ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

A. NOBILE
O. E. VILLAMAYOR

Sur la *K*-théorie algébrique

Annales scientifiques de l'É.N.S. 4e série, tome 1, nº 4 (1968), p. 581-616
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1968_4_1_4_581_0>

Ann. scient. Éc. Norm. Sup.,
4e série, t. 1, 1968, p. 581 à 616.

SUR LA K-THÉORIE ALGÉBRIQUE

PAR A. NOBILE ET O. E. VILLAMAYOR.

TABLE DES MATIÈRES.

En K-théorie topologique on définit les foncteurs K^{-i} en posant $K^{-i}(X) = K^0(S^i(X))$, où $S^i(X)$ est la $i^{\text{ième}}$ suspension de X. En K-théorie algébrique, l'espace X peut être remplacé par le spectre premier d'un anneau A et de dictionnaire usuel montre que K^0 est le groupe de Grothendieck de A-modules projectifs.

Mais, il n'y a maintenant rien qui puisse être défini et qui ressemble à la suspension. Évidemment, même si X est une variété affine, $S(X)$ n'est pas une variété algébrique, donc il n'y a pas d'analogue algébrique de la suspension.

Toutefois, si au lieu de la suspension on considère l'espace quotient Y de $X \times \mathbf{R}$ ($\mathbf{R}$ étant la droite réelle) obtenue en réduisant à un point la section $X \times \{1\}$ et la section $X \times \{0\}$, alors Y est contractible à la suspension et $K^0(Y)$ est canoniquement isomorphe à $K^0(S(X))$.

L'image réciproque d'un espace fibré sur Y est un espace fibré sur $X \times \mathbf{R}$, trivial dans un voisinage de $X \times \{1\}$ et trivial dans un voisinage de $X \times \{0\}$. Réciproquement, un tel espace fibré définit un espace fibré sur Y.

D'autre part, la donnée d'espaces fibrés isomorphes sur Y n'est pas une condition suffisante pour qu'on ait des espaces fibrés isomorphes sur $X \times \mathbf{R}$, et les trivialisations sur $X \times \{1\}$ et $X \times \{0\}$ doivent intervenir.

On peut remplacer alors les fibrés sur Y par les triples $\{P, \alpha, \beta\}$ formés d'un fibré vectoriel P sur $X \times \mathbf{R}$ et de deux trivialisations

$$\alpha : \ P \mid X \times \{0\} \to X \times F, \qquad \beta : \ P \mid X \times \{1\} \to X \times F$$

(F fibré) et maintenant on a des objets qu'on peut traduire en des termes algébriques. Ceci est, essentiellement, l'idée sous-jacente à ce travail.

La théorie peut s'étendre trivialement aux pré-schémas en utilisant le dictionnaire usuel.

Une suite exacte analogue à celle d'espace avec point base est développée dans 4.5.

1. Les foncteurs T_i.

1.1. Notations. — On désignera par $\mathbf{N}$ l'ensemble des nombres entiers ≥ 0, $\mathcal{R}_c$ la catégorie des anneaux commutatifs à élément unité, les morphismes étant les morphismes unitaires, $\mathcal{A}_b$ la catégorie des groupes abéliens, $\mathcal{G}$ la catégorie des groupes et *Cat* la catégorie dont les objets sont les catégories et les morphismes sont les foncteurs covariants.

On notera $GL(n, A)$ le groupe linéaire d'ordre n à coefficients dans A, i. e. le groupe formé des matrices inversibles $n \times n$ à coefficients dans A, muni du produit ordinaire de matrices.

Si $B = A[X_1, \ldots, X_m]$ est l'anneau des polynômes en m indéterminées à coefficients dans A, et $C = A[Y_1, \ldots, Y_{m-1}]$, on désignera par $\mu_t^e : B \to C$ $(e = 0, 1)$ l'application définie par

$$\mu_t^e(X_i) = Y_i \quad (1 \leq i < t), \qquad \mu_t^e(X_t) = e, \qquad \mu_t^e(X_j) = Y_{j-1} \qquad (t < j \leq m).$$

Soit $D(n, m, A)$ le sous-groupe de $GL(n, A[X_1, \ldots, X_m])$ formé des matrices M telles que $\mu_t^0(\mathrm{M}) = \mu_t^1(\mathrm{M})$ $(1 \leq t \leq m)$, i. e. des matrices $(a_{ij}(\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_m))$ telles que

$$(a_{ij}(\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_{t-1}, 0, \mathrm{X}_{t+1}, \ldots, \mathrm{X}_m)) = (a_{ij}(\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_{t-1}, 1, \mathrm{X}_{t+1}, \ldots, \mathrm{X}_m))$$
$$(t = 1, \ldots, m).$$

Il est trivial de montrer que les applications $\mathrm{A} \mapsto \mathrm{GL}(n, \mathrm{A})$ (n entier fixé) et $\mathrm{A} \mapsto \mathrm{D}(n, m, \mathrm{A})$ (n et m étant des entiers fixés) sont des foncteurs de $\mathcal{R}_c$ vers $\mathcal{G}$.

1.2. Les foncteurs T_i. — Le but de ce paragraphe est celui de bâtir, par récurrence, une suite de foncteurs $\mathrm{T}_i : \mathcal{R}_c \to \mathit{Cat}$ $(i \in \mathbf{N})$ vérifiant les conditions suivantes :

(a) Pour tout $i \in \mathbf{N}$, il existe un objet zéro, noté $0_i^{\mathrm{A}} \in \mathrm{Ob}\,\mathrm{T}_i(\mathrm{A})$.

(b) Il existe des sommes directes et parmi les représentations d'une telle somme, il en existe une qui est canonique et $l \oplus 0_i^{\mathrm{A}} = l$, pour tout $l \in \mathrm{Ob}\,\mathrm{T}_i(\mathrm{A})$.

(c) Pour tout $i \in \mathbf{N}$, il existe une application additive

$$\rho_i : \quad \mathrm{Ob}\,\mathrm{T}_i(\mathrm{A}) \to \mathbf{N}.$$

Plus précisément, $\rho_i(l \oplus l') = \rho_i(l) + \rho_i(l')$, quels que soient l, $l' \in \mathrm{Ob}\,\mathrm{T}_i(\mathrm{A})$ et si $\varphi : \mathrm{A} \to \mathrm{B}$ est un morphisme de $\mathcal{R}_c$ et $\tilde{\varphi}_i : \mathrm{T}_i(\mathrm{A}) \to \mathrm{T}_i(\mathrm{B})$ le foncteur correspondant, pour tout $l \in \mathrm{Ob}\,\mathrm{T}_i(\mathrm{A})$, on a $\rho_i(l) = \rho_i(\tilde{\varphi}_i(l))$, i. e. le diagramme

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] \mathrm{T}_i(\mathrm{A}) \arrow[rr, "\tilde{\varphi}_i"] \arrow[dr, "\rho_i"'] & & \mathrm{T}_i(\mathrm{B}) \arrow[dl, "\rho_i"] \\ & \mathbf{N} & \end{tikzcd}$$

est commutatif. La valeur $\rho_i(l)$ est appelée le *rang* de l.

(d) Pour tout entier $n \in \mathbf{N}$, il existe un objet $t_{i,\mathrm{A}}^n \in \mathrm{Ob}\,\mathrm{T}_i(\mathrm{A})$, appelé l'*objet trivial de rang n*, satisfaisant aux conditions suivantes :

(d_1) Pour tout $i \in \mathbf{N}$, $\rho_i(t_{i,\mathrm{A}}^n) = n$;

(d_2) Si $\varphi : \mathrm{A} \to \mathrm{B}$ est un morphisme de $\mathcal{R}_c$ et $\tilde{\varphi}_i : \mathrm{T}_i(\mathrm{A}) \to \mathrm{T}_i(\mathrm{B})$ est le foncteur $\mathrm{T}_i(\varphi)$, alors

$$\tilde{\varphi}_i(t_{i,\mathrm{A}}^n) = t_{i,\mathrm{B}}^n;$$

(d_3) Pour tout $i \in \mathbf{N}$, $t_{i,\mathrm{A}}^n \oplus t_{i,\mathrm{A}}^m = t_{i,\mathrm{A}}^{n+m}$;

(d_4) Il existe un anti-isomorphisme canonique

$$\Sigma : \quad \mathrm{Aut}(t_{i,\mathrm{A}}^n) \to \mathrm{D}(n, i, \mathrm{A});$$

(d_5) Si $\alpha \in \mathrm{Aut}(t_{i,\mathrm{A}}^n)$, $\beta \in \mathrm{Aut}(t_{i,\mathrm{A}}^m)$,

$$\alpha_1 = \Sigma(\alpha) \qquad \text{et} \qquad \beta_1 = \Sigma(\beta),$$

alors $\Sigma(\alpha \oplus \beta)$ est la matrice

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 0 & \beta_1 \end{pmatrix},$$

où $\alpha \oplus \beta$ est défini comme étant l'automorphisme composé

$$t_{i,A}^{n+m} \to t_{i,A}^{n} \oplus t_{i,A}^{m} \xrightarrow{\alpha+\beta} t_{i,A}^{n} \oplus t_{i,A}^{m} \to t_{i,A}^{n+m}.$$

(*e*) Si $\varphi : A \to B$ est un morphisme de $\mathcal{R}_c$ et $\tilde{\varphi}_i = T_i(\varphi) : T_i(A) \to T_i(B)$, quels que soient $l, l' \in \operatorname{Ob} T_i(A)$, on a

$$\tilde{\varphi}_i(l \oplus l') = \tilde{\varphi}_i(l) \oplus \tilde{\varphi}_i(l') \qquad \text{et} \qquad \tilde{\varphi}_i(0_i^A) = 0_i^B.$$

1.3. Construction des foncteurs T_i. — *Le foncteur* T_0. — Le foncteur $T_0 : \mathcal{R}_c \to \mathit{Cat}$ donne, pour chaque anneau commutatif A à élément unité, une catégorie $T_0(A)$. Les objets de $T_0(A)$ sont les A-modules projectifs de type fini et de rang constant, les morphismes étant les applications A-linéaires.

Si $C \to B \to A$ sont des morphismes de $\mathcal{R}_c$, on identifie, moyennant des isomorphismes canoniques,

$$(P \otimes_C B) \otimes_B A \xrightarrow{\sim} P \otimes_C A, \qquad A^n \oplus A^m \xrightarrow{\sim} A^{n+m}$$

et

$$(P \oplus P') \otimes_B A \xrightarrow{\sim} P \otimes_B A \oplus P' \otimes_B A.$$

Si $\varphi : A \to B$ est un morphisme de $\mathcal{R}_c$, alors $T_0(\varphi) : T_0(A) \to T_0(B)$ est le foncteur $\otimes_A B$. Donc, $T_0 : \mathcal{R}_c \to \mathit{Cat}$ est un foncteur covariant.

Pour démontrer les propriétés (*a*) à (*e*), on procède comme suit : (*a*) le module zéro; (*b*) somme directe de modules dont un représentant canonique est le module des paires; (*c*) on définit $\rho_0(P) = $ rang de P; (*d*) on prend $t_{0,A}^n = A^n$; (*e*) triviale.

Les foncteurs T_r. — Supposons qu'on ait déjà défini les foncteurs T_{r-1} satisfaisant aux propriétés (*a*) à (*e*).

Si $A[X_r]$ est l'anneau des polynômes en l'indéterminée X_r à coefficient dans A, on considère les applications composées

$$\pi_0 : \quad A[X_r] \to A[X_r]/(X_r) \to A,$$
$$\pi_1 : \quad A[X_r] \to A[X_r]/(X_r - 1) \to A,$$

où la première application est la canonique et la seconde est l'unique application telle que l'application composée

$$A \xrightarrow{\iota} A[X_r] \xrightarrow{\pi_i} A \qquad (i = 0, 1)$$

soit l'identité, ι étant l'injection canonique.

Soit $\tilde{\pi}_i = T_{r-1}(\pi_i)$ $(i = 0, 1)$. On va définir la catégorie $T_r(A)$ comme suit. Les objets de $T_r(A)$ sont les triples (l, α_0, α_1), où $l \in \operatorname{Ob} T_{r-1}(A[X_r])$

et les $\alpha_i : \tilde{\pi}_i(l) \to t^n_{r-1,A}$ $(i = 0, 1)$ des isomorphismes dans $T_{r-1}(A)$. Un morphisme dans $T_r(A)$, $\theta : (l, \alpha_0, \alpha_1) \to (l', \alpha'_0, \alpha'_1)$ est une paire de morphismes $\theta = (\varphi, a)$, où $\varphi : l \to l'$ est un morphisme de $T_{r-1}(A[X_r])$ et $a : t^n_{r-1,A} \to t^m_{r-1,A}$ est un morphisme de $T_{r-1}(A)$ de telle sorte que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{tikzcd} \tilde{\pi}_i(l) \arrow[r, "\tilde{\pi}_i(\varphi)"] \arrow[d, "\alpha_i"'] & \tilde{\pi}_i(l') \arrow[d, "\alpha'_i"] \\ t^n_{r-1,A} \arrow[r, "a"] & t^m_{r-1,A} \end{tikzcd} \qquad (i = 0, 1).$$

Il s'ensuit trivialement que $T_r(A)$ est une catégorie.

Si $\varphi : A \to B$ est un morphisme de $\mathcal{R}_c$, on désignera par $\varphi(X) : A[X] \to B[X]$ l'homomorphisme induit par φ et par $T_r(\varphi) : T_r(A) \to T_r(B)$ le foncteur définit par

$$T_r(\varphi)\,(l, \alpha_0, \alpha_1) = (T_{r-1}(\varphi(X_r))\,(l),\ T_{r-1}(\varphi)\,(\alpha_0),\ T_{r-1}(\varphi)\,(\alpha_1))$$

pour tout objet $(l, \alpha_0, \alpha_1) \in \mathrm{Ob}\, T_r(A)$. De plus, si (ψ, a) est un morphisme de $T_r(A)$, on pose

$$T_r(\varphi)\,(\psi, a) = (T_{r-1}(\varphi(X_r))\,(\psi),\ T_{r-1}(\varphi)\,(a)).$$

Donc, $T_r : \mathcal{R}_c \to \mathit{Cat}$ est un foncteur.

Démontrons maintenant que le foncteur T_r satisfait aux propriétés (*a*) à (*e*).

(*a*) Si $o^{A[X_r]}_{r-1}$ est l'objet zéro de $T_{r-1}(A[X_r])$, alors

$$T_{r-1}(\pi_i)\,(o^{A[X_r]}_{r-1}) = o^A_{r-1} \in \mathrm{Ob}\, T_{r-1}(A) \qquad (i = 0, 1),$$

une fois que T_{r-1} satisfait (*e*). Donc, α_0 et α_1 sont des applications nulles et l'on peut choisir l'objet zéro de $T_r(A)$ comme étant $o^A_r = (o^{A[X_{r-1}]}_{r-1}, 0, 0)$.

(*b*) On pose

$$(l, \alpha_0, \alpha_1) \oplus (l', \alpha'_0, \alpha'_1) = (l \oplus l', \alpha_0 \oplus \alpha'_0, \alpha_1 \oplus \alpha'_1).$$

(*c*) On définit

$$\rho_r(l, \alpha_0, \alpha_1) = \rho_{r-1}(l).$$

(*d*) Soit

$$t^n_{r,A} = (t^n_{r-1,A[X_r]}, \iota_0, \iota_1),$$

où $\iota_i : \tilde{\pi}_i(t^n_{r-1,A[X_r]}) \to t^n_{r-1,A}$ $(i = 0, 1)$ est l'application identique. Les propriétés (d_1), (d_2) et (d_3) découlent immédiatement. Pour (d_4), on considère un automorphisme (ψ, a) de $(t^n_{r-1,A[X_r]}, \iota_0, \iota_1)$, i. e. une paire (ψ, a) d'automorphismes $\psi \in \mathrm{Aut}(t^n_{r-1,A[X_r]})$ et $a \in \mathrm{Aut}(t^n_{r-1,A})$. D'après l'hypothèse de récurrence, ψ fournit une matrice $M \in D(n, r-1, A[X_r])$. Puisque ψ et a nous donnent le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} t^n_{r-1,A} & \xrightarrow{\tilde{\pi}_i(\psi)} & t^n_{r-1,A} \\ \downarrow{\scriptstyle \text{id.}} & & \downarrow{\scriptstyle \text{id.}} \\ t^n_{r-1,A} & \xrightarrow{a} & t^n_{r-1,A} \end{array}$$

il s'ensuit que $\tilde{\pi}_0(\psi) = \tilde{\pi}_1(\psi)$, i. e.

$$\tilde{\pi}_0(M) = \tilde{\pi}_1(M), \qquad \text{donc} \quad M \in D(n, r, A).$$

Réciproquement, toute matrice $M \in D(n, r, A)$ fournit un tel automorphisme. L'isomorphisme de groupes $\operatorname{Aut}(t^n_{r,A}) \to D(n, r, A)$ suit de la commutativité du diagramme

$$(1) \qquad \begin{array}{ccc} \operatorname{Aut}(t^n_{r,A}) & \longrightarrow & D(n, r, A) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \operatorname{Aut}(t^n_{r-1,A[X_r]}) & \longrightarrow & D(n, r-1, A[X_r]) \end{array}$$

où les flèches verticales sont les inclusions naturelles et la flèche horizontale d'en bas est un isomorphisme, d'après l'hypothèse de récurrence.

