ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

E. COMBESCURE

Sur quelques questions qui dépendent des différences finies ou mêlées

Annales scientifiques de l'É.N.S. 2e série, tome 3 (1874), p. 305-362

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1874_2_3__305_0>

SUR QUELQUES QUESTIONS

QUI DÉPENDENT

DES DIFFÉRENCES FINIES OU MÊLÉES,

PAR M. ÉDOUARD COMBESCURE,

PROFESSEUR A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE MONTPELLIER.

On sait qu'Euler a résolu, par des considérations diverses, plusieurs problèmes de Géométrie où il s'agit de déterminer une courbe plane d'après certaines relations qui sont données entre des points successifs de cette courbe et d'autres points situés à distance finie des premiers. Dans un important Mémoire, inséré au tome I du *Recueil des Savants étrangers*, Biot a repris quelques-uns de ces problèmes et les a rattachés à une méthode régulière de calcul. Poisson est revenu, à son tour (*Journal de l'École Polytechnique*, 13e cahier, p. 141), sur l'un de ces mêmes problèmes, en introduisant, conformément à une indication générale de Laplace (*Mémoires de l'Académie des Sciences*, année 1779), une variable auxiliaire dont la différence première est constante, substitution qui a, en particulier, pour avantage de permettre l'inversion des différentiations finie et infiniment petite. Dans le tome IX, 1re série, du *Journal de Liouville*, M. Puiseux a résolu complétement le problème qui a pour objet la détermination des courbes planes semblables à leurs développées correspondantes de l'ordre n. Le tome XI, 2e série, du même Journal renferme une solution particulière d'une question analogue, où la développée est remplacée par la première podaire. Enfin on trouve d'autres intéressants problèmes du même genre dans l'excellent *Traité des différences finies* de M. G. Boole.

Les différentes questions de Géométrie traitées jusqu'ici par les géomètres, et dont la solution dépend du calcul des différences finies ou mêlées, ont été uniquement empruntées (autant du moins qu'il m'ait été possible de m'en convaincre) à la Géométrie plane. Quand on veut passer aux trois dimensions, on se trouve en présence de difficultés, la plupart du temps insurmontables, eu égard à l'état actuel de l'Analyse. J'ai résolu quelques-uns de ces nouveaux problèmes, relativement simples. Ils ont trait principalement à la détermination des courbes gauches, d'après diverses conditions de similitude, et à une certaine extension de la théorie au cas de plusieurs variables indépendantes.

Le premier paragraphe renferme quelques considérations générales en vue de ce dernier objet. Elles ne me paraissent nullement ressortir, comme pour le cas d'une seule variable, de ce que dit Laplace dans le Mémoire cité ou dans son grand Ouvrage sur les probabilités. J'ajoute, dans le § II, quelques remarques, qui n'ont peut-être pas été faites, sur divers points de la théorie, et particulièrement sur l'intégration d'une certaine classe d'équations linéaires aux différences mêlées. La question résolue au § III est, je crois, nouvelle. Quoiqu'elle ne dépende que des différences finies et ne présente pas de difficultés analytiques proprement dites, il m'a paru qu'elle pouvait offrir quelque intérêt géométrique. Dans le § IV, je reprends une question relative aux podaires, dans la solution générale de laquelle s'introduisent définitivement deux fonctions arbitraires périodiques. Il faut, sans doute, attribuer au rejet d'une fonction arbitraire, dans le cours de son élégante analyse, la solution si restreinte trouvée par M. Haton de la Goupillière dans le Recueil cité. Le § V est consacré à la solution d'un problème de Géométrie, que je crois encore nouveau. Sa solution complète est ramenée à l'intégration d'une équation linéaire, aux différences mêlées, que l'on peut faire rentrer dans la classe de celles dont il est question au § II. Enfin je m'occupe, dans le § VI, d'une extension analytique, qui ne paraît pas sans intérêt, d'un célèbre problème d'Euler relatif aux courbes planes et auquel il a été précédemment fait allusion. Ce dernier paragraphe fournit une application des considérations, nécessairement un peu vagues, développées au n° 4 du § I, et dont il peut, en conséquence, être considéré comme le complément naturel.

§ I. — *Remarques analytiques.*

1. Soit $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ une fonction de plusieurs variables indépendantes $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Si l'on donne à ces variables des accroissements finis quelconques Δx_1, $\Delta x_2, \ldots$, Δx_n, considérés comme indépendants, et que l'on désigne par $\Delta_1 f$, $\Delta_2 f, \ldots$ les accroissements partiels et correspondants de f, de sorte que

$$\Delta_1 f = f(x_1 + \Delta x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) - f(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n),$$
$$\Delta_2 f = f(x_1, x_2 + \Delta x_2, x_3, \ldots, x_n) - f(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

l'accroissement total ou la différence totale, que je désignerai simplement par Δf, et dont l'expression immédiate est

$$\Delta f = f(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, \ldots, x_n + \Delta x_n) - f(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

pourra être représenté par la formule symbolique

$$(a) \qquad \Delta f = [(1 + \Delta_1)(1 + \Delta_2)\ldots(1 + \Delta_n) - 1] f,$$

ainsi que cela résulte, par exemple, d'une formule de Laplace (*Théorie analytique des probabilités*, p. 74). Mais on peut voir ceci plus simplement, si l'on veut, de la manière suivante. Si l'on suppose la formule vraie pour le cas de n variables indépendantes, et que l'on vienne à introduire une nouvelle variable indépendante x_{n+1}, on aura, d'après la définition même de l'accroissement total Δf,

$$\Delta_{n+1} \Delta f + \Delta f = f(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, \ldots, x_n + \Delta x_n, x_{n+1} + \Delta x_{n+1})$$
$$- f(x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1} + \Delta x_{n+1}),$$

ce que l'on peut écrire, en désignant par $\Delta' f$ le nouvel accroissement total,

$$\Delta_{n+1} \Delta f + \Delta f = \Delta' f - \Delta_{n+1} f,$$

d'où

$$\Delta' f = \Delta_{n+1}(\Delta f + f) + \Delta f,$$

et, remplaçant Δf par la forme symbolique (a) qu'on suppose avoir lieu, il vient

$$\Delta' f = \Delta_{n+1}[(1 + \Delta_1)(1 + \Delta_2)\ldots(1 + \Delta_n)] f + [(1 + \Delta_1)(1 + \Delta_2)\ldots(1 + \Delta_n)] f - f,$$

c'est-à-dire

$$\Delta' f = [(1 + \Delta_1)(1 + \Delta_2)\ldots(1 + \Delta_{n+1}) - 1] f.$$

De la formule (a) résulte, pour la différence totale, d'ordre p,

$$\Delta^p f = [(1+\Delta_1)(1+\Delta_2)\ldots(1+\Delta_n) - 1]^p f.$$

2. Lorsque les accroissements $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n$ sont constants, auquel cas on peut leur attribuer une valeur commune égale à l'unité, l'équation

$$\Delta f = 0$$

est, d'après la formule (a), une équation linéaire aux différences finies partielles, de l'ordre n et à coefficients constants. On pourrait donc l'intégrer par les méthodes connues; mais il est évident que l'intégrale vraiment générale de cette équation particulière est une conséquence immédiate de la définition de la *différence totale*. Toute fonction f des n variables indépendantes $x_1, x_2, \ldots, x_n$ peut être regardée, en effet, comme une fonction de l'une de ces variables, x_1 par exemple, et des différences

$$\xi_2 = x_2 - x_1, \quad \xi_3 = x_3 - x_1, \ldots, \quad \xi_n = x_n - x_1,$$

de sorte que, en posant

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \varphi(x_1, \xi_2, \ldots, \xi_n),$$

l'équation

$$\Delta f = 0$$

revient à

$$\varphi(x_1 + 1, \xi_2, \ldots, \xi_n) = \varphi(x_1, \xi_2, \ldots, \xi_n),$$

équation qui montre que φ est une fonction arbitraire de $x_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$, assujettie seulement à la condition d'être périodique par rapport à x_1, quelles que soient $\xi_2, \xi_3, \ldots, \xi_n$. Telle est la forme la plus générale, et en même temps la plus simple de l'intégrale de l'équation proposée. Mais rien n'empêche, si on le juge à propos, de faire figurer dans φ toutes les différences deux à deux des variables et, en outre, $x_1, x_2, \ldots, x_n$, pourvu que ces dernières variables y entrent séparément sous forme périodique.

