ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

YVES MEYER

Endomorphismes des idéaux fermés de $L^1, (G)$, classes de Hardy et séries de Fourier lacunaires

Annales scientifiques de l'É.N.S. 4e série, tome 1, nº 4 (1968), p. 499-580

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1968_4_1_4_499_0>

Ann. scient. Éc. Norm. Sup.,
4e série, t. 1, 1968, p. 499 à 580.

ENDOMORPHISMES DES IDÉAUX FERMÉS DE $L^1(G)$, CLASSES DE HARDY ET SÉRIES DE FOURIER LACUNAIRES

PAR YVES MEYER.

TABLE DES MATIÈRES.

Pages.

INTRODUCTION 500

CHAPITRE I.

MULTIPLICATEURS TRIVIAUX ET NON TRIVIAUX.

INTRODUCTION 501

Notations 502

1. Généralités sur les multiplicateurs : caractérisation à l'aide du compactifié de Bohr 503
2. Restriction des multiplicateurs aux sous-groupes; relèvement d'un multiplicateur « défini » sur un sous-groupe en un multiplicateur « défini » sur le groupe 507
3. L'espace des multiplicateurs ne dépend que de la fermeture du spectre de l'idéal de $A(\mathbf{R}^n \times \mathbf{T}^m)$ 513
4. Construction de multiplicateurs non triviaux, c'est-à-dire qui ne peuvent être définis par des transformées de Fourier de mesures bornées, pour tous les idéaux de $A(\mathbf{R}^n \times \mathbf{T}^m)$ dont le cospectre a un intérieur non vide 515

CHAPITRE II.

VARIANTES D'UNE FONCTION DE LITTLEWOOD-PALEY DANS L'ÉTUDE DES CLASSES H^1.

INTRODUCTION 522

1. Étude de $H^p(\mathbf{T})$ (le théorème fondamental) 523
2. Étude des $H^p(\mathbf{R})$ 525
3. Application à la construction de multiplicateurs pour les transformées de Fourier des éléments de $H^1(\mathbf{R})$ ou de $H^1(\mathbf{T})$ 525

CHAPITRE III.

Applications variées du chapitre II.

Pages

Introduction 531

1. Constructions de multiplicateurs d'idéaux fermés de $A(\mathbf{Z})$ en vue de l'étude des ensembles exceptionnels du chapitre IV 532
2. Étude du dual de $H^1(\mathbf{T})$ 535
3. La suite des modules des coefficients de Fourier d'un élément de $H^1(\mathbf{T})$ 538
4. Éléments aléatoires dans le dual de $H^1(\mathbf{T})$ 544
5. Pseudomesures aléatoires 547

CHAPITRE IV.

Ensembles exceptionnels et théorie des multiplicateurs.

Introduction 548

A. — *Ensembles d'entiers exceptionnels pour les multiplicateurs.*

1. Ensemble de toutes les différences $t_n - t_m$, où $0 \leq m \leq n-1$ et $t_{n+1} \geqq 3t_n$ $(n > 0)$. 549
2. Résultats qualitatifs sur les ensembles $\Lambda(p)$ 558
3. Autres résultats sur le problème fondamental 561

B. — *Synthèse des multiplicateurs.*

1. Synthèse faible des convoluteurs 564
2. Synthèse forte des multiplicateurs 566
3. Ensembles satisfaisant la condition forte de Ditkin 570

APPENDICE.

I. Densité dans le dual de H^1 573

II. Limites du théorème 4 du chapitre III 576

Bibliographie 579

INTRODUCTION.

On sait comme le montre, par exemple, l'étude des homomorphismes des algèbres $L^1(\mathbf{T})$ et $L^p(\mathbf{T})$ ([8], § 5.7.8, p. 129) que, du point de vue de l'analyse harmonique, les espaces $L^1(G)$ et $L^p(G)$ sont très différents (p est un réel supérieur à 1, G un groupe abélien localement compact). Un des buts de ce travail est de montrer que ces différences s'amenuisent lorsque $L^1(G)$ et $L^p(G)$ sont respectivement remplacés par les idéaux fermés $I_1(E)$ et $I_p(E)$ et lorsque le fermé E du groupe dual est assez « épais ». [L'idéal $I_1(E)$ — resp. $I_p(E)$ — est défini comme l'ensemble des éléments de $L^1(G)$ — resp. $L^p(G)$ — dont la transformée de Fourier est nulle sur E — resp. presque partout sur E.]

Dans le cas d'idéaux fermés de $L^1(\mathbf{T})$, on sait même que $I_1(E)$ peut être égal à $I_p(E)$. Le complémentaire de E s'appelle alors, selon Rudin, un ensemble $\Lambda(p)$ d'entiers et de nouveaux résultats sur ces ensembles seront obtenus au chapitre IV.

Dans le cas d'idéaux fermés de $L^1(\mathbf{R})$, un résultat aussi précis que celui indiqué par Rudin ne peut être vrai; la « ressemblance » entre $I_1(E)$ et $I_p(E)$ apparaîtra de la façon suivante : beaucoup de convoluteurs (endomorphismes continus commutant avec les translations) des $L^p(\mathbf{R})$, $p > 1$, qui ne peuvent être définis sur $L^1(\mathbf{R})$, « passent » cependant à un idéal $I_1(E)$ quand E a un intérieur. Si E n'a pas d'intérieur, $I_1(E)$ se comporte comme tout $L^1(\mathbf{R})$ du point de vue des convoluteurs. Ceci forme la matière des chapitres I et II.

Les techniques employées permettront aux chapitres III et IV de résoudre d'autres problèmes sur les séries de Fourier lacunaires et les idéaux (changements de phases permettant à une suite complexe, de carré sommable, d'être celle des coefficients de Fourier, d'indices positifs, d'une fonction continue; conjecture de Wik sur les ensembles vérifiant la condition forte de Ditkin).

M. Jean-Pierre Kahane m'a accordé de nombreux et longs entretiens; il a lu toutes les ébauches souvent mal rédigées de mes résultats; sans ses encouragements et sa bienveillante attention, tout ceci n'aurait pas été écrit. La Faculté des Sciences de Strasbourg et l'Institut de Recherche mathématique avancée (laboratoire associé au C. N. R. S.) m'ont fourni une aide matérielle et morale importante.

Un des problèmes non résolus dans ce travail vient d'être élucidé par Elias Stein; cet auteur m'a honoré de sa confiance en me laissant résumer ses résultats en une Note aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* [9]. Paul Haskell-Rosenthal fut un amical et lucide conseiller. Enfin, je tiens à remercier très vivement M^lle^ Boulanger du soin qu'elle a apporté à la frappe du manuscrit.

CHAPITRE I.

Multiplicateurs triviaux et non triviaux.

Introduction. — On donne dans ce chapitre une condition nécessaire et suffisante pour qu'un idéal fermé I de $L^1(\mathbf{R}^n \times \mathbf{Z}^m)$ jouisse de la propriété suivante : « tout endomorphisme continu de I commutant avec les translations est défini par la convolution d'une mesure complexe bornée et des éléments de I ».

La condition est que le cospectre de I n'ait pas d'intérieur (le cospectre est l'ensemble des zéros communs aux transformées de Fourier des éléments de I).

Un idéal fermé I de $L^1(\mathbf{R}^n \times \mathbf{Z}^m)$ dont le cospectre n'a pas d'intérieur se comporte donc, pour le problème qui nous occupe, comme tout $L^1(\mathbf{R}^n \times \mathbf{Z}^m)$. Pour le montrer on « approche » au paragraphe 3 le groupe dual par des translatés de sous-groupes discrets évitant le cospectre de I. Il devient alors nécessaire de raisonner sur les multiplicateurs et non plus sur les convoluteurs et de restreindre des multiplicateurs à des sous-groupes : on obtient encore des multiplicateurs (§ 1, 2 et 3).

Au paragraphe 4, on montre qu'un idéal fermé I de $L^1(\mathbf{R})$ dont le cospectre a un intérieur se comporte, pour le problème qui nous occupe, comme le mieux connu des idéaux fermés de $L^1(\mathbf{R})$, l'idéal $H^1(\mathbf{R})$, formé des éléments de $L^1(\mathbf{R})$ dont la transformée de Fourier est nulle sur $]-\infty, 0]$.

Grâce à la méthode générale exposée au paragraphe 2, on construit (§ 4) des convoluteurs de $H^1(\mathbf{R})$ à partir de convoluteur de $H^1(\mathbf{T})$ et l'on en déduit l'existence de convoluteurs non triviaux de I (c'est-à-dire qui ne peuvent être définis par convolution avec une mesure complexe bornée). Ces convoluteurs non triviaux sont cependant des convoluteurs de tous les $L^p(\mathbf{R})$, $p > 1$; on remarque que $H^1(\mathbf{R})$, en un certain sens, ressemble plus aux $H^p(\mathbf{R})$, $p > 1$, que $L^1(\mathbf{R})$ ne ressemble aux $L^p(\mathbf{R})$.

Notations. — Les notations employées sont celles du livre de Rudin [8].

Le groupe.

G,	groupe abélien localement compact;
$L^1(G)$,	algèbre de Banach des classes de fonctions intégrables pour la mesure de Haar de G;
$\mathfrak{M}(G)$,	algèbre de Banach des mesures complexes bornées définies sur G.

La transformée de Fourier.

Γ,	groupe dual de G;
(x, γ),	valeur prise en x ($x \in G$) par le caractère γ de Γ;
$\mathcal{F} f$ ou $\hat{f}$,	transformées de Fourier de l'élément f de $L^1(G)$;
$A(\Gamma)$,	algèbre de Banach des transformées de Fourier ci-dessus;
$\Vert \hat{f} \Vert_{A(\Gamma)}$,	$\Vert f \Vert_1$, par définition;
$B(\Gamma)$,	algèbre de Banach des transformées de Fourier des mesures complexes bornées.

Les idéaux.

I,	idéal fermé de $L^1(G)$;
$\mathcal{F} I$,	idéal fermé de $A(\Gamma)$ composé de tous les $\mathcal{F} f$, f dans I.
$Z(I)$,	cospectre de I ou ensemble des points de Γ où s'annulent tous les éléments de $\mathcal{F} I$;
$\complement Z(I)$,	spectre de I [le spectre d'un élément f de $L^1(G)$ est le support de $\hat{f}$];
E,	ensemble fermé de Γ;
$\underline{I}_E$,	fermeture dans $L^1(G)$ de l'ensemble des f tels que $\hat{f}$ s'annule sur un voisinage de E (ou plus petit idéal fermé de cospectre E);
$\bar{I}_E$,	ensemble de tous les éléments de $L^1(G)$ dont la transformée de Fourier est nulle sur E (ou plus grand idéal fermé de cospectre E);
J_E,	ensemble de tous les éléments de $\mathfrak{M}(G)$ dont la transformée de Fourier est nulle sur E.

Convention. — Si E est un ensemble de Γ, φ une fonction, à valeurs complexes, définie sur le complémentaire de E et f une fonction, à valeurs complexes, nulle sur E, nous définirons le produit $\hat{f}\varphi$ comme une fonction, définie sur tout Γ, valent o sur E et $\hat{f}(\gamma)\varphi(\gamma)$ en γ, $\gamma \notin E$.

1. Généralités sur les multiplicateurs.

Définition 1 (*les multiplicateurs*). — *Un multiplicateur de* $\mathcal{F}$I [I *est un idéal fermé de* $L^1(G)$] *est une fonction, définie sur le spectre de* I, *à valeurs complexes*, φ, *telle que*

$$\hat{f} \in \mathcal{F}\mathrm{I} \qquad \text{entraîne} \quad \hat{f}\varphi \in A(\Gamma).$$

La norme de φ *est celle de cette application, continue grâce au théorème du graphe fermé, de* $\mathcal{F}$I *dans* $A(\Gamma)$.

Remarque. — Il peut paraître choquant que l'on n'ait pas

$$\varphi\hat{f} \in \mathcal{F}\mathrm{I}$$

quand φ est un multiplicateur de $\mathcal{F}$I; un multiplicateur définit-il un endomorphisme de $\mathcal{F}$I ? Ce sera l'un des problèmes ouverts par ce travail; la réponse est oui si Z(I) est un ensemble de synthèse harmonique ou si les seuls multiplicateurs de $\mathcal{F}$I sont les éléments de $B(\Gamma)$ (multiplicateurs triviaux).

Définition 2 (*les convoluteurs*). — *Un convoluteur d'un idéal fermé* I *de* $L^1(G)$ *est une application linéaire et continue de* I *dans* $L^1(G)$ *qui commute avec les translations.*

On montre immédiatement la proposition suivante :

Proposition 1. — *A tout convoluteur* T *de* I *on peut associer un multiplicateur de* I *tel que l'on ait*

$$\mathcal{F}(\mathrm{T}f) = \varphi\mathcal{F}f$$

pour tout élément f *de* I.

On montre facilement, en utilisant le fait que les fonctions à support compact sont denses dans $\mathcal{F}$I, la proposition suivante :

Proposition 2. — φ *est un multiplicateur de* $\mathcal{F}$I *si* φ *est une fonction, définie sur le spectre de* I, *à valeurs complexes, telle que, pour tout élément* $\hat{f}$ *de* $\mathcal{F}$I, $\varphi\hat{f}$ *soit dans* $B(\Gamma)$.

Mais voici un résultat plus intéressant :

Proposition 3. — *Si* φ *est un multiplicateur de* $\mathcal{F}$I, *si* $E = Z(I)$, φ *est aussi un multiplicateur, de même norme, de tous les idéaux fermés de cospectre* E.

La proposition 3 est, en fait, une conséquence du théorème 1 ci-dessous. Quelques notations supplémentaires y sont employées.

Appelons $\tilde{G}$ le compactifié de Bohr de G et $d\tilde{x}$ la mesure de Haar sur $\tilde{G}$. A une partie quelconque E de Γ est associé un idéal fermé $\tilde{I}_E$ de $L^1(\tilde{G})$ composé de tous les éléments f de $L^1(\tilde{G})$ tels que $\hat{f}(\gamma) = 0$ si $\gamma \in E$.

Théorème 1. — *φ est un multiplicateur de $\mathcal{F}I$ si et seulement si φ est continue sur le complémentaire du fermé E de Γ et si φ est un multiplicateur de $\mathcal{F}\tilde{I}_E$. (La norme de φ, comme multiplicateur de $\mathcal{F}I$ est égale à celle de φ comme multiplicateur de $\mathcal{F}\tilde{I}_E$.)*

Énonçons d'abord, sous une autre forme, ce théorème :

φ est un multiplicateur de $\mathcal{F}I$ si et seulement si φ est continue sur le complémentaire de E et vérifie la condition suivante : pour une constante K, $K > 0$, et tout polynôme trigonométrique sur G, $P(x)$, s'écrivant

$$P(x) = \sum_1^n a_p(x, \gamma_p), \qquad \gamma_p \in \complement E, \quad a_p \in \mathbf{C}, \tag{1}$$

le polynôme trigonométrique $Q(x)$ s'écrivant

$$Q(x) = \sum_1^n a_p\, \varphi(\gamma_p)\, (x, \gamma_p) \tag{2}$$

satisfait à l'inégalité

$$\int_{\tilde{G}} |Q(\tilde{x})|\, d\tilde{x} \leq K \int_{\tilde{G}} |P(\tilde{x})|\, d\tilde{x}. \tag{3}$$

La démonstration du théorème 1 utilise une série de lemmes dont seul le premier est puissant.

Lemme 1. — *Si μ est une mesure complexe bornée, définie sur $\tilde{G}$, et si la transformée de Fourier de μ est continue sur Γ, alors « μ est concentrée sur G », c'est-à-dire est l'image d'une mesure complexe bornée, définie sur G, par l'application canonique de G dans $\tilde{G}$.*

La démonstration est faite dans le livre de Rudin ([8], th. 1.9.1). Le lemme 2 est une autre expression du lemme 1.

Lemme 2. — *Si φ est une fonction continue sur Γ, à valeurs complexes, et si φ est un multiplicateur des transformées de Fourier des éléments de $L^1(\tilde{G})$, alors φ est dans $B(\Gamma)$.*

Sous une autre forme, si φ est continue et si, pour tout polynôme trigonométrique $P(x)$ s'écrivant

$$P(x) = \sum_1^n a_p\,(x, \gamma_p),$$

on a

$$\int_{\tilde{G}} |\,Q(\tilde{x})\,|\,d\tilde{x} \leqq K \int_{\tilde{G}} |\,P(\tilde{x})\,|\,d\tilde{x}$$

quand

$$Q(x) = \sum_1^n a_p\,\varphi(\gamma_p)\,(x, \gamma_p),$$

alors φ est dans $B(\Gamma)$.

Grâce au lemme 3, la norme dans $L^1(\tilde{G})$ d'un polynôme trigonométrique $P(x)$ se calcule comme limite de normes dans $L^1(G)$ de régularisés de $P(x)$.

Lemme 3. — *Si $\mathcal{F}$ est le filtre des voisinages de* o *dans Γ et si, pour tout* V *de $\mathcal{F}$, on construit un élément f_V de $L^1(G)$ tel que*

$$f_V(x) \geqq 0 \quad sur\ G, \qquad \hat{f}_V(0) = +1, \qquad \hat{f}_V(\gamma) \geqq 0 \quad sur\ V$$

et

$$\hat{f}_V(\gamma) = 0 \quad hors\ de\ V,$$

alors, pour tout polynôme trigonométrique s'écrivant

$$P(x) = \sum_1^n a_p\,(x, \gamma_p)$$

défini sur G, *on a*

$$\left\| \sum_1^n a_p \hat{f}_V(\gamma - \gamma_p) \right\|_{A(\Gamma)} \to \int_{\tilde{G}} |\,P(\tilde{x})\,|\,d\tilde{x}, \tag{4}$$

où la limite est prise suivant le filtre $\mathcal{F}$.

La démonstration du lemme 3 est naturelle; l'existence des $f_V(x)$ est prouvée dans ([8], p. 48, th. 2.6.1). Nous montrons d'abord que, pour toute fonction presque périodique au sens de Bohr sur G, $g(x)$, on a

$$\int_{\tilde{G}} g(x)\,f_V(x)\,dx \to \int_{\tilde{G}} g(\tilde{x})\,d\tilde{x} \quad (\text{suivant } \mathcal{F}). \tag{5}$$

Puisque $\int_G |f_V(x)|\,dx = 1$, il suffit de vérifier (5) pour une partie dense de $C(\tilde{G})$, les polynômes trigonométriques [$C(\tilde{G})$ désigne l'espace de Banach des fonctions continues sur $\tilde{G}$]. La vérification de (5) est alors immédiate : Pour passer de (5) à (4), il suffit de prendre $g(x) = |\,P(x)\,|$.

Lemme 4. — *Si φ est un multiplicateur de $\mathcal{F}$ I et si γ_0 appartient au spectre de* I,

$$\| [\varphi(\gamma) - \varphi(\gamma_0)] \hat{f}_V(\gamma - \gamma_0) \|_{A(\Gamma)} \to 0$$

(la limite est toujours prise suivant le filtre $\mathcal{F}$).

Le lemme 4 résulte de ce que $\varphi(\gamma) - \varphi(\gamma_0)$ est localement dans $A(\Gamma)$, au voisinage de γ_0 et nulle en γ_0. On applique le théorème 2.6.3 [8].

Passons alors à la démonstration du théorème 1.

a. Si φ est un multiplicateur de $\mathcal{F}$ I et si P et Q sont définis par (1) et (2), on choisit V assez petit pour que $\gamma_p + V$ et E soient disjoints $(1 \leq p \leq n)$. On considère les éléments de $\mathcal{F}$ I suivants :

$$p(\gamma) = \sum_1^n a_p \hat{f}_V(\gamma - \gamma_p)$$

et

$$q(\gamma) = \sum_1^n a_p \varphi(\gamma_p) \hat{f}_V(\gamma - \gamma_p).$$

Le lemme 4 nous indique que l'on a

$$\| \varphi(\gamma) p(\gamma) - q(\gamma) \|_{A(\Gamma)} \to 0 \quad (\text{suivant } \mathcal{F}).$$

On a, de plus,

$$\| \varphi(\gamma) p(\gamma) \|_{A(\Gamma)} \leq \| \varphi \| \, \| p(\gamma) \|_{A(\Gamma)}.$$

En passant à la limite, suivant $\mathcal{F}$, on obtient (3) avec $K = |\varphi|$.

b. Si φ est continue sur le spectre de I et si (3) est vérifiée, supposons que f soit dans $L^1(G)$ et $\hat{f}(\gamma)$ nulle sur Z(I). Pour tout polynôme trigonométrique s'écrivant

$$P(x) = \sum_1^n a_p (x, \gamma_p),$$

on a

$$\int_{\tilde{G}} | f \star P | \, d\tilde{x} \leq \| f \|_1 \int_{\tilde{G}} | P(\tilde{x}) | \, d\tilde{x}$$

et le spectre de $f \star P$ est contenu dans celui de I. Alors (3) s'applique à $f \star P$ pour donner

$$\int_{\tilde{G}} | Q | \, d\tilde{x} \leq K \| f \|_1 \int_{\tilde{G}} | P(\tilde{x}) | \, d\tilde{x}$$

si

$$Q(x) = \sum_1^n a_p \varphi(\gamma_p) \hat{f}(\gamma_p) \, (x, \gamma_p).$$

La fonction $\varphi(\gamma)f(\gamma)$ prolongée par o sur Z(I) est continue [$|\varphi(\gamma)| \leqq K$ sur le spectre de I résulte immédiatement de (3)] et vérifie l'hypothèse du lemme 2. Il existe donc une mesure μ sur G telle que

$$\hat{\mu}(\gamma) = \varphi(\gamma)\hat{f}(\gamma) \qquad \text{et} \qquad \|\mu\| \leqq K\|f\|_1.$$

On applique alors la proposition 2 et le théorème 1 est démontré.

Remarque. — Le théorème 1 reste vrai si l'on oblige, de plus, en (1), les γ_p à appartenir à un sous-groupe dense de Γ.

Applications du théorème 1.

Corollaire 1. — La proposition 3.

Corollaire 2. — *Si φ est un multiplicateur de $\mathcal{F}$I et si* E = Z(I), *on a*

$$\|\varphi\| = \sup \|\varphi\hat{g}\|_{A(\Gamma)}$$

où le sup *est calculé sur tous les éléments $\hat{g}$ de la boule unité de* $A(\Gamma)$ *ayant un support disjoint de* E.

Corollaire 3. — *Si Λ est un sous-groupe fermé de Γ, si φ est un multiplicateur des éléments de* $A(\Gamma)$ *nuls sur* E, *la restriction de φ aux points de Λ hors de* E *est un multiplicateur φ_Λ des éléments de* $A(\Lambda)$ *nuls sur* E *et l'on a*

$$\|\varphi_\Lambda\| \leqq \|\varphi\|.$$

2. Restrictions des multiplicateurs aux sous-groupes. — Nous allons reprendre l'énoncé du corollaire 3 sous la forme d'un théorème. Si I est l'idéal fermé de $L^1(G)$ de cospectre E, appelons M_I l'algèbre de Banach des multiplicateurs de l'idéal fermé $\mathcal{F}$I de $A(\Gamma)$ et si Λ est un sous-groupe fermé de Γ, appelons H l'annulateur de Λ (ensemble des éléments de G où tous les caractères de Λ valent $+1$). Enfin J désignera l'idéal fermé de $L^1(G/H)$ composé de tous les éléments de $L^1(G/H)$ dont la transformée de Fourier est nulle sur $E \cap \Lambda$; si φ est un élément de M_I, la restriction de φ aux éléments de Λ hors de E sera notée φ_Λ.

Théorème 2. — *L'application* Π *définie par*

$$\varphi \mapsto \varphi_\Lambda \tag{1}$$

est un homomorphisme de norme égale à 1 *de* M_I *dans* M_J; *mais cette application n'est pas, en général, surjective.*

Pour montrer cette dernière remarque, il suffit, compte tenu du corollaire 3 du théorème 1, de donner un contre-exemple. Posons $\Gamma = \mathbf{R}^2$, appelons E le carré défini par

$$0 \leqq x \leqq 1 \qquad \text{et} \qquad 0 \leqq y \leqq 1$$

Le sous-groupe $y=0$ de Γ sera Λ. Nous apprendrons au paragraphe 4 à construire des multiplicateurs non triviaux de $\mathcal{F}\,\mathrm{J}$ si J est un idéal fermé de $L^1(\mathbf{R})$ dont le cospectre contient un intervalle (ici $[0, 1]$). Mais si $\varphi(x, y)$ est un multiplicateur de $\mathcal{F}\,\mathrm{I}$, en appliquant le théorème 2, on obtient, par restriction à la droite $y=-\varepsilon$,

$$\|\varphi(\cdot, -\varepsilon)\|_{B(\mathbf{R})} \leq \|\varphi\|, \qquad \varepsilon > 0.$$

Grâce à la continuité de φ hors de E, on en déduit (*voir*, par exemple, [8], th. 1.9.2) qu'il existe un élément de $B(\mathbf{R})$ ayant la même restriction que $\varphi(x, y)$ à l'ensemble des (x, y) vérifiant

$$|x| > 1, \qquad y = 0.$$

Ainsi l'image de M_I dans M_J est l'ensemble des multiplicateurs triviaux de $\mathcal{F}_J$ et n'est même pas dense dans M_J.

Il devient alors naturel de chercher des conditions, portant sur E et Λ, et permettant à l'application (1) d'être surjective : plus précisément, nous chercherons à relever M_J dans M_I par une application linéaire ρ telle que

$$\Pi \circ \rho = \mathrm{Id.} \quad (\text{l'identité de } M_J).$$

On peut, avec raison, penser que dans l'exemple donné ci-dessus, le groupe Λ rencontre « trop » la frontière de E pour que Π soit surjective. Si E est vide, l'application (1) devient l'application canonique de $B(\Gamma)$ sur $B(\Lambda)$; si, de plus, $\Gamma = \mathbf{R}^n$ et si Λ est discret, un moyen de construire ρ est de former, pour tout élément $(b_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ de $B(\Lambda)$, la somme

$$\Phi(\gamma) = \sum_{\lambda\in\Lambda} b_\lambda\, \Delta(\gamma - \lambda) \tag{2}$$

qui est définie et convient dès que Δ est un élément de $A(\Gamma)$ dont le support est assez petit avec $\Delta(0) = 1$.

Posons alors un problème dont la solution occupera ce paragraphe. Il s'agit de chercher des conditions portant sur le fermé E et le sous-groupe discret Λ de Γ et assurant la propriété $\mathcal{L}$ suivante :

($\mathcal{L}$) *Chaque fois que* $\varphi(\lambda)$ *est un multiplicateur des éléments de* $A(\Lambda)$ *nuls sur* E, *on obtient un multiplicateur* $\Phi(\gamma)$ *des éléments de* $A(\Gamma)$ *nuls sur* E *par une expression*

$$\Phi(\gamma) = \sum_{\substack{\lambda\in\Lambda \\ \lambda\notin E}} \varphi(\lambda)\, \Delta(\gamma - \lambda), \tag{3}$$

où $\Delta(\gamma)$ *est un élément de* $A(\Gamma)$ *égal à* 1 *en* 0 *et de support assez petit.*

Nous allons encore donner des exemples où ($\mathcal{L}$) est inexacte et indiquer des conditions suffisantes pour que ($\mathcal{L}$) ait lieu.

Le premier exemple n'est pas différent de celui du théorème 2, mais il éclaire le second : si $\Gamma = \mathbf{R}$ et si $\Lambda = \mathbf{Z}$, appelons E le complémentaire, dans $\mathbf{Z}$, de l'ensemble, F, des points de $\mathbf{Z}$ de la forme $2^n + 2^m$ (n et m entiers positifs). Il sera montré au chapitre IV que toute suite complexe bornée définie sur F est un multiplicateur de $\mathcal{F}J$; cependant il sera prouvé au paragraphe 3 que tout multiplicateur de $\mathcal{F}I$ est la restriction à $\complement E$ d'un élément de $B(\mathbf{R})$. Si le relèvement était possible, toute suite bornée définie sur F serait la restriction à F des coefficients de Fourier-Stieltjes d'une mesure bornée; c'est-à-dire serait un ensemble de Sidon. Or on sait qu'il n'en est rien ([2], th. VIII, p. 146).

Dans le cas précédent E est sans intérieur et Λ rencontre la frontière de E. On va donner un autre exemple où Λ ne rencontre pas la frontière de E, où E est la fermeture de son intérieur, et où, cependant, (3) ne fournit pas le relèvement souhaité.

On prend encore pour Γ le groupe $\mathbf{R}$, pour Λ le groupe $\mathbf{Z}$ et pour E la réunion des fermés E_n, $n \geqq 1$, où E_n est la réunion de tous les intervalles de la forme

$$\left[2^{2n} + k - \frac{1}{n},\ 2^{2n} + k + \frac{1}{n}\right]$$

lorsque l'entier k vérifie les conditions

$$1 < k < 2^n, \qquad k \neq 2^p + 2^q \qquad (0 \leqq p < q < n).$$

On place, sur les points $2^{2n} + 2^p + 2^q$, $0 \leqq p < q < n$, la suite complexe bornée $a_{p,q}$, $p \geqq 0$, $q \geqq 0$ ($a_{p,q}$ ne dépend que de p et de q et non de n). Il sera montré, lors de l'étude des ensembles $\Lambda(2)$, que l'on obtient ainsi un multiplicateur de $\mathcal{F}J$ [J est l'idéal fermé de $L^1(\mathbf{T})$ composé des éléments de $L^1(\mathbf{T})$ dont la transformée de Fourier est nulle sur E].