La propriété (d_5) suit trivialement de l'hypothèse de récurrence et de la commutativité du diagramme ci-dessus. De même, pour (e).

LEMME 1.1. — *Si $l, l' \in \operatorname{Ob} T_i(A)$, il existe un isomorphisme canonique $\gamma : l \oplus l' \to l' \oplus l$.*

La démonstration se fait par récurrence sur i. Pour $i = 0$, $\gamma : l \oplus l' \to l' \oplus l$ est l'isomorphisme canonique de A-modules $\gamma(x, x') = (x', x)$. Supposons le lemme vrai pour $i = r-1$. Si (l, α_0, α_1) et $(l', \alpha'_0, \alpha'_1)$ sont deux objets de $T_r(A)$, on a

$$(l, \alpha_0, \alpha_1) \oplus (l', \alpha'_0, \alpha'_1) = (l \oplus l', \alpha_0 \oplus \alpha'_0, \alpha_1 \oplus \alpha'_1)$$

et

$$(l', \alpha'_0, \alpha'_1) \oplus (l, \alpha_0, \alpha_1) = (l' \oplus l, \alpha'_0 \oplus \alpha_0, \alpha'_1 \oplus \alpha_1).$$

Si, maintenant, $\varphi : l \oplus l' \to l' \oplus l$ est l'isomorphisme canonique dans $T_{r-1}(A[X_r])$ et

$$a : \quad t^n_{r-1,A} \oplus t^m_{r-1,A} \to t^m_{r-1,A} \oplus t^n_{r-1,A}$$

est celui dans $T_{r-1}(A)$, alors (φ, a) est l'isomorphisme cherché dans $T_r(A)$.

LEMME 1.2. — *Si $\varphi_1 : l_1 \to l'_1$ et $\varphi_2 : l_2 \to l'_2$ sont des isomorphismes dans $T_i(A)$, alors $\varphi_1 \oplus \varphi_2 : l_1 \oplus l_2 \to l'_1 \oplus l'_2$ est un isomorphisme dans $T_i(A)$.*

Démonstration triviale.

LEMME 1.3. — *La matrice de l'isomorphisme* $\lambda : t^n_{i,A} \oplus t^n_{i,A} \to t^n_{i,A} \oplus t^n_{i,A}$ *défini par* $(x, y) = (y, x)$ *est* $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

En effet, à partir du diagramme (1) on obtient le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Aut}(t^{2n}_{r,A}) & \longrightarrow & D(2n, r, A) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Aut}(t^{2n}_{0,A[X_1,\ldots,X_r]}) & \longrightarrow & GL(2n, A[X_1, \ldots, X_r]) \end{array}$$

où les flèches verticales sont des inclusions et

$$t^{2n}_{0,A[X_1,\ldots,X_r]} = (A[X_1, \ldots, X_r])^{2n}.$$

Le lemme est alors un résultat trivial d'algèbre linéaire.

LEMME 1.4. — *Si* $(t^n_{r-1,A[X_r]}, \alpha, \beta) \in \mathrm{Ob}\, T_r(A)$, *il existe des isomorphismes*

$$(t^n_{r-1,A[X_r]}, \alpha, \beta) \approx (t^n_{r-1,A[X_r]}, \alpha\beta^{-1}, \mathrm{id.}),$$
$$(t^n_{r-1,A[X_r]}, \alpha, \beta) \approx (t^n_{r-1,A[X_r]}, \mathrm{id.}, \beta\alpha^{-1}).$$

Si $\lambda : A \to A[X_r]$ est l'inclusion naturelle et $T_{r-1}(\lambda) : T_{r-1}(A) \to T_{r-1}(A[X_r])$ le foncteur associé, on pose $\tilde{\beta} = T_{r-1}(\lambda)(\beta)$. Puisque $\beta \in \mathrm{Aut}(t^n_{r-1,A})$, alors

$$\tilde{\beta} \in \mathrm{Aut}(t^n_{r-1,A[X_r]})$$

et, en utilisant le fait que

$$\tilde{\pi}_i(t^n_{r-1,A[X_r]}) = t^n_{r-1,A} \qquad (i = 0, 1),$$

on a $\tilde{\pi}_0(\tilde{\beta}) = \tilde{\pi}_1(\tilde{\beta}) = \beta$. La commutativité des diagrammes

$$\begin{array}{ccc} t^n_{r-1,A} & \xrightarrow{\tilde{\pi}_0(\tilde{\beta})} & t^n_{r-1,A} \\ \beta\downarrow & & \downarrow\mathrm{id.} \\ t^n_{r-1,A} & \xrightarrow{\mathrm{id.}} & t^n_{r-1,A} \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} t^n_{r-1,A} & \xrightarrow{\tilde{\pi}_1(\tilde{\beta})} & t^n_{r-1,A} \\ \alpha\downarrow & & \downarrow\alpha\beta^{-1} \\ t^n_{r-1,A} & \xrightarrow{\mathrm{id.}} & t^n_{r-1,A} \end{array}$$

nous montre que $(\beta, \mathrm{id.})$ est le premier des isomorphismes mentionnés. Le deuxième suit de façon analogue.

2. Les foncteurs K_i et P_i.

2.1. DÉFINITION DES FONCTEURS K_i. — Soient $A \in \mathrm{Ob}\, \mathcal{R}_c$, $i \in \mathbf{N}$ un entier et G un groupe abélien. Une application $g : \mathrm{Ob}\, T_i(A) \to G$ est appelée *additive* si $g(l \oplus l') = g(l) + g(l')$, quels que soient $l, l' \in \mathrm{Ob}\, T_i(A)$.

Il est facile de montrer l'existence d'un tel g universel, i. e. d'un groupe abélien $K'_i(A)$ et d'une application additive $\varphi_{i,A} : \mathrm{Ob}\, T_i(A) \to K'_i(A)$ telle que pour tout groupe abélien G et pour toute application additive

$g : \mathrm{Ob}\, T_i(A) \to G$, il existe un unique homomorphisme de groupes abéliens $h : K'_i(A) \to G$ rendant commutatif le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Ob}\, T_i(A) \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\nu_{i,A}"'] & G \\ K'_i \arrow[ur, "h"'] & \end{tikzcd}$$

En effet, K'_i est le groupe abélien dont les générateurs sont les objets de $T_i(A)$ et les relations sont $l \oplus l' - l - l'$, pour l et l' parcourant $\mathrm{Ob}\, T_i(A)$. De plus, $\nu_{i,A}(l) = l$ pour tout $l \in \mathrm{Ob}\, T_i(A)$.

On veut maintenant définir des applications canoniques $\varphi_{i,A}$: $K'_i(A) \to K'_{i-1}(A[X_i])$, qui sont des homomorphismes de groupes abéliens.

Pour $i = 0$, on considère l'application rang d'un A-module projectif, $\mathrm{Ob}\, T_0(A) \to \mathbf{Z}$. Si l'on pose $K'_{-1}(A) = \mathbf{Z}$, étant donné que l'application rang est additive, elle définit un homomorphisme de groupes abéliens $\varphi_{0,A} : K'_0(A) \to K'_{-1}(A)$.

Supposons maintenant $i \geqq 1$. Si $(l, \alpha_0, \alpha_1) \in \mathrm{Ob}\, T_i(A)$, on a

$$\nu_{i-1, A[X_i]}(l) \in K'_{i-1}(A[X_i]), \qquad \text{car} \quad l \in \mathrm{Ob}\, T_{i-1}(A[X_i]).$$

Ceci induit une application $z_{i,A} : \mathrm{Ob}\, T_i(A) \to K'_{i-1}(A[X_i])$ qui est, trivialement, additive. Il existe alors un unique homomorphisme de groupes abéliens $\varphi_{i,A} : K'_i(A) \to K'_{i-1}(A[X_i])$ rendant commutatif le diagramme

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Ob}\, T_i(A) \arrow[r, "z_{i,A}"] \arrow[d, "\nu_{i,A}"'] & K'_{i-1}(A[X_i]) \\ K'_i(A) \arrow[ur, "\varphi_{i,A}"'] & \end{tikzcd}$$

On remarque que K'_i est un foncteur covariant défini dans la catégorie $\mathcal{R}_c$ à valeurs dans la catégorie $\mathcal{C}_b$. En effet, si $\varphi : A \to B$ est un morphisme de $\mathcal{R}_c$ et si l'on pose $\tilde{\varphi}_i = T_i(\varphi)$, l'application $\mathrm{Ob}\, T_i(A) \to K'_i(B)$ définie par $l \mapsto \nu_{i,B}\tilde{\varphi}_i(l)$ est additive, car

$$\tilde{\varphi}_i(l \oplus l') = \tilde{\varphi}_i(l) \oplus \tilde{\varphi}_i(l'),$$

l et l' parcourant $\mathrm{Ob}\, T_i(A)$. Ceci induit un homomorphisme de groupes abéliens

$$K'_i(\tilde{\varphi}_i) : \quad K'_i(A) \to K'_i(B).$$

Toutes les vérifications sont, par la suite, triviales.

Il est aussi évident que l'application $A \mapsto K'_{i-1}(A[X_i])$ est aussi un foncteur, qu'on désignera par $\Omega_i : \mathcal{R}_c \to \mathcal{C}_b$. De plus, $\varphi_i : K'_i \to \Omega_i$ est une transformation naturelle.

Pour tout $i \in \mathbf{N}$, on pose, pour définition, $K_i(A) = \mathrm{Ker}(\varphi_{i,A})$. Étant donné que φ_i est une transformation naturelle de foncteurs, alors K_i est aussi un foncteur.

2.2. Les foncteurs P'_i et P_i. — On veut maintenant définir des foncteurs P'_i, $P_i : \mathcal{R}_c \to \mathcal{A}_b$ et démontrer, ultérieurement, qu'il existe un isomorphisme naturel $P_i \xrightarrow{\sim} K_i$ (*cf.* 2.3). Cette nouvelle définition de K_i nous permettra de travailler plus aisément avec ce foncteur.

On va, tout d'abord, définir une relation, notée $\sim$, entre les éléments de $\mathrm{Ob}\,T_i(A)$. Si l, $l' \in \mathrm{Ob}\,T_i(A)$, on dira que $l \sim l'$ s'il existe des objets triviaux t, $t' \in \mathrm{Ob}\,T_i(A)$ tels que $l \oplus t \simeq l' \oplus t'$.

Lemme 2.1. — *La relation $\sim$ est une relation d'équivalence, compatible avec l'addition dans* $\mathrm{Ob}\,T_i(A)$.

Que $\sim$ est une relation d'équivalence dans $\mathrm{Ob}\,T_i(A)$, c'est trivial. Maintenant, si $l_1 \sim l'_1$ et $l_2 \sim l'_2$, il existe des objets triviaux t_1, t'_1, t_2 et t'_2 tels que

$$l_1 \oplus t_1 \simeq l'_1 \oplus t'_1, \qquad l_2 \oplus t_2 \simeq l'_2 \oplus t'_2,$$

donc, d'après le lemme 1.2, on a

$$(l_1 \oplus t_1) \oplus (l_2 \oplus t_2) \simeq (l'_1 \oplus t'_1) \oplus (l'_2 \oplus t'_2).$$

D'après le lemme 1.1, on a aussi

$$(l_1 \oplus l_2) \oplus (t_1 \oplus t_2) \simeq (l'_1 \oplus l'_2) \oplus (t'_1 \oplus t'_2)$$

et la condition (d_3) nous montre que $l_1 \oplus l_2 \sim l'_1 \oplus l'_2$. Ceci achève la démonstration du lemme.

L'addition dans $\mathrm{Ob}\,T_i(A)$ induit donc une structure de monoïde commutatif sur l'ensemble quotient $\mathrm{Ob}\,T_i(A)/\sim$. On note $P'_i(A) = \mathrm{Ob}\,T_i(A)/\sim$.

Théorème 2.1. — *Le monoïde* $P'_i(A)$ *est muni d'une structure de groupe abélien.*

Ce théorème sera démontré en 2.4, mais déjà en 2.3 on l'utilise pour pouvoir comparer $P'_i(A)$ et $K'_i(A)$.

2.3. Les foncteurs P_i et l'isomorphisme naturel $P_i \xrightarrow{\sim} K_i$.

Lemme 2.2. — *Il existe un isomorphisme canonique* $K'_i(A) \xrightarrow{\sim} P'_i(A) \oplus \mathbf{Z}$.

Désignons par $s_i : \mathrm{Ob}\,T_i(A) \to P'_i(A)$ l'application canonique. L'application $\mathrm{Ob}\,T_i(A) \to P'_i(A) \oplus \mathbf{Z}$ définie par $l \mapsto (s_i(l), \rho(l))$ étant additive, induit un unique homomorphisme de groupes abéliens $\varphi : K'_i(A) \to P'_i(A) \oplus \mathbf{Z}$, rendant commutatif le diagramme

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Ob}\,T_i(A) \arrow[r] \arrow[d, "\psi_{i,A}"'] & P'_i(A) \oplus \mathbf{Z} \\
K'_i(A) \arrow[ur, "\varphi"'] &
\end{tikzcd}$$

On définit maintenant une application $\psi : P'_i(A) \oplus \mathbf{Z} \to K'_i(A)$, en posant

$$\psi(s_i(l), m) = \varphi_{i,A}(l) + (m - \rho(l))\, \varphi_{i,A}(t^1_{i,A}).$$

Pour montrer que ψ est bien définie, il suffit de prendre $l \oplus t^n_{i,A}$ comme étant un autre représentant de $s_i(l)$. On a alors

$$\begin{aligned} &\varphi_{i,A}(l \oplus t^n_{i,A}) + (m - n - \rho(l))\, \varphi_{i,A}(t^1_{i,A}) \\ &\quad = \varphi_{i,A}(l) + \varphi_{i,A}(t^n_{i,A}) + (m - n - \rho(l))\, \varphi_{i,A}(t^1_{i,A}) \\ &\quad = \varphi_{i,A}(l) + n\, \varphi_{i,A}(t^1_{i,A}) + (m - n - \rho(l))\, \varphi_{i,A}(t^1_{i,A}) \\ &\quad = \varphi_{i,A}(l) + (m - \rho(l))\, \varphi_{i,A}(t^1_{i,A}). \end{aligned}$$

Il est maintenant facile de voir que φ et ψ sont des applications inverses l'une de l'autre. Donc, φ est un isomorphisme de groupes abéliens.

LEMME 2.3. — *Soient $l, l' \in \operatorname{Ob} T_i(A)$. Alors, $\varphi_{i,A}(l) = \varphi_{i,A}(l')$ si et seulement si, il existe un objet trivial $t \in \operatorname{Ob} T_i(A)$ tel que $l \oplus t \simeq l' \oplus t$.*

Si $\varphi_{i,A}(l) = \varphi_{i,A}(l')$, l'isomorphisme $\varphi : K'_i(A) \xrightarrow{\sim} P'_i(A) \oplus \mathbf{Z}$ entraîne que

$$(s_i(l), \rho(l)) = (s_i(l'), \rho(l')).$$

Donc, $s_i(l) = s_i(l')$ et ceci veut dire qu'il existe des objets triviaux t, $t' \in \operatorname{Ob} T_i(A)$ tels que $l \oplus t \simeq l' \oplus t'$. D'autre part, l'égalité $\rho(l) = \rho(l')$ entraîne $\rho(t) = \rho(t')$ et étant donné que les objets triviaux sont déterminés par le rang, on peut prendre $t = t'$. Donc, $l \oplus t \simeq l' \oplus t$. La réciproque est triviale.