On peut remarquer, à ce moment, que, lorsqu'on a à former l'accroissement total $\Delta^p f$, d'ordre p, si l'on substitue préalablement les variables $x_1 = t, \xi_2, \ldots, \xi_n$ aux variables primitives $x_1, x_2, \ldots, x_n$, il n'y aura, dans la transformée φ de f, qu'à s'occuper de la seule variabilité de t, à cause de la relation évidente

$$\Delta^p f = \Delta_t^p \varphi.$$

Il suit de là que l'intégrale générale de l'équation

$$\Delta^p f = 0$$

peut être représentée par

$$f = x_1^{p-1}\varphi_1 + x_1^{p-2}\varphi_2 + \ldots + x_1\varphi_{p-1} + \varphi_p,$$

$\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ étant des fonctions de la nature de la fonction φ, définie un peu plus haut à propos de l'intégrale de l'équation $\Delta f = 0$.

3. Lorsque les différences $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n$ sont des fonctions données quelconques des variables elles-mêmes $x_1, x_2, \ldots, x_n$, on peut, comme généralisation de l'indication de Laplace pour le cas d'une seule variable indépendante, substituer à ces variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ d'autres variables, pareillement indépendantes, telles que les accroissements Δx_1, $\Delta x_2, \ldots, \Delta x_n$ soient produits simultanément par l'accroissement, égal à 1, d'une seule des variables introduites. Si l'on désigne, en effet, par t cette variable particulière, et par $\varpi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $\varpi_2(x_1, x_2, \ldots, x_n), \ldots$ les expressions données de $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots$, on peut poser le système d'équations aux différences finies ordinaires

$$\Delta_t x_1 = \varpi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), \quad \Delta_t x_2 = \varpi_2(x_1, x_2, \ldots, x_n), \ldots, \quad \Delta_t x_n = \varpi_n(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

dans lequel $\Delta_t x_i$ marque l'accroissement de x_i, qui répond à l'accroissement $\Delta t = 1$ de la nouvelle variable indépendante t, la seule jusqu'ici introduite. Or, en se plaçant à un point de vue tout à fait général, on sait qu'un pareil système comporte un système intégral formé de n équations finies entre $x_1, x_2, \ldots, x_n, t$ et n constantes arbitraires indépendantes $a_1, a_2, \ldots, a_n$. En remplaçant ces constantes par des fonctions déterminées et distinctes de $(n-1)$ variables arbitraires $t_2, t_3, \ldots, t_n$, on tirera du système intégral des expressions de la forme

$$x_1 = f_1(t, t_2, \ldots, t_n), \quad x_2 = f_2(t, t_2, \ldots, t_n), \ldots, \quad x_n = f_n(t, t_2, \ldots, t_n);$$

et ce seront précisément là les formules requises pour le changement des variables indépendantes, les nouvelles variables indépendantes étant $t, t_2, \ldots, t_n$.

Il n'est peut-être pas inutile de rappeler que l'existence d'un système intégral renfermant n constantes arbitraires, invoquée ci-dessus, est fondée sur la considération connue que voici : si l'on pose

$$F_1 = 0, \quad F_2 = 0, \ldots, \quad F_n = 0,$$

les F étant des fonctions données quelconques, indépendantes entre elles, des variables $t, x_1, x_2, \ldots, x_n$, et de n constantes arbitraires $a_1, a_2, \ldots, a_n$, et que l'on représente par

$$F'_1 = 0, \quad F'_2 = 0, \ldots, \quad F'_n = 0$$

ce que deviennent ces équations lorsqu'on y écrit $t+1$ au lieu de t et en même temps $x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, \ldots, x_n + \Delta x_n$ au lieu de $x_1, x_2, \ldots, x_n$ respectivement, puis qu'on élimine $a_1, a_2, \ldots, a_n$ entre ces deux groupes d'équations, on obtiendra n équations résultantes, d'où l'on pourra déduire pour $\Delta_t x_1, \Delta_t x_2, \ldots, \Delta_t x_n$ des expressions en $t, x_1, x_2, \ldots, x_n$, lesquelles pourront coïncider avec n fonctions données quelconques de ces $n+1$ variables, à cause de la présence des n fonctions aussi quelconques $F_1, F_2, \ldots, F_n$, introduites dans le calcul.

Pour revenir à la question qui fait l'objet spécial du présent numéro, on peut remarquer que, si dans les expressions ci-dessus de $x_1, x_2, \ldots, x_n$, qui sont censées servir au changement des variables indépendantes, on écrit, aux seconds membres, $t_2 - t, t_3 - t, \ldots, t_n - t$, au lieu de $t_2, t_3, \ldots, t_n$ respectivement, de sorte que, par exemple, on ait $x_1 = f_1(t, t_2 - t, t_3 - t, \ldots, t_n - t)$, et que l'on substitue ces nouvelles expressions dans une fonction donnée quelconque $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$: la transformée $\varphi(t, t_2, \ldots, t_n)$ ainsi obtenue jouira évidemment de la propriété que son accroissement total $\Delta\varphi$, répondant à l'accroissement simultané, *un*, de toutes les variables, $t, t_2, \ldots, t_n$, sera équivalent à l'accroissement total Δf provenant des accroissements simultanés $\Delta x_1 = \varpi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), \ldots, \Delta x_n = \varpi_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Ce passage à des variables indépendantes, qui augmentent simultanément de *un*, peut offrir dans certains cas des avantages, au point de vue, par exemple, de la symétrie.

4. Lorsqu'on a m fonctions indéterminées $u, \ldots, v$ de n variables indépendantes $x, y, \ldots, z$ et que l'on a à faire intervenir dans le calcul les valeurs $x_1, y_1, \ldots, z_1$, de ces variables

$$x_1 = \varphi\left(x, y, \ldots, z, u, \frac{du}{dx}, \frac{d^2u}{dx\,dy}, \ldots\right),$$
$$y_1 = \psi\left(x, y, \ldots, z, u, \frac{du}{dx}, \frac{d^2u}{dx\,dy}, \ldots\right),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$z_1 = \chi\left(x, y, \ldots, z, u, \frac{du}{dx}, \frac{d^2u}{dx\,dy}, \ldots\right),$$

