(t) \in \mathcal{L}(V, V')$ défini par $\mathcal{M}_0(\sigma; u, v)$ (*voir* 2.1).

V. — Exemples.

Soit Ω un *ouvert borné* de R^n, de *frontière* Γ *variété indéfiniment différentiable de dimension* $n-1$; $\Omega_T = \Omega \times]0, T[$.

On prend

$$\text{(V.1)} \qquad H = L^2(\Omega), \qquad V \textit{ tel que } \; H_0^m(\Omega) \subset V \subset H^m(\Omega);$$

$$\text{(V.2)} \qquad \left\{ \begin{array}{l} a(t; u, v) = \displaystyle\sum_{|p|, |q| \leq m} \int_\Omega a_{pq}(x, t)\, D^q u D^p \bar{v}\, dx + \sum_{j=0}^{m-1} \langle T_j(t)\, u, \gamma_j \bar{v} \rangle, \\ a_{pq} \in L^\infty(\Omega_T) \quad (\textit{suffisamment régulier en } t); \end{array} \right.$$

$$\text{(V.3)} \qquad \left\{ \begin{array}{l} T_j(t) \in \mathcal{L}\left(H^m(\Omega), H^{-\left(m-j-\frac{1}{2}\right)}(\Gamma)\right) \\ T \to \langle T_j(t)\, u, \varphi \rangle, \quad u \in H^m(\Omega), \quad \varphi \in \left(H^{\left(m-j-\frac{1}{2}\right)}(\Gamma)\right) \\ \textit{fonction suffisamment régulière en } t, \\ |\langle D^k T_j(t)\, u, \varphi \rangle| \leq C_j^k \| u \|_{H^m(\Omega)} \| \varphi \|_{H^{m-j-\frac{1}{2}}(\Gamma)}, \qquad C_j^k = \text{Ctes} \quad [20] \\ (k = 0, 1) \end{array} \right.$$

Ensuite on se donne

$$\text{(V.4)} \qquad \left\{ \begin{array}{l} 1^\circ \; b_{ij}(x, t) \text{ dans } L^\infty(\Omega_T),\; i, j,\; |i+j| \leq m-1; \\ 2^\circ \; \textit{des fonctions scalaires :} \\ \qquad t \to \omega_j(t),\; 0 \leq |j| \leq m-1 \;[\text{resp. } t \to \chi(t)] \\ \quad \textit{mesurables avec :} \\ \quad \exists\, t_j \;(\text{resp. } \exists\, \tau) \in]0, T[, \quad t - \omega_j(t) > 0 \;[\text{resp. } t - \chi(t) > 0] \\ \quad \text{pour } t \in (t_j, T) \;[\text{resp. } t \in (\tau, T)], \\ \quad -\tau_0 = \inf\limits_j \inf\limits_{t \in (0, T_j)} (t - \omega_j(t)) \;[\text{resp. } -\tau_0 = \inf\limits_{t \in (0, \tau)} t - \chi(t)]; \\ 3^\circ \; (x, t) \to k(x, t) \in L^\infty(\Omega_T). \end{array} \right.$$

Alors :

$$\text{(V.5)} \qquad \left\{ \begin{array}{ll} & \textit{Il existe } u \textit{ unique, avec :} \\ \text{(i)} & u \in L^\infty(V),\; u' \in L^\infty(H); \\ \text{(ii)} & A\left(x, t, \dfrac{\partial}{\partial x}\right) u(x, t) + \displaystyle\sum_{|i+j| \leq m-1} (-1)^{|i|} D_x^i [b_{ij}(x, t)\, D_x^j u(x, t - \omega_j(t))] \\ & \qquad + k(x, t) \dfrac{\partial}{\partial t} u(x, t - \chi(t)) + \dfrac{\partial u}{\partial t}(x, t) = f(x, t); \\ \text{(iii)} & u(x, 0) = u_0 \quad \textit{donné dans } V, \\ & u'(x, 0) = u_1 \quad \textit{donné dans } H = L^2(\Omega), \\ & f \textit{ donnée dans } L^1(H), \\ & u(x, t) = g(x, t),\; t \in]-\xi_0, 0[,\; -\xi_0 = \inf(-\tau_0, -\tau_0); \\ \text{(iv)} & g \in L^1(-\xi_0, 0; V),\; g' \in L^1(-\xi_0, 0; H) \\ & \qquad (\textit{données de Cauchy épaisses}). \end{array} \right.$$

---

[20] D^k, dérivation d'ordre k en t.