LEMME 2.4. — *L'isomorphisme $\varphi : K'_i(A) \xrightarrow{\sim} P'_i(A) \oplus \mathbf{Z}$ envoie $K_i(A)$ dans l'ensemble des paires $(q, 0) \in P'_i(A) \oplus \mathbf{Z}$. Si $i \geqq 1$, $q = s_i(l, \alpha_0, \alpha_1)$ et il existe un objet trivial $t \in \operatorname{Ob} T_{i-1}(A[X_i])$ tel que $l \oplus t$ soit isomorphe à un objet trivial de $T_{i-1}(A[X_i])$. Si $i = 0$, q parcourt $P'_0(A)$.*

Supposons $i \geqq 1$. D'après le lemme 2.3, tout élément de $K_i(A)$ peut s'écrire sous la forme $\varphi_{i,A}(l, \alpha_0, \alpha_1) - \varphi_{i,A}(l', \alpha'_0, \alpha'_1)$. Le théorème 2.1 nous dit qu'il existe un élément $(l'', \alpha''_0, \alpha''_1) \in \operatorname{Ob} T_i(A)$ tel que

$$s_i(l', \alpha'_0, \alpha'_1) + s_i(l'', \alpha''_0, \alpha''_1) = s_i(t, \iota, \iota),$$

donc, d'après une modification convenable de $(l'', \alpha''_0, \alpha''_1)$ et (t, ι, ι), on peut écrire

$$(l', \alpha'_0, \alpha'_1) \oplus (l'', \alpha''_0, \alpha''_1) = (t, \iota, \iota).$$

Si l'on pose

$$(l''', \alpha'''_0, \alpha'''_1) = (l, \alpha_0, \alpha_1) \oplus (l'', \alpha''_0, \alpha''_1),$$

l'élément $\varphi_{i,A}(l, \alpha_0, \alpha_1) - \varphi_{i,A}(l', \alpha'_0, \alpha'_1)$ de $K_i(A)$ s'écrit sous la forme

$$\varphi_{i,A}(l''', \alpha'''_0, \alpha'''_1) - \varphi_{i,A}(t, \iota, \iota)$$

et son image par $\varphi_{i,A}$ est

$$(s_i(l''', \alpha'''_0, \alpha'''_1), \rho(t)) - (s_i(t, \iota, \iota), \rho(t)) = (s_i(l''', \alpha'''_0, \alpha'''_1), 0).$$

Puisque $K_i(A) = \mathrm{Ker}(\varphi_{i,A})$, alors $\nu_{i-1, A[X_i]}(l''') = \nu_{i-1, A[X_i]}(t)$ et ceci équivaut à dire qu'il existe un objet trivial $t' \in \mathrm{Ob}\, T_{i-1}(A[X_i])$ tel que $l''' \oplus t' \simeq t \oplus t'$ (*cf.* lemme 2.3), i. e. tel que $l''' \oplus t'$ soit trivial.

Réciproquement, si $(s_i(l, \alpha_0, \alpha_1), 0) \in P'_i(A) \oplus \mathbf{Z}$ et s'il existe un objet trivial $t' \in \mathrm{Ob}\, T_{i-1}(A[X_i])$ tel que $l \oplus t'$ soit isomorphe à un objet trivial $t \in \mathrm{Ob}\, T_{i-1}(A[X_i])$, $l \oplus t' \simeq t$, alors

$$s_i(l, \alpha_0, \alpha_1) + s_i(t', \iota, \iota) = s_i(t, \beta_0, \beta_1),$$

donc

$$\varphi_{i,A}(\nu_{i,A}(t, \beta_0, \beta_1) - \nu_{i,A}(t, \iota, \iota)) = (s_i(t, \beta_0, \beta_1), 0) = (s_i(l, \alpha_0, \alpha_1), 0).$$

Le cas $i = 0$ est analogue.

Donc, le sous-ensemble de $P'_i(A)$ formé des éléments $s_i(l, \alpha_0, \alpha_1)$ tels que, il existe des objets triviaux t et t' satisfaisant $l \oplus t' \simeq t$ est un sous-groupe de $P'_i(A)$ canoniquement isomorphe à $K_i(A)$. On le note $P_i(A)$. Si $i = 0$, on pose $P_0(A) = P'_0(A)$.

2.4. Démonstration du théorème 2.1. — On dira qu'un élément $\alpha = (a_{ij}) \in GL(n, A)$ est une *matrice élémentaire* si pour tout i, $a_{ii} = 1$ et s'il existe une paire unique (r, s), $r \neq s$, telle que $a_{ij} = 0$ pour $i \neq j$ et $(i, j) \neq (r, s)$.

Par la suite, on note $a_{rs} = b \in A$.

Il est évident que l'inverse d'une matrice élémentaire est une matrice élémentaire. Désignons par $E(n, A)$ le sous-groupe de $GL(n, A)$ engendré par les matrices élémentaires.

Lemme 2.5. — *Si* $\alpha \in E(n, A)$, *il existe une matrice* $\alpha(X) \in GL(n, A[X])$ *telle que* $\alpha(0) = \mathrm{id}.$ *et* $\alpha(1) = \alpha$.

On remarque, tout d'abord, que si $\alpha \in E(n, A)$, alors $\alpha = \alpha_1 \ldots \alpha_m$, où les α_i sont des matrices élémentaires.

Supposons que $\alpha \in E(n, A)$ soit élémentaire, disons

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & & b \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix}.$$

On pose

$$\alpha(X) = \begin{pmatrix} 1 & & bX \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix}.$$

Maintenant on voit que si $\alpha = \alpha_1 \ldots \alpha_m$, où les α_i sont élémentaires, alors $\alpha(X) = \alpha_1(X) \ldots \alpha_m(X)$ et la matrice $\alpha(X) \in GL(n, A[X])$ satisfait aux conditions du lemme.

Remarque. — Si l'on prend $b(1-X)$ à la place de bX, on démontre l'existence d'une matrice $\alpha'(X) \in GL(n, A[X])$ telle que $\alpha'(0) = \alpha$ et $\alpha'(1) = \mathrm{id}$.

LEMME 2.6 (Lemme de Whitehead). — *Si* $\alpha, \beta \in GL(n, A)$, *alors*

$$\begin{pmatrix} \alpha\beta & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \beta\alpha & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ -\beta & 0 \end{pmatrix} \qquad [\mathrm{mod}\, E(2n, A)],$$

ces congruences étant valables si on les prend toutes à droite ou toutes à gauche modulo $E(2n, A)$.

La démonstration complète de ce lemme peut être vue dans Bass (*cf.* [1], p. 10). Toutefois, on va la brosser rapidement afin d'obtenir un corollaire dont on aura besoin.

Si l'on pose

$$\rho = \beta - 1, \qquad \gamma = \begin{pmatrix} \beta\alpha & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \delta = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix},$$

$$\tau_1 = \begin{pmatrix} 1 & (\beta\alpha)^{-1}\rho \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \tau_2 = \begin{pmatrix} 1 & -\alpha^{-1}\rho \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \tau_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\beta^{-1}\rho\alpha & 1 \end{pmatrix}$$

et

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & 1 \end{pmatrix},$$

alors $\tau = \tau_1(\sigma^{-1}\tau_2\sigma)\tau_3 \in E(2n, A)$. Il s'ensuit que $\gamma\tau = \delta$. En particulier,

$$\begin{pmatrix} \beta^{-1} & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \in E(2n, A),$$

donc

$$\begin{pmatrix} \alpha\beta & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \alpha\beta & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \beta^{-1} & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \qquad [\mathrm{mod}\, E(2n, A)].$$

Finalement,

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ -\beta & 0 \end{pmatrix} \qquad [\mathrm{mod}\, E(2n, A)].$$

Pour les congruences à gauche, il suffit de voir que tous les sous-groupes utilisés sont invariants par transposition.

On remarque que, dans cette démonstration, si $\alpha, \beta \in D(n, r, A)$, les matrices de $E(2n, A[X_1, \ldots, X_r])$ qui donnent les congruences, sont dans $D(2n, r, A)$. Donc,

COROLLAIRE. — *Si* $\alpha, \beta \in D(n, r, A)$, *les congruences du lemme de Whitehead peuvent être considérées modulo* $D(2n, r, A) \cap E(2n, A)$.

Démonstration du théorème 2.1. — On sait déjà que $P'_l(A)$ est un monoïde commutatif. Pour achever la démonstration du théorème 2.1, il suffit alors de démontrer l'existence de l'inverse, i. e. que pour tout objet $l \in \mathrm{Ob}\, \mathrm{T}_i(\mathrm{A})$, il existe un objet $l' \in \mathrm{Ob}\, \mathrm{T}_i(\mathrm{A})$ tel que $l \oplus l' = t^n_{i,\mathrm{A}}$ pour un entier n convenable. La démonstration se fait par récurrence sur i.

Pour $i = 0$, le résultat est trivial, car les objets de $\mathrm{T}_0(\mathrm{A})$ sont les A-modules projectifs de type fini et les objets triviaux de $\mathrm{T}_0(\mathrm{A})$ sont les A-modules libres de type fini.

Supposons le théorème vrai pour $i = r - 1$ et soit $(l, \alpha_0, \alpha_1) \in \mathrm{Ob}\, \mathrm{T}_r(\mathrm{A})$. Alors $l \in \mathrm{Ob}\, \mathrm{T}_{r-1}(\mathrm{A}[\mathrm{X}_r])$ et, d'après l'hypothèse de récurrence, il existe un objet $m \in \mathrm{Ob}\, \mathrm{T}_{r-1}(\mathrm{A}[\mathrm{X}_r])$ tel que $l \oplus m = t^n_{r-1,\mathrm{A}[\mathrm{X}_r]}$, où n est un entier convenable.

Considérons maintenant l'application $\varphi_j : \mathrm{A}[\mathrm{X}_r] \to \mathrm{A}$ définie par $\varphi_j(\mathrm{X}_r) = j$ $(j = 0, 1)$ et soit $m_j = \mathrm{T}_{r-1}(\varphi_j)(m)$ $(j = 0, 1)$.

Si l'on considère un objet arbitraire $m' \in \mathrm{Ob}\, \mathrm{T}_{r-1}(\mathrm{A}[\mathrm{X}_r])$ tel que $l \in m' = t^k_{r-1,\mathrm{A}[\mathrm{X}_r]}$, où k est un entier convenable, alors

$$l_0 \oplus m'_0 \simeq t^n_{r-1,\mathrm{A}} \oplus m' \simeq t^k_{r-1,\mathrm{A}}$$

(et, de même, pour m'_1). Donc, $m = m' \oplus t^n_{r-1,\mathrm{A}[\mathrm{X}_r]}$ satisfaisant aux conditions suivantes :

(a) $l \oplus m \simeq t^s_{r-1,\mathrm{A}[\mathrm{X}_r]}$, s étant un entier convenable;

(b) m_0 et m_1 sont isomorphes à $t^k_{r-1,\mathrm{A}}$.

En additionnant, au besoin, un objet trivial (t, ι, ι), ce qui ne change pas l'image de (l, α_0, α_1) ou de (m, δ_0, δ_1) dans $\mathrm{P}'_r(\mathrm{A})$, on peut supposer que $\rho_{r-1}(l) = \rho_{r-1}(m)$.

Soit $p = m \oplus t^k_{r-1,\mathrm{A}[\mathrm{X}_r]}$. On va définir des isomorphismes

$$\beta_j : \quad p_j \to t^k_{r-1,\mathrm{A}} \qquad (j = 0, 1)$$

tels que $(p, \beta_0, \beta_1) \oplus (t^{2k}_{r-1,\mathrm{A}[\mathrm{X}_r]}, \iota, \iota)$ donne la solution du problème.

Donnons-nous un isomorphisme

$$\theta : \quad l \oplus m \to t^{2k}_{r-1,\mathrm{A}[\mathrm{X}_r]}$$

et soit $\theta_j = \mathrm{T}_{r-1}(\varphi_j)(\theta)$ $(j = 0, 1)$. Si

$$c : \quad m \oplus t^k_{r-1,\mathrm{A}[\mathrm{X}_r]} \to t^k_{r-1,\mathrm{A}[\mathrm{X}_r]} \oplus m$$

est l'isomorphisme de changement d'ordre, on notera

$$c_j = \mathrm{T}_{r-1}(\varphi_j)\,(c) \qquad (j = 0, 1).$$

On a donc des isomorphismes

$$p_0 = (m \oplus t^k_{r-1,\mathrm{A}[\mathrm{X}_r]})_0 = m_0 \oplus t^k_{r-1,\mathrm{A}} \xrightarrow{c_0} t^k_{r-1,\mathrm{A}} \oplus m_0 \xrightarrow{\alpha_0^{-1} \oplus \iota} l_0 \oplus m_0 = (l \oplus m)_0 \xrightarrow{\theta_0} t^{2k}_{r-1,\mathrm{A}}$$

et, de même, pour $p_1 \to t^{2k}_{r-1,\mathrm{A}}$.

Soit $\beta_j = \theta_j(\alpha_j^{-1} \oplus \iota)c_j$ ($j = 0, 1$) et démontrons que

$$(l, \alpha_0, \alpha_1) \oplus (p, \beta_0, \beta_1) \oplus (t^{3k}_{r-1, A[X_r]}, \iota, \iota) = t^{6k}_{r, A},$$

ce qui achèvera la démonstration du théorème.

Considérons l'isomorphisme

$$l \oplus p \oplus t^{3k}_{r-1, A[X_r]} \to t^{6k}_{r-1, A[X_r]}$$

défini par

$$\begin{aligned} l \oplus p \oplus t^{3k}_{r-1, A[X_r]} &\to l \oplus (m \oplus t^{k}_{r-1, A[X_r]}) \oplus t^{3k}_{r-1, A[X_r]} \to (l \oplus m) \oplus t^{k}_{r-1, A[X_r]} \oplus t^{3k}_{r-1, A[X_r]} \\ &\to t^{2k}_{r-1, A[X_r]} \oplus t^{k}_{r-1, A[X_r]} \oplus t^{3k}_{r-1, A[X_r]} \to t^{6k}_{r-1, A[X_r]}. \end{aligned}$$

Si l'on pose

$$l' = p \oplus t^{3k}_{r-1, A[X_r]}, \qquad \gamma_0 = \beta_0 \oplus \iota, \qquad \gamma_1 = \beta_1 \oplus \iota$$

et si l'on définit d_j par la commutativité du diagramme

$$\begin{tikzcd} (l \oplus l')_j \arrow[r, "(0 \oplus \iota)_j"] \arrow[d, "\alpha_j \oplus \gamma_j"'] & t^{6k}_{r-1, A} \arrow[d, "d_j"] \\ t^{6k}_{r-1, A} \arrow[r, "\text{id.}"] & t^{6k}_{r-1, A} \end{tikzcd} \qquad (j = 0, 1),$$

alors $\theta \oplus \iota$ nous donne un isomorphisme

$$(l, \alpha_0, \alpha_1) \oplus (l', \gamma_0, \gamma_1) \to (t^{6k}_{r-1, A[X_r]}, d_0, d_1).$$

Par la suite, on doit montrer qu'il existe un isomorphisme

$$(t^{6k}_{r-1, A[X_r]}, d_0, d_1) \to (t^{6k}_{r-1, A[X_r]}, \iota, \iota).$$

Puisque d_0 et d_1 sont des automorphismes de $t^{6k}_{r-1, A}$, ils peuvent être identifiés à des matrices de $D(6k, r-1, A)$. On va montrer qu'il existe une matrice $f \in D(6k, r-1, A)$ telle que

$$d_0 \equiv f \quad \text{et} \quad d_1 \equiv f \quad (\operatorname{mod} E(6k, A[X_1, \ldots, X_{r-1}]) \cap D(6k, r-1, A)).$$

Or les applications d_j peuvent être factorisées par

$$\begin{tikzcd} t^{6k}_{r-1, A} \arrow[rr, "d_j"] \arrow[d, "\theta_j^{-1} \oplus \iota"'] & & t^{6k}_{r-1, A} \arrow[d, "\iota \oplus \theta_j \oplus \iota"] \\ l_j \oplus m_j \oplus t^{4k}_{r-1, A} \arrow[d, "\iota \oplus c_j \oplus \iota"'] & & t^{k}_{r-1, A} \oplus (l \oplus m)_j \oplus t^{3k}_{r-1, A} \arrow[d, "\alpha_j \oplus \iota"] \\ l_j \oplus t^{k}_{r-1, A} \oplus m_j \oplus t^{3k}_{r-1, A} \arrow[rr, "\iota \oplus \alpha_j^{-1} \oplus \iota"] & & l_j \oplus (l_j \oplus m_j) \oplus t^{3k}_{r-1, A} \end{tikzcd}$$

et étant donné que l_j et m_j sont isomorphes à $t^{k}_{r-1, A}$, en choisissant ces isomorphismes, toutes ces applications peuvent être considérées comme des automorphismes de $t^{6k}_{r-1,\,A[X_r]}$, donc comme des matrices de $D(6k,\, r-1,\, A)$. De plus, d'après le lemme 1.3, $c_0 = c_1 = c$.

En appliquant le lemme de Whitehead, on a

$$\begin{aligned} d_j &= (\iota \oplus \theta_j \oplus \iota)\,(\alpha_j \oplus \iota)\,(\iota \oplus \alpha_j^{-1} \oplus \iota)\,(\iota \oplus c \oplus \iota)\,(\theta_j^{-1} \oplus \iota) \\ &\equiv (\iota \oplus c \oplus \iota)\,(\theta_j^{-1} \oplus \iota)\,(\theta_j \oplus \iota)\,(\alpha_j \oplus \iota)\,(\alpha_j^{-1} \oplus \iota) = \iota \oplus c \oplus \iota \end{aligned}$$

et $\iota \oplus c \oplus \iota$ est une matrice à coefficients dans A. On peut donc écrire

$$d_j = (\iota \oplus c \oplus \iota)\, h_j, \qquad \text{avec} \quad h_j \in D(6k,\, r-1,\, A) \cap E(6k,\, A).$$

Le lemme 2.5 nous dit qu'il existe une matrice $h' \in GL(6k,\, A[X_1,\, \ldots,\, X_r])$ telle que $h'_j = h_j$. Si l'on pose $e = (\iota \oplus c \oplus \iota) h'$, on a les diagrammes commutatifs :

$$\begin{tikzcd} t^{6k}_{r-1,\,A} \arrow[r, "e_j"] \arrow[d, "d_j"'] & t^{6k}_{r-1,\,A} \arrow[d, "\text{id.}"] \\ t^{6k}_{r-1,\,A} \arrow[r, "\text{id.}"] & t^{6k}_{r-1,\,A} \end{tikzcd} \qquad (j = 0,\, 1).$$

Ceci nous fournit l'isomorphisme

$$(t^{6k}_{r-1,\,A[X_r]},\, d_0,\, d_1) \to (t^{6k}_{r-1,\,A[X_r]},\, \iota,\, \iota)$$

et le théorème est démontré.