Mais en appliquant le théorème 2 à $\Lambda = \mathbf{Z} + \frac{2}{n}$ et en régularisant par des fonctions trapèzes, de normes uniformément bornées dans $A(\mathbf{R})$, égales à 1 sur E_n et à 0 sur les autres E_m ($m \neq n$), on en déduit l'existence d'une suite $(\mu_n)_{n \geqq 0}$ de mesures bornées vérifiant les conditions

$$\sup_n \|\mu_n\| < +\infty,$$

$$\hat{\mu}_n(2^p + 2^q) = a_{p,q}.$$

On fait tendre n vers l'infini pour trouver, par un passage à la limite faible, une mesure complexe, bornée, μ telle que

$$(4) \qquad \hat{\mu}(2^p + 2^q) = a_{p,q} \qquad (0 \leqq p < q < +\infty).$$

Ceci veut dire que l'ensemble $2^p + 2^q$ est de Sidon : or il n'en est rien.

Dans ce dernier exemple, les points de Λ situés dans E étaient encore trop près de la frontière de E. Il devient naturel d'introduire la notion suivante :

« Λ *pénètre bien* » *dans* E *si l'on peut trouver un voisinage ouvert* V *de* o *tel que, si* λ *est à la fois dans* Λ *et dans* E, *le voisinage translaté* $\lambda + V$ *soit tout entier contenu dans* E.

On dira, d'autre part, qu'un *élément* Δ *de* $A(\Gamma)$ *est* « *adapté* » *à un tel couple* (Λ, V) *si le support* W *de* Δ *est contenu dans l'intérieur de* V *et si pour tout* λ *non nul dans* Λ, $\lambda + W$ *et* W *ne se rencontrent pas.*

On a alors le résultat ci-dessous ($\Gamma = \mathbf{R}^n$ et Λ est un sous-groupe discret de Γ).

THÉORÈME 3. — *Si* Λ *pénètre bien dans* E *et si l'élément* Δ *de* $A(\Gamma)$ *est adapté au couple* (Λ, V) *comme il est expliqué ci-dessus, pour une constante* A *ne dépendant que de* Γ, Λ, V *et* W *et pour tout multiplicateur* $\varphi(\lambda)$ *de norme* $\|\varphi\|$ *des éléments de* $A(\Lambda)$ *nuls sur* E, *la norme de*

$$\Phi(\gamma) = \sum_{\substack{\lambda \in \Lambda \\ \lambda \notin E}} \varphi(\lambda)\, \Delta(\lambda - \gamma), \tag{5}$$

multiplicateur des éléments de $A(\Gamma)$ *nuls sur* E, ne *dépasse pas* $A\|\varphi\|\,\|\Delta\|_{A(1)}$.

Remarque. — La démonstration du théorème 3 montre en outre que si V et W sont des boules de centre o et de rayons R et r, la constante A ne dépend que de Λ et de R/r. La preuve du théorème sera donnée dans le cas typique où Γ/Λ est compact; elle utilise trois lemmes :

LEMME 1. — *Si* W *est un voisinage compact de* o, *dans* Γ, *vérifiant* (5), *les deux idéaux fermés* I *de* $L^1(G)$ *et* $\tilde{I}$ *de* $L^1(G \times G/H)$ (H, *annulateur de* Λ) *composés respectivement des fonctions intégrables à spectre dans* $\Lambda + W$ *et* $W \times \Lambda$ *sont des algèbres isomorphes; sur la partie dense dans* I *formée des éléments* f *s'écrivant*

$$f(x) = \sum_{\lambda \in \Lambda} (x, \lambda)\, f_\lambda(x), \tag{6}$$

où la somme (6) *est finie et la transformée de Fourier de* $f_\lambda(x)$ *est nulle hors de* W, *l'isomorphisme est défini par*

$$\sum_{\lambda \in \Lambda} (x, \lambda)\, f_\lambda(x) \mapsto \sum_{\lambda \in \Lambda} (t, \lambda)\, f_\lambda(x) \qquad (t \in G/H,\ x \in G).$$

La démonstration du lemme 1 résulte très simplement des lemmes 2 et 3 ci-dessous :

LEMME 2. — *Pour une constante* A *et tout élément* t *de* G/H, *on peut trouver une mesure complexe, bornée,* μ_t *sur* G *telle que*

$$\|\mu_t\| \leqq A \qquad et \qquad \hat{\mu}_t(\gamma) = (t, \lambda) \quad si \ \gamma \in \lambda + W.$$

La démonstration du lemme 2 est presque immédiate :

On construit un ouvert U contenant W et tel que $\{U - U\} \cap \Lambda = \{0\}$, puis un élément g de $L^1(G)$ vérifiant :

$$\hat{g}(\gamma) = 1 \quad \text{sur W},$$

$$\hat{g}(\gamma) = 0 \quad \text{hors de U};$$

$$\sup_{x \in G} \left(\sum_{h \in H} |g(x+h)| \right) \leqq A.$$

La mesure μ_t s'obtient comme produit de la mesure de Haar de $H + x_t$ et de g (x_t est un élément de G dont l'image dans G/H est t).

LEMME 3. — *Si* $\mathcal{E}$ *est un espace vectoriel normé,* S *un groupe abélien compact,* ds *la mesure de Haar sur* S *et* T_s *une famille d'endomorphismes continus de* $\mathcal{E}$ *jouissant des trois propriétés suivantes :*

(i) $\|T_s\| \leqq A$;

(ii) $T_{-s} \circ T_s = \text{Id.}$;

(iii) *L'application* $s \mapsto \|T_s(X)\|$ *est mesurable, sur* S, *pour tout élément* X *de* $\mathcal{E}$;

alors, tout élément X *de* $\mathcal{E}$, *on a*

$$A^{-1} \|X\| \leqq \int \|T_s(X)\| \, ds \leqq A \|X\|.$$

La seconde inégalité est évidente et, pour montrer la première, remarquons qu'on peut, X étant fixé dans $\mathcal{E}$, trouver au moins un point s de S où ait lieu l'inégalité

$$\|T_s(X)\| \leqq \int_S \|T_s(X)\| \, ds.$$

La première inégalité se déduit alors de : $\|X\| \leqq A \|T_s(X)\|$.

Prouvons maintenant le lemme 1. Quand f est de la forme (6), on a, grâce aux lemmes 2 et 3,

$$A^{-1} \|f\|_1 \leqq \int_{G/H} dt \int_G \left| \sum_{\lambda \in \Lambda} (t + x, \lambda) f_\lambda(x) \right| dx \leqq A \|f\|_1.$$

Si l'image de x dans G/H est notée t_x, on a

$$(t+x,\lambda)=(t+t_x,\lambda)$$

et en intégrant d'abord en t puis en x, on obtient

$$A^{-1}\|f\|_1 \leqq \int_{G/H\times G}\left|\sum_{\lambda\in\Lambda}(t,\lambda)\,f_\lambda(x)\right|dx\,dt \leqq A\|f\|_1.$$

Comme l'ensemble des f de la forme (6) est dense dans $L^1(G)$ le lemme est prouvé.

Il ne reste plus qu'à prouver le théorème 3; on commence par construire une mesure complexe bornée, ν, sur G dont la transformée de Fourier, $\hat{\nu}$, satisfasse aux conditions

$$\hat{\nu}(\gamma)=\Delta(\gamma-\lambda) \quad \text{si } \gamma-\lambda\in W.$$
$$\nu(\gamma)=0 \quad \text{ailleurs.}$$

Si f est dans I et si $\hat{f}$ est nulle hors d'un compact, on définira un autre élément de I par

$$g(x)=(f\star\nu)\,(x)=\sum_{\lambda\in\Lambda}(x,\lambda)\,g_\lambda(x),$$

où la somme ci-dessus est finie et où $g_\lambda(x)$ est défini par

$$\hat{g}_\lambda(\gamma)=\Delta(\gamma)\hat{f}(\gamma-\lambda),$$

ainsi $\hat{g}_\lambda$ est nulle hors de W et le lemme 1 peut s'appliquer à $g(x)$. On introduit l'élément $\tilde{g}(x,t)$ de $L^1(G\times G/H)$ par

$$\tilde{g}(x,t)=\sum_{\lambda\in\Lambda}(t,\lambda)\,g_\lambda(x). \tag{7}$$

Si λ est dans E, grâce à (5), $g_\lambda(x)$ est nulle. Fixons un x dans G et appelons T_φ l'endomorphisme de J canoniquement défini par le multiplicateur φ [J est l'idéal de $L^1(G/H)$ formé de tous les éléments dont la transformée de Fourier est nulle sur E]. On a

$$\|T_\varphi(\tilde{g}(x,t))\|_{L^1(G/H)} \leqq \|\varphi\|\,\|\tilde{g}(x,t)\|_{L^1(G/H)}. \tag{8}$$

D'autre part, l'application de G dans $L^1(G/H)$, $x\mapsto\tilde{g}(x,t)$ est continue parce que la somme (7) est finie. Il en est de même de l'application

$$x\mapsto\|T_\varphi(\tilde{g}(x,t))\|_{L^1(G/H)}.$$

Par intégration de (8) en x, on obtient, compte tenu du lemme 1, le théorème 3; plus précisément, on a successivement l'inégalité

$$\|T_\varphi(\tilde{g})\,(x,t)\|_{L^1(G\times G/H)} \leqq \|\varphi\|\,\|\tilde{g}(x,t)\|_{L^1(G\times G/H)}$$

qui s'écrit aussi dans le groupe dual

$$\|(\varphi(\lambda)\,\hat{g}_\lambda(\gamma))_{\lambda\in\Lambda}\|_{A(\Gamma\times\Lambda)}\leqq\|\varphi\|\,\|(\hat{g}_\lambda(\gamma))_{\lambda\in\Lambda}\|_{A(\Gamma\times\Lambda)}$$

ou bien, grâce au lemme 1,

$$\left\|\left(\sum_{\substack{\lambda\in\Lambda\\ \lambda\notin\Lambda}}\varphi(\lambda)\,\Delta(\lambda+\gamma)\right)\hat{f}(\gamma)\right\|_{A(\Gamma)}\leqq\|\varphi\|\,\|\nu\|\,\|f\|$$

prouvant que $\sum_{\substack{\lambda\in\Lambda\\ \lambda\notin E}}\varphi(\lambda)\,\Delta(\lambda+\gamma)$ est un multiplicateur de norme au plus $\|\varphi\|\,\|\nu\|$ pour les éléments de $A(\Gamma)$ nuls sur E.

3. Intérieur du cospectre. — La proposition 3 nous montre que deux idéaux fermés de $L^1(G)$ distincts (non nécessairement inclus l'un dans l'autre) peuvent définir le même espace de multiplicateurs. Nous allons maintenant étendre ce résultat en montrant que l'espace des multiplicateurs ne dépend, à un isomorphisme près, que de l'intérieur de E, cospectre de I, du moins si $\Gamma=\mathbf{R}^n\times\mathbf{T}^m$. (La démonstration peut être légèrement modifiée pour s'appliquer à tous les groupes compacts Γ tels qu'une suite, Λ_k, croissante de sous-groupes finis ait une réunion dense dans Γ.)

Nous traiterons d'abord le cas où $\Gamma=\mathbf{T}^n$ en utilisant un lemme très simple sur les algèbres $A(\Omega)$ de restrictions à un ouvert Ω de $\mathbf{T}^n$, de l'algèbre $A(\mathbf{T}^n)$.

On définit $A(\Omega)$ comme l'ensemble des fonctions ψ continues sur un ouvert Ω de $\mathbf{T}^n$, à valeurs complexes, qui peuvent être prolongées à tout $\mathbf{T}^n$ en des éléments de $A(\mathbf{T}^n)$. Naturellement $A(\Omega)$ est isomorphe à $A(\overline{\Omega})$. Nous munissons $A(\Omega)$ et $A(\overline{\Omega})$ de la même norme. Si Γ_k est un sous-groupe fini de $\mathbf{T}^n$, nous noterons $A(\Omega\cap\Gamma_k)$ [différent de $A(\overline{\Omega}\cap\Gamma_k)$] l'algèbre des restrictions à $\Omega\cap\Gamma_k$ des éléments de $A(\Gamma_k)$. On appelle $(\Lambda_k)_{k\geqq 0}$ une suite croissante de sous-groupes finis de $\mathbf{T}$ dont la réunion soit dense dans $\mathbf{T}$ et l'on pose

$$\Gamma_k=\Lambda_k\times\ldots\times\Lambda_k\quad(n\text{ fois}).$$

Lemme 1. — *Soit ψ une fonction, à valeurs complexes, définie et continue sur un ouvert Ω de $\mathbf{T}^n$. Si l'on peut trouver une suite $(\gamma_k)_{k\geqq 0}$ de points de $\mathbf{T}^n$, tendant vers zéro, et telle que les restrictions de $\psi(t-\gamma_k)$ à Γ_k aient, dans $A(\Omega\cap\Gamma_k)$, des normes bornées par* K, *alors ψ appartient à $A(\Omega)$ et sa norme, dans $A(\Omega)$, ne dépasse pas* K.

Remarque. — Il est peut-être choquant de parler de $A(\Omega)$ au lieu de $A(\overline{\Omega})$. Cependant on affaiblirait la portée du lemme 1 en supposant ψ définie sur $\overline{\Omega}$.

La démonstration est tout à fait élémentaire : on peut, par exemple, appeler $\delta_k(u)$ une fonction dans $A(\mathbf{T})$ (on peut prendre une fonction dont le graphe est un triangle isocèle) telle que

$$\sum_{\lambda\in\Lambda_k} \delta_k(u-\lambda)=1, \qquad \delta_k(0)=1, \qquad \delta_k(\lambda)=0 \quad \text{si} \quad \lambda\in\Lambda_k, \quad \lambda\neq 0.$$

On posera

$$\Delta_k(t)=\delta_k(t_1)\times\ldots\times\delta_k(t_n) \qquad \text{si} \quad t=(t_1, \ldots, t_n)\in\mathbf{T}^n.$$

Appelons ψ_k un élément de $A(\Gamma_k)$ vérifiant les deux conditions

$$\|\psi_k\|=\|\psi(t-\lambda_k)\|_{A(\Omega\cap\Lambda_k)}$$
$$\psi_k(t)=\psi(t-\lambda_k) \qquad \text{si} \quad t\in\Omega\cap\Gamma_k.$$

On définit alors, un élément de $A(\mathbf{T}^n)$, $F_k(t)$, par

$$F_k(t)=\sum_{\gamma\in\Gamma_k}\psi_k(\gamma)\,\Delta_k(t-\gamma). \tag{1}$$

On a

$$\|F_k(t)\|_{A(\mathbf{T}^n)}\leq K.$$

Mais sur tout compact de Ω, $F_k(t)$ converge uniformément vers la fonction continue $\psi(t)$. On en déduit que $\psi(t)$ est dans $A(\Omega)$ et que sa norme n'y dépasse pas K.

Remarque. — Dans l'exemple de Herz d'un ensemble de synthèse harmonique est utilisée une décompositon du type (1) pour approcher, dans $A(\mathbf{T})$, un élément de $A(\mathbf{T})$ par des combinaisons linéaires de translatées de la fonction Δ ([2], th. VII, p. 124).

On peut maintenant énoncer, si $\Gamma=\mathbf{R}^m\times\mathbf{T}^n$, le théorème suivant :

Théorème 4. — *Si* E *est la fermeture de l'intérieur du fermé* E_1 *de* Γ, *tout multiplicateur* φ_1 *des éléments de* $A(\Gamma)$ *nuls sur* E_1 *se prolonge par continuité, au complémentaire de* E, *en un multiplicateur* φ *des éléments de* $A(\Gamma)$ *nuls sur* E.

Démonstration. — On la présentera d'abord si $\Gamma=\mathbf{T}^n$. On appelle F la frontière de E_1. On forme une suite $(\gamma_k)_{k\geq 0}$ de points de $\mathbf{T}^n$ telle que

$$\gamma_k\to 0 \quad (k\to+\infty) \qquad \text{et} \qquad \{\gamma_k+\Gamma_k\}\cap F=\emptyset.$$

On peut toujours éviter un fermé sans intérieur en translatant légèrement un ensemble fini quelconque : ci-dessus on translate Γ_k de γ_k.

Sur le complémentaire Ω de F, réunion de l'intérieur de E_1 et du complémentaire de E_1, on définit, pour tout élément f de $A(\Gamma)$ nul sur E_1 une fonction continue, à valeurs complexes, $\psi(t)$, par

$\psi(t) = \varphi(t) f(t)$ sur $\complement E_1$;

$\psi(t) = 0$ sur l'intérieur de E_1.

La restriction de φ à $\gamma_k + \Gamma_k$ est, d'après le théorème 2, un multiplicateur, de norme au plus $\|\varphi\|$, pour les fonctions de $A(\gamma_k + \Gamma_k)$ nulles sur $\{\gamma_k + \Gamma_k\} \cap E_1$ ou sur $\{\gamma_k + \Gamma_k\} \cap E$. Mais la restriction de f à $\gamma_k + \Gamma_k$ jouit de cette propriété et donc on a

$$\|\psi(t - \gamma_k)\|_{A(\Omega \cap \Gamma_k)} \leq \|\varphi\| \, \|f\|_{A(\Gamma)}.$$

On obtient, grâce au lemme 1, le théorème 4.

Démontrons maintenant le théorème 4 si $\Gamma = \mathbf{R}^n \times \mathbf{T}^m$.

On peut trouver dans $L^1(\mathbf{R}^n \times \mathbf{Z}^m)$ une suite $(k_n)_{n \geq 0}$ telle que :

(i) $\hat{k}_n = 0$ hors d'un compact K_n;

(ii) $\|f \star k_n - f\|_1 \to 0 \quad (n \to +\infty), \quad \forall f \in L^1(G)$;

(iii) $\|k_n\|_1 = 1$.

Le produit $\varphi \hat{k}_n$ est, à ce moment, un multiplicateur de l'idéal fermé de $A(\mathbf{R}^n/(q_n\mathbf{Z})^n \times \mathbf{T}^m)$ composé des fonctions nulles sur $E_1 \cap K_n$, si q_n est un entier assez grand. De plus, pour tout réel a, $a > 0$, et tout ε, $\varepsilon > 0$, on peut trouver un réel q assez grand pour que, si $\hat{f}$ est dans $A(\mathbf{R}^n)$ et nulle hors de la boule de rayon a de centre O, $\hat{f}$ soit aussi dans $A(\mathbf{R}^n/(q\mathbf{Z})^n)$ et que le quotient des normes dans ces deux algèbres ne diffère pas de plus de ε de l'unité.

En appliquant la proposition 4 on en déduit que les $\varphi \hat{k}_n$ définissent des multiplicateurs de norme au plus $\|\varphi\|(1 + \varepsilon)^2$ pour les éléments de $A(\mathbf{R}^n \times \mathbf{T}^m)$ nuls sur $E \cap K_n$. Ceci, en passant à la limite, démontre le théorème 4. On a donc « approché $\mathbf{R}^n$ » par des tores n-dimensionnels dont les rayons sont de plus en plus grands.

Corollaire. — *Si le sous-ensemble fermé* E *de* $\mathbf{R}^n \times \mathbf{T}^m$ *n'a pas d'intérieur, tout multiplicateur d'un idéal fermé de cospectre* E *est la restriction au complémentaire de* E *d'un élément de* $B(\mathbf{R}^n \times \mathbf{T}^m)$.

Le cas le plus simple de fermé de $\mathbf{R}$ avec intérieur est celui d'un intervalle fermé. L'étude des multiplicateurs définis hors d'un intervalle nécessite celle des idéaux fermés de $A(\mathbf{R})$ composés des fonctions nulles sur un intervalle ou une demi-droite; ce sera l'objet du chapitre II.

4. Multiplicateurs non triviaux. — *Généralités et idée directrice.* — Si Ω est un ouvert de Γ, appelons $B(\Omega)$ l'algèbre de Banach [isomorphe à $B(\overline{\Omega})$] des restrictions à Ω des éléments de $B(\Gamma)$.

La norme, dans $B(\Omega)$, d'un élément φ est donc définie par

$$\|\varphi\|_{B(\Omega)} = \{\inf \|\mu\| \mid \hat{\mu} = \varphi \text{ sur } \Omega\}.$$

Une remarque importante : si Ω' est un ouvert contenu dans Ω et si φ est dans $B(\Omega)$, φ appartient à $B(\Omega')$, et

$$\|\varphi\|_{B(\Omega')} \leq \|\varphi\|_{B(\Omega)}.$$

Un théorème de Banach admet pour corollaire la proposition :

PROPOSITION 4. — *Si* E *est un fermé de* Γ, *la condition que tout multiplicateur* φ, *défini sur le complémentaire* Ω *de* E, *des éléments de* $A(\Gamma)$ *nuls sur* E, *soit la restriction à* Ω *d'un élément de* $B(\Gamma)$, *entraîne l'inégalité*

$$\|\varphi\|_{B(\Omega)} \leq K \|\varphi\|.$$

L'idée directrice sera la suivante : pour montrer l'existence des multiplicateurs non triviaux, on remplacera Ω par Ω' plus petit et plus simple, $I(E)$ par $I(E')$ plus grand et plus simple et l'on construira une suite bornée φ_n de multiplicateurs des éléments de $A(\Gamma)$ nuls sur E' telle que

$$\|\varphi_n\|_{B(\Omega')} \to +\infty \qquad (n \to +\infty).$$

Si $\Gamma = \mathbf{R}$, on prendra pour E' un intervalle fermé dont l'intérieur soit une composante connexe de l'intérieur de E et pour Ω' une suite $(I_n)_{n\geq 0}$ d'intervalles ouverts, disjoints, contenus dans $\complement E$ et s'accumulant en l'une des extrémités de E'. Les normes des φ_n comme multiplicateurs de $\mathcal{F} I_E$, sont évaluées grâce à des résultats sur les multiplicateurs de $\mathcal{F} H^1$ et des calculs élémentaires permettent d'évaluer les normes $\|\varphi_n\|_{B(\Omega')}$.

Normes de multiplicateurs des éléments de $A(\mathbf{R})$ *nuls sur* $]-\infty, 0]$.

HYPOTHÈSES. — *Les intervalles* $(J_k)_{0\leq k\leq n}$ *intervenant dans l'énoncé du théorème* 5 *sont ouverts contenus dans* $]0, +\infty[$ *ont même longueur, des centres rationnels et pour un nombre réel* α, $\alpha > 1$, *l'intervalle* αJ_{k+1} *est à « gauche » de* J_k $(0 \leq k \leq n-1)$.

Appelons $(f_k)_{0\leq k\leq n}$ une suite d'éléments de $A(\mathbf{R})$; supposons que $f_k(x)$ soit nulle hors de J_k et posons

$$\varphi_n = \sum_0^n f_k. \tag{1}$$

On a, alors, le résultat suivant :

THÉORÈME 5. — *Avec les notations ci-dessus, pour une constante* A_α *ne dépendant que de* α, *la norme du multiplicateur* φ_n *des éléments de* $A(\mathbf{R})$

nuls sur $]-\infty, 0]$ *ne dépasse pas*

$$A_\alpha\left(\sum_0^n \|f_k\|^2_{A(\mathbf{R})}\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{2}$$

L'intérêt du théorème 5 vient de ce que, sans changer l'estimation (2), l'on peut remplacer les f_k par des g_k ayant des phases assez incohérentes pour que, dans $B(\Omega')$, la norme de $\sum_0^n g_k$ soit de l'ordre de $\sum_0^n \|f_k\|_{A(\mathbf{R})}$ mais cela sera précisé dans un instant. Passons donc à la démonstration du théorème 5.

Une première remarque : les hypothèses et l'estimation (1) sont invariantes par homothétie de centre O. Nous pouvons aussi bien supposer que les centres n_k des J_k sont des entiers. On forme, si l est la longueur commune des J_k, un élément $\Delta(x)$ dans $A(\mathbf{R})$ ayant les propriétés suivantes :

a. $\Delta(x)$ est nulle hors de $\left]-\frac{l\sqrt{\alpha}}{2}, \frac{l\sqrt{\alpha}}{2}\right[$;

b. $\Delta(x)$ vaut 1 sur $\left[-\frac{l}{2}, \frac{l}{2}\right]$;

c. $\|\Delta\|_{A(\mathbf{R})}$ ne dépend que de α (et non des J_k, $0 \leqq k \leqq n$).

Les intervalles J_k sont, par hypothèse, assez bien séparés pour que l'on puisse appliquer maintenant le théorème 3 (p. 12) dans la situation suivante : Λ est le groupe $\mathbf{Z}$, E est $[0, +\infty[$, W est $\left[-\frac{l\sqrt{\alpha}}{2}, \frac{l\sqrt{\alpha}}{2}\right]$ et V est $\left]-\frac{l\alpha}{2}, \frac{l\alpha}{2}\right[$.

Un théorème de Paley nous apprend que les coefficients de Fourier d'un élément f de $H^1(\mathbf{T})$, évalués en des entiers n_k tels que

$$n_0 \geqq 1, \qquad n_{k+1} \geqq \alpha n_k$$

forment une suite de carré sommable dont la norme est majorée par $C_\alpha \|f\|_1$ (où C_α ne dépend que de α et non de la suite des n_k) (*voir*, par exemple, [8], th. 8.6).

On en déduit aussitôt que, si les fonctions coordonnées sur $\Omega = \{-1, 1\}^{n+1}$ sont désignées par $\chi_k(\omega)$, un multiplicateur de norme au plus A_α de $\mathcal{F}H^1(\mathbf{T})$ peut être obtenu en plaçant $\chi_k(\omega)$ en n_k, $0 \leqq k \leqq n$, et 0 ailleurs.

Par application du théorème 3, on montre que, pour tout ω dans Ω,

$$\Phi_n(\omega) = \sum_{0 \leqq k \leqq n} \chi_k(\omega)\, \Delta(x - n_k)$$

est un multiplicateur de $\mathcal{F}H^1(\mathbf{R})$ de norme au plus A_α.

En particulier, pour tout élément σ de $H^1(\mathbf{R})$, en appelant σ_k l'élément de $H^1(\mathbf{R})$ défini par

$$\hat{\sigma}_k(x) = \hat{\sigma}(x)\, \Delta(x - n_k),$$

on a

$$\left\| \sum_{0 \leq k \leq n} \chi_k(\omega)\, \sigma_k(x) \right\|_1 \leq A_\alpha \| \sigma \|_1. \tag{3}$$

Lorsqu'on munit Ω de la mesure $d\omega$ donnant à tout point la masse 2^{-n-1}, on a, pour toute suite complexe σ_k, l'inégalité

$$2 \int_\Omega \left| \sum_{0 \leq k \leq n} \chi_k(\omega)\, \sigma_k \right| d\omega \geq \left(\sum_{0 \leq k \leq n} |\sigma_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

(*voir*, par exemple, [8], 5.7.7, (6), p. 128).

De (3), on déduit alors

$$\left\| \left(\sum_{0 \leq k \leq n} |\sigma_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_1 \leq 2 A_\alpha \| \sigma \|_1.$$

Mais l'inégalité de Minkowski écrite, dans $L^{\frac{1}{2}}$, pour la somme $\sum\limits_{0 \leq k \leq n} |\sigma_k|^2$ donne

$$\left(\sum_{0 \leq k \leq n} \| \sigma_k \|_1^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left\| \left(\sum_{0 \leq k \leq n} |\sigma_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_1 \leq 2 A_\alpha \| \sigma \|_1.$$

Si maintenant φ_n est de la forme (1), on a les inégalités

$$\begin{aligned} \| \varphi_n(x) \sum_{0 \leq k \leq n} \hat{\sigma}_k(x) \|_{A(\mathbf{R})} &\leq \sum_{0 \leq k \leq n} \| f_k \|_{A(\mathbf{R})} \| \sigma_k \|_1 \\ &\leq \left(\sum_{0 \leq k \leq n} \| f_k \|_{A(\mathbf{R})}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{0 \leq k \leq n} \| \sigma_k \|_1^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq 2 A_\alpha \| \sigma \|_1 \left(\sum_{0 \leq k \leq n} \| f_k \|_{A(\mathbf{R})}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Le théorème 5 est démontré.

Montrons enfin comment choisir les f_k pour que, si Ω'_n désigne la réunion des intervalles J_k, $0 \leq k \leq n$, la norme dans $B(\Omega'_n)$ de $\sum\limits_{0 \leq k \leq n} f_k$ soit la plus grande possible. On utilise le lemme ci-dessous où les intervalles J_k sont seulement astreints à la condition d'être disjoints.