Pour démontrer ce résultat on se ramène à la situation du théorème 1.I, avec

$$\text{(V.6)} \qquad M_0 u(x, t) = \sum_{|i+j| \leq m} (-1)^{|i|} D_x^i b_{ij}(x, t) \rho_j(t) D_x^j u(x, t - \omega_j(t)),$$

où

$$\text{(V.7)} \qquad \rho_j(t) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad t - \omega_j(t) \geqq 0, \\ 0 & \text{si} \quad t - \omega_j(t) < 0 \end{cases}$$

et

$$\text{(V.8)} \qquad M_2 u'(x, t) = \begin{cases} k(x, t) \dfrac{\partial u}{\partial t}(u, t - \chi(t)) & \text{si } t \in [\tau, T], \quad x \in \Omega, \\ 0 & \text{ailleurs}; \end{cases}$$

f remplacé par $\tilde{f}$, avec

$$\text{(V.9)} \quad \tilde{f}(t) = f(t) + \sum_{|i+j| \leq m-1} (-1)^{|i|} D_x^i b_{ij}(x, t) [1 - \rho_j(t)] D_x^j g(x, t - \omega_j(t)) + f_1(t);$$

$$\text{(V.10)} \qquad f_1(t) = \begin{cases} k(x, t) \dfrac{\partial g}{\partial t}(x, t - \chi(t)) & \text{si } t \in (0, \tau), \quad x \in \Omega, \\ 0 & \text{ailleurs}. \end{cases}$$

Les conditions aux limites s'interprètent *suivant le choix de* V comme au chapitre I (§ 4, n° IV.2).

§ 2. Problèmes non linéaires.

I. — Hypothèses générales.

On se donne

(I.1) *Deux espaces de Hilbert* V *et* H *dans la situation du paragraphe* 1.

Soit

(I.2) W *un espace de Banach réflexif*,
$W \subset H$ (*injection continue*).

On suppose

(I.3) $V \cap W$ *séparable dense dans* V, W, H.

En *identifiant* H à son *antidual*, on aura

$$\text{(I.4)} \qquad \begin{cases} V \cap W \subset V \subset H \subset V' \subset (V \cap W)', \\ V \cap W \subset W \subset H \subset W' \subset (V \cap W)'. \end{cases}$$

On se donne encore un *espace de Banach* F, avec

$$\text{(I.5)} \qquad \begin{cases} L^\infty(W) \subset F \subset L^1(W), \\ L^\infty(W') \subset F \subset L^1(W'). \end{cases}$$

Dans tout le paragraphe 2, on considère

(I.6) *Une famille de formes sesquilinéaires* $a(t;\, u,\, v)$ *continues sur* $V \times V$ *vérifiant les hypothèses* (1.1), (1.2) *du paragraphe* 1 (p. 227).

II. — Opérateurs monotones.

Dans ce numéro, on prend :

(II.1) $$F = L^{1}(W), \qquad p > 1.$$

On introduit

(II.2) $B(t)$, $t \in (0, T)$ *une famille d'opérateurs (non linéaires) qui appliquent* W *dans* W',

et qui vérifient les propriétés suivantes :

(II.3) *Pour presque tout* t, $B(t)$ *est continu des sous-espaces de dimension finie de* W *dans* W' *faible*;

(II.4) $\mathrm{Re}\langle B(t)\, u - B(t)\, v,\quad u - v\rangle \geq 0, \quad \forall\, u,\ v \in W\ p.\ p.\ t \in (0, T)$;

(II.5) Si $u \in L^{p}(W)$, *alors* $B(.)\, u \in L^{p'}(W')$ $\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1\right)$.

L'application $u \to B(.)\, u$ *envoie les ensembles bornés de* $L^{p}(W)$ *dans des ensembles bornés de* $L^{p'}(W')$ *et est faiblement continue sur les droites de* $L^{p}(W)$.

On se donne

(II.6) *Les perturbations* M_i, $i = 0,\ 1$ *vérifient* (1.3) (*cf.* p. 227) *de type quasi temporel (pour simplifier)*

et l'on pose le

Problème P 3. — *Pour* $u_0 \in V$, $u_1 \in H$ *et* $f \in L_1(H) + L_{p'}(W')$ *donnés, trouver une fonction* u *vérifiant*

(i) $u \in L^{\infty}(V)$;

(ii) $u' \in L_{\infty}(H) \cap L_{p}(W)$;

(iii) $u''(t) + A(t)\, u(t) + M_0\, u(t) + B(t)\, u'(t) + M_1\, u'(t) = f(t)$,
$u(0) = u_0, \qquad u'(0) = u_1$.

Alors on a le

Théorème 2.1. — *Sous les hypothèses* I.1 *à* 1.4, II.1 *à* II.6, *il existe une solution unique au problème* P_3.

De plus, après modification éventuelle sur un ensemble de mesure nulle,

$$u \in \mathcal{C}(0, T;\, V), \qquad u' \in \mathcal{C}(0, T;\, H).$$

Remarque. — Le théorème 2.I qui est une *généralisation* au cas non linéaire du théorème 1.II, est dû pour $M_i = 0$ ($i = 0,\ 1$) à Lions-Strauss [20].

Sa démonstration étant analogue à celle des théorèmes 1.II et 5.III (chap. I) nous ne la ferons pas ici.

Exemples. — Soit Ω un *ouvert borné* de R^n de *frontière* Γ. $\Omega_T = \Omega \times]o, T[$.