LEMME 2.7. — *Soit* $(l,\, \alpha_0,\, \iota) \in \mathrm{Ob}\,T_r(A)$, $r \geqq 1$. *Si* l *admet un complément trivial, i. e. s'il existe un objet trivial* $t^{n}_{r-1,\,A[X_r]}$ *tel que*

$$l \oplus t^{n}_{r-1,\,A[X_r]} \simeq t^{k}_{r-1,\,A[X_r]},$$

k étant un entier convenable, alors

$$-s_r(l,\, \alpha_0,\, \iota) = s_r(l,\, \alpha_j^{-1},\, \iota).$$

Étant donné que

$$s_r(l,\, \alpha_0,\, \iota) = s_r((l,\, \alpha_0,\, \iota) \oplus t^{n}_{r,\,A}),$$

on peut supposer que l soit trivial, i. e. que

$$(l,\, \alpha_0,\, \iota) = (t^{n}_{r-1,\,A[X_r]},\, \beta_0,\, \iota).$$

D'autre part,

$$(t^{n}_{r-1,\,A[X_r]},\, \beta_0,\, \iota) \oplus (t^{n}_{r-1,\,A[X_r]},\, \beta_0^{-1},\, \iota) \oplus (t^{2n}_{r-1,\,A[X_r]},\, \iota,\, \iota) = (t^{4n}_{r-1,\,A[X_r]},\, \beta_0 \oplus \beta_0^{-1} \oplus \iota,\, \iota)$$

et à $\beta_0 \oplus \beta_0^{-1} \oplus \iota : t^{4n}_{r-1,\,A} \to t^{4n}_{r-1,\,A}$ correspond la matrice $\begin{pmatrix} \beta_0 & 0 \\ \beta_0^{-1} & 1 \end{pmatrix}$. D'après le lemme de Whitehead, cette matrice est équivalente à la matrice identité. La même méthode utilisée dans la fin de la démonstration du théorème 2.1 montre que $(t^{4n}_{r-1,\,A[X_r]},\, \beta_0 \oplus \beta_0^{-1} \oplus \iota,\, \iota)$ est isomorphe à $(t^{4n}_{r-1,\,A[X_r]},\, \iota,\, \iota)$. Donc,

$$s_r(t^{n}_{r-1,\,A[X_r]},\, \beta_0,\, \iota) + s_r(t^{n}_{r-1,\,A[X_r]},\, \beta_0^{-1},\, \iota) = 0.$$

LEMME 2.8 (Multiplicativité).

$$s_r(t^n_{r-1,A[X_r]},\ \alpha,\ \iota)+s_r(t^n_{r-1,A[X_r]},\ \beta,\ \iota)=s_r(t^n_{r-1,A[X_r]},\ \alpha\beta,\ \iota).$$

En effet,

$$s_r(t^n_{r-1,A[X_r]},\ \alpha\beta,\ \iota)=s_r((t^n_{r-1,A[X_r]},\ \alpha\beta,\ \iota)\ (t^n_{r-1,A[X_r]},\ \iota,\ \iota))=s_r(t^{2n}_{r-1,A[X_r]},\ \alpha\beta\oplus\iota,\ \iota).$$

Comme précédemment, à $\alpha\beta\oplus\iota$ correspond la matrice $\begin{pmatrix}\alpha\beta & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, laquelle est équivalente à la matrice $\begin{pmatrix}\alpha & 0\\ 0 & \beta\end{pmatrix}$. Par un argument similaire à celui déjà utilisé, on montre qu'il existe un isomorphisme

$$(t^{2n}_{r-1,A[X_r]},\ \alpha\beta\oplus\iota,\ \iota)\to(t^{2n}_{r-1,A[X_r]},\ \alpha\oplus\beta,\ \iota).$$

Donc,

$$s_r(t^n_{r-1,A[X_r]},\ \alpha\beta,\ \iota)=s_r(t^{2n}_{r-1,A[X_r]},\ \alpha\oplus\beta,\ \iota)=s_r(t^n_{r-1,A[X_r]},\ \alpha,\ \iota)+s_r(t^n_{r-1,A[X_r]},\ \beta,\ \iota).$$

LEMME 2.9. — *Soit* $(t^n_{r-1,A[X_r]},\ \alpha_0,\ \alpha_1)\in \operatorname{Ob}T_r(A)$ *et supposons qu'il existe*

$$\varphi(X_r)\in D(n,\ r-1,\ A[X_r])\qquad \textit{tel que}\quad \varphi(0)=\alpha_0\quad \text{et}\quad \varphi(1)=\alpha_1.$$

Alors

$$(t^n_{r-1,A[X_r]},\ \alpha_0,\ \alpha_1)\simeq(t^n_{r-1,A[X_r]},\ \iota,\ \iota).$$

L'isomorphisme

$$\varphi(X_r)\ :\quad t^n_{r-1,A[X_r]}\to t^n_{r-1,A[X_r]}$$

nous donne, d'après l'hypothèse faite, la commutativité des diagrammes

$$\begin{array}{ccc} t^n_{r-1,A} & \xrightarrow{\varphi(j)} & t^n_{r-1,A}\\ {\scriptstyle\alpha_j}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id.}}\\ t^n_{r-1,A} & \xrightarrow{\mathrm{id.}} & t^n_{r-1,A}\end{array}\qquad (j=0,\ 1).$$

2.5. LE GROUPE $K_1(A)$. — Dans ce numéro, il s'agira d'étudier de plus près le foncteur K_1.

L'ensemble $\operatorname{Ob}T_1(A)$ est l'ensemble des triples $(P,\ \alpha_0,\ \alpha_1)$, où P est un $A[X]$-module projectif de type fini et de rang constant et

$$\alpha_0\ :\quad P_0=P\otimes_{A[X]}(A[X]/(X)\qquad =P/XP\to A^n$$

et

$$\alpha_1\ :\quad P_1=P\otimes_{A[X]}(A[X]/(X-1)=P/(X-1)P\to A^n$$

sont des A-isomorphismes. On peut encore dire que $\operatorname{Ob}T_1(A)$ est l'ensemble des triples avec P, $A[X]$-projectif, P/XP et $P/(X-1)P$, A-libres et où les isomorphismes peuvent être interprétés comme étant le choix d'une base ordonnée dans chacun d'eux.

Un isomorphisme $(P,\ \alpha_0,\ \alpha_1)\xrightarrow{\sim}(Q,\ \beta_0,\ \beta_1)$ n'est autre qu'un isomorphisme $P\xrightarrow{\sim}Q$ qui envoie, tout en respectant l'ordre, la base choisie dans P/XP en la base choisie dans Q/XQ (et, de même, modulo $X-1$).

On peut donner maintenant une autre description de K_1. Si $GL(n, A)$ est le groupe linéaire d'ordre n sur A, il existe une inclusion naturelle

$$\lambda_n : \quad GL(n, A) \to GL(n+1, A)$$

définie par $\lambda_n(a_{ij}) = (b_{ij})$, avec $a_{ij} = b_{ij}$ pour $1 \leqq i,\ j \leqq n$, $b_{i,n+1} = 0$ pour $1 \leqq i \leqq n$ et $b_{n+1,n+1} = 1$. Soit

$$GL(A) = \bigcup_{n=1}^{\infty} Gl(n, A).$$

On définit une application $f_n : GL(n, A) \to K_1(A)$ en posant, pour tout $a \in GL(n, A)$,

$$f_n(a) = s(t^n_{1, A[X]}, a, \iota).$$

Puisque, pour tout $a \in GL(n, A)$,

$$\begin{aligned} f_{n+1}(\lambda_n(a)) &= s(t^{n+1}_{0, A[X]}, \lambda_n(a), \iota) = s(t^n_{0, A[X]}, a, \iota) + s(t^1_{0, A[X]}, \iota, \iota) \\ &= s(t^n_{0, A[X]}, a, \iota) = f_n(a), \end{aligned}$$

alors f_{n+1} prolonge f_n et les f_n définissent donc une application — par ailleurs, un homomorphisme de groupes — $f : GL(A) \to K_1(A)$, lequel est, de toute évidence, surjectif. On veut caractériser $\mathrm{Ker}(f)$.

On définit, tout d'abord, le groupe $F_0(A)$ comme étant le sous-groupe de $GL(A)$ engendré par les éléments $\varphi(0)\,\varphi(1)^{-1}$, φ parcourant $GL(A[X])$. On voit que $F_0(A)$ est un sous-groupe invariant de $GL(A)$, car pour tout $a \in GL(A)$,

$$a\,\varphi(0)\,\varphi(1)^{-1} a^{-1} = (a\varphi)(0)\,.\,((a\varphi)(1))^{-1} \in F_0(A).$$

On remarque que $a\varphi$ est le produit dans $GL(A[X])$, une fois qu'on a identifié a à son image par l'application canonique $GL(A) \to GL(A[X])$.

D'après le lemme 1.4 et l'isomorphisme $(t^n, \varphi(0), \varphi(1)) \xrightarrow{\sim} (t^n, \iota, \iota)$ défini par φ, on a

$$f(\varphi(0)\,\varphi(1)^{-1}) = s(t^n, \varphi(0)\,\varphi(1)^{-1}, \iota) = s(t^n, \varphi(0), \varphi(1)) = 0.$$

Donc, la restriction de f à $F_0(A)$ est nulle et, par passage au quotient, f induit un homomorphisme de groupes $\bar{f} : GL(A)/F_0(A) \to K_1(A)$ rendant commutatif le diagramme

$$\begin{tikzcd} GL(A) \arrow[r, "f"] \arrow[d] & K_1(A) \\ GL(A)/F_0(A) \arrow[ur, "\bar{f}"'] & \end{tikzcd}$$

où la flèche verticale est canonique.

Nous allons montrer que $\bar{f}$ est un isomorphisme et, pour ce faire, on définit une application $\bar{g} : K_1(A) \to GL(A)/F_0(A)$ en posant $\bar{g}(s(t^n, a, \iota)) = \bar{a}$,

$\bar{a}$ étant la classe de a modulo $F_0(A)$. Il est clair que tout objet de $K_1(A)$ peut être représenté par un objet de la forme $(t^n, a, \iota) \in \operatorname{Ob} T_1(A)$ et la chose à vérifier est donc que $\bar{g}$ est bien définie. En effet, si $s(t, a, \iota) = s(t', b, \iota)$, on peut supposer que $t = t'$ (car sinon on y additionne un objet trivial), i. e. que $(t, a, \iota) \simeq (t, b, \iota)$. Il existe donc $\varphi \in GL(A[X])$, $\varphi : t \to t$, et $d : A^n \to A^n$ tels que les diagrammes suivants soient commutatifs :

$$\begin{array}{ccc} A^n & \xrightarrow{\varphi(0)} & A^n \\ {\scriptstyle a}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle b} \\ A^n & \xrightarrow{d} & A^n \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{ccc} A^n & \xrightarrow{\varphi(1)} & A^n \\ {\scriptstyle \mathrm{id.}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id.}} \\ A^n & \xrightarrow{d} & A^n \end{array}$$

Ceci nous montre que $d = \varphi(1)$ et que

$$b = da\varphi(0)^{-1} = \varphi(1)a\varphi(0)^{-1} = \varphi(1)\varphi(0)^{-1}az,$$

avec

$$z \in [GL(A), GL(A)] = E(A) \subset F_0(A).$$

Si l'on pose

$$\psi(X) = a^{-1}\varphi(1 - X) \in GL(A[X]),$$

on peut écrire

$$b = aa^{-1}\varphi(1)\varphi(0)^{-1}az = a\psi(0)\psi(1)^{-1}z,$$

i. e. $\bar{b} = \bar{a}$ dans $GL(A)/F_0(A)$.

Exemple. — Soient A un anneau euclidien et A^* le groupe multiplicatif de A. Il existe alors un isomorphisme canonique $K_1(A) \xrightarrow{\sim} A^*$.

En effet, considérons l'application déterminant $d : GL(A) \to A^*$. Alors, $F_0(A) \subset \operatorname{Ker}(d)$, car si $a = \varphi(0)\varphi(1)^{-1}$, puisque $\varphi \in GL(A[X])$, le déterminant de φ est inversible dans $A[X]$, donc c'est une unité dans A. Ceci nous montre que $d(\varphi(0)) = d(\varphi(1))$ et, par suite, $d(a) = 1$.

Réciproquement $\operatorname{Ker}(d) \subset F_0(A)$, car si $d(a) = 1$, a est un produit de matrices élémentaires $a = \beta_1 \ldots \beta_r$. Donc, $\varphi = \beta_1(X) \ldots \beta_r(X)$ nous donne

$$\varphi(0) = a, \qquad \varphi(1) = 1 \qquad \text{et} \qquad a = \varphi(0)\varphi(1)^{-1} \in F_0(A).$$

2.6. Rapports avec la K-théorie de Bass. — Dans [1], Bass définit un foncteur K^1 (on le notera ici K^1_B) et démontre qu'il est isomorphe à $GL(A)/E(A)$, où $E(A) = [GL(A), GL(A)]$. Puisqu'on a un épimorphisme $GL(A) \to K_1(A)$, avec $K_1(A)$ abélien, ceci induit un épimorphisme $B : K^1_B(A) \to K_1(A)$ qui est, de plus, une transformation naturelle de foncteurs.

D'après [2], on dira qu'un anneau commutatif à élément unité A est un *anneau régulier*, s'il est noethérien et si tout A-module admet une résolution projective finie.

Théorème 2.2. — *Si* A *est un anneau régulier*, $B : K^1_B(A) \to K_1(A)$ *est un isomorphisme de groupes abéliens.*

Pour le démontrer, on aura besoin de quelques lemmes préliminaires ainsi que de la définition suivante : on dira qu'une matrice a est *unipotente* si $a = 1 + c$, où c est une matrice nilpotente. Il s'ensuit que si a est unipotente, alors $a \in \mathrm{GL}(A)$. En particulier, les matrices élémentaires sont unipotentes.

Désignons par $\mathrm{U}n(A)$ le sous-groupe de $\mathrm{GL}(A)$ engendré par les matrices unipotentes. Il est clair que $E(A) \subset \mathrm{U}n(A)$ et $\mathrm{U}n(A)$ est un sous-groupe normal de $\mathrm{GL}(A)$. Donc $\mathrm{GL}(A)/\mathrm{U}n(A)$ est un groupe abélien. On note $K_1^*(A) = \mathrm{GL}(A)/\mathrm{U}n(A)$.

LEMME 2.10. — *Soient* A *un anneau et* $\lambda : A \to A[X]$ *l'inclusion canonique. Alors* $K_1^*(\lambda) : K_1^*(A) \to K_1^*(A[X])$ *est un isomorphisme.*

Soit $\pi_0 : A[X] \to A$ l'homomorphisme de A-algèbres défini par $\pi_0(X) = 0$. On a le diagramme commutatif de groupes abéliens

$$\begin{tikzcd} K_1^*(A) \arrow[rr, "K_1^*(\lambda)"] \arrow[dr, "\mathrm{id.}"'] & & K_1^*(A[X]) \arrow[dl, "K_1^*(\pi_0)"] \\ & K_1^*(A) & \end{tikzcd}$$

Donc, $K_1^*(A[X]) = K_1^*(A) \oplus H$, où $H = \mathrm{Ker}(K_1^*(\pi_0))$. On veut montrer que $H = 0$.

Si $a \in \mathrm{GL}(A[X])$, on peut écrire $a = a_0 + a_1 X + \ldots + a_d X^d$, où les a_i sont des matrices à coefficients dans A. Tout d'abord on montre que $a \equiv b_0 + b_1 X \pmod{E(A[X])}$. En effet,

$$a = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 + \ldots + a_d X^d & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\equiv \begin{pmatrix} a_0 + \ldots + a_d X^d & X^{d-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} a_0 + \ldots + a_{d-1} X^{d-1} & X^{d-1} \\ a_d X^d & 1 \end{pmatrix} = a'$$

et a' est un polynôme de degré $d-1$ dont les coefficients sont des matrices à coefficients dans A. En répétant le procédé un certain nombre de fois, on trouve une matrice $b = b_0 + b_1 X$ et $a \equiv b \pmod{E(A[X])}$. Donc, a et b représentent le même élément dans $K_1^*(A[X])$.