où $\varphi, \psi, \ldots, \chi$ sont des fonctions données de $x, y, \ldots, z, u, \ldots, v$, et des dérivées $\frac{du}{dx}, \frac{dv}{dx}, \ldots$ jusqu'à un ordre déterminé, comme on peut toujours imaginer, à un point de vue purement théorique, que φ, $\psi, \ldots, \chi$ se réduisent finalement à des fonctions des seules variables indépendantes, $x, y, \ldots, z$, on peut aussi concevoir, conformément à ce qui a été dit au numéro précédent, que l'on ait introduit n nouvelles variables indépendantes $t, \theta, \ldots, \tau$, telles que, en regardant $x, y, \ldots, z$ comme des fonctions de ces nouvelles variables, $x_1, y_1, \ldots, z_1$ soient précisément les valeurs que prennent ces fonctions quand $t, \theta, \ldots, \tau$ y sont simultanément changés en $t+1, \theta+1, \ldots, \tau+1$, ou, si on le préfère, quand t seul y est changé en $t+1$. Alors les nouvelles valeurs $u_1, \ldots, v_1$ et celles de leurs dérivées partielles, qui étaient censées répondre au système de valeurs $x_1, y_1, \ldots, z_1$ des variables indépendantes primitives, pourront être regardées comme se rapportant directement au système $t+1, \theta+1, \ldots, \tau+1$, ou, si on le préfère, au système $t+1, \theta, \ldots, \tau$. En joignant les n équations, écrites ci-dessus, aux m équations qui doivent être données entre $x, y, \ldots, z, u, \ldots, v, \frac{du}{dx}, \ldots$ et entre les valeurs de ces diverses quantités qui répondent aux systèmes $(x_1, y_1, \ldots, z_1)$, $(x_2, y_2, \ldots, z_2), \ldots, (x_i, y_i, \ldots, z_i)$, déduits les uns des autres suivant la loi ci-dessus, on aura un système total de $m+n$ équations, aux différences mêlées partielles, entre les $m+n$ fonctions inconnues $x, y, \ldots, z, u, \ldots, v$ et les variables indépendantes actuelles $t, \theta, \ldots, \tau$. Il est clair qu'il conviendra généralement de rapporter dans ce système les dérivées $\frac{du}{dx}$, $\frac{d^2u}{dx\,dy}$, ... aux variables $t, \theta, \ldots, \tau$, par les formules ordinaires du changement de variables indépendantes, quand les nouvelles variables introduites restent indéterminées.

Au reste, on pourrait dire simplement que l'on profite de l'indétermination des n fonctions qu'introduit tout changement implicite de n variables indépendantes pour remplir n conditions déterminées, à savoir ici que $x_1, y_1, \ldots, z_1$ soient précisément les valeurs de $x, y, \ldots, z$ qui répondent au système de valeurs $t+1$, $\theta+1, \ldots, \tau+1$, ou, si on le préfère, $t+1, \theta, \ldots, \tau$ des nouvelles variables indépendantes. Mais les considérations précédentes me paraissent, à différents égards, préférables et plus précises.

Dans tous les cas, il faut observer que les expressions définitives de $u, \ldots, v$ en $t\,\theta, \ldots, \tau$, doivent être telles, que les valeurs de $x_1 = \varphi$, $y_1 = \psi, \ldots, z_1 = \chi$ soient indépendantes entre elles, comme celles de $x, y, \ldots, z$. La supposition qu'il existe entre $x_1, y_1, \ldots, z_1$ une ou plusieurs relations déterminées changerait la nature de la question primitive et donnerait nécessairement lieu à diverses hypothèses ou discussions que je mettrai complétement de côté.

§ II. — *Suite des remarques analytiques.*

1. Soit un système d'équations différentielles ordinaires entre une variable indépendante t et les n fonctions $x, y, \ldots, z$ de cette variable

$$(1)\quad \frac{dx}{dt} = f(x, y, \ldots, z, t), \quad \frac{dy}{dt} = \varphi(x, y, \ldots, z, t), \ldots, \quad \frac{dz}{dt} = \psi(x, y, \ldots, z, t),$$

où les seconds membres renferment la variable indépendante t sous forme périodique seulement. En supposant que ces mêmes seconds membres restent finis et continus lorsque t varie dans un intervalle dépassant l'unité (étendue de la période), $x, y, \ldots, z$ variant en même temps entre certaines limites; en désignant, de plus, par $x_1, y_1, \ldots, z_1$ les valeurs de $x, y, \ldots, z$ considérées actuellement comme des fonctions de t, qui répondent à la valeur $t+1$ de cette variable indépendante et sont censées comprises dans les limites en question, on aura

$$(2)\quad \frac{dx_1}{dt}=f(x_1, y_1, \ldots, z_1, t), \quad \frac{dy_1}{dt}=\varphi(x_1, y_1, \ldots, z_1, t), \ldots, \quad \frac{dz_1}{dt}=\psi(x_1, y_1, \ldots, z_1, t),$$

équations exactement de même forme que les équations (1). Si donc, $a, b, \ldots, c$ désignant des constantes arbitraires, on représente par

$$(3)\qquad x=\mathrm{F}(a, b, \ldots, c, t), \quad y=\Phi(a, b, \ldots, c, t), \ldots$$

les intégrales générales des équations (1), on obtiendra les intégrales générales des équations (2) en changeant simplement dans (3) les constantes $a, b, \ldots, c$, en d'autres $a+\Delta a$, $b+\Delta b, \ldots, c+\Delta c$ où Δa, $\Delta b, \ldots, \Delta c$ peuvent être considérés comme des fonctions données quelconques de $a, b, \ldots, c$. Mais comme $x_1, y_1, \ldots, z_1$ peuvent aussi se déduire de (3) en changeant t en $t+1$, on aura des relations telles que

$$\mathrm{F}(a+\Delta a, b+\Delta b, \ldots, c+\Delta c, t)=\mathrm{F}(a, b, \ldots, c, t+1).$$

Or, d'après le n° 3 du § I, on peut, au lieu de $a, b, \ldots, c$, introduire un autre système de constantes $\alpha, \beta, \ldots, \gamma$, telles que $\Delta a, \Delta b, \ldots, \Delta c$ soient produits simultanément par l'accroissement *un* attribué à une seule des nouvelles variables, γ par exemple, de sorte que, en changeant en même temps t en $-(t+1)$, la relation précédente équivaut à celle-ci

$$\mathrm{F}(\alpha, \beta, \ldots, \gamma+1, t+1)=\mathrm{F}(\alpha, \beta, \ldots, \gamma, t);$$

ce qui revient à dire que les intégrales générales des équations (1) peuvent toujours être considérées comme des fonctions de $n-1$ constantes arbitraires et de $t-\tau$ (τ étant la $n^{ième}$ constante), ces fonctions contenant, en outre, sous forme périodique, t ou τ à volonté.

De là résulte une conséquence particulière pour le cas où les équations (1) sont linéaires; mais il est peut-être préférable d'établir le résultat d'une manière un peu différente.

2. Considérons l'équation linéaire de l'ordre n entre la fonction y et la variable indépendante x

$$\frac{d^n y}{dx^n}+p\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\ldots+sy=0,$$

dans laquelle les coefficients $p, \ldots, s$ sont supposés des fonctions périodiques de x. Soient $\xi, \eta, \ldots, \zeta$, n solutions particulières distinctes de cette équation. Si ξ, par exemple, vérifie l'équation quand x varie de x_0 à X, intervalle supérieur à une période, ξ_1 (expression de ξ quand on y écrit $x+1$ au lieu de x) sera aussi une solution particulière de la même équation, puisque celle-ci conserve la même forme quand on y change x en $x+1$; par conséquent, d'après la forme connue de l'intégrale générale de la proposée, ξ_1 sera nécessairement une fonction linéaire à coefficients constants de $\xi, \eta, \ldots, \zeta$. Si donc toutes les fonctions $\xi, \eta, \ldots, \zeta$ sont propres, chacune en particulier, à vérifier l'équation différentielle dans tout l'intervalle de x_0 à X, on aura n équations linéaires à coefficients constants entre $\xi, \eta, \ldots, \zeta; \xi_1, \eta_1, \ldots, \zeta_1$. D'où l'on conclut, d'après la forme connue des intégrales d'un pareil système d'équations, que l'expression générale de y est

$$y = \varpi e^{\mu x} + \ldots + \omega e^{\rho x},$$

$\mu, \ldots, \rho$ étant des constantes et $\varpi, \ldots, \omega$ des fonctions périodiques de x, cette forme devant être modifiée de la manière connue dans le cas où l'on suppose la coïncidence d'un certain nombre des n exposants.