Lemme. — *Soit $(f_k)_{k \geq 0}$ une suite quelconque d'éléments de $A(\mathbf{R})$ dont les supports sont contenus dans des intervalles $(J_k)_{k \geq 0}$ deux à deux disjoints* *et soit* ε *un nombre réel strictement positif. On peut alors trouver une suite réelle* $(t_k)_{k\geq 0}$ *telle que, pour tout entier positif n, on ait*

$$\left\| \sum_0^n e^{it_k x} f_k(x) \right\|_{A(\bigcup J_k)} \geq (1-\varepsilon) \sum_0^n \| f_k \|_{A(J_k)} \qquad (0 \leq k \leq n).$$

La démonstration du lemme est très simple; une première remarque à faire est que l'on a

$$\| f_k \|_{A(J_k)} = \sup \left| \int_{\mathbf{R}} f_k g\, dx \right|,$$

où le sup est étendu à tous les éléments g de $L^1(\mathbf{R})$ nuls hors de J_k et vérifiant $\| \hat{g} \|_\infty \leq 1$. Par dualité, la vérification du lemme se ramène à celle-ci : « si les g_k sont intégrables, nulles hors de J_k et si

$$\| \hat{g}_k \|_\infty \leq 1,$$

on peut trouver une suite réelle t_k telle que la transformée de Fourier de

$$\sum_{0 \leq k \leq n} g_k(x)\, e^{it_k x}$$

soit uniformément majorée par $1+\varepsilon$ ». Pour le voir, il suffit de remarquer que $\hat{g}_k$ est nulle à l'infini.

Nous obtenons alors sans peine la construction d'un multiplicateur non trivial, si $\Gamma = \mathbf{R}$.

THÉORÈME 6. — *Si* E *est un fermé de* $\mathbf{R}$ *d'intérieur non vide, on peut trouver un multiplicateur non trivial de tous les idéaux fermés de* $A(\mathbf{R})$ *composés de fonctions nulles sur* E.

Démonstration. — Appelons $]a, b[$ une des composantes connexes de l'intérieur de E. Quitte à faire une translation, on peut supposer que

$$b = 0, \qquad a < 0$$

Appelons $(J_k)_{0 \leq k \leq n}$ une suite de $n+1$ intervalles contenus dans $[0, 1]$, dans le complémentaire de E et satisfaisant aux hypothèses du théorème 5. Soit $h(x)$ un élément de $A(\mathbf{R})$ égal à 1 sur $[0, 1]$ et à 0 sur $]-\infty, a]$. Pour tout élément f de $A(\mathbf{R})$, nul sur E, le produit fh est nul sur $]-\infty, 0]$. Pour appliquer les deux théorèmes ci-dessus, appelons Δ_k l'élément de $A(\mathbf{R})$ égal à 1 au centre de J_k, à 0 hors de J_k et linéaire sur les deux moitiés de J_k.

On pose

$$\varphi_n(x) = \sum_0^n \Delta_k(x)\, e^{it_k x}.$$

Le multiplicateur φ_n des éléments de $A(\mathbf{R})$ nuls sur $]-\infty, 0]$ et le multiplicateur $\varphi_n h$ des éléments de $A(\mathbf{R})$ nuls sur E ont des normes au plus égales à $A_\alpha\sqrt{n}$ et $A_\alpha\|h\|_1\sqrt{n}$, mais la norme de $\varphi_n h$ dans $B(\Omega')$ dépasse $\frac{n}{2}\cdot$ Le théorème est prouvé.

Étude du cas général. — Une étape permettra d'utiliser le résultat précédent. On suppose que Γ contienne $\mathbf{R}$ comme facteur direct, soit

$$\Gamma = \Gamma_1 \times \mathbf{R}, \qquad G = G_1 \times \mathbf{R}.$$

Une hypothèse très particulière sera faite sur le fermé E de Γ : on suppose que, pour un élément γ_1 de Γ_1, le produit $\{\gamma_1\}\times\mathbf{R}$ coupe bien la frontière de E au sens suivant : *l'extrémité b d'un intervalle* $\{\gamma_1\}\times]a, b[$ *dans* $\mathring{E}$ *et* $\{\gamma_1\}\times\mathbf{R}$ *est adhérente à l'intersection, avec* $\{\gamma_1\}\times\mathbf{R}$, *du complémentaire* Ω *de* E ($\mathring{E}$ désigne l'intérieur de E).

Proposition 5. — *L'hypothèse qui vient d'être écrite permet de construire un multiplicateur non trivial des fonctions de* $A(\Gamma)$ *nulles sur* E.

L'idée de la démonstration est d'approcher un ouvert par des réunions de cylindres ouverts. On utilisera alors le théorème 7 et le lemme (presque évident) :

Lemme. — *Soit* E_2 *un fermé de* $\mathbf{R}$, φ *un multiplicateur de norme* $\|\varphi\|$ *des éléments de* $A(\mathbf{R})$ *nuls sur* E_2.

Si p_2 *est la projection de* $\Gamma_1\times\mathbf{R}$ *sur* $\mathbf{R}$, $\varphi\circ p_2$ *définit un multiplicateur de norme* $\|\varphi\|$ *des éléments de* $A(\Gamma_1\times\mathbf{R})$ *nuls sur* $\Gamma_1\times E_2$.

Démontrons la proposition : on suppose encore que $b=0$ et l'on appelle $(x_n)_{n\geq 0}$ une suite, tendant vers zéro, de points de $\mathbf{R}$, $(\varepsilon_n)_{n\geq 0}$ une suite de réels positifs tels que

Si $I_n = \{\gamma_1\}\times]-\varepsilon_n + x_n, \varepsilon_n + x_n[$, on ait

(i) $I_n \subset \complement E$;

(ii) $I_n \cap I_m = \emptyset$ si $n \neq m$;

(iii) $0 < 3x_{n+1} \leq x_n, \qquad n \geq 0.$

A tout entier N on peut associer un réel ε, $\varepsilon > 0$, assez petit pour que, si $1 \leq n \leq N$, on ait

$$2(x_{n+1}+\varepsilon) \leq x_n + \varepsilon \qquad (0 \leq n \leq N).$$

[Vue de $-\varepsilon$, la suite $(x_n)_{0\leq n\leq N}$ est encore « bien » lacunaire suivant Hadamard.]

A cet ε on associe un voisinage ouvert V de γ_1 dans Γ_1 tel que le produit $V\times]a+\varepsilon, -\varepsilon[$ soit un cylindre, ouvert, contenu dans l'intérieur de E.

Enfin k est un élément de $A(\Gamma_1)$ de norme au plus 2, qui vaut 1 en γ_1 et 0 hors de V. Il est clair que ε, V et k dépendent de N.

Si f, dans $A(\Gamma)$, est nulle sur E, $(fk)(\gamma)$ est nulle sur $\Gamma_1 \times]a+\varepsilon, -\varepsilon[$ et nous sommes dans les conditions d'application du lemme.

On forme le multiplicateur, des éléments de $A(\Gamma)$ nuls sur $\Gamma_1 \times]a+\varepsilon, -\varepsilon[$, défini par la composition :

$$p_2 \circ \varphi_N, \qquad \text{où} \quad \varphi_N(x) = \left(\sum_0^n e^{it_n x} \Delta_n(x) \right) N^{-\frac{1}{2}} \quad \text{(notations du théorème 6).}$$

La suite $k(\gamma)(p_2 \circ \varphi_N)(\gamma)$ des multiplicateurs des éléments de $A(\Gamma)$ nuls sur E est uniformément bornée et ne peut avoir, dans $B(\Omega)$, des normes uniformément bornées comme on le voit en se restreignant à $\{\gamma_1\} \times \mathbf{R}$.

Nous pouvons maintenant passer au cas général.

THÉORÈME 7. — *Si* $\Gamma = \mathbf{R}^n \times \mathbf{T}^m$, *si* E *est un fermé de* Γ *d'intérieur non vide, on peut former, pour tout idéal* I *de cospectre* E, *un convoluteur non trivial de cet idéal.*

Démonstration. — Le multiplicateur que nous allons construire n'appartient pas, localement, à $A(\Gamma)$. On peut, grâce aux isomorphismes locaux entre $A(\mathbf{T}^n)$ et $A(\mathbf{R}^n)$ se ramener au cas où $\Gamma = \mathbf{R}^n$. Nous allons former une sous-variété D de dimension 1, une « droite » rencontrant $\mathring{E}$ suivant un ouvert A la frontière F de E suivant un fermé C et le complémentaire de E suivant un ouvert B, tous trois non vides, de façon que la portion de C contenue dans un intervalle de D n'ait pas d'intérieur. Nous serons ramenés à la situation qui sert d'hypothèse à la proposition 5.

Appelons a un point de $\complement E$ et b un point de $\mathring{E}$. Le point a sera pour origine d'un système d'axes tels que b soit le point $(1, 0, \ldots, 0)$. Un point de $\mathbf{R}^n$ sera noté (x, Y), où $x \in \mathbf{R}$, $Y = (x_2, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^{n-1}$. Enfin, pour tout Y dans $\mathbf{R}^{n-1}$, D_Y désignera l'ensemble de tous les (x, Y) de $\mathbf{R}^n$. Il existe un voisinage ouvert V de 0 dans $\mathbf{R}^{n-1}$ tel que, si Y est dans V, D_Y rencontre à la fois $\mathring{E}$ et $\complement E$ dans la bande $\mathcal{B}$ de $\mathbf{R}^n$ définie par : $0 \leqq x \leqq 1$. Nous allons montrer que les Y pour lesquels D_Y rencontre $\mathcal{B} \cap F$ en un fermé avec intérieur, forment un ensemble de première catégorie, au sens de Baire; il y aura donc un Y dans V tel qu'un intervalle de D_Y coupe l'intérieur de E, la frontière de E et le complémentaire de E, comme nous le désirons.

Pour vérifier la propriété de catégorie annoncée, appelons K l'intersection de F et de $\mathcal{B}$ et U_n l'ensemble des Y tels que $K \cap D_Y$ contienne un intervalle fermé de longueur n^{-1}. L'ensemble fermé U_n est réunion de $2n-2$ fermés $U_{n,m}$, $1 \leqq m \leqq 2n-2$, qui sont les ensembles des Y tels que $D_Y \cap K$ contienne un segment de longueur n^{-1} situé dans la bande $m - \frac{1}{2n} \leqq x \leqq m + \frac{2}{2n}$. Ces bandes recouvrent $\mathcal{B}$: la réunion des $U_{n,m}$ est U_n. D'autre part, un segment de longueur n^{-1} dans l'intervalle $\left[\frac{m-1}{2n}, \frac{m+2}{2n}\right]$ contient toujours l'intervalle $\left[\frac{m}{2n}, \frac{m+1}{2n}\right]$. Donc $U_{n,m}$ n'a pas d'intérieur, ni U_n, et l'ensemble des Y tels que D_Y rencontre $\mathcal{B} \cap F$ suivant un fermé d'intérieur non vide, est une réunion dénombrable de fermés sans intérieur.

Remarque. — Dans les démonstrations précédentes, on aurait pu utiliser le multiplicateur $e^{ic \log x}$ des éléments de $A(\mathbf{R})$ nuls sur $]-\infty, 0]$. Si E est un fermé de $\mathbf{R}$, si $]-\alpha, 0[$ est une composante connexe de l'intérieur de E et $\lambda(x)$ un élément de $A(\mathbf{R})$ à support conpact, pour une valeur au moins, non nulle, du réel c, $e^{ic \log x}\lambda(x)$ est un multiplicateur des fonctions de $A(\mathbf{R})$ nulles sur E qui ne peut être prolongé par continuité en 0. *Voir* [9]. Mais ceci ne nous aurait pas dispensé de notre étude si $\Gamma = \mathbf{R}^n \times \mathbf{T}^m$.

CHAPITRE II.

Variantes d'une fonction de Littlewood-Paley dans l'étude des classes H^1.

Introduction. — Commençons par rappeler un résultat classique afin de mieux situer celui obtenu dans ce chapitre : si le réel p est strictement supérieur à 1, pour tout élément $f(\theta)$ de la classe de Hardy $H^p(\mathbf{T})$, la fonction de Littlewood-Paley $\gamma(\theta)$ est presque partout finie et sa norme dans L^p est équivalente à celle de $f(\theta)$. [Si la série de Fourier de $f(\theta)$ est écrite, formellement, $\sum_{n \geqq 0} \Delta_n(\theta)$, où $\Delta_n(\theta)$ est un polynôme trigonométrique à spectre dans $[2^{n-1}, 2^n[$, $n \geqq 1$, et $\Delta_0(\theta) = \hat{f}(0)$, on pose $\gamma(\theta) = \left(\sum_{n \geqq 0} |\Delta_n(\theta)|^2\right)^{\frac{1}{2}}$.]

Quand $p=1$, des exemples très simples montrent que, si $f(\theta)$ est dans $H^1(\mathbf{T})$, $\gamma(\theta)$ n'appartient pas toujours à $L^1(\mathbf{T})$. Le découpage de la série de Fourier de $f(\theta)$ en blocs $\Delta_n(\theta)$ était trop brutal et Elias Stein [9] vient de montrer qu'il suffit de remplacer $\Delta_n(\theta)$ par $\tilde{\Delta}_n(\theta)$, où :

$$(1)\quad \begin{cases} \tilde{\Delta}_n(\theta) = t_n(\theta) + \Delta_n(\theta) + q_n(\theta) \quad \text{et} \quad t_n(\theta) = \displaystyle\sum_{2^{n-2}}^{2^{n-1}-1} (2^{2-n}p - 1)\hat{f}(p)\, e^{ip\theta}, \\ q_n(\theta) = \displaystyle\sum_{2^n}^{2^{n+1}} (2 - 2^{-n}p)\, \hat{f}(p)\, e^{ip\theta}. \end{cases}$$

On remplace la différence $\Delta_n(\theta)$ entre deux sommes partielles par la différence $\tilde{\Delta}_n(\theta)$ entre deux sommes suivant la méthode de De la Vallée Poussin. On a encore équivalence entre les normes L^1 de $f(\theta)$ et de

$$\tilde{\gamma}(\theta) = \left(\sum_0^\infty |\tilde{\Delta}_n(\theta)|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

La méthode employée par E. Stein utilise un résultat de Zygmund relatif à une variante de la fonction de Lusin et un théorème de Calderon étendant aux classes H^p, $0 < p < 1$ des résultats antérieurement connus si $p > 1$ [9].

Nous prouvons seulement l'existence de deux polynômes trigonométriques $t_n(\theta)$ et $q_n(\theta)$, à spectres dans $[2^{n-2}, 2^{n-1}[$ et $[2^n, 2^{n+1}]$ tels qu'en posant

$$\tilde{\Delta}_n(\theta) = t_n(\theta) + \Delta_n(\theta) + q_n(\theta),$$

on ait

$$\left\| \left(\sum_{n \leqq 0} |\Delta_n(\theta)|^2\right)^{\frac{1}{2}} \right\|_1 \leqq A \|f\|_1. \tag{2}$$

Notre résultat est inférieur à celui d'E. Stein en deux points : les polynômes t_n et q_n ne sont pas connus explicitement et il n'y a pas équivalence entre les normes L^1 des deux membres de (2); cependant cette précision supplémentaire est souvent inutile dans les applications que nous avions en vue en créant le théorème 1 dont la démonstration est bien différente de celle que l'on trouvera dans [9].

1. Étude des $H^p(\mathbf{T})$, $p > 0$.

Théorème 1. — *A tout α, $\alpha > 1$ et à tout p, $p > 0$, on peut associer une constante $B_{\alpha,p}$ strictement positive telle que, si la suite $(n_k)_{k \geqq 0}$ d'entiers positifs vérifie la condition*

$$n_{k+1} \geqq \alpha n_k, \qquad n_0 > 0,$$

on puisse trouver, pour tout élément f de $H^p(\mathbf{T})$, une suite $(f_k)_{k \geqq 0}$ de polynômes trigonométriques analytiques telle que

$$\hat{f}_k(n) = \hat{f}(n) \qquad \text{si} \quad n_k \leqq n < n_{k+1} - 1; \tag{3}$$

$$\left\| \left(\sum_{k \geqq 0} |f_k(x)|^2\right)^{\frac{1}{2}} \right\|_p \leqq B_{\alpha,p} \|f\|_p. \tag{4}$$

Démonstration. — Elle fait appel aux théorèmes de factorisation dans les classes $H_p(\mathbf{T})$, à la structure d'ordre de $\mathbf{Z}^+$ et aux théorèmes de

Littlewood-Paley concernant les sommes partielles d'ordre lacunaire de la série de Fourier d'une fonction de $L^p(\mathbf{T})$ $(p>1)$.

Nous ne ferons la démonstration que si $n_k=2^k$, car le cas général se traiterait de façon absolument semblable.

Si p est un réel strictement positif, on appelle N un entier tel que : $pN>1$.

A tout élément f de $H^p(\mathbf{T})$, on peut associer une suite g_n, $1\leq n\leq N$ d'éléments de $H^{pN}(\mathbf{T})$ vérifiant les conditions :

f est égale, presque partout sur $\mathbf{T}$, au produit g_1, $g_2\ldots g_N$, et

$$\|g_1\|_{pN}^N=\|g_2\|_{pN}^N=\ldots=\|g_N\|_{pN}^N=\|f\|_p.$$

(*Voir*, par exemple [11], p. 275, (7.21).)

Chaque g_n peut s'écrire comme somme de trois termes :

$$g_n=g_{n,k}+g'_{n,k}+g''_{n,k},$$

où k est un entier supérieur à N, où $g_{n,k}$ est la somme de la série de Fourier de g_n de 0 à $2^{k-N}-1$, $g'_{n,k}$ la somme de la série de Fourier de g_n de 2^{k-N} à $2^{k+1}-1$ et enfin $g''_{n,k}$ la somme de la série de Fourier de g_n de 2^{k+1} à l'infini.

On obtient f_k en développant le produit $g_1 g_2\ldots g_N$ et en y ôtant le produit $g_{1,k}\ldots g_{N,k}$ et tous les produits contenant un $g''_{n,k}$. Les vérifications de (1) et (2) sont immédiates par application des théorèmes suivants de Littlewood et Paley : pour une constante $A_{p,N}$, les expressions

$$\sup_{k\geq 0}|g_{n,k}(x)| \qquad \text{et} \qquad \left(\sum_{k\geq 0}|g'_{n,k}(x)|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

sont dans L^{pN} et leurs normes y sont majorées par $\|g_n\|_{pN}A_{p,N}$ ([12], chap. XV, th. 21, p. 224 et 4.4, p. 231).

(Si $p=1$, on choisit $N=2$ et de ces deux théorèmes, l'un est évident et l'autre est élémentaire.)

De façon tout à fait analogue on montre le théorème suivant sur les classes d'Orlicz (utilisé au chapitre IV) :

THÉORÈME 2. — *Si f est un élément de $H^1(\mathbf{T})$ tel que*

$$|f|(\log^+|f|)^{\frac{1}{2}}\in L^1(\mathbf{T}), \tag{5}$$

on peut trouver une suite $(f_k)_{k\geq 0}$ de polynômes trigonométriques analytiques telle que

$$\hat{f}_k(n)=\hat{f}(n) \qquad si \quad n_k\leq n<n_{k+1}-1 \tag{6}$$

et que, si $\left(\sum_{k\geq 0}|f_k(x)|^2\right)^{\frac{1}{2}}=g(x)$, *on ait* $|g|(\log^+|g|)^{\frac{1}{2}}\in L^1(\mathbf{T})$.

2. Étude des $H^p(\mathbf{R})$. — Les théorèmes se transcrivent immédiatement et les démonstrations sont parallèles : on utilise les théorèmes de factorisation correspondants et les théorèmes de Littlewood-Paley du cas continu (ils se déduisent facilement de ceux du cas discret).

Théorème 3. — *Un nombre réel, α, est strictement supérieur à* 1 *et* A_α *est une constante positive ne dépendant que de* α. *La suite* $(t_n)_{-\infty<n<+\infty}$ *de nombres réels strictement positifs vérifie la condition*

$$0 < \alpha t_n < t_{n+1}.$$

A tout élément f *de* $L^1(\mathbf{R})$, *dont la transformée de Fourier est nulle sur* $]-\infty, 0]$, *on peut associer une suite* $(f_n)_{-\infty<n<+\infty}$ *d'éléments de* $L^1(\mathbf{R})$ *jouissant des propriétés suivantes :*

$$\hat{f}_n(x) = 0 \qquad si \quad x \leqq 0,$$

$$\hat{f}_n(x) = \hat{f}(x) \qquad si \quad t_n \leqq x \leqq t_{n+1},$$

$$\left\| \left(\sum_{-\infty}^{+\infty} |f_n(x)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_1 \leqq A_\alpha \|f\|_1.$$

3. Construction de multiplicateurs pour les transformées de Fourier des éléments de $H^1(\mathbf{R})$. — En liaison avec l'étude des ensembles satisfaisant à la condition forte de Ditkin (théorème 8 du chapitre IV) nous allons résoudre le problème suivant :

Si $\varphi_d(x)$ est la fonction caractéristique d'une suite $(x_n)_{n\geqq 0}$ de nombres réels, strictement positifs, tendant vers zéro suivant la condition de Hadamard, il s'agit d'approcher $\varphi_d(x)$ par une suite bornée de multiplicateurs des éléments de $A(\mathbf{R})$ nuls sur $]-\infty, 0]$. Plus précisément, on appellera I l'idéal de $A(\mathbf{R})$ formé de tous les éléments de $A(\mathbf{R})$ nuls sur $]-\infty, 0]$ et, si $\mathbf{R}_d$ est le groupe des réels muni de la topologie discrète, I_d sera l'idéal fermé de $A(\mathbf{R}_d)$ composé de tous les éléments de $A(\mathbf{R}_d)$ nuls sur $]-\infty, 0]$. On a alors :

Théorème 4. — *Si la suite* $(x_n)_{n\geqq 0}$ *vérifie les conditions*

$$(1) \qquad 0 < x_{n+1} < \alpha x_n; \qquad 0 < \alpha < 1, \qquad n > 0$$

et si $(a_n)_{n\geqq 0}$ *est une suite complexe bornée, la fonction* $\varphi_d(x)$ *égale à* a_n *en* x_n *et à* 0 *partout ailleurs est un multiplicateur de* I_d. *De plus :*

(i) *Ce multiplicateur est limite simple d'une suite bornée* $\varphi_k(x)$ *de multiplicateurs de* I;

(ii) *Les* $\varphi_k(x)$ *peuvent être définis, si l'élément* $g_k(x)$ *de* $A(\mathbf{R})$ *vaut* 1 *en* 0 *et* 0 *hors de* $]-x_k, x_k[$, *par*

$$\varphi_k(x) = \sum_0^k a_n g_k(x - x_n) \tag{2}$$

et l'on a

$$\| \varphi_k \| \leq B_\alpha \| a_n \|_\infty \| g_k \|_{A(\mathbf{R})}. \tag{3}$$

On peut démontrer le (i) du théorème 3 par deux procédés; le plus élémentaire semble le plus délicat; il sera très important pour étudier les ensembles satisfaisant la condition forte de Ditkin (chap. IV, th. 7).

Première preuve de (i). — Elle utilise seulement le théorème de Paley (*voir* [8], p. 213, th. 8.6) suivant sur $H^1(\mathbf{T})$: si la suite d'entiers positifs, les $(n_k)_{k\geq 0}$, vérifie les conditions

$$0 < n_0; \qquad \alpha n_k < n_{k+1} \qquad (\alpha > 1)$$

pour tout élément f de $H^1(\mathbf{T})$, on a

$$\sum_{k\geq 0} |\hat{f}(n_k)|^2 < A_\alpha \|f\|_1^2.$$

On en déduit aussitôt qu'une suite complexe, bornée par 1 sur les n_k et nulle ailleurs définit un multiplicateur de $\mathcal{F} H^1(\mathbf{T})$ de norme au plus A_α.

Nous employons des approximations rationnelles précises des x_n, $1 \leq n \leq k$, données par le théorème de Dedekind : à l'entier k on associe un entier ω_k assez grand pour que des réels x'_n tels que

$$|x'_n - x_n| \leq \frac{1}{\omega_k}$$

vérifient encore (1). On peut prendre les x'_n rationnels, de la forme $\frac{p_n}{q}$ avec $1 \leq q \leq (\omega_k)^k$. On appelle Γ_k le sous-groupe $\left(\frac{1}{q}\right)\mathbf{Z}$. Une fonction égale à a_n sur x'_n, à 0 ailleurs, est un multiplicateur des éléments de $A(\Gamma_k)$ nuls sur $]-\infty, 0]$ de norme au plus $B_\alpha \| a_n \|_\infty$. En appliquant le théorème 3 du chapitre I on obtient un multiplicateur de I de la forme

$$\varphi_k(x) = \sum_0^k a_n g_k(x - x'_n),$$

où $g_k(x)$ est, par exemple, une fonction « triangle isocèle » valant 1 en 0 et 0 hors de $\left]\frac{1}{2q}, \frac{1}{2q}\right[$. La suite $\varphi_k(x)$ ainsi formée vérifie (i), mais les supports des $g_k(x)$ sont difficiles à préciser.

Seconde preuve de (i) *et démonstration de* (ii). — On appelle D^∞ le groupe compact $\{0, 1\}^{\mathbf{N}}$. Un point de D^∞ est noté ω et les caractères « élémentaires » sur D^∞ sont appelés $\varphi_k(\omega)$, $k \geqq 0$ [$\varphi_k(\omega)$ ne dépend que de la $k^{\text{ième}}$ coordonnée de ω, vaut 1 si elle vaut 0, -1, sinon].

Un ensemble E d'entiers est du type $\Lambda(2)$ si les normes L^1 et L^2 des polynômes trigonométriques à spectre contenu dans E sont équivalentes.

Un réel de l'intervalle $\left]0, \frac{1}{2}\right[$ est appelé s et $(f_k(x))_{k \geqq 0}$ est une suite finie d'éléments de $L^1(\mathbf{R})$ tels que

$$\hat{f}_k(x) = 0 \qquad si \quad |x| \geqq s.$$

Le lemme 1 permet d'apprécier la norme L^1 d'un élément f de $L^1(\mathbf{R})$ s'écrivant

$$f(x) = \sum_{k \geqq 0} e^{ixx_k} f_k(x)\,; \qquad x_k \in \mathrm{E}, \qquad k \geqq 0,$$

où E est un ensemble $\Lambda(2)$ d'entiers.

LEMME 1. — *Avec les notations ci-dessus, a_s et b_s désignant deux constantes ne dépendant que de* E *et de s, on a*

$$a_s \left\| \sum_{k \geqq 0} \varphi_k(\omega) f_k(x) \right\|_{L^1(\mathbf{R} \times D^\infty)} \leqq \left\| \sum_{k \geqq 0} e^{ixx_k} f_k(x) \right\|_{L^1(\mathbf{R})} \leqq b_s \left\| \sum_{k \geqq 0} \varphi_k(\omega) f_k(x) \right\|_{L^1(\mathbf{R} \times D^\infty)}.$$

La démonstration du lemme résulte immédiatement de l'hypothèse que E est du type $\Lambda(2)$, du lemme 1, § 2 du chapitre I et de la remarque suivante :

Remarque. — $\left\| \sum_{k \geqq 0} \varphi_k(\omega) f_k(x) \right\|_{L^1(\mathbf{R} \times D^\infty)}$ est une norme équivalente à

$$\left\| \left(\sum_{k \geqq 0} |f_k(x)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{L^1(\mathbf{R})}.$$

Une suite d'entiers, lacunaire à la Hadamard, est un ensemble $\Lambda(2)$ (th. 5.7.7, [8]). La conclusion du lemme 1 est invariante par homothétie et le lemme s'applique donc à des fonctions f s'écrivant $\sum_1^n f_k$, où f_k est un élément de $L^1(\mathbf{T})$ dont le spectre est contenu dans $[x_k - x_n, x_k + x_n]$ et où, maintenant, x_k est une suite de rationnels tels que $x_{k+1} < \alpha x_k$, avec $0 < \alpha < 1$. Le lemme 1 s'applique encore si les x_k sont réels car on peut les approcher par des x'_k rationnels tels que

$$x'_{k+1} < \alpha x'_k \qquad \text{et} \qquad [x'_k - x'_n, x'_k + x'_n] \supset [x_k - x_n, x_k + x_n]$$

et l'on est ramené au cas précédent (a_s et b_s doivent alors être remplacées par a_α et b_α ne dépendant que de α).

On peut maintenant démontrer le théorème 4. A un élément f de $H^1(\mathbf{T})$, on peut associer, grâce au théorème 1 du chapitre II, une suite f_n d'éléments de $H^1(\mathbf{T})$ tels que les transformées de Fourier de f et de f_n coïncident, sur $[x_{n-1}, x_{n+1}]$, et que l'on ait

$$\left\| \left(\sum_{n \geq 0} |f_n(x)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_1 \leq A \|f\|_1.$$

Si l'on pose : $f_n^*(x) = e^{-ixx_n} f_n(x)$, on peut écrire, pour tout entier k,

$$\left\| \sum_{0 \leq n \leq k} a_n \varphi_n(\omega) f_n^*(x) \right\|_{L^1(\mathbf{T} \times D^\infty)} \leq A \|f\|_1 \|a_n\|_\infty$$

et, par convolution avec $\tilde{g}_k$ dont la transformée de Fourier est g_k, on a

$$\left\| \sum_{0 \leq n \leq k} a_n \varphi_n(\omega) (f_n^* \star \tilde{g}_k)(x) \right\|_{L^1(\mathbf{T} \times D^\infty)} \leq A \|\tilde{g}_k\|_1 \|f\|_1 \|a_n\|_\infty,$$

ce qui, avec le lemme 1 fournit le théorème 4.