On remarque que $b \in \mathrm{GL}(A[X])$ entraîne $b_0 \in \mathrm{GL}(A)$. D'autre part, $b \in H$ entraîne $0 = K_1^*(\pi_0)(b) = b_0$ et ceci veut dire que

$$b_0 \in \mathrm{U}n(A) \subset \mathrm{U}n(A[X]).$$

Donc, $b = b_0(1 + cX)$ et $1 + cX \in \mathrm{GL}(A[X])$. On va montrer que la matrice c est nilpotente. En effet, la relation

$$(1 + cX)(d_0 + d_1 X + \ldots + d_r X^r) = 1$$

entraîne $c^{r+1} = 0$. Ceci veut dire que

$$1 + cX \in \mathrm{U}n(A[X]), \qquad \text{donc} \quad b \in \mathrm{U}n(A[X]).$$

On a ainsi montré que b est un zéro dans $K_1^*(A[X])$.

LEMME 2.11. — *Pour tout objet* A *de* $\mathcal{R}_c$, *on a* $Un(A) = F_0(A)$.

En effet, si $\pi_j : A[X] \to A$ est l'homomorphisme défini par

$$\pi_j(X) = j \qquad (j = 0, 1),$$

on en induit l'homomorphisme de groupes abéliens

$$K_1^*(\pi_j) : \quad K_1^*(A[X]) \to K_1^*(A) \qquad (j = 0, 1).$$

Donc, $K_1^*(\pi_0)\, K_1^*(\lambda) = K_1^*(\pi_1)\, K_1^*(\lambda) = \mathrm{id.}$, où $\lambda : A \to A[X]$ est l'inclusion canonique. Étant donné que $K_1^*(\lambda)$ est un isomorphisme, alors $K_1^*(\pi_0) = K_1^*(\pi_1)$, donc, pour tout $\varphi \in GL(A[X])$, $\varphi(0)$ et $\varphi(1)$ représentent le même élément dans $K_1^*(A)$. Ceci nous montre que $\varphi(0)\,\varphi(1)^{-1} \in Un(A)$ et, par suite, $F_0(A) \subset Un(A)$.

Réciproquement, si $b = 1 + c$, avec c nilpotente, alors $b(X) = 1 + cX$ nous donne $b(0) = 1$ et $b(1) = b$, i. e. $b \in F_0(A)$. Ceci nous montre que $Un(A) \subset F_0(A)$.

COROLLAIRE. — *On a* $K_1(A) = K_1^*(A)$ *et l'application canonique* $K_1(A) \to K_1(A[X])$ *est un isomorphisme.*

Démonstration du théorème 2.2. — Dans ([2], th. 3 et corollaire), on démontre, sous les hypothèses du théorème, que $Un(A) = E(A)$.

2.7. RAPPORTS ENTRE $K_r(A)$ ET MATRICES. — Les résultats démontrés dans 2.5 et une partie de 2.6 sont des cas particuliers d'une situation plus générale.

Fixons un entier $r \in \mathbf{N}$. Il existe une inclusion naturelle

$$\lambda_n : \quad D(n, r, A) \to D(n+1, r, A),$$

induite par l'inclusion

$$GL(n, A[X_1, \ldots, X_r]) \to GL(n+1, A[X_1, \ldots, X_r])$$

définie dans 2.5. Notons

$$D_r(A) = \bigcup_{n \geq 0} D(n, r, A).$$

Considérons l'application

$$f_n^r : \quad D(n, r, A) \to K_{r+1}(A) \qquad \text{définie par} \quad f_n^r(a) = s(t^n_{r, A[X]}, a, \iota).$$

Une démonstration analogue à celle de 2.5 nous montre que

$$f_n^r(a) = f_{n+1}^r(\lambda_n(a)),$$

donc les f_n^r, n parcourant $\mathbf{N}$, définissent une application $f^r : D_r(A) \to K_{r+1}(A)$. D'après le lemme 2.8, f^r est un homomorphisme de groupes. De plus, $f^r : D_r(A) \to K_{r+1}(A)$ est surjectif, car

$$s_{r+1}(t, \alpha_0, \alpha_1) = s_{r+1}(t, \alpha_0\alpha_1^{-1}, \iota).$$

Ceci étant, on peut définir le groupe $F_r(A)$ comme étant le sous-groupe de $D_r(A)$ engendré par les éléments $\varphi(0)\varphi(1)^{-1}$, φ parcourant $D_r(A[X])$. On voit que $F_r(A)$ est un sous-groupe invariant de $D_r(A)$ [la démonstration est analogue à celle faite pour $F_0(A)$] et si $a \in F_r(A)$, alors $f^r(a) = 0$. Donc, f^r induit un homomorphisme de groupes $f : D_r(A)/F_r(A) \to K_{r+1}(A)$. Montrons que f est un isomorphisme.

Désignons par $Un_r(A)$ le sous-groupe de $D_r(A)$ engendré par les matrices unipotentes de $D_r(A)$ et soit $K_{r+1}^*(A) = D_r(A)/Un_r(A)$. Étant donné que Un_r et D_r sont des foncteurs et que l'inclusion $Un_r \to D_r$ est une transformation naturelle, alors $K_{r+1}^* : \mathcal{R}_c \to \mathcal{A}_b$ est un foncteur. Les lemmes 2.10 et 2.11 peuvent alors être traduits de la façon suivante :

Lemme 2.12. — *L'homomorphisme* $K_{r+1}^*(\lambda) : K_{r+1}^*(A) \to K_{r+1}^*(A[X])$ *est un isomorphisme.*

Lemme 2.13. — *Pour tout* $r \in \mathbf{N}$, $Un_r(A) = F_r(A)$.

Corollaire. — *On a* $K_{r+1}(A) = K_{r+1}^*(A)$ *et l'application canonique*

$$K_{r+1}(A) \to K_{r+1}(A[X])$$

est un isomorphisme.

3. La théorie relative.

3.1. Les foncteurs L_i. — Désignons par $\mathcal{H}_c$ la catégorie dérivée de $\mathcal{R}_c$, i. e. les objets de $\mathcal{H}_c$ sont les morphismes de $\mathcal{R}_c$ et un morphisme $\varphi \to \varphi'$ dans $\mathcal{H}_c$, où $\varphi : A \to B$ et $\varphi' : C \to D$ sont deux morphismes de $\mathcal{R}_c$, est une paire de morphismes (f, g) de $\mathcal{R}_c$ rendant commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\varphi} & B \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g} \\ C & \xrightarrow{\varphi'} & D \end{array}$$

On va définir les foncteurs $K_i^D : \mathcal{H}_c \to \mathcal{A}_b$, appelés les *foncteurs* K_i *relatifs*, et construire, pour tout morphisme $\varphi : A \to B$ de $\mathcal{R}_c$, une suite exacte reliant $K_i^D(\varphi)$, $K_i(A)$ et $K_i(B)$.

Tout d'abord, on définit les foncteurs $L_i : \mathcal{H}_c \to Cat$. Pour tout objet $\varphi \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{H}_c$, $\varphi : A \to B$, $L_i(\varphi)$ est une catégorie dont les objets sont les triples (m, α, m') tels que :

a. $m, m' \in \mathrm{Ob}\,T_i(A)$;

b. $z_{i,A}(m) = z_{i,A}(m')$, où $z_{i,A} = \varphi_{i,A} . \rho_{i,A}$;

c. Si l'on pose $mB = T_i(\varphi)(m)$, $\alpha : mB \to m'B$ est un isomorphisme de la catégorie $T_i(B)$.

Un morphisme $(m, \alpha, m') \to (l, \beta, l')$ de la catégorie $L_i(\varphi)$ est une paire de morphismes (λ, μ) de $T_i(A)$, $\lambda : m \to l$, $\mu : m' \to l'$, rendant commutatif le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} mB \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\lambda B"'] & m'B \arrow[d, "\mu B"] \\ lB \arrow[r, "\beta"] & l'B \end{tikzcd}$$

Soit $(f, g) : \varphi \to \varphi'$ un morphisme de $\mathcal{H}_c$ et considérons le foncteur $L_i(f, g) : L_i(\varphi) \to L_i(\varphi')$ défini par

$$L_i(f, g)\,(m, \alpha, m') = (T_i(f)\,(m),\, T_i(g)\,(\alpha),\, T_i(f)\,(m')),$$
$$L_i(f, g)\,(\lambda, \mu) = (T_i(f)\,(\lambda),\, T_i(f)\,(\mu)).$$

Il existe une somme dans $L_i(\varphi)$ définie par

$$(m, \alpha, m') \oplus (l, \beta, l') = (m \oplus l,\, \alpha \oplus \beta,\, m' \oplus l')$$

et celle-ci est une somme au sens catégorie. On peut définir dans $\mathrm{Ob}\,L_i(\varphi)$ une structure de groupoïde en posant

$$(m, \alpha, l) . (l, \beta, p) = (m, \beta\alpha, p).$$

Il est clair que (m, ι, m) [resp. (l, ι, l)] est l'identité à gauche (resp. à droite) pour (m, α, l), où ι est l'application identique.

On appellera *identité* tout objet de la forme (m, ι, m) et *automorphisme*, tout objet de la forme (m, α, m). Dans le cas d'un automorphisme (t, α, t), où $t = t^n_{i,A}$ est trivial, α est un automorphisme de $tB = t^n_{i,B}$, donc il peut être identifié à une matrice de $D(n, i, B)$.

Les groupes $K^n_i(\varphi)$ naissent de cette catégorie, les identités de $L_i(\varphi)$ s'envoyant sur le zéro de $K^n_i(\varphi)$. L'application canonique $\mathrm{Ob}\,L_i(\varphi) \to K^n_i(\varphi)$ étant additive, tout objet (m, α, l) est équivalent à un objet de la forme $(m, \alpha, l) \oplus (l', \iota, l')$ et l'on peut donc prendre l' tel que $l \oplus l' = t$ soit un objet trivial de $T_i(A)$. Si l'on pose $m' = m \oplus l'$, alors (m, α, l) est équivalent à (m', α, t), où t est trivial.

3.2. Déformations. — On notera $L^n_{i,A}$ le sous-ensemble de $\mathrm{Ob}\, L_i(A)$ formé d'objets $(l, \alpha, t^n_{i,A})$, où l'on pose $L_i(A) = L_i(\varphi)$, φ étant un objet de $\mathcal{H}_c$ de source A et de but B.

Soient $\sigma = (m, \alpha, t^n_{i,A})$ et $\sigma' = (m', \alpha', t^n_{i,A})$ deux objets de $L^n_{i,A}$. On dira que σ se *déforme* en σ' s'il existe un automorphisme ψ de $t^n_{i,B[X_{i+1}]}$ (lequel peut être identifié à une matrice de $D(n, i, B[X_{i+1}]))$ et un isomorphisme $\theta : m \to m'$ de $T_i(A)$ tels que :

a. il existe $\gamma \in \mathrm{Aut}(t^n_{i,A})$, avec $\gamma B = \psi(0)$;

b. le diagramme

$$\begin{array}{ccc} mB & \xrightarrow{\alpha} & t^n_{i,B} \\ {\scriptstyle \theta B}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \psi(1)} \\ m'B & \xrightarrow{\alpha'} & t^n_{i,B} \end{array} \tag{2}$$

est commutatif.

La paire (ψ, θ) s'appellera une *déformation* et l'on notera $\sigma \underset{\sim}{\to} \sigma'$ le fait que σ se déforme en σ'.

La notion de déformation peut être interprétée de la façon suivante : si l'on pose

$$\beta(X_{i+1}) = \psi^{-1}(\alpha' B(X_{i+1}))\,(\theta B(X_{i+1})),$$

le diagramme

$$\begin{array}{ccc} mB[X_{i+1}] & \xrightarrow{\beta(X_{i+1})} & t^n_{i,B[X_{i+1}]} \\ {\scriptstyle \theta B(X_{i+1})}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \psi} \\ m'B[X_{i+1}] & \xrightarrow{\alpha' B(X_{i+1})} & t^n_{i,B[X_{i+1}]} \end{array}$$

est commutatif.

Pour $X_{i+1} = 1$, on a le diagramme (2) et pour $X_{i+1} = 0$, on a un isomorphisme $(m, \beta(0), t^n_{i,A}) \xrightarrow{\sim} (m', \alpha', t^n_{i,A})$, car $\psi(0) = \gamma B$. Donc, l'objet $(m, \alpha, t^n_{i,A})$ et la paire (ψ, θ) représentent une sorte de déformation homotopique d'un isomorphisme.

Lemme 3.1. — *Si* $\sigma \simeq \sigma'$, $\tau \simeq \tau'$ *et* $\sigma \underset{\sim}{\to} \tau'$, *alors* $\sigma \underset{\sim}{\to} \tau$.

En effet, posons

$$\sigma = (l, \alpha, t), \qquad \sigma' = (l', \alpha', t), \qquad \tau = (m, \beta, t) \qquad \text{et} \qquad \tau' = (m', \beta', t),$$

où $t = t^n_{r,A}$. Par définition, il existe des isomorphismes

$$\gamma_1 : l \to l', \qquad \gamma_2 : m' \to m, \qquad \theta : l' \to m' \qquad \text{et} \qquad \lambda_0, \lambda_1, \lambda_2 : t \to t$$

dans $T_r(A)$ et un automorphisme $\varphi \in \mathrm{Aut}(t^n_{r,\,B[X_{r+1}]})$ tels que $\varphi(0) = \lambda_0 B$ et les diagrammes

$$\begin{tikzcd}
lB \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\gamma_1 B"'] & t^n_{r,\,B} \arrow[d, "\lambda_1 B"] \\
l'B \arrow[r, "\alpha'"] \arrow[d, "0B"'] & t^n_{r,\,B} \arrow[d, "\varphi(1)"] \\
m'B \arrow[r, "\beta'"] \arrow[d, "\gamma_2 B"'] & t^n_{r,\,B} \arrow[d, "\lambda_2 B"] \\
mB \arrow[r, "\beta"] & t^n_{r,\,B}
\end{tikzcd}$$

soient commutatifs.

Donc, pour

$$\psi = (\lambda_2 B(X_r))\, \varphi\, (\lambda_1 B(X_r)) \in \mathrm{Aut}(t^n_{r,\,B[X]}) \qquad \text{et} \qquad \lambda = \lambda_2 \lambda_0 \lambda_1,$$

la paire (ψ, λ) est une déformation $\sigma \underset{\sim}{\rightarrow} \tau$.

LEMME 3.2. — *La notion de déformation induit sur $L^n_{r,\,A}$ une relation d'équivalence.*

On remarque que $\sigma \underset{\sim}{\rightarrow} \sigma$ est trivial, car c'est la déformation (id., id.). Si $(\varphi, \theta) : \sigma \underset{\sim}{\rightarrow} \sigma'$, alors $(\varphi^{-1}, \theta^{-1}) : \sigma' \underset{\sim}{\rightarrow} \sigma$. Finalement, si

$$(\varphi_1, \theta_1) : \quad \sigma \underset{\sim}{\rightarrow} \sigma' \qquad \text{et} \qquad (\varphi_2, \theta_2) : \quad \sigma' \underset{\sim}{\rightarrow} \sigma''$$

et si l'on pose $\psi = \varphi_2 \varphi_1$ et $\lambda = \theta_2 \theta_1$, alors $(\psi, \lambda) : \sigma \underset{\sim}{\rightarrow} \sigma''$.

LEMME 3.3. — *Si $\sigma = (l, \alpha, t)$ et $\varepsilon = (t, \beta, t)$ sont deux objets de $L^n_{r,\,A}$ et si l'on considère la déformation $(\varphi, 1) : \varepsilon \underset{\sim}{\rightarrow} (t, \iota, t)$, alors $\sigma\varepsilon \underset{\sim}{\rightarrow} \sigma$.*

Il suffit de voir que la déformation $(\varphi, 1)$ nous donne $\varphi(0) = 1$, $\varphi(1) = \beta$, donc, le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
lB \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\mathrm{id.}"'] & t^n_{r,\,B} \arrow[d, "\varphi(1) = \beta"] \\
lB \arrow[r, "\beta\alpha"] & t^n_{r,\,B}
\end{tikzcd}$$

LEMME 3.4. — *Si $\sigma = (t, \beta, t)$, $\beta \in E(n, B)$, il existe une déformation $(\varphi, 1) : \sigma \underset{\sim}{\rightarrow} (t, \iota, t)$.*

On prend $\varphi^{-1} = \beta(X)$, où $\beta(X)$ a été défini dans le lemme 2.5.