Si les fonctions $\xi, \eta, \ldots, \zeta$ n'étaient pas propres à vérifier séparément la proposée dans le même intervalle $X - x_0$, supérieur à l'unité, la conclusion précédente pourrait être en défaut, puisqu'on ne pourrait plus affirmer l'existence d'un nombre égal à n d'équations linéaires entre $\xi, \eta, \ldots, \zeta; \xi_1, \eta_1, \ldots, \zeta_1$.

Si une fonction particulière ξ vérifie la proposée dans un intervalle supérieur à m périodes, c'est-à-dire en conservant dans cet intervalle sa forme analytique, et que cette fonction ξ ne soit pas périodique, $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m$ constitueront généralement autant de solutions particulières nouvelles, et on pourra les faire intervenir à ce titre dans la proposition précédente.

La détermination des exposants $\mu, \ldots, \rho$ paraît exiger généralement l'intégration même de l'équation proposée. On peut facilement déterminer leur somme. En désignant, en effet, par Θ le déterminant des n solutions particulières $\xi, \eta, \ldots, \zeta$, c'est-à-dire en posant

$$\Theta = \Sigma \pm \left(\frac{d^{n-1}\xi}{dx^{n-1}} \frac{d^{n-2}\eta}{dx^{n-2}} \cdots \zeta \right),$$

on sait que

$$\Theta = e^{-\int p\,dx}.$$

Dans le cas présent, les n solutions particulières $\xi, \eta, \ldots, \zeta$ sont de la forme $\varpi e^{\mu x}$, $\varphi\, e^{\nu x}, \ldots, \omega\, e^{\rho x}$. La substitution dans le déterminant Θ donnera donc un résultat de la forme

$$\mathrm{A}\, e^{(\mu+\nu+\ldots+\rho)x},$$

A étant une fonction périodique; il faudra donc que la partie non périodique de l'intégrale $-\int p\,dx$ se réduise à $(\mu+\nu+\ldots+\rho)x$. Le coefficient de cette partie non périodique est représenté, en général, par $-\int_0^1 p\,dx$, en sorte que l'on aura

$$\mu+\nu+\ldots+\rho = -\int_0^1 p\,dx.$$

Il est clair qu'on pourrait augmenter l'un ou l'autre membre de $2k\pi\sqrt{-1}$, k étant un nombre entier quelconque; mais on peut admettre que la partie périodique qui en proviendrait est absorbée dans une ou plusieurs fonctions $\varpi, \varphi, \ldots, \omega$.

3. Il ne sera peut-être pas inutile d'entrer dans quelques détails sur la forme, qui vient d'être invoquée, de l'intégrale d'une fonction périodique. Soit

$$\mathrm{F}(x) = \int_{x_0}^{x} f(x)\,dx,$$

où $f(x)$ est une fonction périodique. On aura successivement

$$\mathrm{F}'(x) = f(x), \quad \mathrm{F}'(x+1) = f(x), \quad \mathrm{F}'(x+1) - \mathrm{F}'(x) = 0,$$

et, par suite,

$$\mathrm{F}(x+1) - \mathrm{F}(x) = k, \quad \mathrm{F}(x) = kx + \psi(x),$$

k étant une constante et $\psi(x)$ une fonction périodique. Comme $\mathrm{F}(x_0)$ est nulle, on aura

$$\mathrm{F}(x) = \psi(x) - \psi(x_0) + k(x - x_0), \quad \text{d'où} \quad \mathrm{F}(x_0+1) = k,$$

c'est-à-dire

$$k = \int_{x_0}^{x_0+1} f(x)\,dx, \quad \text{ou} \quad k = \int_0^1 f(x)\,dx,$$

en supposant que la fonction $f(x)$ ne devienne pas discontinue entre les limites x_0 et $x+1$ ou 0 et 1. Dans le cas d'une discontinuité quelconque, il faut nécessairement faire des conventions particulières pour chaque forme déterminée de fonction périodique, indépendamment des précautions ordinaires relatives au passage par l'infini. Ainsi, par exemple, si

$$f(x) = \pi \operatorname{tang} \pi x,$$

et qu'on prenne

$$F(x) = \pi \int_0^x \operatorname{tang} \pi x\,dx = -\log \cos \pi x,$$

on ne peut pas considérer $-\log\cos\pi x$ comme une fonction périodique dont l'amplitude de période est 1, ainsi que cela a lieu pour $\operatorname{tang}\pi x$; mais rien n'empêche d'écrire

$$F(x) = -\int_0^x \tfrac{1}{2} d.\log\cos^2\pi x = -\tfrac{1}{2}\log\cos^2\pi x,$$

et l'amplitude de période est $+1$ pour la fonction primitive comme pour la proposée. Plus généralement, quand on aura

$$y = \int_{x_0}^x \frac{f'(x)\,dx}{f(x)},$$

j'écrirai

$$y = \tfrac{1}{2}\log\left[\frac{f(x)}{f(x_0)}\right]^2,$$

ainsi que le font plusieurs géomètres, que $f(x)$ soit ou ne soit pas périodique. Cette forme intégrale a, en particulier, l'avantage de laisser subsister ou d'introduire dans certains problèmes de Géométrie des branches de courbe qui disparaîtraient sans cela et rompraient ainsi en pure perte la continuité géométrique.

Soit encore

$$y = \int_0^x \frac{dx}{1 + k\sin 2\pi x},$$

k étant une constante réelle dont la valeur est plus petite que l'unité. La dérivée $\frac{dy}{dx}$ est périodique, continue et finie pour toutes les valeurs réelles de x. Si l'on écrit

$$y = \frac{1}{\pi\sqrt{1-k^2}}\left(\operatorname{arc\,tang}\frac{\operatorname{tang}\pi x + k}{\sqrt{1-k^2}} - \operatorname{arc\,tang}\frac{k}{\sqrt{1-k^2}}\right),$$

quand on change x en $x+1$, sans se préoccuper des valeurs intermédiaires, le second membre reprend exactement la même valeur; tandis que, en ayant égard à la variation continue de x dans le même intervalle, l'accroissement correspondant de y est évidemment $\frac{1}{\sqrt{1-k^2}}$. La fonction y est donc de la forme $mx + \varpi(x)$, m étant une constante et $\varpi(x)$ une fonction périodique, ce qui résulte d'ailleurs du développement de $\frac{dy}{dx}$ suivant les puissances positives de k. Lorsqu'on suppose $k > 1$, on a

$$y = \frac{1}{4\pi\sqrt{k^2-1}}\log\left(\frac{\operatorname{tang}\pi x + k - \sqrt{k^2-1}}{\operatorname{tang}\pi x + k + \sqrt{k^2-1}}\,\frac{k+\sqrt{k^2-1}}{k-\sqrt{k^2-1}}\right)^2.$$

En suivant la variation continue de cette fonction, on reconnaît que y doit être actuellement considéré comme une fonction proprement périodique, sans partie proportionnelle à x; seulement cette fonction passe une fois par l'infini dans l'intervalle de chaque période, comme cela a lieu pour sa dérivée. L'intégrale $\int_0^1 \frac{dy}{dx}\,dx$, traitée par les moyens usités, est indéterminée; et cette circonstance, ainsi que le passage par l'imaginaire, pourrait être considérée peut-être comme correspondant généralement, en vertu de quelque convention tacite, à l'absence du terme proportionnel à x dans l'intégrale indéfinie d'une fonction périodique; mais ceci n'est qu'une simple réflexion.