Compléments sur les multiplicateurs de $\mathcal{F} H^1(\mathbf{R})$. — Appelons h_n, $n \geq 0$, une suite de nombres réels positifs. Posons

$$\Delta_n(x) = \sup\left(1 - \left|\frac{x}{h_n}\right|, 0\right).$$

et soit t_n, $n \geq 0$, une suite de nombres réels positifs, tendant vers l'infini tels que

(3) $$a t_n \leq t_{n+1}, \qquad 1 < a, \qquad 0 < t_0.$$

Posons enfin

$$\varphi(x) = \sum_{n \geq 0} \Delta_n(x - t_n).$$

On a alors le théorème :

THÉORÈME 5. — (i) *Si pour un réel* ε, $\varepsilon > 0$, *on a, pour tout* n :

$$\varepsilon \leq h_n \leq \varepsilon^{-1},$$

alors $\varphi(x)$ *est un multiplicateur de tous les* $\mathcal{F} H^p$, $1 \leq p$.

(ii) *Si l'on a*

$$\underline{\lim}\, h_n = 0 \qquad (n \to +\infty),$$

alors $\varphi(x)$ *n'est pas un multiplicateur de* $\mathcal{F} H^1$.

(iii) *Si*

$$at_n \leqq t_{n+1} \leqq bt_n, \qquad 1 < a < b, \qquad h_{n+1} \leqq bh_n$$

et si h_n *tend, en croissant vers l'infini tandis que* $\frac{h_n}{t_n}$ *tend verz zéro, alors* $\varphi(x)$ *n'est pas un multiplicateur de* $\mathcal{F}\mathrm{H}^1$.

(iv) *Si* $at_n \leqq t_{n+1} \leqq bt_n$, $1 < a < b$ *et si pour un* ε, $\varepsilon > 0$, *on a*

$$\varepsilon < \frac{h_n}{t_n} < \varepsilon^{-1},$$

alors $\varphi(x)$ *est un multiplicateur de* $\mathcal{F}\mathrm{H}^1$.

Remarques. — Le théorème d'interpolation des opérations linéaires sur les classes H^p, *voir* par exemple ([12]), th. 3.9, p. 108) montre qu'un multiplicateur de $\mathcal{F}\mathrm{H}^1$ est un multiplicateur pour tous les $\mathcal{F}\mathrm{H}^p$, $1 \leqq p$. Le théorème 4 montre, en gros, que (i) et (iv) sont les seuls moyens de former un multiplicateur du type φ : il n'y a pas de cas intermédiaires. Enfin (iv) est prouvé dans [9].

Démonstration de (i). — Elle est parallèle à celle du théorème 4. L'hypothèse de (i) entraîne l'existence d'un élément $g(x)$ dans $L^1(\mathbf{R})$ tel que

$$|g_n(x)| \leqq g(x) \quad n \geqq 0 \qquad \text{si} \quad \hat{g}_n(x) = \Delta_n(x - t_n).$$

On en déduit que, pour toute suite f_n d'éléments de $L^1(\mathbf{R})$, on a

$$\left\| \left(\sum_{n \geqq 0} |f_n \star g_n|^2(x) \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_1 \leqq \|g\|_1 \left\| \left(\sum_{n \geqq 0} |f_n(x)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_1$$

et l'on raisonne alors comme au théorème 4.

Démonstration de (ii). — Elle résulte du lemme très élémentaire suivant :

Lemme. — *De toute suite* $(\varepsilon_n)_{n \geqq 0}$ *de nombres réels positifs tendant vers zéro, on peut extraire une sous-suite* (h_n) *telle qu'on ait*

$$\left\| \sum_0^{\mathrm{N}} a_n \Delta_n(x - t_n) \right\|_{\mathrm{A}(\mathbf{R})} \geqq \frac{1}{2} \sum_0^{\mathrm{N}} |a_n| \tag{4}$$

pour toute suite complexe bornée $(a_n)_{0 \leqq n \leqq \mathrm{N}}$.

On rappelle que : $\Delta_n(x) = \sup\left(0, 1 - \left|\frac{x}{h_n}\right|\right)$.

Démonstration du lemme. — Appelons $\sigma(x)$ la fonction de $L^1(\mathbf{R})$ telle que

$$\hat{\sigma}(x) = \sup(0, 1 - |x|)$$

Le premier membre de (4) vaut alors

$$\int_{\mathbf{R}} \left| \sum_{0}^{N} a_n h_n \sigma(h_n x) e^{ixt_n} \right| dx$$

et l'idée est de construire une suite E_n de parties disjointes de $\mathbf{R}$ telle que E_n porte presque toute la masse de $h_n \sigma(h_n x)\, dx$ mais soit négligeable pour les autres $h_m \sigma(h_m x)\, dx$. L'inégalité (4) sera alors immédiate.

On peut, par exemple prendre pour E_n l'ensemble des x tels que $T_n \leq |x| \leq T_{n+1}$, où la suite $h_1, h_2, \ldots, h_n, T_1, \ldots, T_n$ est construite par récurrence de la façon suivante :

On détermine d'abord T_{n+1} pour que

$$\int_{T_{n+1}}^{+\infty} h_k \sigma(h_k x)\, dx \leq 2^{-n} \qquad (0 \leq k \leq n).$$

Ceci est possible parce que h_k est fixé par les choix précédents : les masses des $h_k \sigma(h_k x)$ ne sont pas « trop loin ». On choisit alors h_{n+1} assez petit pour que

$$\int_{T_{n+1}}^{+\infty} h_{n+1} \sigma(h_{N+1} x)\, dx \geq \frac{1}{2} - 2^{-n}.$$

Ceci achève la démonstration du lemme. Venons à la démonstration de (ii).

Si $\underline{\lim}\, h_n = 0$ $(n \to +\infty$, on choisira une sous-suite des h_n telle que l'inégalité (4) ait lieu. On considère la fonction

$$U(x, \omega) = \sum_{0}^{N} \varphi_n(\omega)\, T(x - t_n) \qquad \text{pour} \quad \omega \in \{-1, 1\}^{N} = \Omega,$$

où $T(x)$ est un élément de $A(\mathbf{R})$ égal à 1 sur $[-1, 1]$, nul hors de $]-2, 2[$.

Le multiplicateur φ transforme $U(x, \omega)$ en $\sum_{0}^{N} \varphi_n(\omega)\, \Delta_n(x - t_n)$; l'on a, grâce au lemme, l'inégalité

$$\frac{N}{2} \leq \left\| \sum_{0}^{N} \varphi_n(\omega)\, \Delta_n(x - t_n) \right\|_{A(\mathbf{R})} \leq \|\varphi\|\, \|U(x, \omega)\|_{A(\mathbf{R})}$$

et, par intégration sur Ω, on obtient

$$\frac{N}{2} \leq \|\varphi\|\, \|T(x)\|_{A(\mathbf{R})} \leq \sqrt{N}.$$

qui est impossible si N est assez grand.

Démonstration de (iii). — Les hypothèses faites permettent d'associer à tout entier M un entier N, tel que

$$2h_N < t_M - t_{M-1} \leqq 2h_{N+1}.$$

On a alors la suite d'inégalités :

$$\frac{h_N}{h_M} \geqq b^{-1}\frac{h_{N+1}}{h_M} \geqq 2^{-1}b^{-1}\frac{t_M - t_{M-1}}{h_M} \geqq (2b)^{-1}(1-a^{-1})\frac{t_M}{h_M}.$$

Or, lorsque M augmente indéfiniment, il en est de même pour $\frac{t_M}{h_M}$, donc pour $\frac{h_N}{h_M}$. Ceci montre que la différence N — M tend vers l'infini avec M (on a supposé que l'on a : $h_{n+1} \leqq bh_n$) et que les intervalles $[t_k - h_N, t_k + h_N]$, notés I_k, $M \leqq k \leqq N$, sont disjoints. Si l'unité de longueur est h_N et si k décrit l'intervalle [M, N] de N vers M, on retrouve la situation de (i).

CHAPITRE III.

Applications variées du chapitre II.

Introduction. — Le théorème 1 du chapitre II concerne les classes H^p, $p > 0$; cependant son emploi n'est pas limité à l'étude de ces classes. C'est ce que nous essayerons de montrer aux chapitres III et IV par quelques exemples. En voici deux extraits du chapitre III. Rappelons l'énoncé d'un vieux problème : « quand une suite de carré sommable de nombres positifs, les $(a_n)_{n \geqq 0}$, est donnée, lui associer une suite φ_n de phase telle que les $a_n e^{i\varphi_n}$ soient les coefficients de Fourier d'une fonction continue et analytique ». Salem a montré que l'on peut toujours trouver des phases convenables si les a_n décroissent très régulièrement vers zéro mais, d'après Paley et Zygmund, si l'on veut prendre ces phases au hasard il faut nécessairement que l'on ait

$$\sum_{k \geqq 0}\Bigl(\sum_{2^k \leqq n < 2^{k+1}} a_n^2\Bigr)^{\frac{1}{2}} < +\infty \quad ([11], \text{th. } 10.1, \text{ p. } 225 \text{ et } [2], \text{ th. } 4, \text{ p. } 73).$$

Nous changeons un peu de problème et obtenons que si les a_n forment une suite de carré sommable et que si les quantités : $\sum_{2^k \leqq n < 2^{k+1}} a_n^2$ tendent, en décroissant, vers zéro, pour presque tous les choix des phases, on peut trouver une fonction continue ayant pour coefficients de Fourier d'indices positifs les nombres $a_n e^{i\varphi_n}$.

Puisque cette décroissance n'entraîne pas la condition (1), on ne pourra, en général, choisir une fonction continue et analytique.

Un second problème résolu au chapitre III a un lien avec le premier : si une fonction continue analytique a la propriété que ses coefficients de Fourier soient nuls sur chaque intervalle de la forme $[3^n+1, 2.3^n-1]$, en résulte-t-il que les coefficients de Fourier α_n en 3^n et β_n en 2.3^n soient petits par une contagion de la faiblesse qui serait inhérente à la suite des modules des coefficients de Fourier d'une fonction continue analytique ? Il n'en est rien : la suite des α_n comme celle des β_n peut être n'importe quelle suite de carré sommable.

Ces deux résultats seront utilisés au chapitre IV : le premier pour montrer que l'ensemble de toutes les différences $t_n - t_m$, $0 \leqq m \leqq n-1$ n'est pas un ensemble d'interpolation pour les multiplicateurs de $\mathcal{F}H^1$ et le second pour construire un ensemble satisfaisant la condition forte de Ditkin.

1. Constructions de multiplicateurs d'idéaux fermés de $A(\mathbf{Z})$.

— Nous allons, en vue de l'étude des ensembles exceptionnels du chapitre IV, définir certains types d'idéaux fermés de $L^1(\mathbf{T})$.

Définition des fonctions bi-analytiques. — Soit $(n_k)_{k\geqq 0}$ une suite d'entiers positifs tels que

$$n_0 > 0, \qquad n_{k+1} \geqq \alpha n_k \qquad (\alpha > 1),$$

et $(l_k)_{k\geqq 0}$ une suite d'entiers positifs vérifiant

$$l_k \leqq \beta(n_{k+1} - n_k) \qquad (0 < \beta < 1).$$

L'ensemble E est la réunion des intervalles $[n_k, n_k + l_k]$.

Un élément de $L^1(\mathbf{T})$ dont les coefficients de Fourier sont nuls hors de E est dit bi-analytique.

Écriture d'une fonction bi-analytique. — On peut écrire la série de Fourier d'une fonction bi-analytique $f(x)$ sous la forme

$$f(x) \sim \sum_{k\geqq 0} e^{in_k x} f_k(x), \tag{1}$$

où $f_k(x)$ est un polynôme trigonométrique analytique de spectre contenu dans $[0, l_k]$.

Théorème 1. — *Pour tout réel p, de l'intervalle* $]0, 2[$, *on peut trouver une constante* A_p *telle que pour tout polynôme trigonométrique f de la forme* (1), *on ait*

$$\left(\sum_{k\geqq 0} \|f_k(x)\|_p^2\right)^{\frac{1}{2}} \leqq A_p \|f\|_p.$$

Démonstration du théorème 1. — Le théorème 1 du chapitre II permet de trouver une suite $\tilde{f}_k$ d'éléments de $H^p(\mathbf{T})$ telle que l'on ait

$$\left\| \left(\sum_{k \geq 0} |\tilde{f}_k(x)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_p \leq C_p \|f\|_p$$

et telle que $\tilde{f}_k$ ait les mêmes coefficients de Fourier que f sur l'intervalle $\left[\frac{n_{k-1}+n_k}{2}, \frac{n_k+n_{k+1}}{2}\right]$. L'inégalité renversée de Minkowski écrite dans $L^{\frac{p}{2}}$ donne alors

$$\left(\sum_{k \geq 0} \|\tilde{f}_k(x)\|_p^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq C_p \|f\|_p.$$

Mais les coefficients de Fourier de $\tilde{f}_k$ sont nuls sur les intervalles

$$\left[\frac{n_{k-1}+n_k}{2}, n_k\right[\quad \text{et} \quad \left]n_k + l_k, \frac{n_k+n_{k+1}}{2}\right]$$

dont les longueurs dépassent λl_k, où λ est une constante strictement positive. De ce fait, on déduit l'inégalité

$$\|f_k\|_p \leq B \|\tilde{f}_k\|_p,$$

où B dépend seulement de p, α et β.

En combinant les deux dernières inégalités on obtient le théorème 1 et l'on voit que A_p ne dépend que de p, α et β.

Corollaire 1. — *Pour une constante* A *et tout élément* f *de* $L^1(\mathbf{T})$ *dont la transformée de Fourier* $\hat{f}(n)$ *est nulle si* n *vérifie les conditions :*

$$n \geq 0, \qquad n \notin E,$$

on a

$$\sum_{k \geq 0} |\hat{f}(n_k)|^2 \leq A \|f\|_1^2 \qquad \textit{et} \qquad \sum_{k \geq 0} |\hat{f}(n_k + l_k)|^2 \leq A \|f\|_1^2.$$

(Si f est un polynôme trigonométrique, si p est dans $]0, 1[$, on a

$$\left\| \sum_{n \geq 0} \hat{f}(n)\, e^{inx} \right\|_p \leq A_p \|f\|_1$$

et si f_k est un polynôme trigonométrique analytique, on a

$$|\hat{f}_k(0)| \leq \|f_k\|_p.)$$

Remarques. — Le corollaire 1 signifie qu'au bord d'intervalles de plus en plus longs où ils sont nuls, les coefficients de Fourier d'une fonction intégrable (ou d'une mesure) sont petits; il y a « contagion de la faiblesse des modules ». Il faut cependant observer que cette propriété n'a lieu que si les intervalles où les coefficients de Fourier sont nuls sont, au moins, aussi importants que les intervalles contigus.

Corollaire 2. — *Si* $(a_k)_{k\geqq 0}$ *et* $(b_k)_{k\geqq 0}$ *sont deux suites de nombres complexes telles que*

$$\sum_{k\geqq 0} |a_k|^2 < +\infty \qquad \text{et} \qquad \sum_{k\geqq 0} |b_k|^2 < +\infty,$$

on peut leur associer au moins une fonction continue et analytique $F(x)$ *ayant les propriétés suivantes :*

$$\hat{F}(n_k) = a_k,$$
$$\hat{F}(n_k + l_k) = b_k,$$
$$\hat{F}(n) = 0 \quad \text{si} \quad n_k < n < n_k + l_k$$

Démonstration du corollaire 2. — Le corollaire 1 montre, par dualité, que l'on peut associer, à toute suite complexe $(a_k)_{k\geqq 0}$ de carré sommable et à toute suite complexe $(b_k)_{k\geqq 0}$ de carré sommable, une fonction analytique et bornée, $F(x)$, ayant les propriétés souhaitées et telle que : $\|F\|_\infty \leqq A(\|a_k\|_2 + \|b_k\|_2)$.

Si a_k et b_k sont des suites finies on remplacera cet élément F par un polynôme trigonométrique G déduit de F par le procédé de sommation de De la Vallée Poussin (on multiplie les coefficients de Fourier par 1 sur $[-N, N]$, par 0 hors de $]-2N, 2N[$ et par des fonctions linéaires sur $[N, 2N]$ et $[-2N, -N]$). Le polynôme trigonométrique G satisfait à l'inégalité $\|G\|_\infty \leqq 3A(\|a_k\|_2 + \|b_k\|_2)$ et a les mêmes coefficients de Fourier que F sur un assez long intervalle pour convenir au problème. Si maintenant a_k et b_k sont des suites quelconques de carré sommable, on peut les écrire comme des sommes normalement convergentes dans l^2 de suites finies et la somme normalement convergente des polynômes trigonométriques G correspondants fournira la fonction continue analytique F cherchée.

Corollaire 3. — *Si* I *est l'idéal de* $L^1(\mathbf{T})$ *formé des éléments* f *de* $L^1(\mathbf{T})$ *tels que* $\hat{f}(n)$ *soit nul si* n, *entier positif, n'est pas dans* E, *alors la fonction caractéristique de l'ensemble des* n_k *ou des* $n_k + l_k$ *est un multiplicateur de* $\mathcal{F}$ I.

Extension de ces résultats : fonctions N-analytiques. — Soit n_k, $k \geqq 0$, une suite d'entiers positifs vérifiant les conditions $n_{k+1} \geqq 3n_k$ et $n_0 > 0$ et l_k une suite d'entiers positifs vérifiant : $2l_k \leqq n_k$.

On appelle E_N l'ensemble construit, à partir de ces deux suites et d'un entier N, de la façon suivante : E_N est la réunion de tous les intervalles d'extrémités $n_{k_1} + \ldots + n_{k_N}$ et de longueur l_{k_N}, $k_1 > k_2 > \ldots > k_N$.

THÉORÈME 2. — *Pour une constante* A_N *et tout élément* f *de* $L^1(\mathbf{T})$ *dont la transformée de Fourier* $\hat{f}(n)$ *est nulle si* n *vérifie les conditions*

$$n \geqq 0, \qquad n \notin E_N,$$

on a

$$\sum_{k_i} \left| \hat{f}(n_{k_1} + \ldots + n_{k_N}) \right|^2 \leqq A_N \|f\|_1^2,$$

où la sommation est étendue aux k_i, $1 \leqq i \leqq N$, *tels que*

$$k_1 > k_2 > \ldots > k_N.$$

Ce théorème doit être rapproché du théorème 5 du chapitre IV.

2. ÉTUDE DU DUAL DE $H^1(\mathbf{T})$. — A toute suite $\sigma = (n_k)_{k \geqq 0}$ d'entiers positifs, lacunaire à la Hadamard, nous associons un espace $\mathcal{E}_\sigma$ qui est l'ensemble des éléments X du dual de $H^1(\mathbf{T})$ dont les coefficients de Fourier, $(c_n)_{n \geqq 0}$ (définis ci-dessous) ont la propriété suivante : pour toute suite complexe bornée $(a_k)_{k \geqq 0}$, la suite d_n définie par

$$d_n = a_k c_n \quad \text{si} \quad n_{k-1} \leqq n < n_k$$

est encore celle des coefficients de Fourier d'un élément du dual de $H^1(\mathbf{T})$.

Une norme naturelle d'espace de Banach peut être définie sur $\mathcal{E}_\sigma$. Dans le dual de $H^1(\mathbf{T})$, $\mathcal{E}_\sigma$ n'est pas dense (*voir* l'Appendice). L'importance de $\mathcal{E}_\sigma$ vient de ce que les éléments du dual de $H^1(\mathbf{T})$ dont tous les coefficients de Fourier sont positifs appartiennent à tous les $\mathcal{E}_\sigma$.

Notations. — Un élément X du dual, $(H^1)^\star$, de H^1 est une forme linéaire continue sur H^1 et est donc déterminée par la suite c_n des nombres complexes $\langle X, e^{inx} \rangle$, $n \geqq 0$.

Nous appelons série de Fourier de X la série formelle

$$\sum_{n \geqq 0} c_n e^{inx}. \tag{1}$$

L'élément X peut être défini par, au moins, un élément F de $L^\infty(\mathbf{T})$ et la condition

$$\langle F, f \rangle = \langle X, f \rangle = \int_{\mathbf{T}} \overline{F}(x) f(x)\, dx \qquad (f \in H^1).$$

Les c_n forment alors la suite des coefficients de Fourier d'indices positifs de F.

La suite σ des entiers n_k, $k \geqq 0$ est lacunaire à la Hadamard; elle vérifie la condition

$$n_{k+1} \geqq \alpha n_k, \qquad n_0 > 0, \qquad \alpha > 1. \tag{2}$$

Le théorème ci-dessous donne des conditions équivalentes pour appartenir à $\mathcal{E}_\sigma$.

THÉORÈME 3. — *Pour toute suite complexe* $(c_n)_{n\geq 0}$ *et toute suite d'entiers vérifiant* (2), *les énoncés* (i), (ii), (iii) *et* (iv) *ci-dessous sont équivalents :*

(i) *Pour tout élément* f *de* $H^1(\mathbf{T})$, *on a*

$$\sum_{k\geq 0}\left|\sum_{n_{k-1}}^{n_k-1}\hat{f}(n)\,c_n\right| < +\infty;$$

(ii) *Pour une constante* A *et tout élément* f *de* $H^1(\mathbf{T})$, *on a*

$$\sum_{k\geq 0}\left|\sum_{n_{k-1}}^{n_k-1}\hat{f}(n)\,c_n\right| \leq A\,\|f\|_1;$$

(iii) *Pour toute suite complexe bornée* $(\lambda_k)_{k\geq 0}$, $\sum_{k\geq 0}\lambda_k\,\Delta_k(x)$ *est la série de Fourier d'un élément du dual de* H^1 $\left(\textit{on a posé } \Delta_k(x) = \sum_{n_{k-1}}^{n_k-1} c_n e^{inx}\right)$;

(iv) *On peut trouver des éléments de* $L^\infty(\mathbf{T})$, *les* Δ_k^*, $k\geq 0$, *tels que* Δ_k^* *et* Δ_k *définissent la même forme linéaire sur* H^1 (*on écrira* $\Delta_k^* \sim \Delta_k$) *et que*

$$\left\|\sum_0^\infty |\Delta_k^*(x)|^2\right\|_\infty < +\infty.$$

Démonstration du théorème 3.

(i) entraîne (ii) grâce au théorème du graphe fermé;
(ii) entraîne (iii) de façon évidente;
(iii) entraîne (i) de façon évidente.

Reste à montrer l'équivalence de (iii) et de (iv). Avant de montrer que (iii) entraîne (iv), prouvons le lemme :

LEMME. — *Si pour toute suite* $(\Delta_k(x))_{k\geq 0}$ *de polynômes trigonométriques, on forme le* sup *noté* s *des quantités* $\left|\sum_{k\geq}\langle \Delta_k, u_k\rangle\right|$ *calculées sur toutes les suites finies* $(u_k)_{k\geq 0}$ *d'éléments de* $H^1(\mathbf{T})$ *vérifiant*

$$\left\|\left(\sum_0^\infty |u_k(x)|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_1 \leq 1,$$

alors on peut trouver une suite Δ_k^* *d'éléments de* $L^\infty(\mathbf{T})$ *telle que* Δ_k^* *et* Δ_k *définissent la même forme linéaire sur* $H^1(\mathbf{T})$ *et que* $\left\|\sum_0^\infty |\Delta_k^*(x)|^2\right\|_\infty^{\frac{1}{2}}$ *soit exactement* s.

La démonstration du lemme s'obtient immédiatement par le théorème de Hahn-Banach : la suite $(\Delta_k(x))_{k\geq 0}$ définit une forme linéaire notée L, continue, sur l'espace de Banach des suites $u_k(x)$ d'éléments de H^1, muni de la norme $\left\| \left(\sum_{k\geq 0} |u_k(x)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_1$; L se prolonge donc en une forme linéaire continue, de même norme, sur l'espace $L^1(\mathbf{T})$ à valeurs dans l^2 dont le dual est $L^\infty(\mathbf{T})$ à valeurs dans l^2. Voilà la suite $\Delta_k^\star$, $k \geq 0$. On vérifie que $\Delta_k^\star$ et Δ_k définissent, sur H^1, la même forme linéaire et le lemme est prouvé.

Montrons comment (iii) entraîne (iv) dans le théorème 3.

En appliquant le lemme, il suffit de voir que, pour une constante λ et toute suite finie $u_1, \ldots, u_n$ d'éléments de $H^1(\mathbf{T})$, on a

$$(3) \qquad \left| \sum_{k\geq 0} \langle \Delta_k, u_k \rangle \right| \leq \lambda \left\| \left(\sum_{k\geq 0} |u_k(x)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_1.$$

Considérons à cet effet l'espace $\Omega = \{-1, 1\}^{\mathrm{N}}$ muni de la tribu produit et de la loi de probabilité produit de celle qui donne à -1 et à 1 les probabilités $\frac{1}{2}$.

Les fonctions coordonnées sur Ω sont désignées par $\varphi_k(\omega)$, $k \geq 0$.

On pose

$$U(x, \omega) = \sum_{k\geq 0} \varphi_k(\omega)\, u_k(x) \qquad \text{et} \qquad K(\omega) = \| U(x, \omega) \|_{L^1(\mathbf{T})}.$$

On a alors, par échange des intégrations,

$$\int_\Omega K(\omega)\, d\omega \leq \left\| \left(\sum_{k\geq 0} |u_k(x)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_1.$$

D'autre part, grâce à l'hypothèse (iii), et au théorème du graphe fermé, on peut écrire, si la suite $(\lambda_k)_{k\geq 0}$ est bornée par 1,

$$(4) \qquad \left| \left\langle \sum_{k\geq 0} \lambda_k \Delta_k, U(x, \omega) \right\rangle \right| \leq \lambda \| U(x, \omega) \|_{L^1(\mathbf{T})} = \lambda K(\omega).$$

(La constante λ ne dépend que de la suite donnée Δ_k.)

Mais à tout ω de Ω, on peut associer un choix de la suite λ_k tel que le membre de gauche de (4) soit égal à

$$\sum_{k\geq 0} |\langle \Delta_k, U(x, \omega) \rangle|.$$

On en déduit l'inégalité

$$\sum_{k\geq 0} |\langle \Delta_k, U(x, \omega)\rangle| \leq \lambda K(\omega). \tag{5}$$

A ce stade, on intègre en ω les deux membres de (5). Pour tout k, on a

$$\int_\Omega |\langle \Delta_k, U(x, \omega)\rangle| \, d\omega = \int_\Omega \left| \left\langle \Delta_k, \sum_{n\geq 0} \varphi_n(\omega) \, u_n(x) \right\rangle \right| d\omega \geq |\langle \Delta_k, u_k\rangle|.$$

$\left(\text{L'inégalité } \left\| \sum_{n\geq 0} a_n \varphi_n(\omega) \right\|_{L^1(\Omega)} \geq |a_k| \text{ est évidente.}\right)$

On obtient bien (3).

Il reste à prouver que (iv) entraîne (iii). Il suffit d'appliquer le théorème 1 du chapitre II : pour tout élément f dans $H^1(\mathbf{T})$, on peut former une suite $(f_k)_{k\geq 0}$ de polynômes trigonométriques telle que

$$\langle f_k, \Delta_k^* \rangle = \langle f, \Delta_k \rangle \qquad \text{et} \qquad \left\| \left(\sum_0^\infty |f_k(x)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_1 \leq B_\alpha \|f\|_1.$$

On en déduit

$$\sum_{k\geq 0} |\langle f, \Delta_k \rangle| \leq B_\alpha \|f\|_1 \left\| \left(\sum_{k\geq 0} |\Delta_k^*(x)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_\infty$$

et $\sum_{k\geq 0} \Delta_k(x)$ est la série de Fourier d'un élément du dual de $H^1(\mathbf{T})$.

3. Relations vérifiées par les modules des coefficients de Fourier des éléments de $H^1(\mathbf{T})$. — Le théorème ci-dessous permet de déterminer toutes les suites λ_n de réels positifs telles que $\sum_{n\geq 0} \lambda_n |\hat{f}(n)|$ soit finie pour tout élément f de $H^1(\mathbf{T})$. Il ne sera pas appliqué au chapitre IV.

Théorème 4. — *Pour une suite λ_n, $n \geq 0$, de réels positifs, les quatre conditions ci-dessous sont équivalentes :*

(*a*) *pour tout élément f de $H^1(\mathbf{T})$, on a*

$$\sum_{n\geq 0} \lambda_n |\hat{f}(n)| < +\infty;$$

(*b*) *la série de Fourier $\sum_{n\geq 0} \lambda_n e^{inx}$ définit un élément du dual de H^1;*

(*c*) *Si $\Delta_k(x) = \sum_{2^k}^{2^{k+1}-1} \lambda_n e^{inx}$, on peut trouver une suite $\Delta_k^*(x)$, d'éléments* *de* $L^\infty(\mathbf{T})$, *telle que* $\Delta_k^\star$ *et* Δ_k *définissent la même forme linéaire sur* $H^1(\mathbf{T})$ *et que, de plus,*

$$\sum_{k\geqq 0} |\Delta_k^\star(x)|^2 \in \mathcal{L}^\infty(\mathbf{T});$$

(*d*) *la matrice infinie*

$$\begin{pmatrix} \lambda_0 & \lambda_1 & \lambda_2 & \ldots \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \lambda_n & \lambda_{n+1} & \lambda_{n+2} & \ldots \end{pmatrix}$$

définit un endomorphisme continu de l^2.