LEMME 2.5. — *Si $\sigma \underset{\sim}{\rightarrow} \sigma'$ et $\tau \underset{\sim}{\rightarrow} \tau'$, alors $\sigma \oplus \tau \underset{\sim}{\rightarrow} \sigma' \oplus \tau'$.*

En effet, si $(\varphi_1, \gamma_1) : \sigma \underset{\sim}{\rightarrow} \sigma'$ et $(\varphi_2, \gamma_2) : \tau \underset{\sim}{\rightarrow} \tau'$, alors

$$(\varphi_1 \oplus \varphi_2, \gamma_1 \oplus \gamma_2) : \quad \sigma \oplus \tau \rightarrow \sigma' \oplus \tau'.$$

3.3. Les foncteurs K_r^D. — Soit G un groupe abélien. On dira qu'une application $f : \mathrm{Ob}\, L_r(\varphi) \to G$ est *additive* (resp. *multiplicative*) si $f(\sigma \oplus \sigma') = f(\sigma) \oplus f(\sigma')$ [resp. $f(\sigma\sigma') = f(\sigma) \oplus f(\sigma')$, où $\sigma\sigma'$ est le produit défini dans 3.1], quels que soient σ et σ' dans $\mathrm{Ob}\, L_r(\varphi)$. De plus, on dira que f est *invariante par déformation* si $\sigma \underset{\sim}{\to} \sigma'$ entraîne $f(\sigma) = f(\sigma')$.

On veut construire une paire $(\Lambda_r(\varphi), K_r^D(\varphi))$ formée d'un groupe abélien $K_r^D(\varphi)$ et d'une application $\Lambda_r(\varphi) : \mathrm{Ob}\, L_r(\varphi) \to K_r^D(\varphi)$ qui soit additive, multiplicative et invariante par déformation. De plus, la paire $(\Lambda_r(\varphi), K_r^D(\varphi))$ doit résoudre le problème universel correspondant.

Le groupe $K_r^D(\varphi)$ est obtenu en faisant le quotient du groupe abélien libre engendré par $\mathrm{Ob}\, L_r(\varphi)$ par le sous-groupe engendré par les relations $\sigma \oplus \sigma' - \sigma - \sigma'$, $\sigma\sigma' - \sigma - \sigma'$ et $\sigma - \sigma'$ si $\sigma \underset{\sim}{\to} \sigma'$, σ et σ' parcourant $\mathrm{Ob}\, L_r(\varphi)$. On prend pour $\Lambda_r(\varphi)$ l'application canonique $\mathrm{Ob}\, L_r(\varphi) \to K_r^D(\varphi)$.

Si $(f, g) : \varphi \to \varphi'$ est un morphisme de $\mathcal{H}_c$, on considère le foncteur $L_r(f, g) : L_r(\varphi) \to L_r(\varphi')$. Il est clair que

$$L_r(f, g)\,(\sigma \oplus \sigma') = L_r(f, g)\,(\sigma) \oplus L_r(f, g)\,(\sigma'),$$
$$L_r(f, g)\,(\sigma\sigma') = L_r(f, g)\,(\sigma)\, L_r(f, g)\,(\sigma')$$

et

$$L_r(f, g)\,(\sigma) \underset{\sim}{\to} L_r(f, g)\,(\sigma')$$

si $\sigma \underset{\sim}{\to} \sigma'$, σ et σ' parcourant $\mathrm{Ob}\, L_r(\varphi)$. Donc, l'application composée

$$\Lambda_r(\varphi').L_r(f, g) : \quad \mathrm{Ob}\, L_r(\varphi) \to \mathrm{Ob}\, L_r(\varphi') \to K_r^D(\varphi')$$

est additive, multiplicative et invariante par déformation. Elle induit donc un unique homomorphisme de groupes abéliens

$$K_r^D(f, g) : \quad K_r^D(\varphi) \to K_r^D(\varphi').$$

C'est trivial de montrer que $K_r^D : \mathcal{H}_c \to \mathcal{A}_b$ est un foncteur.

3.4. Le groupe $G_r(\varphi)$. — Dans l'ensemble $\mathrm{Ob}\, L_r(\varphi)$, on dira qu'un objet $\sigma = (l, \alpha, l')$ est *équivalent* à un objet $\tau = (m, \beta, m')$, et l'on note $\sigma \sim \tau$, s'il existe des identités, $z, z' \in \mathrm{Ob}\, L_r(\varphi)$ et des isomorphismes

$$\sigma \oplus z \simeq \sigma_1 = (l_1, \alpha_1, l'_1), \qquad \tau \oplus z' \simeq \tau_1 = (m_1, \beta_1, m'_1)$$

tels que $\sigma_1 \underset{\sim}{\to} \tau_1$. Il est clair que si $\sigma \simeq \tau$, alors $\sigma \sim \tau$.

On veut montrer que $\sim$ est une relation d'équivalence et que la somme directe dans $L_r(\varphi)$ induit une structure de groupe dans l'ensemble quotient $\mathrm{Ob}\, L_r(\varphi)/\sim$.

Lemme 3.6. — *La relation $\sim$ est une relation d'équivalence dans l'ensemble* $\mathrm{Ob}\, L_r(\varphi)$.

Si $\sigma = (l, \alpha, l') \in \mathrm{Ob}\,\mathrm{L}_r(\varphi)$, on sait qu'il existe un objet $m \in \mathrm{Ob}\,\mathrm{T}_r(\varphi)$ et un objet trivial $t \in \mathrm{Ob}\,\mathrm{T}_r(\mathrm{A})$ tels que $l' \oplus m = t$. Donc

$$(l, \alpha, l') \oplus (m, \iota, m) = (l \oplus m, \alpha \oplus \iota, t) \quad \text{et} \quad (l \oplus m, \alpha \oplus \iota, t) \underset{\sim}{\rightarrow} (l \oplus m, \alpha \oplus \iota, t)$$

(*cf.* lemme 3.2). Ceci nous montre que $\sigma \sim \sigma$, quel que soit $\sigma \in \mathrm{Ob}\,\mathrm{L}_r(\varphi)$.

Si $\sigma \sim \sigma'$, alors $\sigma' \sim \sigma$. En effet, si $\sigma \sim \sigma'$, il existe des identités z, $z' \in \mathrm{Ob}\,\mathrm{L}_r(\varphi)$ telles que $\sigma \oplus z \underset{\sim}{\rightarrow} \sigma' \oplus z'$. D'après le lemme 3.2, $\sigma' \oplus z' \underset{\sim}{\rightarrow} \sigma \oplus z$ et ceci nous montre que $\sigma' \sim \sigma$.

Soient $\sigma \sim \sigma'$ et $\sigma' \sim \sigma''$. Si

$$\sigma = (l, \alpha, m), \qquad \sigma' = (l', \alpha', m') \qquad \text{et} \qquad \sigma'' = (l'', \alpha'', m''),$$

l'hypothèse entraîne l'existence d'identités $z_j = (h_j, \iota, h_j)$ $(1 \leqq j \leqq 4)$ et les isomorphismes

$$\sigma \oplus z_1 \simeq (g, \gamma, t), \qquad \sigma' \oplus z_2 \simeq (g_1, \gamma_1, t)$$
$$\sigma' \oplus z_3 \simeq (g', \gamma', t') \qquad \text{et} \qquad \sigma'' \oplus z_4 \simeq (g'_1, \gamma'_1, t')$$

tels que

$$(g, \gamma, t) \underset{\sim}{\rightarrow} (g_1, \gamma_1, t) \qquad \text{et} \qquad (g', \gamma', t') \underset{\sim}{\rightarrow} (g'_1, \gamma'_1, t').$$

Dans les notations employées ici, t veut dire un certain $t^n_{r,\mathrm{A}}$ et t', $t^{n'}_{r,\mathrm{A}}$. Il est clair que, en additionnant une identité convenable, on peut supposer $n = n'$, donc $t = t'$.

Les isomorphismes $\sigma' \oplus z_2 \simeq (g_1, \gamma_1, t)$ et $\sigma' \oplus z_3 \simeq (g', \gamma', t)$ entraînent $m' \oplus h_2 \simeq t$ et $m' \oplus h_3 \simeq t$. Donc, $\wp_{r,\mathrm{A}}(h_2) = \wp_{r,\mathrm{A}}(h_3)$ et d'après le lemme 2.3, il existe un objet trivial t_1 tel que $h_2 \oplus t_1 \simeq h_3 \oplus t_1$. En additionnant (t_1, ι, t_1) aux quatre objets, s'il le faut, on peut supposer $h_2 = h_3$, donc $z_2 = z_3$. Finalement, $\sigma \oplus z_1 \underset{\sim}{\rightarrow} \sigma' \oplus z_2 \underset{\sim}{\rightarrow} \sigma'' \oplus z_4$. Le lemme 3.2 nous montre alors que $\sigma \sim \sigma''$.

LEMME 3.7. — *La somme dans* $\mathrm{Ob}\,\mathrm{L}_r(\varphi)$ *induit sur l'ensemble quotient* $\mathrm{G}_r(\varphi) = \mathrm{Ob}\,\mathrm{L}_r(\varphi)/\sim$ *une structure de groupe abélien.*

On remarque, tout d'abord, que si $\sigma \sim \sigma'$ et $\tau \sim \tau'$, alors $\sigma \oplus \tau \sim \sigma' \oplus \tau'$. Ceci suit directement de la définition de la relation d'équivalence $\sim$ et du lemme 3.5. La somme de $\mathrm{Ob}\,\mathrm{L}_r(\varphi)$ induit donc une loi de composition sur $\mathrm{G}_r(\varphi)$ par laquelle $\mathrm{G}_r(\varphi)$ devient un monoïde commutatif. Il suffit donc de démontrer l'existence de l'inverse.

On désignera par -1 l'automorphisme de $t^n_{r,\mathrm{B}}$ correspondant à la matrice $-\mathrm{I}$ de $\mathrm{D}(n, r, \mathrm{B})$, d'après l'isomorphisme $\mathrm{Aut}(t^n_{r,\mathrm{B}}) \rightarrow \mathrm{D}(n, r, \mathrm{B})$, où I désigne la matrice unité de $\mathrm{D}(n, r, \mathrm{B})$. Posons $t = t^n_{r,\mathrm{A}}$ et soit (l, α, t) un représentant d'un élément de $\mathrm{G}_r(\varphi)$.

Soient $-\alpha^{-1} = \alpha^{-1}.(-1)$ et $\sigma' = (t, -\alpha^{-1}, l)$. On a

$$\sigma \oplus \sigma' = (l \oplus t, \alpha \oplus (-\alpha^{-1}), t \oplus l).$$

Puisque $l\mathrm{B} \simeq t\mathrm{B}$, alors $\alpha : l\mathrm{B} \to t\mathrm{B}$ peut être représenté par une matrice, notée encore α, donc

$$\sigma \oplus \sigma' \simeq \left(l \oplus t, \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ -\alpha^{-1} & 0 \end{pmatrix}, l \oplus t \right) \qquad \text{et} \qquad \mu = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ -\alpha^{-1} & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{D}(2n, r, \mathrm{A}).$$

On peut écrire $\mu = \beta_1 \ldots \beta_s$, où les β_i sont des matrices élémentaires. On note $\mu(\mathrm{X}) = \beta_1(\mathrm{X}) \ldots \beta_s(\mathrm{X})$, les $\beta_i(\mathrm{X})$ ayant été définies dans le lemme 2.5. Il s'ensuit que la paire $(\mu(\mathrm{X}), 1)$ est la déformation

$$(l \oplus t, \mu, l \oplus t) \underset{\sim}{\to} (l \oplus t, 1, l \oplus t).$$

C'est évident que toutes les identités de $\mathrm{Ob}\, \mathrm{L}_r(\varphi)$ sont envoyées sur le zéro de $\mathrm{G}_r(\varphi)$.

3.5. L'isomorphisme naturel $\mathrm{K}_r^{\mathrm{D}}(\varphi) \to \mathrm{G}_r(\varphi)$.

Lemme 3.8. — *Soit* $\Lambda_r(\varphi) : \mathrm{Ob}\, \mathrm{L}_r(\varphi) \to \mathrm{K}_r^{\mathrm{D}}(\varphi)$.

(i) *Pour toute identité* $z = (m, \iota, m)$, $\Lambda_r(\varphi)(z) = 0$.

(ii) *Pour tout automorphisme* $\sigma = (m, \beta, m)$ *tel que* $m\mathrm{B} = t^n_{r,\mathrm{B}}$ *et* $\beta \in \mathrm{E}(n, \mathrm{B})$, *on a* $\Lambda_r(\varphi)(\sigma) = 0$.

En effet, étant donné que $zz = z$ et que $\Lambda_r(\varphi)$ est multiplicative, on a

$$\Lambda_r(\varphi)(z) = \Lambda_r(\varphi)(zz) = \Lambda_r(\varphi)(z) + \Lambda_r(\varphi)(z).$$

Donc, $\Lambda_r(\varphi)(z) = 0$.

D'après les hypothèses de (ii), il existe un objet h tel que $m \oplus h = t^n_{r,\mathrm{A}}$. Donc,

$$\Lambda_r(\varphi)(m, \beta, m) = \Lambda_r(\varphi)((m, \beta, m) \oplus (h, \iota, h)) = \Lambda_r(\varphi)(t, \gamma, t),$$

où $t = t^n_{r,\mathrm{A}}$ et $\gamma = \beta \oplus \iota \in \mathrm{E}(n, \mathrm{B})$. Mais on sait que $(t, \gamma, t) \underset{\sim}{\to} (t, \iota, t)$ et $\Lambda_r(\varphi)$ étant invariante par déformation, il s'ensuit que $\Lambda_r(\varphi)(m, \beta, m) = 0$.

On peut maintenant construire l'isomorphisme $h_r(\varphi) : \mathrm{K}_r^{\mathrm{D}}(\varphi) \to \mathrm{G}_r(\varphi)$.

Soit $\mathrm{R}_r(\varphi) : \mathrm{Ob}\, \mathrm{L}_r(\varphi) \to \mathrm{G}_r(\varphi)$ l'application canonique. Elle est, de toute évidence, additive et invariante par déformation. On veut montrer que $\mathrm{R}_r(\varphi)$ est aussi multiplicative.

Soient $\sigma = (l, \alpha, s)$ et $\sigma' = (t, \beta, m)$ deux objets de $\mathrm{L}_r(\varphi)$. En additionnant une identité, s'il le faut, on peut supposer que $s = t = t^n_{r,\mathrm{A}}$. D'autre part, il existe un isomorphisme évident $\sigma \simeq -\sigma = (l, -\alpha, s)$. Ceci étant, on va comparer

$$\sigma\sigma' = (l, \beta\alpha, m) \qquad \text{et} \qquad -\sigma \oplus \sigma' = (l \oplus t, -\alpha \oplus \beta, t \oplus m).$$

Si $z = (t, \iota, t)$, on a $\sigma\sigma' \oplus z = (l \oplus t, \beta\alpha \oplus \iota, m \oplus t)$ et l'on peut supposer que $m \oplus t \simeq t^{n'}_{r,\mathrm{A}}$, n' étant un entier convenable. Maintenant, il suffit tout simplement de montrer qu'il existe une déformation $-\sigma \oplus \sigma' \underset{\sim}{\to} \sigma\sigma' \oplus z$.

Or, en choisissant les isomorphismes $lB \to tB$ et $mB \to tB$, α et β peuvent être représentés par des matrices. Donc, $-\alpha \oplus \beta$ (resp. $\beta\alpha \oplus \iota$) peut être représenté par la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & \beta \\ -\alpha & 0 \end{pmatrix} \qquad \left[\text{resp.} \begin{pmatrix} \beta\alpha & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right].$$

On sait qu'il existe une matrice $\mu \in E(n, B) \cap D(n, r, B)$ telle que

$$\begin{pmatrix} 0 & \beta \\ -\alpha & 0 \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} \beta\alpha & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et ceci nous montre que $(\mu(X), 1)$ est la déformation cherchée, où $\mu(X)$ a été définie dans le lemme 3.7.

On a ainsi montré que $R_r(\varphi)$ est multiplicative.

D'après la propriété universelle du couple $(\Lambda_r(\varphi), K_r^D(\varphi))$, il existe un unique homomorphisme de groupes abéliens $h_r(\varphi) : K_r^D(\varphi) \to G_r(\varphi)$ rendant commutatif le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Ob}\, L_r(\varphi) \arrow[r, "R_r(\varphi)"] \arrow[d, "\Lambda_r(\varphi)"'] & G_r(\varphi) \\ K_r^D(\varphi) \arrow[ur, "h_r(\varphi)"'] & \end{tikzcd}$$

THÉORÈME 3.1. — *L'homomorphisme* $h_r(\varphi) : K_r^D(\varphi) \to G_r(\varphi)$ *est un isomorphisme de groupes abéliens.*

On définit une application $h'_r(\varphi) : G_r(\varphi) \to K_r^D(\varphi)$ par

$$h'_r(\varphi)\,(R_r(\varphi)\,(l, \alpha, m)) = \Lambda_r(\varphi)\,(l, \alpha, m).$$

Il suffit de démontrer que cette application est bien définie, car elle est l'inverse de $h_r(\varphi)$.