J'ajouterai, à propos de l'intégrale d'une fonction périodique, une dernière remarque qui peut être utile dans certaines circonstances. Si l'on considère l'intégrale indéfinie

$$\int P\varpi\,dx,$$

où P est une fonction quelconque de x et ϖ une fonction périodique de la même variable, et que l'on pose

$$\int \varpi\, dx = kx + \varpi_{(1)}, \quad \int \varpi_{(1)}\, dx = k_1 x + \varpi_{(2)}, \quad \int \varpi_{(2)}\, dx = k_2 x + \varpi_{(3)}, \ldots,$$

k, k_1, k_2,... étant des constantes et $\varpi_{(1)}$, $\varpi_{(2)}$, $\varpi_{(3)}$,... des fonctions périodiques, on trouve aisément, par le procédé de l'intégration par parties,

$$\begin{aligned}\int \mathrm{P}\varpi\, dx = \mathrm{P}[\varpi_{(1)} - k_1] - \mathrm{P}'[\varpi_{(2)} - k_2] + \mathrm{P}''[\varpi_{(3)} - k_3] - \ldots \\ - (-1)^n \mathrm{P}^{(n-1)}[\varpi_{(n)} - k_n] + (-1)^n \mathrm{P}^{(n)} \varpi_{(n+1)} \\ + k\int \mathrm{P}\, dx - (-1)^n \int \mathrm{P}^{(n+1)} \varpi_{(n)}\, dx,\end{aligned}$$

où les accents marquent les dérivées. En particulier, lorsque P est un polynôme du degré n, le dernier signe intégral disparaît, et l'on peut d'ailleurs effectuer la quadrature indiquée à l'avant-dernier terme.

4. Bien que les résultats établis aux numéros précédents du présent paragraphe soient soumis, comme on l'a vu, à diverses restrictions, la théorie de l'intégration des équations aux différences mêlées est jusqu'à ce jour si peu avancée qu'il semble y avoir intérêt à retenir les moindres remarques sur cet obscur et important sujet. Or c'est vers ce dernier objet que tendent, en grande partie, les résultats auxquels je viens de faire allusion.

Considérons les équations de la forme

$$(a) \qquad \Sigma_{i,j}\, p_{i,j} \frac{d^i y_j}{dx^i} = 0,$$

où le Σ s'étend à toutes les valeurs entières et positives de i et de j qui vérifient la condition $i + j \leq n$, n étant un nombre entier positif donné. Dans cette équation, y_j désigne toujours $f(x+j)$, en supposant que y est représenté par $f(x)$, et les coefficients $p_{i,j}$ sont supposés des fonctions périodiques de x. Si l'on fait, dans l'équation proposée,

$$y = ze^{\mu x},$$

z étant une fonction périodique et μ une constante indéterminée, on obtiendra un résultat de la forme

$$(b) \qquad \mathrm{M}z^{(n)} + \mathrm{N}z^{(n-1)} + \ldots + \mathrm{Q}z = 0,$$

les accents marquant les dérivées, et les coefficients M, N,..., Q étant des fonctions périodiques de x qui contiennent sous forme entière les puissances de μ et de e^μ jusqu'à la $n^{ième}$. D'après le n° 2, les n intégrales particulières distinctes de cette équation linéaire pourront être supposées, chacune en particulier, de la forme $\varpi_\mu e^{m_\mu x}$, où ϖ_μ est une fonction périodique qui dépend de μ, et m_μ un exposant constant qui dépend aussi de μ généralement. La fonction désignée par z devant être périodique, il faudra que

$$m_\mu = 0,$$

et c'est cette équation, généralement transcendante, qui fournira les valeurs convenables de μ. Une autre solution particulière de la même équation (b), telle que $\varphi_\mu e^{n_\mu x}$, donnera une autre série de solutions particulières dont les exposants seront fournis par l'équation

$$n_\mu = 0,$$

de sorte qu'on satisfera à l'équation proposée en prenant

$$y = \Sigma_\mu \mathrm{A}_\mu \varpi_\mu e^{\mu x} + \Sigma_\mu \mathrm{B}_\mu \varphi_\mu e^{\mu x} + \ldots + \Sigma_\mu \mathrm{C}_\mu \omega_\mu e^{\mu x},$$

A_μ, B_μ,..., C_μ étant des constantes arbitraires et les Σ s'étendant respectivement aux racines des équations

$$m_\mu = 0, \quad n_\mu = 0, \ldots, \quad r_\mu = 0,$$

lesquelles admettront, chacune en particulier, une infinité de racines; mais cette dernière assertion ne doit être considérée que comme une induction fondée sur ce fait, que les exponentielles qui se trouvent entremêlées aux puissances de μ, pouvant être remplacées par leurs développements en série, les équations ci-dessus peuvent être assimilées généralement à des équations algébriques d'un degré infini.

5. Comme exemple de la méthode précédente d'intégration, considérons l'équation particulière

$$\Sigma_i a_i y_i = y'' - \frac{2\varpi'}{\varpi} y' + \left(\frac{2\varpi'^2}{\varpi^2} - \frac{\varpi''}{\varpi}\right) y,$$

où les a_i sont des coefficients constants en nombre quelconque, et ϖ une fonction périodique donnée. Si l'on fait

$$y = ze^{\mu x},$$

z étant supposé périodique, la substitution donnera

$$z'' + \left(2\mu - \frac{2\varpi'}{\varpi}\right) z' + \left(\frac{2\varpi'^2}{\varpi^2} - \frac{\varpi''}{\varpi} - 2\mu \frac{\varpi'}{\varpi} + \mu^2 - h\right) z = 0,$$

où, pour abréger,

$$h = \Sigma_i \, a_i \, e^{i\mu}.$$

En faisant

$$z = \varpi v,$$

cette équation se réduit simplement à

$$v'' + 2\mu v' + (\mu^2 - h) v = 0;$$

et l'on a en conséquence

$$z = \varpi e^{(-\mu + \sqrt{h})x} + \varpi e^{(-\mu - \sqrt{h})x}.$$

Il faudra déduire μ successivement des deux équations

$$\sqrt{h} = \mu, \quad \sqrt{h} = -\mu,$$

ou, si l'on veut ici, de l'équation unique, équivalant aux deux précédentes,

$$h = \mu^2,$$

et l'on en conclura

$$y = \varpi \Sigma_\mu \, A_\mu \, e^{\mu x}.$$

On peut remarquer que, dans cet exemple, les deux fonctions périodiques qui multiplient les exponentielles dans la précédente expression de z coïncident et ne dépendent point de μ; mais cela tient à la forme toute particulière de l'équation proposée. Quant aux racines μ, elles proviennent de deux équations vraiment distinctes. Pour prendre le cas le plus simple, supposons nuls tous les coefficients a_i, à l'exception de celui qui multiplie y_1, et dont la valeur sera égale à l'unité. Les deux équations d'où l'on doit déduire les racines μ seront actuellement

$$e^{\frac{\mu}{2}} = \mu, \quad e^{\frac{\mu}{2}} = -\mu.$$

A part la racine réelle unique qu'elle peut admettre, chacune de ces équations admet une infinité de racines imaginaires, dont la séparation est très-facile à effectuer, et à laquelle conséquemment je ne crois pas devoir m'arrêter. On pourra consulter sur ce point le Mémoire cité de M. Puiseux, où ce géomètre a effectué la séparation des racines pour une équation du même genre, quoique un peu plus compliquée.