Démonstration du théorème 4. — La condition (*b*) entraîne (*a*), car pour tout élément

$$f \sim \sum_{n\geqq 0} c_n e^{inx} \text{ de } H^1(\mathbf{T}),$$

on peut former un élément F de $H^1(\mathbf{T})$.

$$F \sim \sum_{n\geqq 0} C_n e^{inx},$$

tel que

$$|c_n| \leqq C_n, \qquad \|f\|_1 = \|F\|_1.$$

Cela résulte de la factorisation d'un élément de $H^1(\mathbf{T})$ en produit de deux éléments de $H^2(\mathbf{T})$ et de techniques de séries majorantes. On se sert alors de ce que les λ_n sont positifs et l'on a, par convolution avec un noyau de Fejer, l'inégalité

$$\sum_0^N \lambda_n\left(1 - \frac{n}{N}\right) C_n \leqq A \|f\|_1.$$

On obtient (*a*) en faisant tendre N vers l'infini. Par application immédiate du théorème 3, (*a*) entraîne (*c*) et (*c*) entraîne (*b*). Enfin, l'équivalence de (*a*) et (*d*) se vérifie facilement en décomposant tout élément de $H^1(\mathbf{T})$ en un produit de deux éléments de $H^2(\mathbf{T})$.

Remarques critiques sur le théorème 4. — Il serait intéressant de donner une caractérisation simple, par un procédé de l'analyse harmonique, des suites λ_n, $n \geqq 0$, de nombres réels positifs intervenant au théorème 4. Malheureusement la condition (*c*) du théorème 4 ne fournit aucun renseignement sur la façon d'obtenir les $\Delta_k^\star$. En fait, il n'est pas possible d'obtenir les $\Delta_k^\star$ par un moyen de sommation linéaire appliqué à la série de Fourier de X, $X \sim \sum_{k\geqq 0} \Delta_k(x)$; c'est-à-dire : on ne peut trouver une suite S_k, $k \geqq 0$, de distributions « analytiques » telle que

$$\Delta_k^\star(x) = \Delta_k(x) + (X \star S_k)(-x).$$

(*Voir* l'Appendice.) [On ne pourrait pas plus avoir

$$\Delta_k^\star(x) = \Delta_k(x) + (\overline{X \star S_k})(x).]$$

On ne doit donc pas se faire d'illusions sur la portée du théorème 4 et cependant il peut fournir des résultats assez fins.

Applications du théorème 4. — Nous nous intéressons à la situation suivante : une suite I_k d'intervalles de $\mathbf{Z}^+$ est définie par la suite n_k, $k \geq 0$, des centres de I_k et la suite $2\delta_k$, $k \geq 0$, des longueurs des I_k. On suppose que l'on a $n_{k+1} \geq 2n_k$ et que les longueurs des I_k tendent vers l'infini avec k de sorte que

$$\sum_0^\infty \delta_k^{-2} < +\infty.$$

On veut avoir des précisions sur la moyenne σ_k, calculée sur I_k, du module de $\hat{f}(n)$ si f est dans $H^1(\mathbf{T})$. Soit

$$2\sigma_k\delta_k = \sum_{n \in I_k} |\hat{f}(n)|, \qquad f \in H^1. \tag{1}$$

Quand $I_k = [2^k, 2^{k+1}[$, on a $\sum_{k \geq 0} \sigma_k < +\infty$ d'après un théorème de Hardy et Littlewood ([11], th. 8.7, chap. VII, p. 286), mais il y a lieu de penser que, sur un intervalle plus petit, la moyenne sera, en général, plus forte. D'autre part, un résultat de Paley ([8], th. 8.6) nous donne ici dans tous les cas

$$\sum_{k \geq 0} \sigma_k^2 < +\infty. \tag{2}$$

On peut penser que la suite σ_k possède d'autres propriétés que d'être de carré sommable; ceci est précisé par le théorème suivant :

THÉORÈME 5. — *Valeurs moyennes des modules des coefficients de Fourier des éléments de* $H^1(\mathbf{T})$.

Avec les notations ci-dessus, on peut toujours construire une suite ε_k, $k \geq 0$, *de réels positifs ou nuls, telle que*

$$\sum_{k \geq 0} \varepsilon_k^2 = +\infty; \tag{3}$$

$$\sum_{k \geq 0} \varepsilon_k \sigma_k \leq A \|f\|_1 \qquad [\sigma_k \text{ est défini par } (1)], \tag{4}$$

pour tout élément f *de* $H^1(\mathbf{T})$.

La méthode générale employée dans la démonstration du théorème 5 montre que, si $I_k = [2^k(1-k^{-\alpha}), 2^k]$, $\alpha > 0$, on peut prendre

$$\varepsilon_k = (\log k)^{-\gamma}, \qquad \gamma > \frac{1}{2}, \qquad k \geq 2.$$

Rien n'empêche que ce choix des ε_k puisse être amélioré. Des conditions nécessaires de décroissance des ε_k seront données mais elles permettent, dans l'exemple ci-dessus à tous les ε_k de valoir $+1$. Les conséquences du théorème 5 sont donc provisoires.

Démonstration du théorème 5. — On définit la suite λ_k par $\varepsilon_k = \lambda_k \delta_k$ et l'on va construire un élément de $L^\infty(\mathbf{T})$, g dont les coefficients de Fourier d'indices positifs, $\hat{g}(n)$, $n \geq 0$, sont λ_k, si n est dans I_k et 0 si n est positif et n'est pas dans I_k. Pour appliquer le théorème 3, nous poserons $\Delta_k^*(x) = \lambda_k \sum_{n \in I_k} \sin nx$ et montrerons que l'on peut choisir les λ_k tels que

$$\sum_{k \geq 0} |\Delta_k^*(x)|^2 \in \mathcal{L}^\infty(\mathbf{T}).$$

Nous utiliserons les majorations suivantes pour $\sum_{n \in I_k} \sin nx = S_k(x)$:

(i) $|S_k(x)| \leq \dfrac{\pi}{x}$;

(ii) $|S_k(x)| \leq 2\delta_k$;

(iii) $|S_k(x)| \leq (2n_k\delta_k + 1)x$ (en majorant $|\sin nx|$ par $n|x|$).

La somme $\sum_0^\infty \lambda_k^2 S_k^2(x)$ sera, pour tout x, dans $[0, \pi]$ divisée en trois blocs :

$$\sum_0^{N(x)} \lambda_k^2 S_k^2(x) + \sum_{N(x)+1}^{M(x)} \lambda_k^2 S_k^2(x) + \sum_{M(x)+1}^{\infty} \lambda_k^2 S_k^2(x).$$

Sur le premier bloc, nous ferons la majoration (iii), sur le second, (ii) et sur le dernier, (i). Il s'agit de choisir une constante A et, pour tout x, les entiers $N(x)$ et $M(x)$ tels que

$$x^2 \sum_0^{N(x)} \lambda_k^2 n_k^2 \delta_k^2 \leq A; \tag{5}$$

$$\sum_{N(x)+1}^{M(x)} \lambda_k^2 \delta_k^2 \leq A; \tag{6}$$

$$x^{-2} \sum_{M(x)+1}^{+\infty} \lambda_k^2 \leq A. \tag{7}$$

La condition (6) nous invite à prendre $\varepsilon_k \leqq 1$ pour tout k. La condition (7) est alors conséquence de

$$(8) \qquad x^{-2} \sum_{M(x)+1}^{+\infty} \delta_k^{-2} \leqq A.$$

Puisque $n_{k+1} \geqq 2n_k$, la condition (5) est conséquence des deux conditions

$$(9) \qquad \varepsilon_{k+1} \geqq \frac{2}{3}\varepsilon_k, \quad \varepsilon_k \leqq 1, \qquad x^2 n_{N(x)}^2 \leqq A.$$

[On a regardé (5) comme une série géométrique : le dernier terme est alors prépondérant et l'on a éventuellement augmenté A.]

On appellera $N(x)$ le plus grand des entiers k, tels que

$$x^2 n_k^2 \leqq \pi^2.$$

Alors

$$x^{-2} \leqq \pi^{-2} n_{N(x)+1}^2$$

et (8) est conséquence de

$$(10) \qquad n_{N+1}^2 \sum_{M+1}^{+\infty} \delta_k^{-2} \leqq A.$$

La condition (10) où l'on choisit pour M la plus petite valeur entière possible détermine M comme une fonction croissante de N. On posera $N = \varphi(M)$ et l'on peut toujours supposer en outre, quitte à remplacer φ par une fonction plus rapidement croissante vers l'infini, que les valeurs en 1 des itérées de φ : $\varphi(1)$, $\varphi(\varphi(1))$, ..., $\varphi^{(n)}(1)$, [1], etc forment une suite d'entiers tendant vers l'infini.

La condition (6) est conséquence de

$$\sum_{\varphi^{(n)}(1)}^{\varphi^{(n+1)}(1)} \varepsilon_k^2 \leqq 1.$$

Pour résumer il suffit que le choix de la suite ε_k satisfasse aux conditions

$$(11) \qquad \varepsilon_{k+1} \geqq \frac{2}{3}\varepsilon_k;$$

$$(12) \qquad e_n = \sum_{t_n \leqq k < t_{n+1}} \varepsilon_k^2 \leqq 1 \qquad [t_n = \varphi^{(n)}(1)];$$

$$(13) \qquad \sum_{n \geqq 0} e_n = +\infty.$$

Dans certains cas on pourra prendre : $\varepsilon_k^2 = \dfrac{1}{t_{n+1} - t_n}$ lorsque k appartient à l'intervalle $[t_n, t_{n+1}[$. Par exemple, si $I_k = [2^k(1 - k^{-\alpha}), 2^k]$, $\alpha > 0$,

---

(1) $\varphi^{(n)}$ désigne la $n^{\text{ième}}$ itérée de φ.

on a $\varphi(p)=\alpha\log_2 p+p$; au lieu de la suite $\varphi^{(k)}(2)$, des itérées de φ, difficile à apprécier, on utilise une suite t_k d'entiers telle que $\varphi(t_k)\leq t_{k+1}$ et jouant le même rôle; par exemple, t_k est la partie entière de $ak(\log_2 k)^\beta$, $\beta>1$. Cela donne $\varepsilon_k^2=(\log k)^{-\beta}$ et cette suite se trouve vérifier (11). En toute généralité on pourra procéder comme suit : dans l'intervalle $[t_n, t_{n+1}[$, on pose : $\varepsilon_k=1$ si $k=t_n$, $\varepsilon_k=\left(\frac{2}{3}\right)^{k-t_n}$ ailleurs.

Conditions nécessaires portant sur la suite des ε_k intervenant au théorème 5.

THÉORÈME 6. — *Il existe un réel t, $t\geq\frac{1}{3}$, avec la propriété suivante : si une suite λ_n de réels positifs est telle que, pour tout élément f de $H^1(\mathbf{T})$, on ait*

$$\sum_{n\geq 0}\lambda_n|\hat{f}(n)|\leq\|f\|_1,$$

alors

$$\int_0^{2\pi}\exp\left[t\left(\sum_0^\infty|\Delta_k(x)|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right]dx\leq A_t,$$

où

$$\Delta_k(x)=\sum_{2^k}^{2^{k+1}-1}\lambda_n e^{inx}.$$

La démonstration est immédiate; comme dans celle du théorème 3 et du théorème 4 appelons X_ω, $\omega\in\Omega$, l'élément du dual de H^1 défini par la série de Fourier

$$\sum_0^\infty\varphi_k(\omega)\,\Delta_k(x),$$

alors $\|X_\omega\|_*\leq 1$ et, par application de ([11], th. 2.11, chap. VII), on a

$$\int_0^{2\pi}\exp\left[t\left|\sum_0^\infty\varphi_k(\omega)\,\Delta_k(x)\right|\right]dx\leq A.$$

Il ne reste plus qu'à intégrer sur Ω en utilisant la convexité de l'exponentielle pour obtenir le théorème 6.

COROLLAIRE. — *Si les ε_k et les δ_k vérifient la conclusion du théorème* 5 *et si δ_k croît avec k, on a, pour un $t>0$*

$$\int_0^{2\pi}\exp\left[t\left(\sum_0^\infty\varepsilon_k^2\frac{\sin^2(\delta_k x)}{\delta_k^2\sin^2 x}\right)^{\frac{1}{2}}\right]dx<+\infty$$

et donc

$$\sum_{n\geq 0}\left(\frac{1}{\delta_n}-\frac{1}{\delta_{n+1}}\right)\exp\left[t\left(\sum_0^n \varepsilon_k^2\right)^{\frac{1}{2}}\right]<+\infty.$$

Par exemple, le corollaire montre que si l'on désire choisir ε_k égal à 1 pour tout k, la suite δ_n doit tendre assez vite vers l'infini pour que l'on ait

$$\sum_{n\geq 0}\left(\frac{1}{\delta_n}-\frac{1}{\delta_{n+1}}\right)\exp(t\sqrt{n})<+\infty \quad (^2).$$

4. Éléments aléatoires du dual de $H^1(\mathbf{T})$. — Nous avons besoin d'une condition suffisante permettant à une suite complexe donnée, les c_n, $n\geq 0$, d'être la suite des coefficients de Fourier d'une fonction continue. Si, par exemple, $c_n=0$ pour $2^{2k}\leq n\leq 2^{2k+1}$ et $c_n=\frac{1}{n}$ si $n\geq 1$, $n\notin[2^{2k}, 2^{2k+1}]$, on sait que la condition (a) du théorème 4 est satisfaite. Il en est donc de même de la condition (c). Mais il est facile de montrer que, dans ce cas, on ne peut trouver une fonction continue f ayant les c_n comme coefficients de Fourier d'indices positifs. Nous allons, outre les conditions,

$$(1)\qquad \sum_0^\infty |\Delta_k^\star(x)|^2\leq 1,\qquad \sum_{n_{k-1}}^{n_k-1} c_n e^{inx}=\Delta_k(x),\qquad \Delta_k(x)\sim\Delta_k^\star(x),$$

indiquer une condition autorisant les c_n à être les coefficients de Fourier d'une fonction continue.

Théorème 7. — *Si la somme* (1) *converge partout vers une fonction continue g, on peut trouver une fonction continue f ayant les* c_n, $n\geq 0$, *comme coefficients de Fourier d'indices positifs.*

Démonstration. — Les hypothèses entraînent que la convergence de (1) est uniforme. On peut trouver une suite k_m d'entiers telle que

$$\left\|\left(\sum_{k_m+1}^{k_{m+1}} |\Delta_k^\star(x)|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_\infty\leq 2^{-m}\qquad (m\geq 0).$$

Par application du théorème 3, on obtient un élément f_m de $\mathcal{L}^\infty(\mathbf{T})$ dont la norme est au plus à 2^{-m} et ayant les mêmes coefficients de Fourier d'indices positifs que $\sum_{k_m+1}^{k_{m+1}}\Delta_k^\star(x)$.

(2) La norme est ici évaluée dans $\dfrac{L^\infty}{H_0^\infty}$.

Cet élément f_m n'étant peut-être pas continu, régularisons-le (en multipliant $\hat{f}_m$ par une fonction trapèze) quitte à tripler sa norme, sans changer les coefficients de Fourier d'indices positifs. La somme uniformément convergente des f_m régularisées donne f.

Application aux séries de Fourier aléatoires.

THÉORÈME 8. — *Si c_ν est une suite complexe, telle que*

$$\sum_0^\infty |c_\nu|^2 < +\infty,$$

posons

$$s_n = \left(\sum_{2^n \leq \nu < 2^{n+1}} |c_\nu|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Si s_n tend, en décroissant, vers zéro, presque toutes les suites $(c_\nu \varphi_\nu(\omega))_{\nu \geq 0}$ représentent les coefficients de Fourier d'indices positifs d'une fonction continue.

Rappelons que si Ω est l'espace produit $\{-1, 1\}^{\mathbf{N}}$ muni de la tribu produit et de la mesure produit de celles donnant la masse $\frac{1}{2}$ à -1 et à 1, les $\varphi_\nu(\omega)$ sont les fonctions coordonnées sur Ω.

Le type de la démonstration est maintenant classique : en nous appuyant sur le théorème 7, on va prouver que, pour presque tout ω dans Ω, la somme

$$\sum_{k \geq 0} |\Delta_k(x, \omega)|^2$$

converge uniformément.

Posons

$$Q_n(x, \omega) = \sum_{2^n \leq k < 2^{n+1}} |\Delta_k(x, \omega)|^2.$$

Pour avoir des renseignements sur $Q_n(x, \omega)$ on utilise une majoration de la transformée de Laplace en calculant $\mathcal{E}\{e^{\lambda Q_n(x, \omega)}\}$. (Le symbole $\mathcal{E}$ désignera l'intégrale sur Ω et λ est un réel positif.)

Pour tout x fixé, les $|\Delta_k(x, \omega)|^2$ sont des variables aléatoires indépendantes sur Ω. On a donc

$$\mathcal{E}\{e^{\lambda Q_n(x, \omega)}\} = \prod_{2^n \leq k < 2^{n+1}} \mathcal{E}\{e^{\lambda |\Delta_k(x, \omega)|^2}\}. \tag{2}$$

Mais le théorème 8.7 ([11], p. 214) permet de majorer chaque terme du produit de droite dans (2). Si λ vérifie l'inégalité

$$\lambda \leq 4^{-1} \| \Delta_k(x, \omega) \|_{L^2(\mathbf{T}^\omega)}^{-2} = 4^{-1} s_k^{-2},$$

on a, pour une constante absolue A,

$$\mathcal{E}\{e^{\lambda|\Delta_k(x,\omega)|^2}\} \leq A.$$

Grâce à la décroissance des s_k, il suffit que l'on ait

$$\lambda \leq 4^{-1} s_{(2^n)}^{-2}$$

pour obtenir

$$(3) \qquad \mathcal{E}\{e^{\lambda Q_n(x,\omega)}\} \leq A^{2^n}.$$

Mais $Q_n(x, \omega)$ est, en x, un polynôme trigonométrique d'ordre, au plus, $2.2^{2^{n+1}}$ et, sur un intervalle de longueur $8^{-1}.2^{-2^{n+1}}$, on a

$$Q_n(x, \omega) \geq 2^{-1} \| Q_n(x, \omega) \|_\infty$$

([2], lemme 7, p. 214).

Par intégration en x et échange des intégrations, (3) donne

$$A^{(2^n)} \geq \mathcal{E}\left\{\int_{\mathbf{T}} e^{\lambda Q_n(x,\omega)}\, dx\right\} \geq \mathcal{E}\{e^{\lambda 2^{-1}\|Q_n(x,\omega)\|_\infty}\}\, 8^{-1}.2^{-2^{n+1}},$$

d'où

$$\mathcal{E}\{e^{\lambda 2^{-1}\|Q_n(x,\omega)\|_\infty - K.2^n}\} \leq 1 \qquad (K = \text{Cte positive absolue}).$$

La probabilité pour que $\lambda 2^{-1} \| Q_n(x, \omega) \|_\infty$ dépasse $K 2^{n+1}$ est donc inférieure à $e^{-K 2^n}$.

D'après le lemme de Borel-Cantelli, pour presque tout ω, il existe un indice $N(\omega)$ tel que, si $n \geq N(\omega)$, on ait

$$\| Q_n(x, \omega) \|_\infty \leq 16 K 2^n s_{2^n}^2.$$

On a, d'autre part,

$$\sum_{n \geq 0} 2^n s_{2^n}^2 < +\infty,$$

grâce à la décroissance des s_p et à la condition

$$\sum_{p \geq 0} s_p^2 < +\infty$$

et cette remarque termine la démonstration.

On notera la similitude des hypothèses et de la démonstration avec celles relatives à la continuité d'une série de Fourier aléatoire du type Paley-Zygmund.

Remarque. — L'hypothèse $\sum_0^\infty |c_\nu|^2 < +\infty$, à elle seule, est insuffisante à assurer le résultat. Par exemple, soit E un ensemble de Sidon d'entiers positifs qui n'est pas réunion finie de suites lacunaires à la Hadamard. On peut prendre

$$E = \{4^{p^4} + 4^q \mid (p^2 - 1)^2 < q \leq p^4\}.$$

On considère la série $\sum_{n\geq 0}\varphi_n(\omega)\,a_n\,e^{inx}$, où $a_n=0$ si n n'appartient pas à E, $a_n=p^{-\alpha}$ si n est dans E et de la forme $4^{p^4}+4^q$. La condition $\sum_{n\geq 0}|a_n|^2<+\infty$ s'écrit $\sum_{p\geq 1}p^{2-2\alpha}<+\infty$ et est réalisée dès que $\alpha>\frac{3}{2}$.

Pour aucun choix des signes $\pm$, $\sum_{n\geq 0}\pm a_n e^{inx}$ ne définit sur H^1 une forme linéaire continue, car une suite bornée d'éléments de H^1, f_k, est telle que $\hat{f}_k(n)=1$ si $4^{k^4}\leq n\leq 2.4^{k^4}$ et en se servant de ce que E est un ensemble de Sidon, on en déduit $\sup_p\left(\sum_q|a_n|\right)<+\infty$ (où la somme est étendue aux n, dans E, de la forme $4^{p^4}+4^q$), ce qui n'est pas le cas.

5. ÉLÉMENTS ALÉATOIRES DU DUAL DE $H^1(\mathbf{R})$. — Appelons pseudomesure toute distribution sur $\mathbf{R}$ dont la transformée de Fourier soit un élément de $\mathcal{L}^\infty(\mathbf{R})$.

Une suite $(t_n)_{n\geq 0}$ de rationnels vérifie les conditions suivantes :

(a) $0<t_{n+1}<t_n$ et $t_n\to 0\,(n\to+\infty)$;

(b) Pour une constante positive λ et tout n, $n\geq 0$ le plus petit dénominateur commun aux rationnels $t_1, t_2, \ldots, t_n$ est $o(t_n^{-\lambda})$.

Une suite complexe $(a_n)_{n\geq 0}$ vérifie les conditions suivantes :

(c) $\sum_{n\geq 0}|a_n|^2<+\infty$;

(d) $\sum_{2^{-k-1}\leq t_n<2^{-k}}|a_n|^2$ tend en décroissant vers zéro.

THÉORÈME 9. — *Si les $\varphi_n(\omega)$, $n\geq 0$, sont les fonctions coordonnées sur $\{-1, 1\}^{\mathbf{N}}$ pour presque tout ω, lorsque les nombres t_n et a_n vérifient* (a), (b), (c) *et* (d),

$$\sum_{n\geq 0}\varphi_n(\omega)\,a_n\,\delta(t-t_n) \tag{1}$$

est la restriction à $]0, +\infty[$ d'une pseudomesure ayant son support dans $[-t_0, t_0]$.

Remarques. — $\delta(t-t_n)$ est la masse unité au point t_n. Une hypothèse sur le dénominateur commun des $t_1, \ldots, t_n$ est nécessaire. En effet, si l'on choisit, par exemple, pour

$$2^k\leq n<2^{k+1},\qquad t_n=2^{-k-1}+2^{-n}$$

une pseudomesure prolongeant (1) doit avoir, pour un réel ε, $\varepsilon > 0$ une norme au moins égale à $\varepsilon \sum_{2^{-k-1} \leq t_n < 2^{-k}} |a_n|$, puisque l'ensemble des puissances de 2 est de Sidon. Il est facile de construire une suite a_n telle qu'alors pour aucun ω de Ω, (1) n'admette le prolongement souhaité.

CHAPITRE IV.

Ensembles exceptionnels et théorie des multiplicateurs.

Introduction. — Dans ce chapitre sont examinés, sur quelques exemples, les deux problèmes que nous n'avons pas su résoudre : d'abord trouver pour les idéaux fermés de $L^1(\mathbf{T})$ des résultats aussi précis que ceux du chapitre I sur la construction des convoluteurs et ensuite indiquer comment les multiplicateurs interviennent dans le problème de la synthèse spectrale [un multiplicateur d'un idéal fermé I de $A(\mathbf{R}^n \times \mathbf{T}^m)$ définit-il un endomorphisme de cet idéal ?].

Dans la partie A du chapitre IV sont donnés, aux paragraphes 1 et 2, des résultats sur les ensembles $\Lambda(p)$. Indiquons le lien entre ces ensembles et le premier problème posé ci-dessus : si E est un ensemble d'entiers, soit I l'idéal fermé de $L^1(\mathbf{T})$ composé des fonctions intégrables sur le cercle dont les coefficients de Fourier sont nuls hors de E. L'ensemble E est, suivant la terminologie de Rudin, un ensemble $\Lambda(p)$ si I est contenu dans $L^p(\mathbf{T})$; on suppose ici p supérieur à 1. D'autre part, un ensemble d'entiers E est un ensemble de Sidon si toute suite complexe bornée définie sur E est la restriction à E de la suite des coefficients de Fourier-Stieltjes d'une mesure complexe bornée. On a donc le résultat suivant : si E est un ensemble $\Lambda(2)$ et n'est pas un ensemble de Sidon, on peut construire des convoluteurs non triviaux de I.

Rudin avait donné [7], th. 4.5, (*b*)] une condition assurant qu'un ensemble E d'entiers positifs est $\Lambda(4)$: il suffit que E soit réunion d'un nombre fini d'ensembles E_j tels que, en appelant A une constante, tout entier positif se décompose d'au plus A façons, en somme de deux éléments d'un même E_j. L'ensemble des différences $2^n - 11.2^m$ $(0 \leq m \leq n-6)$ est un ensemble $\Lambda(4)$ pour cette raison. Rudin demande si cette condition suffisante est nécessaire : l'ensemble E considéré au théorème 1 permet de donner une réponse négative à cette question. A la fin du paragraphe 1 se pose naturellement le problème suivant (qui ne sera pas résolu) : les ensembles de toutes les différences $3^n - 3^m$ $(0 \leq m \leq n-1)$ et $2^n - 11.2^m$ $(0 \leq m \leq n-6)$ qui ont des structures arithmétiques très différentes sont-ils interchangeables du point de vue de l'analyse harmonique ?

La construction de multiplicateurs non triviaux faite sur les ensembles $\Lambda(2)$ peut s'étendre à certaines parties de l'ensemble U présenté au théorème 4.

Passons à la partie B du chapitre IV. Le problème qui nous occupera est d'approcher les multiplicateurs d'un idéal I de $A(\mathbf{R})$ par des éléments de $A(\mathbf{R})$; ce problème est lié à celui de la synthèse spectrale des idéaux et ne concerne donc pas $A(\mathbf{Z})$. Au paragraphe 1, on examine une forme faible d'une telle approximation définie par la proposition 1. Ce point de vue est alors relié à l'examen d'une condition (faible) de Ditkin portant sur un ensemble E de nombres réels. Au paragraphe 2 nous nous intéressons à une condition plus forte d'approximation des multiplicateurs d'un idéal fermé I de $A(\mathbf{R})$ par des éléments de $A(\mathbf{R})$. Appelons E l'ensemble des zéros communs aux éléments de I. Deux exemples sont donnés où, grâce à des propriétés de l'ensemble E de nature arithmétique, on obtient l'approximation forte désirée pour les multiplicateurs de I (prop. 4 et 5 et théorème 6). Enfin l'étude des ensembles satisfaisant la condition forte de Ditkin est nécessaire si l'on cherche à approcher les multiplicateurs, au sens fort, par des éléments de l'idéal lui-même : des exemples sont donnés.

A. — Ensembles d'entiers.

Avant d'étudier les propriétés de l'ensemble de toutes les sommes

$$\varepsilon_1 n_{k_1} + \varepsilon_2 n_{k_2} + \ldots + \varepsilon_N n_{k_N},$$

où

$$\varepsilon_j = \pm 1, \quad 1 \leq j \leq N, \qquad k_1 > k_2 > \ldots > k_N \qquad \text{et} \qquad n_{k+1} \geq 3 n_k,$$

nous allons examiner, avec un peu plus de précision, un cas plus particulier. Les propriétés qui subsistent dans le cas général se démontrent de façon tout à fait semblable.

1. Propriétés de l'ensemble E de toutes les différences d'entiers

$$t_n - t_m, \quad 0 \leq m \leq n-1, \qquad t_{n+1} \geq 3 t_n, \qquad t_0 > 0.$$

Théorème 1 (*les propriétés de* E).

(*a*) *Pour tout élément f de* $H^p(\mathbf{T})$, $1 < p \leq +\infty$, *on a*

$$\sum_{\nu \in E} |\hat{f}(\nu)|^2 \leq A \frac{p}{p-1} \|f\|_p^2;$$

(*b*) *Cette propriété est en défaut si* $p = +1$;

(*c*) *Si f est dans* $H^1(\mathbf{T})$ *et si* $f(\log^+|f|)^{\frac{1}{2}}$ *est intégrable, on a*

$$\sum_{\nu\in E}|\hat{f}(\nu)|^2 < +\infty \quad (^3);$$

(*d*) *On peut définir, sur* E, *une suite complexe bornée* $(a_\nu)_{\nu\in E}$ *qui n'est pas la restriction à* E *d'un multiplicateur de* $\mathcal{F}H^1(\mathbf{T})$.