On prend

$$(\text{II}.7) \quad \begin{cases} H = L^2(\Omega), \quad V = H^1(\Omega), \quad W = L^2(\Omega) \cap L^p(\Omega), \\ \|u\|_W = \left(|u|^p_{L^2(H)} + \int_\Omega |u(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}; \end{cases}$$

$$(\text{II}.8) \quad \begin{cases} a(t; u, v) = a(u, v) = \sum_{i=1}^n \int_\Omega a_i(x) \, D_i u(x) \, \overline{D_i v(x)} \, dx + \int_\Omega a_0(x) \, u(x) \, \bar{v}(x) \, dx, \\ a_i \in L^\infty(\Omega) \quad (i = o, \ldots, n), \\ \operatorname{Re} a_i(x) \geqq \alpha > o \quad p.p. \text{ dans } \Omega \quad (i = o, 1, \ldots, n); \end{cases}$$

$$(\text{II}.9) \quad \begin{cases} B(t) = B \text{ défini par} \\ \langle Bu, v \rangle = \int_\Omega |u(x)|^{p-2} u(x) \, \overline{v(x)} \, dx, \quad \forall u, v \in W. \end{cases}$$

Les vérifications des hypothèses du théorème 2.I se font sans difficultés.

On se donne ensuite (pour simplifier) :

$$(\text{II}.10) \quad \begin{cases} \text{Une fonction scalaire } t \to \omega(t) \text{ mesurable avec} \\ \exists \, t_0 \in]o, T[, \quad t \in]t_0, T[, \quad t - \omega(t) > o \quad p.p., \\ -r_0 = \inf_{t \in (0, t_0)} (t - \omega(t)). \end{cases}$$

Alors

$$(\text{II}.11) \quad \begin{cases} \textit{Il existe } u \textit{ (unique) vérifiant :} \\ 1^\circ \begin{cases} u, D_i u \in \mathcal{C}(o, T; L^2(\Omega)), \\ u' \in \mathcal{C}(o, T; L^2(\Omega) \cap L^p(\Omega_T)); \end{cases} \\ 2^\circ \begin{cases} u''(x, t) - \sum_{i=1}^n D_i[a_i(x) \, D_i u(x, t)] + a_0(x) \, u(x, t) + u(x, t - \omega(t)) \\ \quad + |u'(x, t)|^{p-2} u'(x, t) + u'(x, t - \omega(t)) = f(x, t) \quad p.p. \text{ dans } \Omega_T \quad (^{21}), \\ f, \text{ donnée dans } L^1(L^2(\Omega)) + L^{p'}(\Omega_T); \end{cases} \\ 3^\circ \begin{cases} u(x, o) = \xi_0(x) \\ u'(x, o) = \xi_1(x) \end{cases} \xi_0 \text{ et } \xi_1 \text{ donnés respectivement dans } L^2(H^1(\Omega)) \text{ et } L^2(\Omega_T); \\ 4^\circ \begin{cases} u(x, t) = g(x, t) \text{ p. p. dans } \Omega \times]-r_0, o[, \text{ où } q \text{ est donnée avec} \\ g \in L^1(-r_0, o; L^2(\Omega)) + L^{p'}(-r_0, o; L^{p'}(\Omega)), \\ g' \in L^1(-r_0, o; L^2(\Omega)) \quad (\text{données épaisses}); \end{cases} \\ 5^\circ \quad \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = o \quad \text{sur } \Gamma \times (o, T). \end{cases}$$

---

[21] Bien entendu, on peut encore ajouter des perturbations du type

$$\int_0^t k_i(s, t) \, u^{(i)}(s) \, ds \qquad (i = o, 1; \; k_i \text{ convenable}).$$

III. — Perturbation de la partie non linéaire.

1. Un théorème d'existence. — Les *hypothèses générales étant celles du n° I*, on se donne :

(1.1) g (*opérateur linéaire*) : $W \mapsto W'$ *continu des sous-espaces de dimension finie de* W *dans* W' *faible, tel que si* u *reste dans un borné de* F, gu *reste dans un borné de* F';

de plus,

(1.2) *Il existe* $h \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^+)$ (*fonction scalaire* > 0) :

(i) $h(\sigma) \to +\infty$ *si* $\sigma \to +\infty$;

(ii) *Pour toute* v *différentiable à valeurs dans* W :

$$\operatorname{Re}(g[v(t)], v'(t)) = \frac{d}{dt} h[\|v(t)\|_W].$$

On introduit une *famille de perturbations non linéaires* G_t avec

(1.3) *Pour tout* $t \in (0, T)$, $G_t \mid W \to W'$ *est continu des sous-espaces de dimension finie de* W *dans* W' *faible, avec*

(i) $t \to (G_t u, v)$ *est continue sur* $(0, T)$, $\forall\, u, v \in W$;

(ii) *si* u *reste dans un borné de* $L^1(W)$, $G_t u$ *est dans un borné de* $\mathcal{F}$, *où* $\mathcal{F}$ *est un Banach tel que*

$$L^\infty(W') \subset \mathcal{F} \subset L^1(W').$$

Nous faisons les hypothèses supplémentaires suivantes :

(1.4) *Il existe :*

(1) *un opérateur* (*non linéaire*) $G^0 \mid W \mapsto W'$;

(2) *une famille d'opérateurs* (*non linéaires*) G_t^1, *avec :*

(i) *Pour tout* $t \in (0, T)$, $G_t^1 \mid W \mapsto W'$;

(ii) $t \to (G_t^1(u), v)$ *est continue sur* $(0, T)$, $\forall\, u, v \in W$;