6. Il y a un cas où il est possible de déterminer l'équation propre à fournir les diverses valeurs de μ, et d'obtenir en même temps l'expression de y. Ce cas se présente lorsque dans un terme quelconque de l'équation proposée la différentiation infiniment petite ne dépasse pas le premier ordre, de sorte que l'équation peut s'écrire

$$\Sigma_i p_{(i)} y_i + \Sigma_j q_{(j)} y'_j = 0,$$

$p_{(i)}$, $q_{(j)}$ étant toujours des fonctions périodiques, en nombre fini quelconque, et les accents indiquant les dérivées. Quand on fera

$$y = \xi = \varpi e^{\mu x},$$

on aura

$$\xi_1 = e^{\mu} \xi, \quad \xi_2 = e^{2\mu} \xi, \ldots,$$

$$\xi'_1 = e^{\mu} \xi', \quad \xi'_2 = e^{2\mu} \xi', \ldots,$$

de façon que l'équation proposée deviendra

$$\xi \Sigma_i p_{(i)} e^{i\mu} + \xi' \Sigma_j q_{(j)} e^{j\mu} = 0;$$

d'où par l'intégration on tirera immédiatement la valeur de ξ, et l'on aura, par suite,

$$\varpi = e^{-\int \left[\mu + \frac{\Sigma_i p_{(i)} e^{i\mu}}{\Sigma_j q_{(j)} e^{j\mu}}\right] dx}.$$

La fonction ϖ devant être périodique, il faudra généralement poser

$$\mu + \int_0^1 \frac{\Sigma_i p_{(i)} e^{i\mu}}{\Sigma_j q_{(i)} e^{j\mu}} dx = 0,$$

ce qui est précisément l'équation propre à fournir les diverses valeurs de μ. On aura ensuite

$$y = \Sigma_\mu A_\mu \varpi_\mu e^{\mu x},$$

les A_μ désignant des constantes arbitraires et ϖ_μ ce que devient successivement l'expression précédente de ϖ pour chacune des racines μ.

7. On peut, au lieu de l'équation particulière qui vient d'être examinée, considérer la suivante, d'une composition un peu différente,

$$\Sigma_i [p_{(i)} + x s_{(i)}] y_i + \Sigma_j q_{(j)} y'_j = 0,$$

$p_{(i)}$, $s_{(i)}$, $q_{(j)}$ étant encore des fonctions périodiques quelconques. En supposant ϖ et u des fonctions périodiques indéterminées, faisant,

$$y = \xi = \varpi u^x,$$

et observant que

$$\xi_h = u^h \xi, \quad \xi'_h = h u^{h-1} u' \xi + u^h \xi',$$

la substitution dans la proposée donne d'abord

$$\xi \{\Sigma_i [p_{(i)} + x s_{(i)}] u^i + \Sigma_j j q_{(j)} u^{j-1} u'\} + \xi' \Sigma_j q_{(j)} u^j = 0.$$

Si l'on remplace dans cette équation ξ' par $\xi \left(\frac{\varpi'}{\varpi} + \log u + x \frac{u'}{u}\right)$, on obtient une transformée dont le premier membre renferme deux sortes de termes, savoir : des termes périodiques, et d'autres termes contenant x en facteur. Ces deux groupes de termes doivent disparaître séparément, et l'on a, en conséquence,

$$\frac{\varpi'}{\varpi} + \log u + \frac{\Sigma_i p_{(i)} u^i + \Sigma_j j q_{(j)} u^{j-1} u'}{\Sigma_j q_{(j)} u^j} = 0,$$

$$(a) \qquad \Sigma_i s_{(i)} u^i + u' \Sigma_j q_{(j)} u^{j-1} = 0.$$

Si de cette équation, non linéaire généralement, on peut tirer pour u une expression périodique renfermant une constante arbitraire α, la périodicité requise de ϖ exigera que l'on ait

$$\int_0^1 \left[\log u + \frac{\Sigma_i p_{(i)} u^i + \Sigma_j j q_{(j)} u^{j-1} u'}{\Sigma_j q_{(j)} u^j}\right] dx = 0,$$

équation d'où l'on devra déduire α, et l'on aura

$$y = \Sigma_\alpha A_\alpha \varpi_\alpha u_\alpha^x,$$

les A_α étant des constantes arbitraires et le Σ se rapportant aux racines de l'équation précédente. ϖ_α, u_α désignent respectivement ce que deviennent les expressions trouvées pour ϖ et pour u quand on y remplace α par chacune des racines de la même équation successivement.

Par exemple, si l'on suppose que les coefficients $q_{(j)}$, $s_{(i)}$ soient tels que, pour toutes les valeurs considérées de j, on ait

$$q_{(j)} = j r_{(j)}, \quad s_{(j)} = r'_{(j)},$$

de sorte que l'équation proposée soit

$$\Sigma_i p_{(i)} y_i + x \Sigma_j r'_{(j)} y_j + \Sigma_j j r_{(j)} y'_j = 0,$$

l'équation propre à déterminer u sera

$$\Sigma_j [r'_{(j)} u^j + j r_{(j)} u^{j-1} u'] = 0;$$

le premier membre étant une différentielle exacte, on aura

$$\Sigma_j r_{(j)} u^j = \alpha.$$

En désignant par n la plus grande valeur de j, on déduira, de cette équation algébrique en u, n déterminations de u généralement; et ces n fonctions seront évidemment périodiques. Si on les représente par $u_{(1)}$, $u_{(2)}, \ldots, u_{(n)}$, il faudra déduire successivement les racines α des n équations

$$\int_0^1 \left[\log u_{(k)} + \frac{\Sigma_i p_{(i)} u^i_{(k)} + \Sigma_j j^2 r_{(j)} u^{j-1}_{(k)} u'_{(k)}}{\Sigma_j j r_{(j)} u^j_{(k)}} \right] dx = 0,$$

où $k = 1, 2, \ldots, n$.

8. J'ajouterai ici, pour ne pas y revenir, une dernière remarque sur un autre point de la théorie. En désignant par y une fonction quelconque de x et par y_1 ce que devient cette fonction quand x y est changée en $x+1$, l'équation

$$(\alpha) \qquad y_1 = y$$

est la définition immédiate d'une fonction périodique quelconque.

De même l'équation

$$(\beta) \qquad y_1 = -y$$

peut être regardée comme définissant immédiatement ce que j'appellerai, pour abréger, une fonction périodique *impaire*. Les fonctions définies par (α) pourraient être appelées, par opposition, périodiques *paires*. Je les appellerai, en général, conformément à l'usage ordinaire, fonctions périodiques, réservant la qualification d'impaires pour les fonctions (β). Si l'on désigne par a une fonction particulière quelconque (par exemple $\sin \pi x$), périodique impaire, et que l'on pose

$$y = az,$$

l'équation (β) deviendra

$$z_1 = z;$$

de sorte qu'une fonction périodique impaire peut toujours être considérée comme le produit d'une fonction périodique paire par une fonction périodique impaire particulière. Mais il est aussi simple, comme on en verra des exemples, d'introduire directement dans le calcul les fonctions périodiques impaires, à peu près au même titre que les fonctions périodiques paires. Enfin on peut observer que $f(x)$ étant une fonction périodique impaire, finie et continue dans l'intervalle d'une période, l'intégrale $\int_0^1 f(x)\,dx$ est égale à zéro, et l'intégrale indéfinie $\int f(x)\,dx$ est une fonction périodique impaire, ne contenant pas de partie proportionnelle à x. Il est évident qu'on pourrait introduire une distinction analogue, avec plus de variété bien entendu, pour le cas des fonctions de plusieurs variables indépendantes.