(*e*) E *est de type universel : on peut trouver deux réels strictement positifs* a *et* b, $0 < a < b$, *tels que pour tout réel* p *de* $[1, +\infty]$ *et toute suite finie* $(c_{n,m})_{0\leq m\leq n-1}$ *on ait la double inégalité :*

$$a\left\|\sum c_{n,m}\, e^{i(x_n-x_m)}\right\|_{L^p(\mathbf{T}^\infty)} \leq \left\|\sum c_{n,m}\, e^{i(t_n-t_m)x}\right\|_{L^p(\mathbf{T})} \leq b\left\|\sum c_{n,m}\, e^{i(x_n-x_m)}\right\|_{L^p(\mathbf{T}^\infty)}.$$

(Les x_n, $n\geq 0$, sont les fonctions coordonnées sur le tore à une infinité de dimensions.)

Remarque. — Les ensembles E tels que la propriété (*a*) soit satisfaite avec $p=+1$ sont des réunions finies de suites d'entiers lacunaires à la Hadamard ([8], th. 8.6). La propriété (*c*) est le meilleur résultat dans cette direction : $H^1(\mathbf{T})$ est remplacé par une classe un peu plus petite. Tout cela ne permet pas de prouver que si f est un élément de $L^1(\mathbf{T})$ [et non de $H^1(\mathbf{T})$] tel que $f\log^+|f|$ soit intégrable, on ait $\sum_{n\in E}|\hat{f}(n)|^2 < +\infty$. Ce serait pourtant le cas si E était remplacé par l'ensemble F de toutes les différences $2^n - 11.2^m$, $0\leq m\leq n-6$. D'ailleurs, F jouit des propriétés (*a*), (*b*), (*c*), (*d*). Mais F ne saurait fournir un contre-exemple à la conjecture de Rudin indiquée dans l'introduction.

Démonstration du théorème 1. — Il est bon de rappeler les propriétés des ensembles $\Lambda(p)$.

Si E est une partie de $\mathbf{Z}$, un E-polynôme est un polynôme trigonométrique P, défini sur $\mathbf{T}$, tel que :

$$n\notin E \quad \text{entraîne} \quad \hat{P}(n)=0.$$

Un élément f de $L^1(\mathbf{T})$ est une E-fonction si $\hat{f}(n)$ est nul quand n n'appartient pas à E.

Suivant Rudin ([7], p. 205, défin. 1.5), nous dirons, si r est un réel, $r>0$, que E est du type $\Lambda(r)$ dès qu'il existe un s dans l'intervalle $]0, r[$ et une constante B_s, tels que, pour tout E-polynôme P, on ait

$$\|P\|_r \leq B_s \|P\|_s. \tag{1}$$

(3) Les propriétés (*a*) et (*c*) expriment de façon très précise que E est un ensemble $\Lambda(p)$. Les propriétés (*d*) et (*e*) concernent des problèmes différents.

Si, r étant donné, (1) est vérifié pour un s dans $]0, r[$, (1) sera vérifié pour tout s dans $]0, r[$ avec une constante B_s appropriée ([7], p. 204, th. 1.4).

L'ensemble des t_n, noté G, jouit des propriétés suivantes : c'est un ensemble de Sidon, donc un ensemble $\Lambda(p)$ pour tout p. Si $p>1$, on a

(2)
$$\sum_{n\in G}|\hat{f}(n)|^2 \leq \frac{Ap}{p-1}\|f\|_p^2 \quad (\textit{voir}\ [7]).$$

Si $f(\log^+|f|)^{\frac{1}{2}}$ est dans $L^1(\mathbf{T})$, on a

(3)
$$\sum_{n\in G}|\hat{f}(n)|^2 < +\infty.$$

Preuve de (a). — Le résultat n'a d'intérêt que si p est au plus égal à 2. On associe à f, grâce au théorème 1 du chapitre II, une suite $(f_k)_{k\geq 0}$ de polynômes trigonométriques analytiques telle que l'on ait

$$\left\|\left(\sum_0^\infty |f_k(x)|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_p \leq A\|f\|_p$$

et que, sur $[t_{k-1}, t_k]$, les transformées de Fourier de f et de f_k soient égales.

Grâce à l'inégalité de Minkowski écrite dans $L^{\frac{2}{p}}$, on a

(4)
$$\sum_0^\infty \|f_k(x)\|_p^2 \leq A^2\|f\|_p^2.$$

En employant (2) pour l'ensemble G des différences $t_k - t_m$, $m\geq 0$, k fixé, on obtient

$$\sum_{0\leq m\leq k-1} |\hat{f}(t_k - t_m)|^2 \leq \frac{Ap}{p-1}\|f_k\|_p^2.$$

Il suffit d'ajouter ces inégalités pour montrer (a). Le (c) se montre de façon semblable à l'aide du théorème 2 du chapitre II.

Avant de montrer le (d), donnons quelques définitions : un ensemble E d'entiers positifs est appelé un ensemble d'interpolation pour les multiplicateurs de $\mathcal{F}H^1$ si toute suite complexe bornée définie sur E est la restriction à E d'un multiplicateur des coefficients de Fourier des éléments de $H^1(\mathbf{T})$.

Appelons β l'espace de Banach composé de toutes les fonctions analytiques et continues sur le cercle pouvant s'écrire

(5)
$$f(x) = \sum_1^\infty f_k \star g_k, \qquad \text{où}\quad f_k\in H^1(\mathbf{T}), \qquad g_k\in C(\mathbf{T})$$

et où

(6)
$$\sum_{k\geq 0}\|f_k\|_1\|g_k\|_\infty < +\infty.$$

La norme dans β est le inf des quantités (6) étendu à toutes les décompositions (5) [$C(\mathbf{T})$ désigne l'espace des fonctions, continues sur $\mathbf{T}$, à valeurs complexes].

On vérifie que l'espace dual de β est l'espace des multiplicateurs de $\mathcal{F}H^1(\mathbf{T})$.

En effet, soit S un convoluteur de $H^1(\mathbf{T})$. Nous lui associons une forme linéaire sur β, notée $f \to \langle S, f\rangle$ et définie par

$$\langle S, f\rangle = \sum_1^\infty (S(f_k) \star g_k)\ (0),$$

si l'élément f de β est écrit sous la forme (5). On vérifie sans peine que $\langle S, f\rangle$ ne dépend pas du choix de la décomposition de $f(x)$. On a les inégalités

$$\left|\sum_1^\infty (S(f_k) \star g_k)\ (0)\right| \leq \sum_1^\infty \| S(f_k)\|_1 \| g_k\|_\infty \leq \| S\| \left(\sum_1^\infty \| f_k\|_1 \| g_k\|_\infty\right).$$

En prenant le inf de ces dernières quantités par rapport à toutes les décompositions possibles de $f(x)$, on en déduit

$$|\langle S, f\rangle| \leq \| S\| \| f\|_\beta$$

et S définit bien un élément du dual de β.

Soit maintenant L une forme linéaire et continue sur β. Restreignons notre attention aux éléments de β de la forme $h \star g$, où h décrit $H^1(\mathbf{T})$ et g décrit $C(\mathbf{T})$. On a

$$| L(h \star g)| \leq \| h \star g\|_\beta \leq \| h\|_1 \| g\|_\infty.$$

L'application, définie en fixant h, de $C(\mathbf{T})$ dans les nombres complexes, $g \to L(h \star g)$ est donc continue. On peut trouver une mesure μ_h sur $\mathbf{T}$ telle que

$$L(h \star g) = \int_{\mathbf{T}} g(-x)\, d\mu_h(x) \qquad \text{et} \qquad \| d\mu_h(x)\| \leq \| L\| \| h\|_1.$$

On déduit de cette égalité et des propriétés du produit de convolution que l'application linéaire continue $h \to d\mu_h$ commute avec les translations. D'après la proposition 2 du chapitre I (p. 5), une telle application de $H^1(\mathbf{T})$ dans l'espace des mesures complexes sur $\mathbf{T}$ est définie par un convoluteur S de $H^1(\mathbf{T})$. Alors L est bien la forme linéaire associée à S par la méthode indiquée dans la première partie de cette démonstration.

Deux remarques élémentaires sur β sont encore nécessaires.

Les polynômes trigonométriques analytiques forment une partie dense dans β.

Les ensembles d'interpolation pour les multiplicateurs de $\mathcal{F}H^1$ jouent par rapport à β le rôle des ensembles de Sidon par rapport aux fonctions continues : E est un ensemble d'interpolation si et seulement si des éléments de β dont le spectre est contenu dans E ont une série de Fourier absolument convergente.

Nous ne donnons pas les démonstrations très simples de ces propriétés. Passons à la preuve de (d).

Pour montrer que E ne jouit pas de la propriété d'interpolation, nous allons construire un élément F de $H^1(\mathbf{T})$ et une série de Fourier analytique à coefficients aléatoires :

$$\sum_{p\in E} \varphi_p(\omega)\, c_p\, e^{ipx}$$

qui soit presque sûrement la partie analytique de la série de Fourier d'un élément $Q(\omega, x)$ de $C(T)$. La convolution entre $Q(\omega, x)$ et $F(x)$ fournira la E-fonction de β dont la série de Fourier n'est pas absolument convergente.

La construction de $F(x)$ nécessite un découpage de E en « gros paquets », les E_N, et un découpage de chaque E_N en « petits paquets », les E^n dont seulement une partie F^n aura de l'importance.

La partie E_N est formée de tous les points $t_n - t_m$ de E pour lesquels $2^N \leq n < 2^{N+1}$ et E^n est, pour tout n fixé dans cet intervalle, l'ensemble des différences $t_n - t_m$, $0 \leq m \leq n-1$. On appelle F^n la partie de E^n formée des points

$$t_n - t_m, \qquad \text{où} \quad 0 \leq m \leq N-1.$$

Construisons une suite $f_n(x)$ d'éléments de $H^1(\mathbf{T})$, de normes au plus 3, dont les transformées de Fourier sont des « fonctions trapèzes », égales à 1 sur F^n et nulles sur les autres $F^{n'}$ $(n' \neq n)$. On peut faire en sorte que les nombres $f_n(x)$ aient, pour tout x, le même module si n appartient à un même intervalle $[2^N, 2^{N+1}[$. (L'égalité de ces modules simplifie la démonstration et provient du tronquage des E^n en les parties F^n de même longueur.)

En toute généralité, si $(f_n(x))_{n\in I}$ est une suite finie, quelconque, d'éléments de $L^1(\mathbf{T})$, on peut toujours trouver une suite réelle ε_n ayant les propriétés suivantes :

$$|\varepsilon_n| = 1 \qquad \text{et} \qquad \left\| \sum_{n\in I} \varepsilon_n f_n \right\|_1 \leq \left\| \left(\sum_{n\in I} |f_n(x)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_1.$$

Grâce à cette remarque, on construit l'élément de $H^1(\mathbf{T})$ suivant :

$$r_N = \sum_{2^N \leq n < 2^{N+1}} \varepsilon_n f_n(x)$$

tel que : $\|r_N\|_1 \leq 3 \cdot 2^{\frac{N}{2}}$.

L'élément $F(x)$ de $H^1(\mathbf{T})$ sera une somme, normalement convergente dans $H^1(\mathbf{T})$,

$$\sum_0^\infty b_N r_N \qquad \text{où} \quad b_N \geqq 0, \qquad \sum_{N\geqq 0} b_N 2^{\frac{N}{2}} < +\infty.$$

Il reste à construire $Q(\omega, x)$.

On pose

$$P_n(\omega, x) = a_N \varepsilon_n \sum_{p \in F^n} \varphi_p(\omega)\, e^{ipx}$$

(où les coefficients a_N seront précisés dans un instant), et

$$Q_N(\omega, x) = \sum_{2^N \leqq n < 2^{N+1}} P_n(\omega, x),$$

La série $\sum_{N\geqq 0} Q_N(\omega, x)$ est presque sûrement la partie analytique de la série de Fourier d'une fonction continue si $\sum_{N\geqq 0} N a_N^2 2^N < +\infty$ et si $N a_N^2$ tend, en décroissant, vers zéro $(N \to +\infty)$. C'est le théorème 8 du chapitre III. Les conditions imposées aux a_n et b_n n'empêchent pas que l'on puisse avoir

$$\sum_{N\geqq 0} a_N b_N N 2^N = +\infty$$

assurant que E n'est pas un ensemble d'interpolation.

(On prendra, par exemple : $n a_n^2 = p^{-2} 2^{-2p}$ quand $2^{p-1} < n \leqq 2^p$, $b_n^2 = p^{-3} 2^{-2p}$ si $n = 2^p$, $b_n = 0$ pour les autres valeurs de n.)

Chemin faisant, on a montré que :

THÉORÈME 2. — *Sauf pour un ensemble de points* ω *de* $\{-1, 1\}^N$ *de mesure nulle, la suite* $(\varphi_p(\omega))_{p\in E}$ *de* ± 1 *placés au hasard sur* E, *n'est pas la restriction à* E *d'un multiplicateur de* $\mathcal{F}H^1(\mathbf{T})$.

L'énoncé du théorème 2 incite à réfléchir au problème suivant : existe-t-il, en dehors des ensembles de Sidon, des ensembles, E, d'entiers positifs tels que toute suite bornée, de nombres complexes, définie sur E, soit toujours la restriction à E d'un multiplicateur de $\mathcal{F}H^1$? Nous n'avons pu résoudre ce problème. Un tel ensemble ne peut contenir, pour tout entier n, la somme de deux ensembles d'entiers ayant chacun n élément : on le voit, à peu près, par la même méthode que celle qui donne le théorème 2.

Nous retournons, après cette parenthèse, à l'ensemble E du théorème 1.

Il devient à ce moment intéressant de déterminer quelles suites de ± 1 placées sur E peuvent être des restrictions à E de multiplicateurs de $\mathcal{F}H^1(\mathbf{T})$. Nous n'avons pas résolu ce problème. Cependant, on a

Proposition 1. — *A toute suite complexe bornée a_n, $n \geq 0$, on peut associer une mesure complexe bornée μ telle que*

$$\hat{\mu}(t_n - t_m) = a_n a_m \quad \text{si} \quad 0 \leq m \leq n-1.$$

Ainsi, si a_n est une suite de nombres ± 1, on obtient des exemples de suites de nombres ± 1, placés sur E, qui soient des restrictions à E de mesures complexes bornées.

La démonstration de la proposition 1 est la même que celle prouvant qu'une suite d'entiers, lacunaire suivant la condition de Hadamard, forme un ensemble de Sidon : le produit de Riesz $\prod_1^\infty (1 + 2a_n \cos t_n x)$ fournit μ.

L'isomorphisme annoncé en (*e*) se démontre alors comme au lemme 1 (§ 2 du chapitre I).

Propriétés de l'ensemble de toutes les différences $2^n - 11.2^m$, *où* $0 \leq m \leq n-6$.

Les propriétés de F se déduisent de la proposition suivante :

Proposition 2. — *Si a_n et b_n, $n \geq 0$, sont deux suites complexes bornées, on peut leur associer une mesure complexe bornée μ telle que*

$$\hat{\mu}(2^n - 11.2^m) = a_n b_m \qquad (0 \leq m \leq n-6).$$

Démonstration. — On se ramène facilement au cas où a_n et b_n sont des nombres réels compris entre $-\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{2}$. On utilise des produits de Riesz et pour cela on divise l'ensemble $\mathbf{N}$ des entiers positifs en M parties, les $\mathbf{N}_j$, $0 \leq j \leq M-1$, composées chacune des entiers congrus à j modulo M; cette opération a pour but que l'égalité (7)

$$\sum_{n \in N_j} \varepsilon_n 2^n + 11\left(\sum_{n \in N_k} \varepsilon'_n 2^n\right) = 2^p - 11\,2^q, \tag{7}$$

où

$$\varepsilon_n \in \{-1, 1\} \quad \text{et} \quad \varepsilon'_n \in \{-1, 1\}$$

ne soit vérifiée que si le membre de gauche est formellement égal à celui de droite ($j = k$, $\varepsilon_n = 1$ si $n = p$, 0 ailleurs, $\varepsilon'_n = -1$ si $n = q$, 0 ailleurs).

Le choix du coefficient 11 rend « indépendantes » les suites 2^n et 11.2^m. On utilise alors les produits de Riesz :

$$\prod_{n \in N_j} (1 + a_n \cos(2^n x)) \prod_{n \in N_k} (1 + b_n \cos(11.2^n x))$$

fournissant $\frac{a_n b_m}{4}$ en $2^n - 11.2^m$, où n est dans N_j et m dans N_k et 0 en $2^p - 11.2^q$ quand p n'est pas dans N_j ou quand q n'est pas dans N_k.

On montre alors l'isomorphisme d'idéaux suivant : pour tout polynôme trigonométrique $P(x)$ à spectre contenu dans F et pour tout réel p dans $[1, +\infty]$, on a, en écrivant

$$P(x) = \sum_{0 \leq m \leq n-6} a_{n,m}\, e^{i(2^n - 11.2^m)x}$$

la double inégalité :

$$(8)\quad \begin{aligned} a &\left\| \sum_{0\leq m\leq n-6} a_{n,m}\, \varphi_n(\omega)\, \varphi_m(\omega') \right\|_{L^p(\Omega\times\Omega')} \\ \leq &\left\| \sum_{0\leq m\leq n-6} a_{n,m}\, e^{i(2^n-11.2^m)x} \right\|_{L_p(\mathbf{T})} \\ \leq b &\left\| \sum_{0\leq m\leq n-6} a_{n,m}\, \varphi_n(\omega)\, \varphi_m(\omega') \right\|_{L^p(\Omega\times\Omega')}. \end{aligned}$$

On a noté Ω et Ω' les espaces produits $\{-1, 1\}^{\mathrm{N}}$ déjà souvent rencontrés et a et b désignent deux constantes absolues.

La démonstration de (8) est élémentaire et se fait comme celle du lemme 1 (§ 2 du chapitre I), compte tenu de la proposition 2 ci-dessus.

Enfin pour montrer la remarque il suffit de savoir limiter la croissance des normes L^p des F-polynômes par $Ap \| P(x) \|_2$. Grâce à (8) on traitera les polynômes

$$Q(\omega, \omega') = \sum a_{n,m}\, \varphi_n(\omega)\, \varphi_m(\omega')$$

que l'on réécrit

$$Q(\omega, \omega') = \sum \varphi_n(\omega)\, p_n(\omega').$$

D'après les propriétés de croissance des normes L^p pour les fonctions dont le spectre est contenu dans un ensemble de Sidon [7] on a, pour tout ω' fixé dans Ω',

$$(9)\quad \int_\Omega |Q(\omega, \omega')|^p\, d\omega \leq A^p p^{\frac{p}{2}} \left(\sum_{n\geq 1} |p_n(\omega')|^2 \right)^{\frac{p}{2}}.$$

Grâce à l'inégalité de Minkowsky appliquée, dans $L^{\frac{p}{2}}$ à $\sum_{n\geq 1} |p_n(\omega')|^2$, on a

$$\int_{\Omega'} \left(\sum_{n\geq 1} |p_n(\omega')|^2 \right)^{\frac{p}{2}} d\omega' \leq \left(\sum_{n\geq 1} \| p_n(\omega') \|_p^2 \right)^{\frac{p}{2}}.$$

On obtient finalement, en employant à nouveau les propriétés d'un ensemble de Sidon dans l'évaluation des quantités $\| p_n(\omega') \|_{L^p(\Omega')}$,

$$\| Q(\omega, \omega') \|_p \leq Ap \| Q(\omega, \omega') \|_2$$

et, grâce à (8), on en déduit, pour tout F-polynôme $P(x)$, l'inégalité

$$\| P(x) \|_{L^p(\mathbf{T})} \leqq A p \| P(x) \|_{L^2(\mathbf{T})} \qquad (p \geqq 2). \tag{10}$$

On montre que, dans (10), le facteur Ap est le meilleur possible en se servant de ce que, pour un ensemble de Sidon, le facteur $A\sqrt{p}$ soit le meilleur possible ([8], p. 129, (14)). Si $p > 2$, on appelle $P(x)$ un polynôme trigonométrique, à spectre dans l'ensemble des nombres 2^n, tel que

$$4 \| P(x) \|_p \geqq \sqrt{p} \| P(x) \|_2.$$

[Le choix de $P(x)$ dépend de la valeur de p.]
On forme lors le polynôme à spectre dans F

$$P(11.2^N x)\, P(-x) = Q_N(x).$$

On a

$$\lim_{N \to +\infty} \int_{\mathbf{T}} | P(11.2^N x) |^p \, | P(-x) |^p \, dx = \| P(x) \|_p^{2p}.$$

et ainsi, pour un N assez grand, on a

$$17 \| Q_N(x) \|_p \geqq p \| Q(x) \|_2$$

et ceci montre que dans (10) Ap est le meilleur coefficient possible. Le premier énoncé de la remarque au théorème 1 résulte facilement de (10). Passons à la conjecture de Rudin : une méthode pour construire des ensembles $\Lambda(p)$ est rappelée dans l'introduction et donnée par le théorème 4.5 (*b*) ([7], p. 218). Rudin pose alors le problème de savoir s'il existe des ensembles $\Lambda(p)$ qui ne vérifient pas la condition suffisante de cet énoncé. L'ensemble E de toutes les différences $t_n - t_m$, $0 \leqq m \leqq n-1$, est un ensemble $\Lambda(p)$ pour tout p. Cet ensemble donne une réponse négative à la conjecture de Rudin.

Appelons si n est fixé, E_n la partie de E formée des différences $t_n - t_m$, où $0 \leqq m \leqq n-1$.

On a alors la proposition

PROPOSITION 3. — *On ne peut trouver un entier* A *et* P *parties* G_k, $1 \leqq k \leqq P$, *de* E, *dont la réunion soit* E, *telles que tout entier se décompose de* A *façons au plus, en somme de deux éléments d'un même* G_k.

Démonstration. — La méthode est de raisonner par l'absurde : on montre qu'un recouvrement de E par P des G_k entraînerait le recouvrement d'un nombre appréciable des E_i par $P-1$ des G_k. Une récurrence descendante sur P permet d'obtenir une contradiction.

En tenant compte des relations :

$$t_n - t_p + t_p - t_m = t_n - t_m \qquad (n > p > m)$$

on montre que si la proposition 3 est inexacte, les $P+1$ énoncés ci-dessous notés $\mathcal{E}_r$, $0 \leq r \leq P$, sont alors exacts.

$\mathcal{E}_r =$ « on peut trouver deux réels strictement positifs, A_r et B_r et, pour tout n assez grand, un ensemble d'indices $I_{n,r}$ dans $\{1, 2, \ldots, n\}$, d'au moins nA_r indices, ainsi qu'un ensemble d'indices $J_{n,r}$ dans $\{1, 2, \ldots, P\}$ de r indices (avec $J_{n,0} = \emptyset$) tels que la réunion des parties E_i, $i \in I_{n,r}$ de E soit, sauf pour un ensemble exceptionnel $F_{n,r}$, d'au plus nB_r éléments, recouverte par la réunion des G_k, $k \in J_{n,r}$ ».

$\mathcal{E}_0$ est inexact, car chaque E_i contient donc au moins i points et la réunion des E_i, $i \in I_{n,0}$, contient donc au moins $2^{-1}(nA_0)^2$ points et ne peut coïncider avec l'ensemble $F_{n,0}$ qui a au plus nB_0 points. (Prendre n assez grand.) D'autre part, $\mathcal{E}_P$ est la négation de la proposition 3.

Montrons que, si la proposition est fausse, $\mathcal{E}_r$ entraîne $\mathcal{E}_{r-1}$. En effet, l'un des E_i, $i \in I_{n,r}$, $i \geq 2^{-1} nA_r$ contient moins de $2A_r^{-1}B_r$ points de $F_{n,r}$ et l'un des G_k, disons G_K, $K \in J_{n,r}$, contient au moins r^{-1} des points de ce E_i, hors de $F_{n,r}$; si bien que $G_K \cap E_i$ se compose d'au moins $r^{-1}(2^{-1}nA_r - 2A_r^{-1}B_r)$ points de la forme $t_i - t_j$. Appelons $I_{n,r-1}$ l'ensemble de ces j (tels que $t_i - t_j \in G_K \cap E_i$) et $J_{n,r-1}$ l'ensemble $J_{n,r}$ privé de K.

On écrit

$$t_i - t_p = t_i - t_j + t_j - t_p \qquad (0 \leq p \leq j \leq i);$$

pour tout p fixé, il y a au plus A termes $t_j - t_p$ dans G_K quand $t_i - t_j$ est dans G_K (on suppose inexacte la proposition). Si l'on ôte un ensemble d'au plus $A(i+1)$ points, en plus de $F_{n,r}$, de la réunion des $E_j (j \in I_{n,r-1})$, cette réunion est contenue dans la réunion des G_k, $k \neq K$, $k \in J_{n,r}$ et la récurrence descendante est assurée.

2. Résultats qualitatifs sur les ensembles $\Lambda(p)$. — L'intérêt accordé à l'ensemble E des différences $t_n - t_m$, $0 \leq m \leq n-1$ provient d'une difficulté : le contrôle de la croissance avec p de la norme L^p d'une E-fonction, de norme L^2 égale à 1. Ci-dessous nous donnons des résultats plus généraux et imprécis sur les ensembles $\Lambda(p)$.

Théorème 3. — (*a*) *Si les deux suites n_k, $k \geq 0$ et m_k, $k \geq 0$, d'entiers positifs vérifient : $n_0 > 0$, $m_0 > 0$, $n_{k+1} \geq \alpha n_k$, $m_{k+1} \geq \alpha m_k$, $\alpha > 1$, l'ensemble composé de toutes les sommes $n_k + m_l$, $k \geq 0$, $l \geq 0$, est du type $\Lambda(p)$ pour tout p.*

(*b*) *Si la suite n_k, $k \geq 0$, d'entiers positifs vérifie la condition*

$$n_0 > 0, \qquad n_{k+1} \geq 3n_k$$

et si N *est un entier positif, l'ensemble* E *composé de toutes les sommes*

$$\varepsilon_1 n_{k_1} + \varepsilon_2 n_{k_2} + \ldots + \varepsilon_N n_{k_N}$$

pour lesquelles on ait : $\varepsilon_j = \pm 1$, $1 \leq j \leq N$, $k_1 > k_2 > \ldots > k_N$ *est un ensemble* $\Lambda(p)$ *pour tout* p.

(*c*) *Si* F *est un ensemble d'entiers contenu dans celui décrit au* (*b*) *et si tout multiplicateur, défini sur* F, *des coefficients de Fourier des éléments de* $L^1(\mathbf{T})$ *à spectre dans* F, *est la restriction à* F *de la suite des coefficients de Fourier Stieltjes d'une mesure complexe bornée, alors* F *est un ensemble de Sidon.*

Remarque. — On peut trouver une suite F d'entiers positifs, lacunaire à la Hadamard, une suite E d'entiers positifs, formant un ensemble de Sidon et telles que l'ensemble de toutes les sommes, $n+m$, $n \in E$, $m \in F$, contienne des progressions arithmétiques arbitrairement longues. On ne peut donc remplacer la suite m_k, $k \geq 0$, par un ensemble de Sidon.

Démonstration du théorème 3. — Les parties (*a*) et (*b*) du théorème 3 se montrent comme la partie (*a*) du théorème 1.

Avant de montrer la remarque, faisons quelques observations générales : si des parties finies E_k sont uniformément $\Lambda(p)$, $p \geq 2$, c'est-à-dire si pour une constante A et toute E_k-fonction f on a $\|f\|_p \leq A \|f\|_1$, on peut construire un ensemble $\Lambda(p)$ en prenant la réunion de translatées convenables des E_k. Si les ensembles finis E_k sont uniformément de Sidon, les lemmes 1 et 2 ci-dessous montrent l'existence de deux suites n_k et m_k d'entiers (ne dépendant que de la suite des diamètres des E_k) telles que la réunion des $n_k + m_k E_k$ soit de Sidon. L'ensemble de Sidon, d'Hewitt et Zuckermann est de ce type. Cette méthode de construction nous permettra de donner l'exemple d'un ensemble de Sidon d'entiers positifs E, et d'un ensemble d'entiers positifs, lacunaire à la Hadamard, F, tels tels que $E + F$ contienne des progressions arithmétiques arbitrairement longues.

D'abord quelques lemmes (le lemme 1 sera utilisé au paragraphe 3).

LEMME 1. — *Il existe une constante* A *positive telle que, si les entiers* l *et* N *vérifient :* $N \geq Al$, *si* $P(x)$, $Q(x)$ *et* $R(x)$ *sont trois polynômes trigonométriques sur* $\mathbf{T}$ *d'ordre au plus* l, *on ait*

$$\begin{aligned}\left(1 - \frac{Al}{N}\right) &\| P(x) + e^{iy} Q(x) + e^{-iy} R(x) \|_{L^\infty(\mathbf{T}^2)} \\ &\leq \| P(x) + e^{iNx} Q(x) + e^{-iNx} R(x) \|_{L^\infty(\mathbf{T})} \\ &\leq \left(1 + \frac{Al}{N}\right) \| P(x) + e^{iy} Q(x) + e^{-iy} R(x) \|_{L^\infty(\mathbf{T}^2)}.\end{aligned}$$

(L'effet d'une translation sur le spectre de Q est de multiplier Q par un caractère indépendant de x.)