(iii) $\forall\, x, y \in \mathcal{C}^1(0, T; W)$,

$$\int_0^t (G_\sigma[x(\sigma)], y'(\sigma))\, d\sigma = (G_t[x(t)], y(t)) + \int_0^t (G^0(x(\sigma)), y(\sigma))\, d\sigma - \int_0^t (G_\sigma^1[x(\sigma)], y(\sigma))\, d\sigma;$$

(1.5) (1) $\operatorname{Re}(G^0[v], v) \geqq 0$, $\forall v \in W$;

(2) *Pour tout* $\varepsilon > 0$, *il existe* $C(\varepsilon, T)$, Cte > 0 *telle que pour tout* $t \in [0, T]$, *on ait*

$$\left| G_t[v(t)], v(t)) - \int_0^t (G_\sigma^1[v(\sigma)], v(\sigma))\, d\sigma \right|$$
$$\leqq \varepsilon \sup_{\sigma \in (0, t)} h[\| v(\sigma) \|_W] + C(\varepsilon, T) \int_0^t h[\| v(\sigma) \|_W]\, d\sigma$$

pour toute fonction $v \in \mathcal{C}(0, T; W)$.

Enfin

(1.6) *Si* $u_m \to u$ *p. p. sur* $(0, T)$ *dans* H *fort lorsque* $m \to +\infty$,

(i) $\lim_{m=\infty} (g[u_m], v) = (g(u), v)$;

(ii) $\lim_{m=\infty} (G_t[u_m], v) = (G_t[u], v)$

au sens des distributions sur $(0, T)$, $\forall u \in W$.

Nous allons démontrer le

Théorème 2.II. — *Sous les hypothèses du n° I et* (1.1) *à* (1.6) : *Pour* u_0, u_1, f *donnés avec*

$$u_0 \in V \cap W, \qquad u_1 \in H, \qquad f \in L^1(H),$$

il existe u *vérifiant :*

(i) $u \in L^\infty(V \cap W)$, $u' \in L^\infty(H)$;

(ii) $u''(t) + A(t)\,u(t) + g[u(t)] + G_t[u](t) = f(t)$ *p. p. sur* $(0, T)$ *dans* $(V \cap W)'$;

(iii) $u(0) = u_0$, $u'(0) = u_1$.

Remarque. — La conclusion (iii) a *un sens* car si u vérifie (i), (ii), alors d'après les hypothèses faites sur g, G_t, W, F, on a

$$u'' \in L^2[V \cap W)'] + L^\infty((V \cap W)') + L^1((V \cap W)'), \qquad u' \in L^\infty(H),$$

donc u' *est continue* (après modification sur un ensemble de mesure nulle) *à valeurs dans* $(V \cap W)'$.

D'autre part, (i) implique que u *est continue à valeurs dans* H.

2. Démonstration du théorème 2.II. — 2.1. *Le système approché.* — Soit $\{w_j\}$ *une base de* $V \cap W$.

On définit

$$u_m(t) = \sum_{i=1}^{m} \gamma_{im}(t)\, w_i, \tag{2.1}$$

les γ_{im} étant *solutions du système*

$$(2.2)\quad \begin{cases} \dfrac{d^2}{dt^2}(u_m(t),\, w_j) + a(t;\, u_m(t),\, w_j) + (g[u_m](t),\, w_j) \\ \qquad + (G_t(u_m(t),\, w_j) = (f(t),\, w_j) \qquad (1 \leqq j \leqq m), \\ u_m(0) \textit{ donné tel que } \quad u_m(0) \to u_0 \quad \textit{dans } V \cap W \textit{ fort}, \\ u'_m(0) \textit{ donné tel que } \quad u'_m(0) \to u_1 \quad \textit{dans } H \textit{ fort}. \end{cases}$$

Alors

(2.3) *Il existe* $T_m > 0$ *et* u_m *une solution* (*locale*) *de* (2.2), *avec*

$$\gamma_{im}^{(k)} \in L^\infty(0,\, T_m) \qquad (k = 0,\, 1,\, 2;\; 0 \leqq 1 \leqq m).$$

(En fait, les inégalités *a priori* montrent que $T_m = T$.)

2.2. *Estimations* a priori. — En multipliant (2.1) par $\gamma'_{im}(t)$, en intégrant sur (0, s) et en utilisant (1.2) à (1.4), il vient

$$(2.4)\quad \begin{aligned} \psi_m(s) &- \int_0^s a'(\sigma;\, u_m,\, u_m)\, d\sigma + \operatorname{Re}(G_s[u_m](s),\, u_m(s)) \\ &- \int_0^s (G^0[u_m],\, u_m)\, d\sigma - \operatorname{Re}\int_0^s (G_s^1[u_m](\sigma),\, u_m(\sigma))\, d\sigma \\ &= \psi_m(0) + \int_0^s \operatorname{Re}(f,\, u'_m)\, d\sigma, \end{aligned}$$

où

$$(2.5)\quad \psi_m(s) = \frac{1}{2}|u'_m(s)|^2 + a(s;\, u_m(s),\, u_m(s)) + h[\|u_m\|_W].$$