§ III. — *Des courbes composées individuellement de parties semblables.*

1. Les coordonnées rectangulaires x, y, z d'un point quelconque M d'une courbe étant supposées des fonctions d'une variable indépendante t, le point M_1 ou (x_1, y_1, z_1), obtenu en changeant dans ces fonctions t en $t + \Delta t$, Δt étant une fonction donnée de t, pourra être appelé le *point correspondant* de M. D'après ce qui a été dit au § I on peut toujours supposer Δt égal à l'unité. Cela posé, si l'on considère deux points quelconques M et M′ de la courbe et les points respectivement correspondants M_1 et M'_1, la condition que l'on s'impose ici est que les arcs MM′ et $M_1M'_1$ soient semblables, quelles que soient les

valeurs t et t' de t qui répondent aux extrémités du premier. Cette condition se traduit évidemment par les trois équations

$$(a)\quad mx_1 = ax + a'y + a''z, \quad my_1 = bx + b'y + b''z, \quad mz_1 = cx + c'y + c''z,$$

où a, b,... sont les cosinus de direction d'un nouveau système fixe d'axes rectangulaires ayant la même disposition que le premier, et où m est le rapport constant de similitude, positif ou négatif suivant que la similitude est directe ou inverse. On sous-entend aux seconds membres de ces équations trois constantes additionnelles. En posant, conformément à la méthode ordinaire,

$$x = \lambda m^{-t} e^{\rho t}, \quad y = \mu m^{-t} e^{\rho t}, \quad z = \nu m^{-t} e^{\rho t},$$

λ, μ, ν, ρ étant des constantes indéterminées, la substitution dans (a) fournira

$$\begin{gathered}(a-\sigma)\lambda + a'\mu + a''\nu = 0,\\ b\lambda + (b'-\sigma)\mu + b''\nu = 0,\\ c\lambda + c'\mu + (c''-\sigma)\nu = 0;\end{gathered}$$

où $\sigma = e^{\rho}$. L'élimination de λ, μ, ν donne une équation en σ dont les trois racines sont

$$1, \quad \cos\varepsilon + \sqrt{-1}\sin\varepsilon, \quad \cos\varepsilon - \sqrt{-1}\sin\varepsilon,$$

en posant

$$a + b' + c'' - 1 = 2\cos\varepsilon,$$

et l'on peut prendre

$$\lambda = a'' + c, \quad \mu = b'' + c', \quad \nu = 1 + c'' - a - b',$$

quand $\sigma = 1$, et

$$\lambda = c + a''\sigma, \quad \mu = c' + b''\sigma, \quad \nu = (c'' - 1)(1 + \sigma),$$

quand $\sigma = e^{\pm\varepsilon\sqrt{-1}}$.

Si l'on fait, pour abréger,

$$\mathrm{M} = \mathrm{A}\cos\varepsilon t - \mathrm{B}\sin\varepsilon t, \quad \mathrm{N} = \mathrm{A}\sin\varepsilon t + \mathrm{B}\cos\varepsilon t,$$

A, B, C étant trois fonctions arbitraires de t qui reprennent la même valeur quand t augmente de l'unité, on déduira des trois solutions particulières précédentes les intégrales générales des équations (a), à savoir

$$(b)\quad \begin{cases} x = m^{-1}[\mathrm{C}(a''+c) + \mathrm{M}(c + a''\cos\varepsilon) - \mathrm{N}a''\sin\varepsilon], \\ y = m^{-1}[\mathrm{C}(b''+c') + \mathrm{M}(c'+b''\cos\varepsilon) - \mathrm{N}b''\sin\varepsilon], \\ z = m^{-1}[\mathrm{C}(1+c''-a-b') + \mathrm{M}(c''-1)(1+\cos\varepsilon) - \mathrm{N}(c''-1)\sin\varepsilon]. \end{cases}$$

On reconnaît facilement que les trois groupes de coefficients qui multiplient C, M, N dans ces formules peuvent être pris pour les cosinus de direction de trois axes rectangulaires, en introduisant toutefois un facteur numérique commun aux coefficients de C et un autre facteur numérique commun aux coefficients de M et N. En désignant par X, Y, Z les coordonnées relatives à ces nouveaux axes, et projetant x, y, z successivement sur chacun d'eux, on obtiendra

$$(c)\qquad \mathrm{X} = m^{-1}\mathrm{R}\cos(\varphi + \varepsilon t), \quad \mathrm{Y} = m^{-1}\mathrm{R}\sin(\varphi + \varepsilon t), \quad \mathrm{Z} = m^{-1}\mathrm{H},$$

après avoir remplacé A et B, abstraction faite d'un même facteur numérique, par $\mathrm{R}\cos\varphi$, $\mathrm{R}\sin\varphi$ respectivement, R, φ, H étant trois fonctions arbitraires périodiques.

Lorsque m, que je suppose toujours positif, est égal à l'unité, les trois constantes qui sont censées ajoutées aux seconds membres des équations (a) ne peuvent pas être éliminées au moyen d'une solution particulière représentée elle-même par trois constantes : on les fait disparaître, dans ce cas, au moyen d'une substitution de la forme

$$x_0 = \alpha t + \alpha_1, \quad y_0 = \beta t + \beta_1, \quad z_0 = \gamma t,$$

α, α_1,... étant des constantes. On reconnaît aisément que α, β, γ doivent être proportionnels à $a''+c$, $b''+c'$, $1+c''-a-b'$; et dès lors en imaginant les quantités x_0, y_0, z_0 ajoutées respectivement aux seconds membres des équations (b) et projetant, comme précédemment, sur les trois nouveaux axes introduits, on obtient, abstraction faite des constantes additionnelles,

$$(d)\qquad \mathrm{X} = \mathrm{R}\cos(\varphi + \varepsilon t), \quad \mathrm{Y} = \mathrm{R}\sin(\varphi + \varepsilon t), \quad \mathrm{Z} = \mathrm{H} + ht,$$

R, H, φ étant des fonctions arbitraires périodiques, et h, ε des constantes quelconques.

On passe au cas de la similitude inverse en supposant, dans (c), m toujours positif et prenant pour R, H des fonctions périodiques impaires, φ étant toujours périodique pair. Seulement dans (d) h doit être supposé nul. On peut aussi dans les mêmes formules (c), (d) écrire $\varphi + n\pi t$ au lieu de φ, n étant un nombre entier quelconque, et supposer R toujours périodique pair; on sera dans le cas de la similitude directe ou dans celui de la similitude inverse, suivant que n sera pair ou impair, H étant toutefois impair dans ce dernier cas.

Lorsque ε est différent de zéro, si l'on fait

$$\varepsilon t + \varphi = \varepsilon\theta,$$

θ croîtra de *un* en même temps que t, et comme cette équation entraîne

$$t = \theta + \varpi(\theta),$$

ϖ étant une fonction périodique, toute fonction périodique de t deviendra, par cette substitution, une fonction périodique de θ, de même parité qu'avant la substitution. On voit, d'après cela, que, lorsque ε n'est pas nul, on peut dans les formules (c) et (d) supprimer, si l'on veut, la fonction φ; cette suppression n'enlève rien à la généralité des formules quand il s'agit simplement des différences finies, mais elle peut obliger à introduire des fonctions à sens multiple à cause des valeurs différentes de t, qui, dans l'équation

$$t + \frac{1}{\varepsilon}\varphi(t) = \theta,$$

peuvent répondre à une même valeur donnée de θ.