En effet, si $\sigma \sim \sigma'$, il existe des identités z et z' et des isomorphismes $\sigma \oplus z \simeq \tau$, $\sigma' \oplus z' \simeq \tau'$ tels que $\tau \underset{\sim}{\to} \tau'$. Donc,

$$\Lambda_r(\varphi)\,(\sigma) = \Lambda_r(\varphi)\,(\sigma \oplus z) = \Lambda_r(\varphi)\,(\tau) = \Lambda_r(\varphi)\,(\tau') = \Lambda_r(\varphi)\,(\sigma' \oplus z') = \Lambda_r(\varphi)\,(\sigma').$$

4. **Suites exactes.**

4.1. LE FONCTEUR Σ. — Dans ce paragraphe, on va montrer l'existence d'un foncteur Σ défini dans la catégorie $\mathcal{H}_c$ à valeurs dans la catégorie des suites exactes infinies de groupes abéliens.

Si $\varphi \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{H}_c$, $\varphi \in \mathrm{Hom}(A, B)$, on aura une suite exacte de groupes abéliens

$$\Sigma(\varphi) : \quad \ldots \longrightarrow K_{r+1}(B) \xrightarrow{\alpha_r} K_r^D(\varphi) \xrightarrow{\beta_r} K_r(A) \xrightarrow{K_r(\varphi)} K_r(B)$$
$$\xrightarrow{\alpha_{r-1}} K_{r-1}^D(\varphi) \longrightarrow \ldots \longrightarrow K_0^D(\varphi) \xrightarrow{\beta_0} K_0(A) \longrightarrow K_0(B),$$

où les applications α_r et β_r seront définies par la suite.

On doit montrer que cette suite est exacte et que si $(f, g) : \varphi \to \varphi'$ est un morphisme de $\mathcal{H}_c$, $\varphi' : A' \to B'$, on a une application $\Sigma(f, g)$: $\Sigma(\varphi) \to \Sigma(\varphi')$ entre suite exactes, i. e. le diagramme

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
\dots \longrightarrow & K_{r+1}(B) & \xrightarrow{\alpha_r} & K_r^D(\varphi) & \xrightarrow{\beta_r} & K_r(A) & \xrightarrow{K_r(\varphi)} & K_r(B) & \xrightarrow{\alpha_{r-1}} & K_{r-1}^D(\varphi) & \longrightarrow \dots \\
& \downarrow{\scriptstyle K_{r+1}(g)} & & \downarrow{\scriptstyle K_r^D(f,g)} & & \downarrow{\scriptstyle K_r(f)} & & \downarrow{\scriptstyle K_r(g)} & & \downarrow{\scriptstyle K_{r-1}^D(f,g)} & \\
\dots \longrightarrow & K_{r+1}(B') & \xrightarrow[\alpha_r]{} & K_r^D(\varphi') & \xrightarrow[\beta_r]{} & K_r(A') & \xrightarrow[K_r(\varphi')]{} & K_r(B') & \xrightarrow[\alpha_{r-1}]{} & K_{r-1}^D(\varphi') & \longrightarrow \dots
\end{array}$$

commute.

4.2. Les applications β_r. — On rappelle que les objets de $L_r(\varphi)$ sont les triples (l, α, l'), avec

$$l, l' \in \operatorname{Ob} T_r(A), \quad z_{r,A}(l) = z_{r,A}(l')$$

et $\alpha : T_r(\varphi)(l) \to T_r(\varphi)(l')$ est un isomorphisme.

L'application $\overline{\beta}_r : \operatorname{Ob} L_r(\varphi) \to K_r(A)$ définie par

$$\overline{\beta}_r(l, \alpha, l') = v_{r,A}(l) - v_{r,A}(l')$$

est additive, multiplicative et invariante par déformation. Il existe alors un unique homomorphisme de groupes abéliens $\beta_r : K_r^D(\varphi) \to K_r(A)$ rendant commutatif le diagramme

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Ob} L_r(\varphi) \arrow[r, "\overline{\beta}_r"] \arrow[d, "\Lambda_r(\varphi)"'] & K_r(A) \\
K_r^D(\varphi) \arrow[ur, "\beta_r"'] &
\end{tikzcd}$$

Un calcul direct de β_r, pour $r \geqq 1$, peut être obtenu comme suit : on considère les isomorphismes $h_r(\varphi) : K_r^D(\varphi) \to G_r(\varphi)$ (*cf.* 3.5) et θ_r : $K_r(A) \to P_r(A)$ (*cf.* 2.3) et l'on définit une application $\beta'_r : G_r(\varphi) \to P_r(A)$ rendant commutatif le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
K_r^D(\varphi) \arrow[r, "\beta_r"] \arrow[d, "h_r(\varphi)"'] & K_r(A) \arrow[d, "\theta_r"] \\
G_r(\varphi) \arrow[r, "\beta'_r"] & P_r(A)
\end{tikzcd}$$

Un élément de $G_r(\varphi)$ est une classe de triples, parmi lesquelles il existe toujours une de la forme $(l, \alpha, t^n_{r,A})$, avec $z_{r,A}(l) = z_{r,A}(t^n_{r,A})$.

Si $s_r : \operatorname{Ob} T_r(A) \to P'_r(A)$ est l'application définie dans 2.2,

$$s_r(l) \in P_r(A) \subset P'_r(A) \quad \text{pour tout } l \in \operatorname{Ob} T_r(A).$$

En d'autres termes, on doit montrer que si $l = (l', \alpha_0, \alpha_1)$, il existe des objets triviaux t, t' avec $l' \oplus t \simeq t'$.

En effet, de $z_{r,A}(l) = z_{r,A}(t^n_{r,A})$ et en rappelant que $t^n_{r,A} = (t^n_{r-1,A[X_r]}, \iota, \iota)$, on a

$$\nu_{r-1,A[X_r]}(l') = \nu_{r-1,A[X_r]}(t^n_{r-1,A[X_r]}).$$

Le lemme 2.3 nous dit alors qu'il existe un objet trivial t tel que

$$l' \oplus t \simeq t^n_{r-1,A[X_r]} \oplus t,$$

et l'on a ce qu'il nous faut.

Un calcul nous montre que $s_r(l)$ est indépendant du représentant $(l, \alpha, t^n_{r,A})$ choisi, pour un élément de $G_r(\varphi)$. Ceci induit donc un homomorphisme de groupes abéliens $\beta'_r : G_r(\varphi) \to P_r(A)$. La commutativité du diagramme ci-dessus est maintenant triviale.

4.3. Les applications α_r. — Si $x \in P_{r+1}$, étant donné que $P_{r+1}(B)$ est canoniquement isomorphe à $K_{r+1}(B)$, on peut choisir un élément

$$(t^n_{r,B[X_r]}, \alpha, \beta) \in \operatorname{Ob} T_{r+1}(B)$$

de telle sorte que l'on ait

$$s_{r+1}(t^n_{r,B[X_r]}, \alpha, \beta) = x.$$

Puisqu'on a fixé des isomorphismes $\tilde{\pi}_j(t^n_{r,B[X_r]}) \to t^n_{r,B}$ $(j = 0, 1)$, alors

$$\alpha\beta^{-1} : \quad t^n_{r,B} \to t^n_{r,B}$$

et l'on posera

$$\alpha_r(x) = \Lambda_r(\varphi)\ (t^n_{r,A}, \alpha\beta^{-1}, t^n_{r,A}) \in K^D_r(\varphi).$$

Il faut démontrer que $\alpha_r : P_{r+1}(B) \to K^D_r(\varphi)$ est bien définie. Soit

$$s_{r+1}(t^n_{r,B[X_r]}, \alpha, \beta) = s_{r+1}(t^{n'}_{r,B[X_r]}, \alpha', \beta').$$

Étant donné qu'il s'agit de triples triviaux tels que

$$(t^n_{r,B[X_r]}, \alpha, \beta) \oplus t^k_{r+1,B} \simeq (t^{n'}_{r,B[X_r]}, \alpha', \beta') \oplus t^{k'}_{r+1,B},$$

il suffit de démontrer que

$$\Lambda_r(\varphi)\ (t^n_{r,A}, \alpha\beta^{-1}, t^n_{r,A}) = \Lambda_r(\varphi)\ (t^n_{r,A} \oplus t^k_{r,A}, (\alpha \oplus \iota)(\beta \oplus \iota)^{-1}\ t^n_{r,A} \oplus t^k_{r,A}).$$

Or, $\Lambda_r(\varphi)$ étant additive, on a

$$\begin{aligned}
&\Lambda_r(\varphi)\ ((t^n_{r,A}, \alpha\beta^{-1}, t^n_{r,A}) \oplus (t^k_{r,A}, \iota, t^k_{r,A}))\\
&\quad = \Lambda_r(\varphi)\ (t^n_{r,A}, \alpha\beta^{-1}, t^n_{r,A}) + \Lambda_r(\varphi)\ (t^k_{r,A}, \iota, t^k_{r,A})\\
&\quad = \Lambda_r(\varphi)\ (t^n_{r,A}, \alpha\beta^{-1}, t^n_{r,A}),
\end{aligned}$$

car $\Lambda_r(\varphi)\ (t^k_{r,A}, \iota, t^k_{r,A}) = 0$, une fois qu'il s'agit d'une identité.

Deuxième chose à démontrer : si

$$(t^n_{r,B[X_r]}, \alpha, \beta) \simeq (t^n_{r,B[X_r]}, \alpha', \beta'),$$

alors

$$\Lambda_r(\varphi)\ (t^n_{r,A}, \alpha\beta^{-1}, t^n_{r,A}) = \Lambda_r(\varphi)\ (t^n_{r,A}, \alpha'\beta'^{-1}, t^n_{r,A}).$$

En effet, désignons par (ψ, a) l'isomorphisme plus haut mentionné, i. e. $\psi : t^n_{r, B[X_r]} \to t^n_{r, B[X_r]}$ est un isomorphisme rendant commutatif les diagrammes :

$$\begin{array}{ccc} t^n_{r,B} & \xrightarrow{\psi(0)} & t^n_{r,B} \\ \alpha\downarrow & & \downarrow\alpha' \\ t^n_{r,B} & \xrightarrow{a} & t^n_{r,B} \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} t^n_{r,B} & \xrightarrow{\psi(1)} & t^n_{r,B} \\ \beta\downarrow & & \downarrow\beta' \\ t^n_{r,B} & \xrightarrow{a} & t^n_{r,B} \end{array}$$

Il est clair que $\alpha' = a\alpha\psi(0)^{-1}$ et $\beta' = a\beta\psi(1)^{-1}$, donc

$$(t^n_{r,A}, \alpha'\beta'^{-1}, t^n_{r,A}) = (t^n_{r,A}, a\alpha\psi(0)^{-1}\psi(1)\beta^{-1}a^{-1}, t^n_{r,A}).$$

Il s'ensuit que

$$\begin{aligned} \Lambda_r(\varphi)\,(t^n_{r,A}, \alpha'\beta'^{-1}, t^n_{r,A}) = {} & \Lambda_r(\varphi)\,(t^n_{r,A}, aa^{-1}, t^n_{r,A}) \\ & + \Lambda_r(\varphi)\,(t^n_{r,A}, \alpha\beta^{-1}, t^n_{r,A}) + \Lambda_r(\varphi)\,(t^n_{r,A}, \psi(0)^{-1}\psi(1), t^n_{r,A}), \end{aligned}$$

une fois que $\Lambda_r(\varphi)$ est multiplicative et que $K^D_r(\varphi)$ est abélien.

On voit que $\Lambda_r(\varphi)\,(t^n_{r,A}, aa^{-1}, t^n_{r,A}) = 0$, car $aa^{-1} = \iota$ (identité). Montrons que

$$\Lambda_r(\varphi)\,(t^n_{r,A}, \psi(0)^{-1}\psi(1), t^n_{r,A}) = 0.$$

En effet, si l'on pose $\theta = \psi(0)^{-1}\psi \in \mathrm{Aut}(t^n_{r, B[X_r]})$, le diagramme

$$\begin{array}{ccc} t^n_{r,B} & \xrightarrow{\psi(0)^{-1}\psi(1)} & t^n_{r,B} \\ \mathrm{id.}\downarrow & & \downarrow\theta(1) \\ t^n_{r,B} & \xrightarrow{\mathrm{id.}} & t^n_{r,B} \end{array}$$

est commutatif et $\psi(0) = \mathrm{id.}$ [donc $\psi(0) = \gamma B$ avec $\gamma = \mathrm{id.}$]. Ceci nous montre que $(t^n_{r,A}, \psi(0)^{-1}\psi(1), t^n_{r,A})$ se déforme en une identité et notre assertion est démontrée, car $\Lambda_r(\varphi)$ est invariante par déformation.

4.4. Démonstration de l'exactitude. — On a ainsi construit une suite de groupes abéliens

$$\ldots \longrightarrow K_{r+1}(A) \xrightarrow{K_{r+1}(\varphi)} K_{r+1}(B) \xrightarrow{\alpha_r} K^D_r(\varphi) \xrightarrow{\beta_r} K_r(A) \xrightarrow{K_r(\varphi)} K_r(B) \longrightarrow \ldots$$

et l'on veut démontrer que cette suite est exacte.

4.4.1. *Exactitude en* $K_r(A) = P_r(A)$. — *a*. Montrons que

$$\mathrm{Im}(\beta_r) \subset \mathrm{Ker}(K_r(\varphi))$$

ou encore, $K_r(\varphi).\beta_r = 0$. Ceci est évidemment équivalent à $K_r(\varphi).\beta'_r = 0$. Or, si $x \in K^D_r(\varphi)$, $x = \Lambda_r(\varphi)\,(l, \alpha, t^n_{r,A})$, donc

$$(K_r(\varphi).\beta'_r)\,(x) = K_r(\varphi)\,(s_r(l)) = s_r(lB)).$$

Puisque $\alpha : lB \to t^n_{r,B}$ est un isomorphisme, alors

$$s_r(lB) = s_r(t^n_{r,B}) = 0.$$

b. On va montrer que $\mathrm{Ker}(K_r(\varphi)) \subset \mathrm{Im}(\beta_r)$. Considérons tout d'abord le cas $r > 0$. Soit $y \in K_r(A)$, $y = s_r(t^n_{r-1,A[X_r]}, \alpha, \beta)$ tel que $K_r(\varphi)(y) = 0$. On a

$$s_r(t^n_{r-1,A[X_r]}, \alpha B, \beta B) = 0.$$

Il existe alors un objet trivial $(t^k_{r-1,B[X_r]}, \iota, \iota)$ tel que

$$(t^{n+k}_{r-1,B[X_r]}, \alpha B \oplus \iota, \beta B \oplus \iota) \simeq (t^{n+k}_{r-1,B[X_r]}, \iota, \iota).$$

Soit θ cet isomorphisme et prenons

$$\sigma = ((t^{n+k}_{r-1,A[X_r]}, \alpha \oplus \iota, \beta \oplus \iota), \theta, (t^{n+k}_{r-1,A[X_r]}, \iota, \iota)) \in \mathrm{Ob}\, L_r(\varphi).$$

Il est clair que $z = \Lambda_r(\varphi)(\sigma) \in K^D_r(\varphi)$ et, par suite,

$$\beta_r(z) = \overline{\beta}_r(\sigma) = s_r(t^{n+k}_{r-1,A[X_r]}, \alpha \oplus \iota, \beta \oplus \iota) = s_r(t^n_{r-1,A[X_r]}, \alpha, \beta) = y.$$

Si $r = 0$ et si P est un A-module projectif de type fini tel que $s_0(P) = x \in K_0(A)$, alors $K_r(\varphi)(x) = 0$ entraîne l'existence de B-modules libres B^k, $B^{k'}$ tels que $(P \otimes_A B) \oplus B^k \simeq B^{k'}$. Soit θ cet isomorphisme. Si l'on prend $\sigma = (P \oplus A^k, \theta, A^{k'})$, alors $z = \Lambda_0(\varphi)(\sigma) \in K^D_0(\varphi)$, donc

$$\beta_0(z) = \overline{\beta}_0(\sigma) = s_0(P \oplus A^k) = s_0(P) = x.$$

4.4.2. *Exactitude en* $K^D_r(\varphi)$. — *a*. Montrons, tout d'abord, que $\beta_r . \alpha_r = 0$. Or, si $x \in K_{r+1}(B)$, alors

$$x = s_{r+1}(t^n_{r,B[X_r]}, \alpha, \iota),$$

d'après le lemme 1.4. Donc,

$$\beta_r \alpha_r(x) = \beta_r \Lambda_r(\varphi)(t^n_{r,A}, \alpha, t^n_{r,A}) = v_{r,A}(t^n_{r,A}) - v_{r,A}(t^n_{r,A}) = 0.$$

b. Soit $\sigma = (l, \alpha, t) \in \mathrm{Ob}\, L_r(\varphi)$ tel que $\beta_r \Lambda_r(\varphi)(\sigma) = 0$. Alors,

$$0 = \beta_r \Lambda_r(\varphi)(\sigma) = s_r(l) - s_r(t) = s_r(l), \qquad \text{car} \quad s_r(t) = 0.$$

Il existe alors un objet trivial $t^k_{r,A}$ vérifiant $l \oplus t^k_{r,A} = t^{k'}_{r,A}$, k' étant un entier convenable. Ceci nous montre que

$$\begin{aligned}
\Lambda_r(\varphi)(l, \alpha, t) &= \Lambda_r(\varphi)((l, \alpha, t) \oplus (t^k_{r,A}, \iota, t^k_{r,A})) \\
&= \Lambda_r(\varphi)(l \oplus t^k_{r,A}, \alpha \oplus \iota, t \oplus t^k_{r,A}) \\
&= \Lambda_r(\varphi)(t^{k'}_{r,A}, \alpha', t^{k'}_{r,A}) = \alpha_r(s_r(t^{k'}_{r,B[X_r]}, \alpha', \iota)),
\end{aligned}$$

où l'on pose $\alpha' = \alpha \oplus \iota$.