On utilise maintenant (1.5) et

$$(2.6)\quad \begin{cases} \qquad\qquad \forall \varepsilon > 0, \quad \exists C_1(\varepsilon), \quad \textit{avec} \\ \left|\operatorname{Re}\displaystyle\int_0^s (f,\, u'_m)\, d\sigma\right| \leqq \varepsilon \sup_{\sigma \in (0,\, s)} |u'_m(\sigma)|^2 + C_1(\varepsilon)\left(\displaystyle\int_0^s |f(\sigma)|\, d\sigma\right)^2, \end{cases}$$

on obtient

$$(2.7)\quad \begin{cases} \forall \varepsilon > 0, \quad \psi_m(s) \leqq \psi_m(0) + C_2\displaystyle\int_0^s \|u_m(\sigma)\|^2\, d\sigma + \varepsilon \sup_{\sigma \in (0,\, s)} |u'_m(\sigma)|^2 \\ \qquad + \varepsilon \displaystyle\sup_{\sigma \in (0,\, s)} h[\|u_m(\sigma)\|_W] + C_1(\varepsilon)\left(\int_0^s |f(\sigma)|\, d\sigma\right)^2 \\ \qquad + C(\varepsilon,\, T)\displaystyle\int_0^s h[\|u_m(\sigma)\|_W]\, d\sigma \\ \qquad\qquad (C_i, \text{ Ctes diverses}), \end{cases}$$

d'où, en procédant comme déjà fait plusieurs fois et en utilisant Gronwall,

$$(2.8)\quad \forall t \in (0,\, T), \quad \psi_m(t) < K(T,\, u_0,\, u,\, f) = \text{Cte}.$$

Ainsi :

LEMME 2.1.

(i) u_m *reste dans un borné de* $L^\infty(V \cap W)$;

(ii) u'_m *reste dans un borné de* $L^\infty(H)$.

2.3. *Passage à la limite.* — 1° Du lemme 2.1, on déduit le

LEMME 2.2. — *De* $\{u_m\}$ *il est possible d'extraire une sous-suite (notée encore* $\{u_m\}$*) telle que :*

(i) $u_m \to u$ *dans* $L^\infty(V \cap W)$ *faible;*

(ii) $u'_m \to u'$ *dans* $L^\infty(H)$ *faible;*

(iii) $u_m \to u$ *p. p. dans* H *fort.*

Démonstration du lemme 2.2. — (i) et (ii) sont immédiats.

(iii) résulte de ce que *l'injection* $V \mapsto W$ étant compacte il est possible d'extraire de $\{u_m\}$ une sous-suite $\{u_\nu\}$ qui converge dans $L^2(H)$ fort, donc quitte à effectuer une nouvelle extraction on obtient (iii) et le lemme.

2° Par passage à la limite, en utilisant (1.6), on obtient

$$
(2.9)\quad \left\{\begin{aligned}
&u \textit{ vérifie :}\\
&\qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}]0, T[, \quad \psi = \varphi \otimes v, \qquad v \in v \cap W \textit{ fixé},\\
&-\int_0^T (u'(t), \psi'(t))\, dt + \int_0^T \{ a(t; u(t), \psi(t)) + (g[u](t), \psi(t)) \}\, dt\\
&+\int_0^T (G_t[u](t), \psi(t))\, dt = \int_0^T (f(t), \psi(t))\, dt,
\end{aligned}\right.
$$

d'où l'existence de u vérifiant (i), (ii) du théorème 2.II.

Pour vérifier (iii) notons que si

(2.10) φ *est indéfiniment dérivable nulle dans un voisinage de* T,

on a

$$
(2.11)\quad \forall v \in V \cap W, \quad \int_0^T (u(t), v)\, \varphi''(t)\, dt + K(u, \varphi \otimes v)
$$
$$
= \int_0^T (f(t), v)\, \varphi(t)\, dt - (u(0), v)\, \varphi'(0) + (u'(0), v)\, \varphi(0),
$$

où

$$
(2.12)\quad K(u_m, \varphi \otimes v) = \int_0^T \{ a(t; u_m, \overline{\varphi} \otimes v) + (g[u_m], \overline{\varphi} \otimes v) + (G_t(u_m), \overline{\varphi} \otimes v) \}\, dt;
$$

d'autre part

$$
(2.13)\quad \int_0^T (u_m(t), v)\, \varphi''(t)\, dt + K(u_m, \varphi \otimes v)
$$
$$
= \int_0^T (f, \varphi)\, dt + (u_m(0), v)\, \varphi'(0) + (u'_m(0), v)\, \varphi(0),
$$

d'où, par passage à la limite,

(2.14) $$u(0) = u_0, \qquad u'(0) = u_1.$$

Le théorème 2.II est démontré.