LEMME 2. — *Il existe une constante* A *positive telle que, si les entiers* l *et* M *vérifient* $M \geqq Al$, *si* $P(x)$ *et* $R(x)$ *sont deux polynômes trigonométriques, si l'ordre de* $P(x)$ *est au plus* l, *on ait*

$$\left(1-\frac{Al}{M}\right)\|P(x)+R(y)\|_{L^\infty(\mathbf{T}^2)} \leqq \|P(x)+R(Mx)\|_{L^\infty(\mathbf{T})} \leqq \left(1+\frac{Al}{M}\right)\|P(x)+R(y)\|_{L^\infty(\mathbf{T}^2)}$$

Démonstration du lemme 2. — On appelle D la partie de $\mathbf{T}\times\mathbf{T}$, définie comme l'ensemble des couples (x, y) vérifiant $|y-x| \leqq \pi/M$.

$\left(\text{Si } \mathbf{T}=\frac{\mathbf{R}}{2\pi\mathbf{Z}}, |y-x| = \inf_{k\in\mathbf{Z}} |y-x+2k\pi|\right)$.

On a

$$\|P(x)+R(y)\|_{\infty,\mathbf{T}^2} = \sup_{(x,y)\in D} |P(y)+R(Mx)| = \|P(y)+R(Mx)\|_{\infty,D}$$

et

$$\|P(x)+R(Mx)\|_{\infty,\mathbf{T}} = \|P(x)+R(Mx)\|_{\infty,D}$$

La différence $\|P(x)+R(Mx)\|_{\infty,D} - \|P(y)+R(Mx)\|_{\infty,D}$ est bornée par $\|P(x)-P(y)\|_{\infty,D}$ et donc par $\frac{\pi}{M}\|P'(x)\|_\infty$ (théorème des accroissements finis). On majore $\|P'(x)\|_\infty$ grâce au théorème de Bernstein. *Voir*, par exemple, le lemme 6, ([2], p. 146). Le lemme 1 se démontre par un argument semblable.

Conséquences :

LEMME 3. — *Il existe une constante* A *telle que, si les entiers* l, M, N *vérifient* $N \geqq AlM$, $M \geqq Al$, *on ait*

$$\|P(x)+e^{iNx}Q(Mx)\|_\infty \geqq \left(1-\frac{AlM}{N}\right)\left(1-\frac{Al}{M}\right)(\|P\|_\infty + \|Q\|_\infty).$$

LEMME 4. — *On peut trouver trois suites d'entiers* $(n_k)_{k\geqq 0}$ $(m_k)_{k\geqq 0}$ *et* $(p_k)_{k>0}$, *telles que l'ensemble* E *des entiers positifs de la forme*

$$2^{n_k} - 2^{m_k p} - m_k p \qquad (0 \leqq p \leqq p_k) \tag{1}$$

soit de Sidon.

Démonstration. — On appelle E_K l'ensemble de tous les points (1) pour lesquelles $0 \leqq k \leqq K$. Si $P(x)$ est un polynôme trigonométrique à spectre dans E, le spectre de $P(x)$ est contenu dans l'un des E_K.

On écrit alors, en remplaçant K par k,

$$P(x) = P_{k-1}(x) + e^{i2^{n_k}x}Q_k(m_k x),$$

où Q_k a son spectre dans $\{-1, -3, \ldots, -2^{p_k}-p_k\}$ et l'on a donc

$$\| P(x) \|_\infty \geqq (1-\varepsilon_k)(1-\varepsilon'_k)(\| P_{k-1} \|_\infty + \| Q_k \|_\infty);$$

de même,

$$\| P_{k-1} \|_\infty \geqq (1-\varepsilon_{k-1})(1-\varepsilon'_{k-1})(\| P_{k-2} \|_\infty + \| Q_{k-1} \|_\infty) \ldots.$$

Les Q_j, $1 \leqq j \leqq k$, ont chacun pour spectre une partie de l'ensemble de Hadamard $\{-2^n - n\}_{n \geqq 0}$ et ainsi :

$$\| Q_j \|_\infty \geqq \theta \sum_{-\infty}^{0} | \hat{Q}_j(n) | \qquad (\theta > 0).$$

Il faut choisir les ε_k, les ε'_k et donc les m_k et les n_k de façon que les produits infinis $\prod_{k \geqq 0} (1-\varepsilon_k)$ et $\prod_{k \geqq 0} (1-\varepsilon'_k)$ convergent.

On peut prendre

$$p_k = k-1, \qquad n_k \geqq k^3 2^{n(k-1)}, \; m_k = k^2 2^{n(k-1)}.$$

La remarque du théorème 3 s'obtient en prenant, par exemple, l'ensemble E construit au lemme 4 et pour F l'ensemble $(2^n)_{n \geqq 0}$. Alors $E + F$ contient tous les points $2_{n_k} - m_k p$, $0 \leqq p \leqq k-1$.

3. Résultats supplémentaires sur le problème fondamental. — Pour abréger, nous dirons qu'un ensemble d'entiers est trivial si, lorsque I est l'idéal fermé de $L^1(\mathbf{T})$ composé de toutes les E-fonctions, tout convoluteur de I est défini par convolution avec une mesure complexe bornée. Un ensemble de Sidon est trivial, mais il n'est pas évident que la réunion de deux ensembles de Sidon en soit un ou que la réunion de deux ensembles triviaux en soit un. La difficulté est peut-être du même ordre.

Les ensembles triviaux contenus dans des ensembles $\Lambda(2)$ sont évidemment les ensembles de Sidon. Ici nous posons un problème un peu différent :

Notations. — Une suite t_n, $n \geqq 0$, d'entiers positifs vérifie les deux conditions

$$t_{k+1} \geqq 3 t_k, \qquad k \geqq 0; \tag{1}$$

$$\sum_{k \geqq 0} \frac{t_k}{t_{k+1}} < +\infty. \tag{2}$$

Nous désirons savoir quels ensembles triviaux, notés E sont contenus dans l'ensemble U de toutes les sommes finies :

$$\sum_{k \geqq 0}^{!} \varepsilon_k t_k, \tag{3}$$

où

$$\varepsilon_k \in \{0, 1\} \tag{4}$$

et seulement un nombre fini de ε_k sont non nuls.

Dans l'ensemble U distinguons une partie U_n formée de tous les entiers s'écrivant sous la forme (3), où

$$\sum_{k \geq 0} \varepsilon_k \leq n. \tag{5}$$

On a alors :

THÉORÈME 4. — *Une condition nécessaire pour qu'une partie* E *de* U *soit triviale est que toutes les intersections* $E \cap U_n$ *soient des ensembles de Sidon.*

Avant de démontrer ce théorème, donnons une application : supposons que la suite d'entiers n_k, $k \geq 0$ soit définie par

$$n_{2k} = -k^2, \qquad n_{2k+1} = k^2, \qquad k \geq 0 \tag{6}$$

et que E soit l'ensemble de toutes les sommes (3) où la suite des ε_k est, en outre, assujettie à la condition

$$\sum_{k \geq 0} \varepsilon_k n_k = 0.$$

Cet ensemble E n'est pas trivial : $E \cap U_7$ n'est pas un ensemble de Sidon, car l'identité

$$4a^2 + 4b^2 + 4c^2 = (a+b+c)^2 + (a+b-c)^2 + (a-b+c)^2 + (a-b-c)^2$$

montre que les points

$$t_{2a} + t_{2b} + t_{2c} + t_{(2a+2b+2c+1)} + t_{(2a+2b-2c+1)} + t_{(2a-2b+2c+1)} + t_{(2a-2b-2c+1)} \tag{7}$$

appartiennent tous à $E \cap U_7$.

Mais si l'on impose aux entiers a, b et c les conditions

$$2a + 2b + 2c + 1 < s,$$

on trouve un nombre de points (7) de l'ordre de s^3 et $E \cap U_7$ n'est pas un ensemble de Sidon ([2], p. 146, th. VIII).

Cependant le théorème 4 ne permet pas de trouver toutes les parties triviales E de U, problème que nous n'avons pas su résoudre.

Pour démontrer le théorème 4 il suffit de remarquer que U_n est un ensemble $\Lambda(2)$ et que $E \cap U_n$ doit être trivial dès que E est trivial, car la fonction caractéristique de U_n, définie sur U, est la restriction à U d'une suite de coefficients de Fourier-Stieltjes d'une mesure bornée.

Pour prouver cette dernière affirmation, nous utiliserons un résultat plus fort, le théorème 5.

Notations. — Le tore à une infinité de dimensions est noté $\mathbf{T}^\infty$, le groupe dual est noté $\mathbf{Z}^\infty$. A toute suite $(\varepsilon_k)_{k\geq 0}$ vérifiant les conditions 4 on associe le point, noté $\boldsymbol{\varepsilon}$ de $\mathbf{Z}^\infty$ dont les coordonnées sont exactement les ε_k. Au caractère $e^{ix\sum\varepsilon_k t_k}$ nous associons le caractère sur $\mathbf{T}^\infty$ s'écrivant $e^{i\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\xi}}$, où

$$\boldsymbol{\xi}=(x_k)_{k\geq 0},\qquad \boldsymbol{\varepsilon}=(\varepsilon_k)_{k\geq 0}\qquad \text{et}\qquad \boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\xi}=\varepsilon_1 x_1+\ldots+\varepsilon_k x_k+\ldots.$$

Enfin l'ensemble des $\boldsymbol{\varepsilon}$ est noté U_∞.

THÉORÈME 5. — *L'application qui, à la fonction caractéristique du point* $\sum_{k\geq 0}\varepsilon_k t_k$ *de* U *associe la fonction caractéristique du point* $(\varepsilon_k)_{k\geq 0}$ *de* $\mathbf{Z}^\infty$ *se prolonge en un isomorphisme de* B(U) *sur* $B(U_\infty)$.

Rappelons que, pour toute partie U de $\mathbf{Z}$, B(U) désigne l'algèbre des restrictions à U des suites de coefficients de Fourier-Stieltjes des mesures complexes bornées.

Démonstration. — On appelle V_n la partie (finie) de U composée des éléments s de U s'écrivant

$$s=\sum_{0\leq k\leq n}\varepsilon_k t_k.$$

Si f est un U-polynôme, pour un certain n, f sera un V_n-polynôme et s'écrira

$$f(x)=f_{n-1}(x)\,e^{it_n x}+g_{n-1}(x),$$

où f_{n-1} et g_{n-1} sont des V_{n-1}-polynômes. Le lemme 1 (p. 61, chap. IV) s'applique pour donner

$$\left(1-\frac{A}{t_n}\right)\|f(x, x_1)\|_{L^\infty(\mathbf{T}^2)}\leq\|f(x)\|_{L^\infty(\mathbf{T})}\leq\left(1+\frac{A}{t_n}\right)\|f(x, x_1)\|_{L^\infty(\mathbf{T}^2)},$$

où l'on a posé

$$f(x, x_1)=f_{n-1}(x)+e^{ix_1}g_{n-1}(x).$$

Mais, pour tout x_1 fixé, $f(x, x_1)$ est un V_{n-1} polynôme. On reprend le même raisonnement pour finalement montrer qu'en posant

$$f(x_1, \ldots, x_n)=\sum_{\varepsilon\in U_\infty}a_\varepsilon\, e^{i(\varepsilon_1 x_1+\ldots+\varepsilon_n x_n)}$$

lorsque

$$f(x)=\sum_{\varepsilon\in U_\infty}a_\varepsilon\, e^{i(\varepsilon_1 t_1+\ldots+\varepsilon_n t_n)x}$$

les normes dans $L^\infty(\mathbf{T}^\infty)$ et $L^\infty(\mathbf{T})$ de $f(x_1, \ldots, x_n)$ et de $f(x)$ sont équivalentes. Par dualité, on obtient le théorème 5.

Remarque. — L'isomorphisme démontré ci-dessus pour les normes L^∞ s'étend à toutes les normes L^p, $1\leq p<+\infty$.

B. — Synthèse des multiplicateurs.

Un problème général se trouve posé par le chapitre I si E est un fermé de $\mathbf{R}$ et T un convoluteur de $\bar{I}_E$ [idéal fermé de $L^1(\mathbf{R})$ composé de tous les éléments de $L^1(\mathbf{R})$ dont la transformée de Fourier est nulle sur E].

Le convoluteur T laisse-t-il invariant tous les idéaux fermés J contenus dans $\bar{I}_E$? Comme nous allons le voir, ceci signifierait que l'on peut faire la synthèse, en un sens faible qui va être défini, de T par des éléments de $L^1(\mathbf{R})$.

Nous nous bornerons ci-dessous à donner des exemples où cette synthèse est possible et où des synthèses plus fortes ont lieu.

1. Synthèse faible des convoluteurs. — Deux topologies naturelles peuvent être introduites sur l'espace des endomorphismes continus d'un espace vectoriel normé : l'une où la norme est celle de l'endomorphisme; l'autre, dite de la convergence simple. Elias Stein a montré que $e^{ic\log x}$ est un multiplicateur des éléments de $A(\mathbf{R})$ nuls sur $]-\infty, 0]$ et l'on en déduit facilement que si E est un fermé de $\mathbf{R}$ d'intérieur non vide, on peut obtenir un multiplicateur φ, des éléments de $A(\mathbf{R})$, nuls sur E, ne se prolongeant pas, par continuité, sur l'adhérence du complémentaire de E.

Ainsi on ne peut espérer que les multiplicateurs soient, pour la topologie définie par la norme des multiplicateurs, des limites d'éléments de $B(\mathbf{R})$.

Passons à l'examen de la topologie de la convergence simple : elle est définie par un système fondamental de voisinages de o, les $V(f_1, \ldots, f_n; \varepsilon)$, où $f_1, \ldots, f_n$ sont des éléments de $\bar{I}_E$, ε un réel strictement positif et où $V(f_1, \ldots, f_n; \varepsilon)$ est l'ensemble des convoluteurs T de $\bar{I}_E$ vérifiant la condition

$$\|T(f_k)\|_1 < \varepsilon \qquad (1 \leq k \leq n).$$

Dire qu'un convoluteur T de $\bar{I}_E$ est simplement adhérent à un ensemble A de convoluteurs de I_E signifie donc qu'à toute suite finie $f_1, \ldots, f_n$ d'éléments de $\bar{I}_E$ on peut associer une suite $(T_\nu)_{\nu \geq 0}$ d'éléments de A telle que l'on ait

$$T_\nu(f_k) \to T(f_k) \qquad (\nu \to +\infty).$$

Nous étudierons une propriété plus faible définie par la proposition :

Proposition 1. — *Un convoluteur* T *de* $\bar{I}_E$ *laisse invariant tous les idéaux fermés* J *de* $L^1(\mathbf{R})$ *contenus dans* $\bar{I}_E$ *si et seulement si* T *vérifie l'une ou l'autre des deux conditions équivalentes suivantes :*

(*a*) *Pour tout élément* f *de* $\bar{I}_E$, $T(f)$ *est limite, en norme, d'une suite* $f\star f_n$ $[f_n \in L^1(\mathbf{R})]$.

(*b*) *Pour tout élément* f *de* $\bar{I}_E$ *et tout élément* g *de* $L^\infty(\mathbf{R})$, $f\star g = 0$ *entraîne :* $T(f)\star g = 0$.

DÉFINITION 1. — *Un fermé* E *de* **R** *vérifie la condition* S_1 *si tout convoluteur* T *de* $\bar{I}_E$ *vérifie l'une des conditions équivalentes de la proposition* 1.

La définition suivante est sans doute plus précise :

DÉFINITION 2. — *Un fermé* E *de* **R** *vérifie la condition* S_1 *si tout convoluteur* T *de* $\bar{I}_E$ *est limite simple d'une suite d'éléments de* $L^1(\mathbf{R})$.

Nous n'avons pas d'exemple d'ensembles ne vérifiant pas S_1 ou ne vérifiant pas S_2. Nous donnons ci-dessous une condition générale assurant S_1 et la construction d'un ensemble dont la frontière est non dénombrable qui a la propriété S_2.

PROPOSITION 2. — *Si la frontière de* E *ne contient pas d'ensemble parfait,* E *vérifie la condition* S_1.

La proposition 2 peut être améliorée en donnant une nouvelle définition.

DÉFINITION 3. — *Un fermé* E *de* **R** *satisfait à la condition* S'_1 *si à tout élément* f *de* $\bar{I}_E$ *on peut associer une suite* f_n *d'éléments de* $\bar{I}_E$ *telle que*

$$\| f - f\star f_n \|_1 \to 0 \qquad (n \to +\infty).$$

On vérifie immédiatement que S'_1 entraîne S_1.

Si, en outre, E est un ensemble de synthèse harmonique, on dit que E est un ensemble de Ditkin.

PROPOSITION 3. — *Si la frontière de* E *ne contient pas d'ensemble parfait,* E *est un ensemble de Ditkin.*

Rappelons la démonstration classique de la proposition. Soit f un élément quelconque de $\bar{I}_E$ et J l'idéal fermé engendré par les éléments $f\star g$, où g décrit $\bar{I}_E$. Si J ne contient pas f, on peut trouver un élément φ de $L^\infty(\mathbf{R})$ tel que l'on ait

$$\psi = f\star\varphi \neq 0; \tag{1}$$

$$f\star\varphi\star g = 0 \tag{2}$$

pour tout g dans I_E.

Mais alors le spectre K de ψ est un ensemble parfait contenu dans la frontière de E.

En effet, on a déjà $\psi\star g = 0$ pour tout élément g de $L^1(\mathbf{R})$ dont la transformée de Fourier $\hat{g}$ est nulle sur E. Si, au contraire, $\hat{g}$ est nulle hors de E, on a $\psi \star g = 0$, car $f \star g = 0$. On en déduit que le spectre K de ψ est contenu dans la frontière de E.

Si o, par exemple, était un point isolé de K, on commencerait par construire un élément $k(x)$ de $L^1(\mathbf{R})$ dont la transformée de Fourier soit égale à 1 sur un voisinage de o et tel que le spectre de $k \star \psi$ soit réduit au seul point o. Appelons alors $(h_n)_{n \geq 1}$ une suite d'éléments de $L^1(\mathbf{R})$ vérifiant les deux conditions :

$$\hat{h}_n(0) = 0,$$

$$\| h_n \star f - f \|_1 \to 0 \quad \text{si} \quad f \in L^1(\mathbf{R}), \qquad \hat{f}(0) = 0.$$

On écrit, à ce moment,

$$0 = h_n \star k \star \psi = (f \star h_n) \star (k \star \varphi).$$

En passant à la limite, on obtient

$$f \star (k \star \varphi) = k \star \psi = 0$$

et le spectre de ψ ne contenait pas o.

2. Synthèse forte des multiplicateurs. — Nous donnons maintenant une condition assurant qu'un fermé E de $\mathbf{R}$ vérifie S_2 et, comme application, nous construirons un ensemble vérifiant S_2 dont la frontière n'est pas dénombrable. Il suffit pour cela que E vérifie une condition de nature arithmétique donnée dans la définition 4 :

Définition 4. — *On dira qu'un fermé* E *de* $\mathbf{R}$ *vérifie la condition* P_ε, *où* ε *est un réel strictement positif si :*

(*a*) E *est un ensemble de synthèse harmonique;*

(*b*) *on peut trouver une suite d'entiers, les* n_k, $k \geq 0$, *tendant vers l'infini tels que les seuls points du sous-groupe* $(n_k)^{-1}\mathbf{Z}$ *qui appartiennent à* E *soient toujours centres d'un intervalle de longueur* $(1 + \varepsilon)(n_k)^{-1}$ *contenu dans* E.

Proposition 4. — *La propriété* P *entraîne la propriété* S_2.

L'énoncé de P_ε et la démonstration ci-dessous rappelleront une condition suffisante, donnée par Herz, pour la synthèse harmonique ([2], p. 124, th. VII).

Un lemme d'approximation dans $A(\mathbf{R})$ est nécessaire :

Lemme. — *Si* $h(x)$ *est une fonction deux fois continûment dérivable, dont le support est* $\left[\frac{-1-\varepsilon}{2}, \frac{1+\varepsilon}{2}\right]$, $\varepsilon > 0$, *et qui vérifie l'identité*

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} h(x+n) = 1,$$

alors pour tout élément f de $A(\mathbf{R})$, *on a*

$$\left\| \sum_{-\infty}^{+\infty} f\left(\frac{p}{N}\right) h(Nx-p) - f(x) \right\|_{A(\mathbf{R})} \to 0 \qquad (N \to +\infty).$$

La démonstration du lemme est une transcription immédiate de celle du théorème ([2], VII, p. 124).

Nous pouvons maintenant démontrer la proposition 4.

Si φ est un multiplicateur à support compact des fonctions de $A(\mathbf{R})$ nulles sur E, on définit des éléments de $A(\mathbf{R})$, les $\varphi_k(x)$, par

$$\varphi_k(x) = \sum_{\frac{p}{n_k} \notin E} \varphi\left(\frac{p}{n_k}\right) h(n_k x - p).$$

Les $\varphi_k(x)$ sont des multiplicateurs de normes uniformément bornées grâce au théorème 3 du chapitre I. Il suffit donc de montrer que si f décrit une partie totale pour les éléments de $A(\mathbf{R})$ nuls sur E, on a

$$(3) \qquad \| f\varphi_k - f\varphi \|_{A(\mathbf{R})} \to 0 \qquad (k \to +\infty).$$

Puisque E est un ensemble de synthèse, on pourra se restreindre au cas où le support de f est contenu dans un intervalle fermé $[a, b]$ disjoint de E. Mais, à ce moment, dans l'algèbre des restrictions à $[a, b]$ des éléments de $A(\mathbf{R})$, φ_k tend en norme vers φ et, f étant nulle hors de $[a, b]$, on a bien (3).

Construction d'un ensemble vérifiant P_ε *qui soit la fermeture de son intérieur et dont la frontière soit un ensemble parfait.* — L'ensemble construit ci-dessous est un compact contenu dans $[-1, 1]$. On va indiquer comment obtenir les composantes connexes, désignées par la lettre ω affectée d'indices, du complémentaire Ω de E. Pour que les multiplicateurs dont on veut faire la synthèse ne soient pas tous triviaux, on exigera que E soit la fermeture de son intérieur : cette condition sera réalisée en imposant aux intervalles Ω d'être assez loin les uns des autres et, à cette fin, on les placera dans des intervalles de sécurité, les I (affectés d'indices).

A l'étape (0), I_0 est $[-1, 1]$, ω_0 est $]-1/9, 1/9[$, I_1^0 est $[-0,4; -0,2]$ et I_1^1 est $[0,2; 0,4]$. Les intervalles ω_k, $k \geq 1$, seront tous situés dans I_1^0 et I_1^1 afin que E contienne les intervalles $[-1, -4/10]$ et $[4/10, 1]$. On découpe I_1^0 et I_1^1 dans les mêmes proportions que I_0 et l'on continue de proche en proche.

A l'étape (k) on est en présence de 2^k segments $I_k^{(j)}$, $0 \leq j \leq 2^k - 1$ et de 2^{k-1} segments $\omega_{k-1}^{(j)}$. Les intervalles $I_k^{(j)}$ sont de la forme $\left[\frac{p_j - 1}{10^k}, \frac{p_j + 1}{10^k}\right]$;

il ne reste plus qu'à les découper dans les mêmes proportions que I_0 pour obtenir les segments

$$\omega_k^{(j)} = \left]\frac{p_j}{10^k} - \frac{1}{9.10^k}, \frac{p_j}{10^k} + \frac{1}{9.10^k}\right[\qquad (0 \leqq j \leqq 2^k - 1)$$

et les intervalles de sécurité où seront placés les $\omega^j_{(k+1)}$:

$$\left.\begin{aligned} I_{k+1}^{(2j)} &= \left[\frac{p_j}{10^k} - \frac{4}{10^{k+1}}, \frac{p_j}{10^k} - \frac{2}{10^{k+1}}\right] \\ I_{k+1}^{(2j+1)} &= \left[\frac{p_j}{10^k} + \frac{2}{10^{k+1}}, \frac{p_j}{10^k} + \frac{4}{10^{k+1}}\right] \end{aligned}\right. \qquad (0 \leqq j \leqq 2^k - 1).$$

On peut faire une remarque immédiatement : à la première étape on a vu que E contient $\left[-1, -\frac{4}{10}\right]$ et $\left[\frac{4}{10}, 1\right]$. Le choix de ω_0 a été fait $\left(\omega_0\right.$ déborde légèrement de $\left.\left[-\frac{1}{10}, \frac{1}{10}\right]\right)$ pour que le point $-\frac{2}{10}$ ainsi que le point $\frac{2}{10}$ soient centres d'intervalles de longueur $\frac{12}{100}$ ne rencontrant ni ω_0 ni les intervalles $\omega_1^{(j)}$. En examinant les points $\frac{p}{10}$ on voit qu'ils peuvent, soit appartenir à ω_0, à ω_1^0 ou à ω_1^1, soit être le centre d'un intervalle de longueur $\frac{12}{100}$ contenu dans E. De la même façon, on montre que les points $\frac{p}{10^k}$ qui appartiennent à E sont des centres d'intervalles de longueur $\frac{12}{10^{k+1}}$ contenus dans E.

Ainsi E vérifie la condition P_ε.

Soit à montrer que E est un ensemble de synthèse harmonique : on remarque alors que les extrémités des intervalles $\omega_n^{(j)}$, $0 \leqq n \leqq k$ sont de la forme $\frac{p}{9.10^k}$. On va prouver que E vérifie la condition de Herz, c'est-à-dire que les points $\frac{p}{9.10^k}$ appartiennent à E ou en sont distants de $\frac{1}{9.10^k}$ au moins. Il suffit de montrer qu'un point $\frac{p}{9.10^k}$ n'appartient jamais à un $\omega_l^{(j)}$, $l > k$. On aurait sinon

$$\frac{m}{10^l} - \frac{1}{9.10^l} < \frac{p}{9.10^k} < \frac{m}{10^l} + \frac{1}{9.10},$$

d'où l'on déduirait :

$$9m - 1 < 10^{l-k}p < 9m + 1$$

et $9m = 10^{l-k}p$ soit $p = 9q$; un point de la forme $\frac{9}{10^k}$ serait centre d'un $\omega_l^{(j)}$, ce qui, par construction, est inexact si l dépasse k.

Un autre exemple. — Pour faire la synthèse des multiplicateurs, on a utilisé, dans l'exemple ci-dessus, les sous-groupes $10^{-n}\mathbf{Z}$ et pour montrer que l'ensemble en question satisfait à la condition de Herz, on a utilisé les sous-groupes $9^{-1}10^{-n}\mathbf{Z}$.

Nous présentons maintenant un compact E fermeture de son intérieur d'une construction plus simple : la condition de Herz est écrite avec les sous-groupes $3^{-n}\mathbf{Z}$, et au lieu d'être correctement situé par rapport à deux suites croissantes de sous-groupes finis, on impose seulement d'être bien placé par rapport à une seule.

DÉFINITION 5. — *Définition de* E. *Soit* $\tilde{E}$ *l'ensemble triadique de Cantor, construit sur* $[0, 1]$, $\tilde{\Omega}$ *son complémentaire et* $(\tilde{\omega}_\nu)_{\nu \geqq 0}$ *la suite des composantes connexes de* $\tilde{\Omega}$. *L'intervalle* ω_ν, $\nu \geqq 0$, *a même centre que* $\tilde{\omega}_\nu$ *et est trois fois plus petit*, Ω *est la réunion des* ω_ν *et* E *le complémentaire de* Ω.

Expressions des origines de ω_ν :

$$4.3^{-n-2} + 2(\varepsilon_1 3^{-1} + \varepsilon_2 3^{-2} + \ldots + \varepsilon_n 3^{-n}),$$

où $\varepsilon_k \in \{0, 1\}$; $1 \leqq k \leqq n$.

(Si $n = 0$, on a pour origine 4.9^{-1}.)

Expressions des extrémités des ω_ν :

$$5.3^{-n-2} + 2(\varepsilon_1 3^{-1} + \varepsilon_2 3^{-2} + \ldots + \varepsilon_n 3^{-n}).$$

Notations. — Nous appelons Γ_n, $n \geqq 0$, le sous-groupe $3^{-n-2}\mathbf{Z}$ de $\mathbf{R}$. L'ensemble (fini) des points de Γ_n appartenant à $[0, 1]$ mais qui ne sont pas à l'intérieur de E est appelé Ω_n. Les points de Γ_n qui sont dans l'intérieur de E sont, par construction, centres d'un intervalle de longueur 2.3^{-n-2} contenu dans E. L'intersection de Γ_n et de l'intérieur de E est appelée E_n.