4.4.3. *Exactitude en* $K_{r+1}(B)$. — *a*. Si $x \in K_{r+1}(A) = P_{r+1}(A)$, x est de la forme

$$x = s_{r+1}(t^n_{r,A[X_r]}, \alpha, \iota).$$

Alors

$$\begin{aligned}\alpha_r \mathrm{K}_{r+1}(\varphi)\ (x) &= \alpha_r \mathrm{K}_{r+1}(\varphi)\ s_{r+1}(t^n_{r,\mathrm{A}[\mathrm{X}_r]},\ \alpha,\ \iota)\\ &= \alpha_r s_{r+1}(t^n_{r,\mathrm{B}[\mathrm{X}_r]},\ \alpha\mathrm{B},\ \iota) = \Lambda_r(\varphi)\ (t^n_{r,\mathrm{A}},\ \alpha\mathrm{B},\ t^n_{r,\mathrm{A}}).\end{aligned}$$

Le diagramme

$$\begin{tikzcd} t^n_{r,\mathrm{B}} \arrow[r, "\alpha\mathrm{B}"] \arrow[d, "\alpha\mathrm{B}"'] & t^n_{r,\mathrm{B}} \arrow[d, "\mathrm{id.}"] \\ t^n_{r,\mathrm{B}} \arrow[r, "\mathrm{id.}"] & t^n_{r,\mathrm{B}} \end{tikzcd}$$

étant commutatif, on en déduit que $(\alpha\mathrm{B}, \mathrm{id.})$ nous donnent un isomorphisme

$$(t^n_{r,\mathrm{A}},\ \alpha\mathrm{B},\ t^n_{r,\mathrm{A}}) \to (t^n_{r,\mathrm{A}},\ \iota,\ t^n_{r,\mathrm{A}}), \qquad \text{donc} \quad \Lambda_r(\varphi)\,(t^n_{r,\mathrm{A}},\ \alpha\mathrm{B},\ t^n_{r,\mathrm{A}}) = \Lambda_r(\varphi)\,(t^n_{r,\mathrm{A}},\ \iota,\ t^n_{r,\mathrm{A}}) = 0.$$

Ceci nous montre que $\alpha_r \mathrm{K}_{r+1}(\varphi)\,(x) = 0$.

b. Soit

$$y \in \mathrm{K}_{r+1}(\mathrm{B}), \qquad y = s_{r+1}(t^n_{r,\mathrm{B}[\mathrm{X}_r]},\ \beta,\ \iota),$$

tel que $\alpha_r(y) = 0$, i. e. tel que $\mathrm{R}_r(t^n_{r,\mathrm{A}},\ \beta,\ t^n_{r,\mathrm{A}}) = 0$.

On remarque que si $\omega \in \mathrm{Ob}\,\mathrm{L}_r(\varphi)$ est tel que $\mathrm{R}_r(\omega) = 0$, il existe une identité (m, ι, m), un isomorphisme

$$\omega \oplus (m,\ \iota,\ m) \overset{\theta\psi}{\simeq} (t^k_{r,\mathrm{A}},\ \gamma,\ t^k_{r,\mathrm{A}}), \tag{3}$$

et une déformation

$$(t^k_{r,\mathrm{A}},\ \gamma,\ t^k_{r,\mathrm{A}}) \underset{\sim}{\to} (t^k_{r,\mathrm{A}},\ \iota,\ t^k_{r,\mathrm{A}}).$$

Mais, si l'isomorphisme (3) est vérifié, il doit être vérifié pour un $m = t^{k'}_{r,\mathrm{A}}$ trivial et

$$\mathrm{R}_r(\omega \oplus (t^{k'}_{r,\mathrm{A}},\ \iota,\ t^{k'}_{r,\mathrm{A}})) = \alpha_r(y), \qquad \text{car} \quad s_{r+1}((t^n_{r,\mathrm{B}[\mathrm{X}_r]},\ \beta,\ \iota) \oplus (t^{k'}_{r,\mathrm{B}[\mathrm{X}_r]},\ \iota,\ \iota)) = y.$$

Soit $x \in \mathrm{K}_{r+1}(\mathrm{A})$. On peut écrire

$$x = s_{r+1}(t^k_{r,\mathrm{A}[\mathrm{X}_r]},\ \theta^{-1},\ \psi^{-1}),$$

donc

$$y + \mathrm{K}_{r+1}(\varphi)\ (x) = s_{r+1}(t^{k+k}_{r,\mathrm{B}[\mathrm{X}_r]},\ \beta \oplus \iota \oplus \theta^{-1}\mathrm{B},\ \iota \oplus \psi^{-1}\mathrm{B})$$

et le lemme de Whitehead nous montre que

$$s_{r+1}(t^{2k}_{r,\mathrm{B}[\mathrm{X}_r]},\ \beta \oplus \iota \oplus \theta^{-1}\mathrm{B},\ \iota \oplus \psi^{-1}\mathrm{B}) = s_{r+1}(t^k_{r,\mathrm{B}[\mathrm{X}_r]},\ (\beta \oplus \iota)\,.\,\theta^{-1}\mathrm{B},\ \psi^{-1}\mathrm{B}).$$

D'autre part, la paire $(\mathrm{id.}, \psi\mathrm{B})$ nous fournit un isomorphisme

$$(t^k_{r,\mathrm{B}[\mathrm{X}_r]},\ (\beta \oplus \iota)\,.\,\theta^{-1}\mathrm{B},\ \psi^{-1}\mathrm{B}) \simeq (t^k_{r,\mathrm{B}[\mathrm{X}_r]},\ \gamma,\ \iota),$$

comme on peut le voir, d'après la commutativité du diagramme

$$\begin{tikzcd} t^k_{r,\mathrm{B}} \arrow[r, "\beta\oplus\iota"] \arrow[d, "\theta\mathrm{B}"'] & t^k_{r,\mathrm{B}} \arrow[d, "\psi\mathrm{B}"] \\ t^k_{r,\mathrm{B}} \arrow[r, "\gamma"] & t^k_{r,\mathrm{B}} \end{tikzcd}$$

On a donc $y + \mathrm{K}_{r+1}(\varphi)(x) = s_{r+1}(t^k_{r,\mathrm{B}[\mathrm{X}_r]}, \gamma, \iota)$. De plus,

$$(t^k_{r,\mathrm{A}}, \gamma, t^k_{r,\mathrm{A}}) \rightleftarrows (t^k_{r,\mathrm{A}}, \iota, t^k_{r,\mathrm{A}}).$$

Il existe donc des automorphismes $\Gamma \in \mathrm{Aut}(t^k_{r,\mathrm{B}[\mathrm{X}_r]})$ et λ, $\rho \in \mathrm{Aut}(t^k_{r,\mathrm{A}})$, avec $\rho\mathrm{B} = \Gamma(o)$ et tels que le diagramme

$$\begin{tikzcd} t^k_{r,\mathrm{B}} \arrow[r, "\gamma"] \arrow[d, "\lambda\mathrm{B}"'] & t^k_{r,\mathrm{B}} \arrow[d, "\Gamma(1)"] \\ t^k_{r,\mathrm{B}} \arrow[r, "\mathrm{id.}"] & t^k_{r,\mathrm{B}} \end{tikzcd}$$

soit commutatif. Puisque la paire $(\Gamma, \mathrm{id.})$ nous fournit un isomorphisme

$$(t^k_{r,\mathrm{B}[\mathrm{X}_r]}, \iota, \gamma^{-1}) \simeq (t^k_{r,\mathrm{B}[\mathrm{X}_r]}, \rho^{-1}\mathrm{B}, \lambda^{-1}\mathrm{B}),$$

alors

$$\begin{aligned} y + \mathrm{K}_{r+1}(\varphi)(x) &= s_{r+1}(t^k_{r,\mathrm{B}[\mathrm{X}_r]}, \gamma, \iota) = s_{r+1}(t^k_{r,\mathrm{B}[\mathrm{X}_r]}, \iota, \gamma^{-1}) \\ &= s_{r+1}(t^k_{r,\mathrm{B}[\mathrm{X}_r]}, \rho^{-1}\mathrm{B}, \lambda^{-1}\mathrm{B}) = s_{r+1}(t^k_{r,\mathrm{B}[\mathrm{X}_r]}, \lambda\mathrm{B}, \rho\mathrm{B}). \end{aligned}$$

Si l'on pose $y' = y + \mathrm{K}_{r+1}(\varphi)(x)$ et $z = s_{r+1}(t^k_{r,\mathrm{A}[\mathrm{X}_r]}, \lambda, \rho)$, alors

$$y' = \mathrm{K}_{r+1}(\varphi)(z), \qquad \text{donc} \quad y = y' - \mathrm{K}_{r+1}(\varphi)(x) \in \mathrm{Im}(\mathrm{K}_{r+1}(\varphi)).$$

4.5. LA DEUXIÈME SUITE EXACTE. — Les propriétés fonctorielles de Σ sont évidentes. Si l'on considère le diagramme commutatif de morphismes de $\mathcal{R}_c$,

$$\begin{tikzcd} \mathrm{A} \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "\mu"'] & & \mathrm{B} \arrow[dl, "\xi"] \\ & \mathrm{F} & \end{tikzcd}$$

on a, dans $\mathcal{H}_c$, les morphismes $(\varphi, \mathrm{id.}) : \mu \to \xi$ et $(\mathrm{id.}, \xi) : \varphi \to \mu$. Ceci nous donne donc les diagrammes commutatifs suivants :

$$\begin{tikzcd} \dots \arrow[r] & \mathrm{K}_{r-1}(\mathrm{B}) \arrow[r, "\alpha^\varphi_r"] \arrow[d, "\mathrm{K}_{r+1}(\xi)"] & \mathrm{K}^\mathrm{D}_r(\varphi) \arrow[r, "\beta^\varphi_r"] \arrow[d, "\mathrm{K}^\mathrm{D}_r(\mathrm{id.}, \xi)"] & \mathrm{K}_r(\mathrm{A}) \arrow[r, "\mathrm{K}_r(\varphi)"] \arrow[d, "\mathrm{id.}"] & \mathrm{K}_r(\mathrm{B}) \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{K}_r(\xi)"] & \dots \\ \dots \arrow[r] & \mathrm{K}_{r+1}(\mathrm{F}) \arrow[r, "\alpha^\mu_r"] & \mathrm{K}^\mathrm{D}_r(\mu) \arrow[r, "\beta^\mu_r"] & \mathrm{K}_r(\mathrm{A}) \arrow[r, "\mathrm{K}_r(\mu)"] & \mathrm{K}_r(\mathrm{F}) \arrow[r] & \dots \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} \dots \arrow[r] & \mathrm{K}_{r+1}(\mathrm{F}) \arrow[r, "\alpha^\mu_r"] \arrow[d, "\mathrm{id.}"] & \mathrm{K}^\mathrm{D}_r(\mu) \arrow[r, "\beta^\mu_r"] \arrow[d, "\mathrm{K}^\mathrm{D}_r(\varphi, \mathrm{id.})"] & \mathrm{K}_r(\mathrm{A}) \arrow[r, "\mathrm{K}_r(\mu)"] \arrow[d, "\mathrm{K}_r(\varphi)"] & \mathrm{K}_r(\mathrm{F}) \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{id.}"] & \dots \\ \dots \arrow[r] & \mathrm{K}_{r+1}(\mathrm{F}) \arrow[r, "\alpha^\xi_r"] & \mathrm{K}^\mathrm{D}_r(\xi) \arrow[r, "\beta^\xi_r"] & \mathrm{K}_r(\mathrm{B}) \arrow[r, "\mathrm{K}_r(\xi)"] & \mathrm{K}_r(\mathrm{F}) \arrow[r] & \dots \end{tikzcd}$$

Si l'on pose $\delta_r = \alpha^\varphi_{r-1} . \beta^\xi_r : \mathrm{K}^\mathrm{D}_r(\xi) \to \mathrm{K}^\mathrm{D}_{r-1}(\varphi)$, on obtient la suite de groupes abéliens

$$\dots \longrightarrow \mathrm{K}^\mathrm{D}_{r+1}(\xi) \xrightarrow{\delta_{r+1}} \mathrm{K}^\mathrm{D}_r(\varphi) \xrightarrow{\mathrm{K}^\mathrm{D}_r(\mathrm{id.}, \xi)} \mathrm{K}^\mathrm{D}_r(\mu) \xrightarrow{\mathrm{K}^\mathrm{D}_r(\varphi, \mathrm{id.})} \mathrm{K}^\mathrm{D}_r(\xi) \xrightarrow{\delta_r} \mathrm{K}^\mathrm{D}_{r-1}(\varphi) \longrightarrow \dots$$

et l'on veut démontrer qu'elle est exacte.

La seule chose à vérifier c'est que l'application composée

$$K_r^D(\varphi) \to K_r^D(\mu) \to K_r^D(\xi)$$

est nulle, les autres vérifications de la démonstration étant des conséquences triviales des deux diagrammes ci-dessus en appliquant la méthode du « diagram chasing ».

Si $x \in K_r^D(\varphi)$, on peut écrire

$$x = \Lambda_r(\varphi)\,(m,\,0,\,m'), \qquad \text{donc} \quad K_r^D(\text{id.},\,\xi)\,(x) = \Lambda_r(\mu)\,(m,\,T_r(\xi)\,(0),\,m').$$

Soit

$$z = K_r(\varphi,\,\text{id.}) . K_r^D(\text{id.},\,\xi)\,(x) = \Lambda_r(\xi)\,(T_r(\varphi)\,(m),\,T_r(\xi)\,(0),\,T_r(\varphi)\,(m')).$$

Celui-ci est un triple de la forme $(m_1,\,\theta_1 F,\,m'_1)$, donc la paire $(\theta_1,\,\text{id.})$ nous fournit un isomorphisme $(m_1,\,\theta_1 F,\,m'_1) \simeq (m'_1,\,\iota,\,m'_1)$. Il s'ensuit que

$$z = \Lambda_r(\xi)\,(m'_1,\,\iota,\,m'_1) = 0.$$

4.6. La troisième suite exacte. — Considérons la fibration naturelle Φ : $\mathcal{H}_c \to \mathcal{H}_c$ donnée par $\Phi(\mu) =$ but de μ. La fibre $\mathcal{H}_c^F$ au-dessus de $F \in \operatorname{Ob} \mathcal{R}_c$ est une sous-catégorie de $\mathcal{H}_c$ dont les objets sont les morphismes de $\mathcal{R}_c$ ayant F pour but et, si $\mu,\,\xi \in \operatorname{Ob} \mathcal{H}_c^F$, alors $\varphi \in \operatorname{Hom}(\mu,\,\xi)$ si le diagramme

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "\mu"'] & & B \arrow[dl, "\xi"] \\ & F & \end{tikzcd}$$

est commutatif.

Ceci est exactement la traduction de la théorie des espaces avec point base.

Si l'on pose $K_r^\mu(A) = \operatorname{Ker}(K_r(\mu))$, on a la suite exacte de groupes abéliens

$$K_{r+1}(F) \to K_r^D(\mu) \to K_r^\mu(A) \to 0.$$

Donc la commutativité du diagramme

$$\begin{tikzcd} & & K_{r+1}(F) \arrow[d] & K_{r+1}(F) \arrow[l, "\text{id.}"'] \arrow[d] & & \\ \dots \arrow[r] & K_r^D(\varphi) \arrow[r] \arrow[dr, dashed] & K_r^D(\mu) \arrow[r] \arrow[d] & K_r^D(\xi) \arrow[r] \arrow[d] & K_{r-1}^D(\varphi) \arrow[r] & \dots \\ & & K_r^\mu(A) \arrow[r] \arrow[d] & K_r^\xi(B) \arrow[ur, dashed] \arrow[d] & & \\ & & 0 & 0 & & \end{tikzcd}$$

nous montre l'exactitude de la suite

$$\ldots \to K^{D}_{r}(\varphi) \to K^{\mu}_{r}(A) \to K^{\xi}_{r}(B) \to K^{D}_{r-1}(\varphi) \to \ldots,$$

où les flèches sont évidentes.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] H. Bass, K-*theory and stable algebra*, Publ. Math. I. H. E. S., 22, 1964, p. 489-544.

[2] H. Bass, A. Heller et R. G. Swan, *The Whitehead group of a polynomial extension* Publ. Math. I. H. E. S., 22, 1964, p. 61-80.

(Manuscrit reçu le 20 février 1968).