3. Équation du type « Levin-Nohel ». — On suppose ic

(3.1) $$\begin{cases} g \text{ monotone :} \quad \operatorname{Re}(g(u) - g(v), u - v) \geq 0, \quad \forall u, v \in W, \\ g(0) = 0 \end{cases}$$

et l'on se donne une fonction scalaire $\gamma \in \mathcal{C}^{(2)}$, avec

(3.2) $$(-1)^k \gamma^{(k)}(t) > 0 \qquad (k = 0, 1, 2).$$

Ensuite on prend

(3.3) $$\mathcal{F} = L^\infty(W');$$

(3.4) $$G_t(u)(t) = \int_0^t \gamma'(t - \sigma) g[u(\sigma)]\, d\sigma.$$

On a

(3.5) $$\forall u \in F, \quad G_t u \in L^\infty(W')$$

et l'on constate que

(3.6) $$\begin{cases} (1.4) \textit{ est vérifiée, avec} \\ G^0 = -\gamma'(0) g, \qquad G^1_\sigma(x)(\sigma) = \int_0^\sigma \gamma''(\sigma - s) g[x(s)]\, ds; \end{cases}$$

de plus, (3.1) entraîne

(3.7) $$\operatorname{Re}(G^0 u, u) \geq 0.$$

Si maintenant,

(3.8) *g est telle que* [(1.5), (2)]; [(1.6), (i)] *ont lieu,*

(3.9) *Pour* u_0, v_1, f *donnés avec* $u_0 \in V \cap W$, $u_1 \in H$, $f \in L^1(H)$, *il existe* u *vérifiant les conclusions du théorème* 2.II, *avec*

$$u''(t) + A(t) u(t) + \gamma(0) g[u](t) + \int_0^t \gamma'(t - \sigma) g[u](\sigma)\, d\sigma = f(t) \quad \text{p. p. sur } (0, T)$$

p. p. dans $(V \cap W)'$ (*équation du type « Levin-Nohel » généralisée*).

4. Exemple. — Soit Ω un *ouvert borné* de R^n *suffisamment régulier.*

On prend

$$(4.1)\qquad \begin{cases} V = H_0^1(\Omega), \qquad H = L^2(\Omega), \qquad W = L^2(\Omega) \cap L^p(\Omega), \\ p = \rho + 1 \quad (\rho > 0); \end{cases}$$

$$(4.2)\qquad \begin{cases} a(t; u, v) = a(u, v) = \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x_i} dx, \\ A(t) = A = -\Delta; \end{cases}$$

$$(4.3)\qquad \begin{cases} g[u](t, x) = |u(t, x)|^{\rho-1} u(t, x), \\ h(\sigma) = \frac{1}{\rho+1} \sigma^{\rho+1}; \end{cases}$$

(4.4) γ, *fonction scalaire vérifiant* (3.2),

$$F = L^p(W).$$

Pour pouvoir appliquer le théorème 2.II, il faut vérifier [(1.5), (2)] et [(1.6), (i)].

On a (les C_i désignant des constantes diverses)

$$(4.5)\qquad \begin{aligned} |(G_t(u)(t), u(t))| &\leq C \int_\Omega \int_0^t |u(\sigma, x)|^\rho |u(t, x)| \, d\sigma \, dx \\ &\leq C \left(\int_\Omega \int_0^t |u(\sigma, x)|^p \, d\sigma \, dx \right)^{\frac{1}{p'}} \left(\int_\Omega |u(t, x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \frac{\varepsilon_1}{2} \int_\Omega |u(t, x)|^p \, dx + C_1(\varepsilon_1, T) \int_0^t \left[\int_\Omega |u(\sigma, x)|^p \, dx \right] d\sigma, \end{aligned}$$

d'où l'on déduit

$$(4.6)\qquad \left| \int_0^t (G_\sigma(u)(\sigma), u(\sigma)) \, d\sigma \right| \leq \frac{\varepsilon_1}{2} \sup_{\sigma \in (0, t)} \| u(\sigma) \|_W^p + C_2(\varepsilon_1, T) \int_0^t \| u(\sigma) \|_W^p \, d\sigma,$$

d'où (1.5), (2), avec $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{p}$.

Maintenant si, $u_n \to u$ dans $L^2(\Omega)$ p. p. sur (o, T), alors $u_n \to u$ p. p. dans Ω_T et $g[u_m] \to g(u)$ dans les mêmes conditions, ce qui entraîne (Lebesgue) [(1.6), (i)].

Traduisons (formellement) le théorème 2.II :

(4.7) *Il existe* u, *avec*

(i) $u \in L^\infty[H_0^1(\Omega) \cap L^p(\Omega)]$, $u' \in L^\infty[L^2(\Omega)]$;

(ii) u *vérifie p. p. dans* Ω_T

$$u'' - \Delta u + \gamma(0) |u|^{\rho-1} u + \int_0^t \gamma'(t-\sigma) |u|^{\rho-1} u \, d\sigma = f,$$

f donné dans $L^1(L^2(\Omega))$;

(iii) $u(0) = u_0$ *donné dans* $H_0^1(\Omega) \cap L^{\rho+1}(\Omega)$,
$u'(0) = u_1$ *donné dans* $L^2(\Omega)$;

(iv) $u|_\Gamma = 0$, $t \in (0, T)$ (*problème de Dirichlet*).

On en déduira comme au chapitre I, § 5, le résultat suivant :

THÉORÈME 2.III. — *Soit* $r \in \mathrm{R}^+$, $r \geqq \mathrm{T}$.