Enfin nous désignerons par Γ_n^g le sous-groupe translaté $3^{-n-2}(2\mathbf{Z} + 1)$ et par Γ_n^d le sous-groupe $3^{-n-2}(2\mathbf{Z})$. On posera

$$\Omega_n^g = \Omega_n \cap \Gamma_n^g; \qquad \Omega_n^d = \Omega_n \cap \Gamma_n^d.$$

LEMME. — *Si* $k \geqq n$, *on a les inclusions*

$$\Omega_n^g - 2^{-1}3^{-k} \subset \Omega,$$
$$\Omega_n^d + 2^{-1}3^{-k} \subset \Omega.$$

On en déduit, par la méthode des « petites translations » du paragraphe 3 (chap. I), la proposition

PROPOSITION 5. — *Soit* φ *un multiplicateur, de norme* 1, *des éléments de* $A(\mathbf{R})$ *nuls sur* E. *On peut former une suite* φ_n *de multiplicateurs des* *éléments de* $A(\Gamma_n)$ *nuls sur* E_n *ayant les propriétés suivantes :*

$$\|\varphi_n\| \leq 2,$$
$$\varphi(x) = \varphi_n(x) \quad \text{sur } \Omega \cap \Gamma_n.$$

On obtient par la proposition 5, la synthèse de tout multiplicateur φ par des expressions

$$\psi_n(x) = \sum_{t \in \Omega_n} \varphi_n(t)\, \Delta_n(t-x),$$

où $\Delta_n(x) = \sup(0, 1 - 3^{n+2}|x|)$:

THÉORÈME 6. — *Si* E *est l'ensemble présenté dans la définition* 5 *à tout multiplicateur* φ *des éléments de* $A(\mathbf{R})$ *nuls sur* E, *on peut associer une suite* ψ_n *d'éléments de* $A(\mathbf{R})$ *jouissant des propriétés suivantes :*

(i) $\psi_n(x) = \varphi(x)$ *si* $x \in (3^{-n}\mathbf{Z}) \cap \complement E$;

(ii) $\psi_n(x)$ *est linéaire sur* $[p3^{-n}, (1+p)3^{-n}]$, $p \in \mathbf{Z}$;

(iii) $\|f\psi_n - f\varphi\|_{A(\mathbf{R})} \to 0\ (n \to +\infty)$ *si* f *est dans* $A(\mathbf{R})$ *et nulle sur* E.

3. ENSEMBLES SATISFAISANT LA CONDITION FORTE DE DITKIN.

DÉFINITION 6. — *Un ensemble fermé* E *de* $\mathbf{R}$ *vérifie la condition* S'_2 (condition forte de Ditkin) *si*

(*a*) E *est un ensemble de synthèse harmonique;*

(*b*) *On peut trouver une suite* $(f_n)_{n\geq 0}$ *d'éléments de* $A(\mathbf{R})$ *nuls sur* E *telle que l'on ait*

$$\|ff_n - f\|_{A(\mathbf{R})} \to 0 \qquad (n \to +\infty) \tag{1}$$

pour tout élément f *de* $A(\mathbf{R})$ *nul sur* E.

La différence entre S_2 et S'_2 provient de ce que, dans S'_2 la suite f_n ne doit pas dépendre de f.

La condition (1) entraîne que

$$f_n(x) = 0 \qquad \text{si} \quad x \in E; \tag{2}$$
$$\|f_n - 1\|_{A(K)} \to 0 \qquad (n \to +\infty) \tag{3}$$

si le compact K est disjoint de E;

(4) les normes des multiplicateurs f_n de l'idéal des éléments de $A(\mathbf{R})$ nuls sur E forment une suite bornée.

Dans les exemples donnés ci-dessous, E sera un ensemble de synthèse car la frontière de E sera dénombrable et les conditions (2), (3), (4) entraînent alors que E vérifie la condition S'_2.

THÉORÈME 7. — *Si la suite t_n, $n \geqq 0$, de nombres réels vérifie la condition*

$$0 < t_{n+1} < \alpha t_n \qquad (0 < \alpha < 1), \tag{5}$$

la réunion E *de* o *et des intervalles* $[t_{2n+1}, t_{2n}]$ *est un ensemble vérifiant la condition forte de Ditkin.*

Démonstration. — Nous voulons construire les f_n de la façon la plus simple possible. Appelons g_n un élément de $B(\mathbf{R})$ égal à o sur $[-t_{2n+2}, t_{2n+2}]$ et à 1 sur $[t_{2n+1}, +\infty[$ et sur $]-\infty, -t_{2n+1}]$. La condition (5) nous permet de choisir les g_n tels que leurs normes dans $B(\mathbf{R})$ forment une suite bornée. Appelons $h_n(x)$ la fonction

$$1 - \sum_{0 \leqq k \leqq 2n+1} \Delta_\varepsilon(x - t_k),$$

où $\Delta_\varepsilon(x) = \sup\left(0, 1 - \left|\frac{x}{\varepsilon}\right|\right)$ et où le réel ε strictement positif sera précisé ultérieurement. Si l'on pose

$$f_n(x) = g_n(x)\, h_n(x),$$

les propriétés (2) et (3) se vérifient aussitôt.

Il reste à montrer que les $f_n(x)$ forment une suite bornée de multiplicateurs des éléments de $A(\mathbf{R})$ nuls sur E.

L'attention se porte sur $h_n(x)$ et nous employons le lemme :

LEMME. — *Si n est un entier positif et le nombre réel strictement positif ε est assez petit, la norme du multiplicateur* $\sum_{0 \leqq k \leqq 2n+1} \Delta_\varepsilon(x - t_k)$ *des éléments de* $A(\mathbf{R})$ *nuls sur tous les intervalles* $[t_{2n+1}, t_{2n}]$ *ne dépasse pas* A_α (constante ne dépendant que de α).

Démonstration du lemme. — Grâce au théorème de Dirichlet, nous pouvons trouver, pour tout entier ω donné, une suite d'entiers p_k, $0 \leqq k < 2n+1$, et un entier q dépassant $2(\alpha - 1)^{-1} t_{2n+1}^{-1}$ tels que l'on ait

$$|qt_k - p_k| \leqq \frac{1}{\omega}, \qquad 0 \leqq k \leqq 2n+1. \tag{6}$$

(L'entier ω vaut n, mais cela apparaîtra mieux plus tard.)

Posons

$$t'_k = \frac{p_k}{q} + \frac{1}{2q} \quad \text{si } k \text{ est impair,}$$

$$t'_k = \frac{p_k}{q} - \frac{1}{2q} \quad \text{si } k \text{ est pair.}$$

Les intervalles $[t'_{2l+1}, t'_{2l}]$ sont alors compris dans les intervalles $[t_{2l+1}, t_{2l}]$ et puisque q a été pris assez grand, on a encore

$$t'_{k+1} < \alpha t'_k \quad \text{pour} \quad 0 \leq k \leq 2n+1.$$

A ce moment le corollaire 1 du théorème 1 (chap. III) nous apprend que pour tout élément f de $A(\mathbf{R})$ nul sur les $[t'_{2k+1}, t'_{2k}]$, on a

$$\sum_{k \geq 0} \left| f\left(\frac{p_k}{q}\right) \right|^2 \leq A_\alpha^2 \|f\|_1^2$$

et le multiplicateur ψ_n défini, sur la partie du sous groupe $\mathbf{Z}/q$ située hors des intervalles $[t'_{2l+1}, t'_{2l}]$ $(0 \leq l \leq n)$, par 1 en $\frac{p_k}{q}$, 0 ailleurs a une norme au plus égale à A_α.

En appliquant le théorème 3 du chapitre I, nous obtenons, si le réel ε vérifie la condition

$$0 < \varepsilon \leq \frac{1}{3q},$$

un multiplicateur

$$\varphi'_n = \sum_{0 \leq k \leq 2n+1} \Delta_\varepsilon \left(x - \frac{p_k}{q}\right)$$

de norme au plus A'_α opérant sur les éléments de $A(\mathbf{R})$ nuls sur les $[t'_{2k+1}, t'_{2k}]$, donc aussi, de norme au plus A'_α, sur les éléments de $A(\mathbf{R})$ nuls sur $[t_{2k+1}, t_{2k}]$.

Posons

$$\varphi_n = \sum_{0 \leq k \leq 2n+1} \Delta_\varepsilon (x - t_k).$$

On a

$$\|\varphi'_n - \varphi_n\| \leq \sum_{0 \leq k \leq 2n+1} \left\| \Delta_\varepsilon \left(x - \frac{p_k}{q}\right) - \Delta_\varepsilon (x - t_k) \right\|_{A(\mathbf{R})} \leq \frac{2n+1}{\omega q \varepsilon}.$$

Si l'on a choisi $\varepsilon = \frac{1}{3q}$, il suffit de prendre ω de l'ordre de grandeur de n et le lemme est prouvé.

Le lemme étant prouvé, il en est de même du théorème 7.

Théorème 8. — *Si la suite t_n, $n \geq 0$, de nombres réels vérifie la condition*

$$0 < t_{n+1} < \alpha t_n, \qquad 0 < \alpha < 1,$$

la réunion d'un intervalle $[-\varepsilon, 0]$, $\varepsilon > 0$, et des t_n est un ensemble vérifiant la condition forte de Ditkin.

Démonstration. — Elle est tout à fait semblable à celle du théorème 7 et utilise les multiplicateurs des éléments de $A(\mathbf{R})$ nuls sur $[-\varepsilon, 0]$ qui approchent la fonction caractéristique des t_n.

On peut étendre le théorème 7 à la situation suivante :

THÉORÈME 9. — *Soit* N *un entier positif,* t_k, $k \geqq 0$, *et* l_k, $k \geqq 0$, *deux suites de nombres réels vérifiant les conditions*

$$0 < 3t_{k+1} \leqq t_k, \qquad 0 \leqq 2l_k \leqq t_{k+1}$$

et soit E_N *l'ensemble fermé, composé des points de* $[0, t_0]$ *n'appartenant à aucun intervalle de la forme*

$$]t_{k_1} + t_{k_2} + \ldots + t_{k_p} - l_{k_p}, t_{k_1} + t_{k_2} + \ldots + t_{k_p}[,$$

où $k_1 < k_2 < \ldots < k_p$, $1 \leqq p \leqq N$.

Alors E_N *est un ensemble satisfaisant la condition forte de Ditkin.*

La démonstration est semblable à celles exposées ci-dessus. On utilisera encore les résultats correspondants du chapitre III.

Pour toutes ces questions on peut se reporter à [5], [6] et [10].

Ingemar Wik a démontré qu'un ensemble de Ditkin fort du cercle, sans intérieur, est fini. Paul Haskell Rosenthal a généralisé ce résultat à d'autres groupes abéliens localement compact et a donné des conditions nécessaires et suffisantes assurant qu'un polygone de $\mathbf{R}^n$ est un ensemble de Ditkin fort.

APPENDICE.

I. — DENSITÉ DANS LE DUAL DE H^1.

Il s'agit de montrer que les éléments du dual de H^1 fournis par le théorème 3 du chapitre III ne forment pas une partie dense dans ce dual.

Nous notons $\overline{H}_0^\infty$ le sous-espace vectoriel de L^∞ formé des éléments dont tous les coefficients de Fourier d'indices positifs ou nuls sont nuls.

THÉORÈME 1. — *Pour aucune suite d'entiers* $(n_k)_{k \geqq 0} = \sigma$, *lacunaire à la Hadamard, les éléments de* $L^\infty/\overline{H}_0^\infty$ *dont la série de Fourier s'écrit*

$$(1) \qquad \sum_{k \geqq 0} \Delta_k(x), \ \Delta_k(x) = \sum_{n_{k-1}+1}^{n_k} a_p e^{ipx}$$

et vérifiant

$$(2) \qquad \sup_{k \geqq 0} \| \Delta_k(x) \|_\infty < +\infty$$

ne forment une partie dense dans $L^\infty/\overline{H}_0^\infty$.

Notation. — Le sous-espace vectoriel de $L^\infty/\overline{H}_0^\infty$ des éléments (1) vérifiant (2) sera noté $\mathcal{E}'_\sigma$.

Démonstration. — Appelons $g(x)$ la fonction à valeurs réelles, d'une variable réelle, impaire, égale à $(1-|x|)^+$ si $x>0$. Les coefficients de Fourier de la fonction 2π périodique égale à $g\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$ sur $[-\pi, +\pi]$ valent $2i\frac{p\varepsilon-\sin p\varepsilon}{p^2\varepsilon^2}$. On montre aisément l'existence d'une constante a, $a>0$, telle que, pour tout entier N, $N\geqq 1$, et tout ε, $\varepsilon>0$,

$$\varepsilon\sum_{1}^{\left[\frac{N}{\varepsilon}\right]}\frac{p\varepsilon-\sin p\varepsilon}{p^2\varepsilon^2}\geqq\log N-a. \tag{3}$$

On choisit une suite $(\varepsilon_k)_{k\geqq 0}$ de réels strictement positifs tels que $\sum_{k\geqq 0}\varepsilon_k=+1$ (le cercle a pour longueur 2π).

Nous appelons, pour tout k, $S_k(x)$ la somme partielle symétrique de $g\left(\frac{x}{\varepsilon_k}\right)$ étendue à un ordre M_k assez grand pour que, sur l'intervalle défini par $|x|\geqq\varepsilon_k$, on ait $|S_k(x)|\leqq\varepsilon_k$ [les sommes partielles de la série de Fourier de $g\left(\frac{x}{\varepsilon_k}\right)$ convergent uniformément vers cette fonction sur tout compact ne rencontrant pas l'origine]. On supposera, en outre, $M_k\geqq\varepsilon_k^{-2}$. Enfin les points t_k du cercle sont les centres d'intervalles de longueur $2\varepsilon_k$ non empiétants.

Alors on a

$$\sum_{k\geqq 0}|S_k(x-t_k)|\leqq 2.$$

On considère maintenant une sous-suite n'_k de points de σ assez lacunaire pour que

$$n'_{k+1}-n'_k\geqq M_{k+1}+M_k.$$

On forme

$$\sum_{k\geqq 0}e^{in_k x}S_k(x-t_k)\sim\varphi.$$

LEMME. — *L'élément φ de H^∞ définit un élément Φ dans $L^\infty/\overline{H}_0^\infty$ tel que, si $\sum_{k\geqq 0}\Delta_k(x)\sim\psi$ est dans $L^\infty/\overline{H}_0^\infty$ et si*

$$\|\psi-\Phi\|_{L^\infty/\overline{H}_0^\infty}\leqq\frac{1}{3},\qquad \textit{alors}\quad \sup_{k\geqq 0}\|\Delta_k\|_\infty=+\infty.$$

Le lemme entraîne évidemment le théorème. Pour montrer le lemme, appelons N_k la partie entière de ε_k^{-2} et G_k un élément de $L^1(\mathbf{T})$ dont les coefficients de Fourier soient o sur $]-\infty, -1]$ et sur $[N_k, +\infty[$ 1 en o, linéaires sur $[0, N_k]$. Alors $\|G_k\|_1 \leq 4\pi^{-1}\log N_k + A$ ([11], p. 67, chap. II 12.1). Posons $H_k = e^{in_k x} G_k$.

Si $\|\psi - \Phi\|_{L^\infty/\overline{H}_0^\infty} \leq \frac{\pi}{9}$, par convolution avec H_k, analytique, on obtient

$$\|\psi \star H_k - \Phi \star H_k\|_\infty \leq \frac{4}{9}\log N_k + O(1).$$

Mais, puisque l'on a $n_k \geq M_k \geq \varepsilon_k^{-2}$, on a aussi $n_k \geq N_k$ et le spectre de $\psi \star H_k$ est contenu dans l'intervalle $[n_k, 2n_k]$ rencontrant C points de σ. On en déduit

$$\|\psi \star H_k\|_\infty \leq C \sup_{k \geq 0} \|\Delta_k\|_\infty$$

(H_k a même effet, par convolution sur Δ_l, $l \geq k$, que si les coefficients de Fourier, d'indices inférieurs à n_k, de H_k, au lieu d'être nuls, étaient choisis de façon que la norme L^1 de H_k soit 1).

D'où

$$C \sup_{k \geq 0} \|\Delta_k\|_\infty \geq \|\Phi \star H_k\|_\infty - \frac{4}{9}\log N_k + O(1).$$

Or

$$\|\Phi \star H_k\|_\infty = \|S_k \star G_k\|_\infty \geq 2^{-1}\log N_k + O(1)$$

[grâce à (3) appliqué avec $\varepsilon = \varepsilon_k$, $N = 2^{-1}\varepsilon_k^{-1}$]. Soit

$$\sup_{k \geq 0} \|\Delta_k\|_\infty = +\infty.$$

Remarque. — La conclusion du théorème peut être améliorée :

— si $(\sigma_n)_{n \geq 0}$ est une famille dénombrable de suites lacunaires à la Hadamard, la réunion des $\mathcal{E}'_{\sigma_n}$ n'est pas dense dans $L^\infty/\overline{H}_0^\infty$.

(Il suffit, dans la démonstration du théorème 1, de choisir une suite n'_k rencontrant une infinité de fois les points de subdivision de chaque σ_n).

Corollaire 1. — *Soit σ une suite d'entiers $(n_k)_{k \geq 0}$ lacunaire à la Hadamard. Soit $\mathcal{A}$ la partie de $L^\infty/\overline{H}_0^\infty$ formée des éléments dont la série de Fourier s'écrit $\sum_{k \geq 0} \Delta_{2k}(x)$ et $\mathcal{B}$ la partie de $L^\infty/\overline{H}_0^\infty$ formée des éléments dont la série de Fourier s'écrit $\sum_{k \geq 0} \Delta_{2k+1}(x)$. La somme $\mathcal{A} + \mathcal{B}$ n'est pas dense dans $L^\infty/\overline{H}_0^\infty$.*

Corollaire 2. — *Le sous-espace vectoriel Ω de $L^\infty/\overline{H}_0^\infty$ formé des sommes $\sum_{k \geq 0} \Delta_k^\star(x)$, où $\sum_{k \geq 0} |\Delta_k^\star(x)|^2 \in \mathcal{L}^\infty(\mathbf{T})$* (*voir* le théorème 3 du chapitre III pour les notations) *n'est pas dense dans $L^\infty/\overline{H}_0^\infty$.*

Démonstration du corollaire. — Tout élément de Ω est somme d'un élément de $\mathcal{A}$ et d'un élément de $\mathcal{B}$.

Remarque. — L'énoncé du corollaire 2 ressemble à la proposition : « $H^\infty + \overline{H}_0^\infty$ n'est pas dense dans L^∞ »; la démonstration employée peut être adaptée et simplifiée pour démontrer ce dernier point; d'ailleurs, précisément l'élément $g(x)$ de L^∞ n'appartient pas à la fermeture de $H^\infty + \overline{H}_0^\infty$.

En employant [9] on montre facilement que $\Omega = \mathcal{A} + \mathcal{B}$.

II. — Limites du théorème 4 du chapitre III.

Nous étudions les suites $(\lambda_n)_{n\geq 0}$ telles que l'on ait

$$(1)\qquad \lambda_n \geq 0, \qquad \sum_{n\geq 0} \lambda_n |\hat{f}(n)| < +\infty$$

pour tout élément f de $H^1(\mathbf{T})$.

Théorème. — *On ne peut trouver une suite de nombres complexes, les $\sigma_{n,k}$, $n \geq 1$, $k \geq 0$, jouissant de la propriété suivante :*

($\mathcal{P}$) *Quand la suite $(\lambda_n)_{n\geq 0}$ vérifie* (1), *les séries de Fourier*

$$\sum_{2^k \leq n < 2^{k+1}} \lambda_n e^{inx} + \sum_{1=n}^{\infty} \lambda_n \sigma_{n,k} e^{-inx}$$

représentent des éléments $\Delta_k^*(x)$ de $L^\infty(\mathbf{T})$ tels que

$$(2)\qquad \left(\sum_0^\infty |\Delta_k^*(x)|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

appartienne à $\mathcal{L}^\infty(\mathbf{T})$.

Pour démontrer le théorème, nous raisonnons par l'absurde. Une suite $(\sigma_{n,k})_{n\geq 1,\, k\geq 0}$ mettant en défaut le théorème devra être assez régulière à l'infini et, en se servant des deux propriétés,

$$(3)\qquad \lim_{n\to+\infty} \sigma_{n,k} = 0 \quad \text{pour chaque } k;$$

$$(4)\qquad \lim_{k\to+\infty} \sigma_{n,k} = 0 \quad \text{pour chaque } n,$$

on construira explicitement une suite $(\lambda_n)_{n\geq 0}$ telle que (2) ne puisse appartenir à $\mathcal{L}^\infty(\mathbf{T})$.

a. Preuve de (3) *et* (4). — Définissons un espace de Banach $\sum$ composé de toutes les suites complexes $(c_n)_{n\geq 0}$ telles que l'on ait

$$\sum_{n\geq 0} |c_n| |\hat{f}(n)| < +\infty \tag{5}$$

pour tout élément f de $H^1(\mathbf{T})$.

La norme, notée $\|c_n\|_\Sigma$ est le sup des quantités (5) évalués sur la boule unité de $H^1(\mathbf{T})$. On vérifie sans peine que, pour une constante a, on a

$$\|c_n\|_\infty \leq \|c_n\|_\Sigma \leq |c_0| + a\left[\sum_{k\geq 0}\left(\sum_{2^k=n}^{2^{k+1}-1} |c_n|\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}.$$

D'autre part, toute suite $(c_n)_{n\geq 0}$ dans $\sum$ s'écrit

$$c_n = \lambda_n - \lambda'_n + i\mu_n - i\mu'_n \qquad (n \geq 0),$$

où λ_n, λ'_n, μ_n et μ'_n vérifient (1). Si le théorème est en défaut, les expressions (2) appartiendront à $\mathcal{L}^\infty$ quand, au lieu de construire les $\Delta_k^*(x)$ à l'aide des λ_n, on les construit avec n'importe quel élément $(c_n)_{n\geq 0}$ de $\sum$.

Appelons $L^\infty_{l^2}$ l'espace des suites $g_k(x)$ de fonctions, à valeurs complexes, mesurables, avec la norme

$$\left\|\left(\sum_{k\geq 0} |g_k(x)|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_\infty.$$

Si le théorème était en défaut, l'application de l'espace de Banach $\sum$ dans l'espace $L^\infty_{l^2}$, définie par $\mathfrak{T}$, serait continue. On en déduit, d'abord, que, pour tout k fixé, la suite $(\sigma_{n,k})_{n\geq 0}$ appartient au dual de $\sum$ et, par conséquent, vérifie

$$\sum_{r\geq 0}\left(\sup_{2^r\leq n<2^{r+1}} |\sigma_{n,k}|^2\right) < +\infty.$$

Cela entraîne évidemment (3).

En choisissant pour suite λ_n la fonction caractéristique de l'entier n, on a

$$\sum_{k\geq 0} |\sigma_{n,k}|^2 < +\infty$$

si ($\mathfrak{T}$) est vraie et (4) en résulte.

b. Preuve du théorème. — Nous construisons un élément $(c_n)_{n\geq 0}$ de $\sum$ en employant le théorème 4 du chapitre III.

On appelle $(k_r)_{r\geqq 0}$ une suite d'entiers, qui sera définie ci-dessous, strictement croissante vers l'infini. L'intervalle d'entiers $[2^{k_r}, 2^{k_r+1}-1]$ sera noté I_r et si les nombres complexes c_n satisfont aux conditions

$$(6)\qquad \begin{cases} |c_n| \leqq 2^{-k_r} & \text{si } n \text{ est dans } I_r; \\ c_n = 0 & \text{si } n, \text{ positif, n'appartient à aucun } I_r; \end{cases}$$

la suite $(c_n)_{n\geqq 0}$ de $\sum$ appartiendra à une boule de $\sum$ définie par

$$\| c_n \|_{\sum} \leqq A$$

(A ne dépend pas de k_r).

Le choix des k_r et les conditions (6) auront pour conséquence les inégalités

$$(7)\qquad \left\| \sum_{\substack{n\geqq 0 \\ n \notin I_r}} c_n \sigma_{n,k_r} e^{-inx} \right\|_\infty \leqq 2^{-r}$$

qui contredisent ($\mathfrak{T}$). En effet, grâce à la continuité de l'application linéaire de $\sum$ dans $L^\infty_{l^2}$ définie par ($\mathfrak{T}$), on devrait avoir

$$\left\| \left(\sum_{r\geqq 0} \left| \sum_{n\in I_r} c_n e^{inx} + \sum_{n\geqq 0} c_n \sigma_{n,k_r} e^{-inx} \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_\infty \leqq B$$

lorsque les c_n vérifient (6).

En utilisant (7), on obtient

$$(8)\qquad \left\| \left(\sum_{r\geqq 0} \left| \sum_{n\in I_r} c_n (e^{inx} - \sigma_{n,k_r} e^{-inx}) \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_\infty \leqq B + 1.$$

On peut choisir des c_n satisfaisantes pour (6) et tels que (8) ait pour conséquence

$$(9)\qquad \sum_{r\geqq 0} 2^{-2k_r} \left(\sum_{n\in I_r} |1 - \sigma_{n,k_r} e^{-2inx}| \right)^2 \leqq (B+1)^2.$$

On intègre (9) par rapport à (x) pour obtenir, la norme L^1 d'un carré étant supérieure au carré de la norme L^1,

$$\sum_{r\geqq 0} 2^{-2k_r} 2^{2k_r} \leqq (B+1)^2.$$

c. Construction des k_r. — Il ne reste plus qu'à montrer comment un choix judicieux des k_r assure (7). Il faut tout de suite remarquer que chacune des inégalités (7) fait intervenir tous les k_s. Pour cette raison nous allons construire, de proche en proche la suite $(k_R)_{R\geqq 0}$ en même temps qu'une suite $h_{R,s}$, $s \geqq R$ de façon que (7) soit vérifiée, si $0 \leqq r \leqq R$, dès que :

$$k_{s+1} - k_s \geqq h_{R,s} \qquad (s \geqq R). \tag{10}$$

Nous appellerons « étape (R) » un tel choix de $k_0, k_1, \ldots, k_R$ et des écarts $h_{R,s}$.

Montrons comment passer de l'étape (R) à l'étape $(R+1)$.

L'inégalité (7) sera vérifiée, si $r = R+1$, dès que, pour tout r de l'intervalle d'entiers $[0, R]$, on a

$$\left\| \sum_{n \in I_r} \sigma_{n, k_{(R+1)}} c_n e^{-inx} \right\|_\infty \leqq \frac{1}{2^{R+1}(R+1)} \tag{11}$$

et que, pour tout r de l'intervalle $[R+2, +\infty[$, on a

$$\left\| \sum_{n \in I_r} \sigma_{n, k_{(R+1)}} c_n e^{-inx} \right\|_\infty \leqq 2^{-r-1}. \tag{12}$$

Nous allons choisir $k_{(R+1)}$ vérifiant (10) et assez grand pour que chacune des inégalités (11) ait lieu. C'est possible parce que les c_n sont bornés par les conditions (6), parce que leur nombre est limité par les choix précédents de $k_0, \ldots, k_R$ et que, pour tout n fixé, $\sigma_{n,k}$ tend vers zéro lorsque k tend vers l'infini. Maintenant que $k_{(R+1)}$ est fixé, nous choisissons les écarts $h_{(R+1),s}$, $s \geqq R+1$ supérieurs aux écarts $h_{R,s}$ et tels que, moyennant (10) écrit avec $R+1$, (12) ait lieu. C'est possible parce que (12) est, grâce à (6), conséquence de

$$\sum_{n \in I_r} \left| \sigma_{n, k_{(R+1)}} \right| \leqq 2^{-r-1} \tag{13}$$

et que, pour tout k fixé, $\sigma_{n,k}$ tend vers zéro lorsque n tend vers l'infini.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] J.-P. KAHANE, *Séries de Fourier aléatoires*, Séminaire de Mathématiques supérieures de l'Université de Montréal, été 1963.

[2] J.-P. KAHANE et R. SALEM, *Ensembles parfaits et séries trigonométriques* (*Actual. scient. et industr.*, n° 1301, 1962).

[3] Y. MEYER, *Complément à un théorème de Paley* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 262, 1966, p. 281-282).

[4] Y. MEYER, *Prolongement des multiplicateurs d'idéaux fermés de* $L^1(\mathbf{R}^n)$ (*C. R. Acad. Sc.*, t. 262, 1966, p. 744-745).

[5] Y. MEYER et H. P. ROSENTHAL, *Convexité et ensembles de Ditkin forts* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 262, 1966, p. 1404-1406).

[6] H. P. Rosenthal, *Sur les ensembles de Ditkin forts* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 262, 1966, p. 873-876).

[7] W. Rudin, *Trigonometric series with gaps* (*J. Math. and Mech.*, vol. 9, 1960, p. 203-228).

[8] W. Rudin, *Fourier Analysis on Groups*, Interscience tracts in pure and applied mathematics, n° 12, 1962.

[9] E. Stein, *Classes* H^p, *multiplicateurs et fonctions de Littlewood-Paley* (*C. R. Acad. Sc.*, 263, série A, 1966, p. 716-719 et 780-781).

[10] I. Wik, *Astrong form of spectral synthesis* (*Arkiv för Matematik*, vol. 6, n° 3, 1965, p. 55-64).

[11] A. Zygmund, *Trigonometric series*, Cambridge University Press, 1959, t. 1, 2e édition.

[12] A. Zygmund, *Trigonometric series*, Cambridge University Press, 1959, t. 2, 2e édition.

(Manuscrit reçu le 31 janvier 1968.)