Pour u_0, f, ξ_0, ξ_1 *donnés avec*

$$(4.8)\qquad \begin{cases} \tilde{u}_0 \in \mathrm{L}^p(-r_0, 0; \mathrm{L}^2(\Omega) \cap \mathrm{L}^p(\Omega)), \qquad f = \mathrm{L}^1(\mathrm{L}^2(\Omega)), \\ \xi_0 \in \mathrm{L}^p(\Omega) \cap \mathrm{H}_0^1(\Omega), \qquad \xi_1 \in \mathrm{L}^2(\Omega). \end{cases}$$

Il existe u vérifiant :

$$(4.9)\qquad \begin{cases} \text{(i)}\ \ u \in \mathrm{L}^\infty[\mathrm{H}_0^1(\Omega) \cap \mathrm{L}^p(\Omega)], \quad u' \in \mathrm{L}^\infty(\mathrm{L}^2(\Omega)); \\ \text{(ii)}\ \ u''(t) - \Delta u(t) + \gamma(0) g[u](t) + \displaystyle\int_{-r}^{0} \gamma'(\theta) g[u](t+\theta)\, d\theta = f(t) \quad \text{p. p.}; \end{cases}$$

$$(4.10)\qquad \begin{cases} u(0) = \xi_0, \\ u'(0) = \xi_1; \end{cases}$$

$$(4.11)\qquad u(t) = \tilde{u}_0(t) \quad p.p.\ t \in]-r, 0[;$$

$$(4.12)\qquad u|_\Gamma = 0, \qquad t \in (0, \mathrm{T}).$$

5. UNICITÉ. — Les hypothèses et les notations étant celles de l'alinéa précédent, *le problème de l'unicité peut être résolu dans un cas particulier, en supposant*

$$(5.1)\qquad \gamma(0) = 0.$$

Notons tout d'abord que

(5.2) si u_1 et u_2 *sont deux solutions distinctes,*

$$(5.3)\qquad \begin{cases} w = u_1 - u_2 \text{ vérifie :} \\ \qquad w''(t) + \mathrm{A}\, w(t) + \displaystyle\int_0^t \gamma'(t-\sigma)\, (g[u_1] - g[u_2])\, d\sigma = 0, \\ \qquad w(0) = 0, \end{cases}$$

alors, par le procédé de Torelli [28], on peut montrer que l'on a

$$(5.4)\qquad \begin{aligned} &\frac{1}{2}|w'(t)|^2 + a(w(t), w(t)) - \gamma'(0)\int_0^t \mathrm{Re}\,(g(u_1) - g(u_2), w(s))\, ds \\ &\quad = -\int_0^t \gamma'(t-\sigma)\, \mathrm{Re}\,(g[u_1](\sigma) - g[u_2](\sigma), w(t))\, d\sigma \\ &\qquad - \int_0^t \int_0^s \gamma''(t-s)\, \mathrm{Re}\,(g(u_1)(\sigma) - g u_2(\sigma), w(s))\, d\sigma\, ds. \end{aligned}$$

Or

$$u_i \in \mathrm{L}^\infty(\mathrm{L}^p(\Omega)), \qquad w(\sigma) \in \mathrm{L}^{(p)}(\Omega), \qquad \sigma \in (0, \mathrm{T}),$$

donc comme à la page 225, on a C_i = Ctes diverses)

$$(5.5)\quad \left\{\begin{aligned} &\left|\int_0^t -\gamma'(t-\sigma)\,\mathrm{Re}\,(g[u_1](\sigma)-g[u_2](\sigma),\ w(t))\,ds\right| \\ &\quad \leqq C\int_0^t \| w(\sigma)\|_p\, d\sigma \| w(t)\|_p \leqq \varepsilon \| w(t)\|_p^2 + C_1(\varepsilon)\, t\int_0^t \| w(\sigma)\|_p^2\, d\sigma, \\ &\qquad \|\ \|_p \ \ \text{norme dans } L^p(\Omega); \end{aligned}\right.$$

$$(5.6)\quad \left|\int_0^t\int_0^s \gamma''(t-s)\,\mathrm{Re}(g[u_1](\sigma)-g[u_2](\sigma),\ w(s))\,d\sigma\, ds\right| \leqq C_2(T)\, t\int_0^t \| w(s)\|_p^2\, ds$$

Alors, compte tenu de ce que

$$(5.7)\qquad -\gamma'(0)\int_0^t \mathrm{Re}\,(g[u_1]-g[u_2],\ w)\, ds \geqq 0$$

et *si l'inégalité de Sobolev suivante a lieu :*

$$(5.8)\qquad H_1(\Omega)\subset L^p(\Omega),$$

il est possible de choisir $\varepsilon>0$ de manière que l'on ait

$$(5.9)\qquad \frac{1}{2}| w'(t)|^2 + a(w(t),\ w(t)) \leqq C_3(T;\ \varepsilon)\, t\int_0^t a(w(\sigma),\ w(\sigma))\, d\sigma,$$

d'où *l'existence d'un intervalle* $(0, T_1)$ sur lequel $w(t)=0$. Si $T_1 \geqq T$, *l'unicité est démontrée dans ce cas.* Si $T_1 < T$, on recommence sur $(T_1, 2T_1)$ et ainsi de suite.

En résumé :

(5.10) *Si* $\gamma(0)=0$ *et* (5.8) *a lieu, il y a unicité pour la solution de* (4.7) *et du théorème* 2.III.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] M. Artola, *Équations paraboliques à retardement* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 264, série A, 1967, p. 668-671).

[2] M. Artola, *Régularité des solutions des équations d'évolution* (*Séminaire d'Analyse fonctionnelle*, Département de Mathématiques, Bordeaux, octobre 1965, p. 16-24).

[3] J.-P. Aubin, *Un théorème de compacité* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 256, 1963, p. 5042-5044).

[4] C. Baïocchi, *Sulle equazioni differenziali astratte lineari del primo ed del secundo ordine negli spazi di Hilbert* (*Ann. Mat. pura appl.*, série 4, t. 76, 1967, p. 233-304).

[5] R. Bellmann et R. L. Cooke, *Differential difference equations* (*Math. Sc. Eng.*, t. 6, 1963, New-York).

[6] J. Dixmier, *Les algèbres d'opérateurs dans l'espace hilbertien*, Gauthier-Villars, Paris, 1957.

[7] N. Dunford et J. Schwartz, *Linear operators*, Part I. et II (*Pure Appl. Math.*, (7), 1958-1963).

[8] G. DUVAUT, *Théorèmes d'existence et d'unicité pour un problème de viscoélasticité linéaire relatif à un corps homogène et non isotrope* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 262, série A, 1966, p. 458-460).

[9] A. HALANAY, *Differential-difference equations. Stability oscillations. Time lag*, Academic Press, New-York, 1966.

[10] J. K. HALE, *Sufficient conditions for stability and instability of autonomous functional. Differential equations* (*J. Differential equations*, vol. 1, n° 4, 1965, p. 452-482).

[11] I. HERRERA, *Riemann representation Method in Viscoelasticity* (*Archiv. Rat. Mech. Anal.*, (22), 1966, p. 270-291).

[12] LATTES et J.-L. LIONS, *Méthode de quasi-réversibilité et applications* (Travaux et Recherche mathématiques, XV, Dunod, Paris, 1967).

[13] L. J. LEVIN et J. A. NOHEL, *On a Non linear Delay Equation* (*J. Math. An. and App.*, vol. 8, 1964, p. 31-44).

[14] J.-L. LIONS, *Équations différentielles opérationnelles*, Die Grund. der Math. Wiss., Band 111, Springer, Berlin, 1961.

[15] J.-L. LIONS, *Équations différentielles opérationnelles dans les espaces de Hilbert*, Cours du C. I. M. E., Varenna, 1963.

[16] J.-L. LIONS, *Quelques résultats d'existence pour des équations aux dérivées partielles non linéaires* (*Bull. Soc. Math. Fr.*, t. 87, 1959, p. 245-273).

[17] J.-L. LIONS, *Quelques remarques sur les équations différentielles opérationnelles du 1er ordre* (*Rend. Sem. Mat. Padova*, (33), 1963, p. 213-225).

[18] J.-L. LIONS, *Boundary value problems*, Technical reports 1, 2, 3, University of Kansas, Lawrence, juin 1957.

[19] J.-L. LIONS et J. PEETRE, *Sur une classe d'espaces d'interpolation*, Publ. Math. I. H. E. S., 19, 1964, p. 5-68.

[20] J.-L. LIONS et W. A. STRAUSS, *Some non linear evolution equations* (*Bull. Soc. Math. Fr.*, t. 93, 1965, p. 43-96).

[21] A. MYSKIS, *Rapport sur les systèmes à retards* (*A. M. S. Translations*, vol. 4, 1962, p. 207-267).

[22] A. MYSKIS, *Rapport sur les systèmes à retards* (en russe) (*Uspeki*, t. 22, (2.134), 1967, p. 21-57).

[23] L. SCHWARTZ, *Théorie des distributions à valeurs vectorielles* (*Ann. Inst. Fourier*, t. 7, 1957, p. 1-139; t. 8, 1958, p. 1-209).

[24] I. E. SEGAL, *Non linear semi-groups* (*Ann. of Math.*, vol. 78, 1963, p. 339-364).

[25] I. E. SEGAL, *The Global Cauchy problem for a relativistic scalar field with power interaction* (*Bull. Soc. Math. Fr.*, t. 91, 1963, p. 129-135).

[26] S. L. SOBOLEV, *Certaines applications de l'Analyse fonctionnelle à la Physique mathématique*, Leningrad, 1950.

[27] R. TEMAM, *Sur la stabilité et la convergence de la méthode des pas fractionnaires* (*Thèse*, Faculté des Sciences de Paris, 1967).

[28] G. TORELLI, *Un complemento ad un toerema di J.-L. Lions sulle equazioni differenziali astratte del secondo ordine* (*Rend. Sem. Mat. Univ. Padova*, t. 34, 1964, p. 224-241).

[29] V. VOLTERRA, *Sur la théorie mathématique des phénomènes héréditaires* (*J. Math. pures Appl.*, t. 7, 1928, p. 249-298).

(Manuscrit reçu le 10 avril 1968.)