2. Il résulte du calcul ci-dessus qu'étant donnés deux systèmes semblables, situés d'une manière quelconque dans l'espace, on peut toujours les rapporter à trois axes rectangulaires tels qu'entre les coordonnées des points homologues (X, Y, Z), (X_1, Y_1, Z_1) on ait les relations constantes

$$mX_1 = X\cos\varepsilon - Y\sin\varepsilon, \quad mY_1 = X\sin\varepsilon + Y\cos\varepsilon, \quad mZ_1 = Z,$$

en sous-entendant, s'il le faut, des constantes additionnelles aux seconds membres. On aurait pu partir de cette propriété et simplifier réciproquement le calcul primitif. Si l'on a, en effet, deux systèmes semblables (A, B, C,...), (A′, B′, C′,...) et que l'on prenne deux points homologues quelconques O, O′, on peut transporter parallèlement à lui-même le système (A′, B′, C′,..., O′) de manière à faire coïncider O′ avec O. Puis, par une rotation autour d'un certain axe OI, toujours parallèle à lui-même, on peut l'amener à coïncider avec l'un des homologues de (A, B, C,..., O), construits avec le centre d'homothétie O. On voit que, dans le cas de la similitude directe, si m diffère peu de l'unité positive, le point O peut être transporté très-loin, ce qui explique la présence nécessaire de la constante qui est jointe à z quand on prend la direction OI pour axe des z et que l'on suppose m égal à l'unité.

3. En s'appuyant sur les considérations développées au § I, on peut, sans nouveau calcul, résoudre la même question géométrique à l'égard des surfaces. Les coordonnées x, y, z d'un point quelconque d'une surface étant supposées, en effet, des fonctions quelconques de deux paramètres arbitraires ξ, η, quelle que soit la loi de correspondance de deux points M ou (ξ, η) et M_1 ou $(\xi + \Delta\xi, \eta + \Delta\eta)$, on peut substituer à ξ et η deux nouveaux paramètres indépendants t et θ, tels que $\Delta\xi$ et $\Delta\eta$ soient produits simultanément par l'unique accroissement $\Delta t = 1$, θ ne variant pas. La condition géométrique de similitude fournissant d'ailleurs trois équations analogues à (a), il est clair qu'il suffit, pour avoir la solution générale du problème actuel, de supposer, dans les formules (c) et (d), que R, φ, H sont des fonctions arbitraires de θ et t, la dernière de ces variables entrant dans ces fonctions sous forme périodique; m, ε, h, restent toujours des constantes arbitraires. Ceci revient à considérer les surfaces cherchées comme engendrées par le mouvement de la courbe (c) dans les équations de laquelle on fait entrer, à part t, et d'une manière arbitraire, un nouveau paramètre indépendant θ répondant au déplacement ou à la déformation de cette courbe. Si l'on remplaçait θ par une fonction déterminée quelconque de t, on aurait, sur la surface en question, une certaine courbe; en changeant, après cela, t en $t + 1$, on obtiendrait sur la même surface une courbe semblable à la première.

Si l'on supposait que les fonctions R, φ, H dépendent arbitrairement de trois paramètres t, θ, τ, le premier entrant toutefois dans ces fonctions sous forme périodique, les formules (c) et (d) répondraient à la décomposition de l'espace en portions semblables, c'est-à-dire que si l'on se donnait un nombre quelconque k de points, répondant à k systèmes de valeurs simultanées quelconques de ces paramètres, les valeurs de t étant, en particulier, $t_{(1)}, t_{(2)}, \ldots, t_{(k)}$, les k points obtenus en changeant $t_{(1)}, t_{(2)}, \ldots, t_{(k)}$ en $t_{(1)}+1, t_{(2)}+1, \ldots, t_{(k)}+1$, formeraient une figure semblable à la première.

Enfin je ferai remarquer que la méthode analytique, adoptée au début du présent paragraphe, pourrait s'appliquer au cas de la Géométrie à n dimensions. Le système des n équations analogues à (a), et répondant à cette généralisation, pourrait alors se traiter en faisant usage de la propriété des déterminants, établie par M. Brioschi au tome XIX, 1re série, du *Journal de Liouville;* et il ne serait peut-être pas sans intérêt de rechercher en particulier quel est le système le plus simple de n axes rectangulaires auxquels deux systèmes homologues peuvent être simultanément rapportés; mais je n'entrerai pas présentement dans d'autres détails sur ce sujet.

§ IV. — *Des courbes planes semblables à leurs $n^{\text{ièmes}}$ polaires correspondantes. — Sur un cas particulier relatif aux courbes gauches.*

1. En désignant par ρ et ω les coordonnées polaires d'un point quelconque M de la courbe plane cherchée, et observant que, d'après une propriété connue, les perpendiculaires abaissées du pôle sur les tangentes, qui correspondent aux podaires successives, font entre elles, en passant de l'une à la suivante, un même angle ν, les coordonnées θ et r du pied P de la $n^{\text{ième}}$ perpendiculaire seront données par les formules

$$(1) \qquad \theta = \omega - n\nu, \quad r = \rho \cos^n \nu.$$

Il convient, conformément à ce qu'a fait M. Puiseux dans une question analogue, de distinguer deux cas : 1° le cas où la $n^{\text{ième}}$ podaire peut être rendue homothétique à la courbe primitive (le pôle étant le centre d'homothétie) au moyen d'une rotation ε autour du pôle; 2° le cas où une pareille rotation la rend homothétique à une courbe symétrique de la courbe primitive relativement à l'axe polaire.

Premier cas. — On peut regarder ρ et ω comme des fonctions, jusqu'ici indéterminées, d'une variable auxiliaire t, et assujettir la fonction arbitraire qu'introduit le choix de cette variable à la condition que les coordonnées ρ_1 et ω_1 du point M_1 de la courbe cherchée, qui doit être l'homologue du point P, se déduisent de ρ et de ω respectivement en remplaçant simplement, dans ces dernières fonctions, t par $t+1$.

Cela étant, et en désignant par m le rapport constant de similitude, on aura les deux équations

$$(\alpha)\qquad \omega_1 = \theta + \varepsilon, \quad \rho_1 = mr,$$

ou bien, en ayant égard à (1) et écrivant à la suite une relation bien connue,

$$(2)\qquad \omega_1 = \omega - n\nu + \varepsilon, \quad \rho_1 = m\rho\cos^n\nu, \quad \frac{d\rho}{\rho} = \operatorname{tang}\nu\, d\omega.$$

La différentiation de la deuxième de ces équations donne

$$\frac{d\rho_1}{\rho_1} = \frac{d\rho}{\rho} - n\operatorname{tang}\nu\, d\nu;$$

d'où, en ayant égard à la troisième et à celle qu'on en déduit par le changement de t en $t+1$, résulte

$$\operatorname{tang}\nu_1\, d\omega_1 = \operatorname{tang}\nu\, d\omega - n\operatorname{tang}\nu\, d\nu.$$

Le second membre de cette dernière équation revient, en vertu de la première (2), à $\operatorname{tang}\nu\, d\omega_1$; on a donc, en observant qu'on peut rejeter l'hypothèse de $d\omega_1$ égal à zéro,

$$\operatorname{tang}\nu_1 = \operatorname{tang}\nu, \quad \text{et, par suite,} \quad \nu_1 - \nu = k\pi,$$

k étant un nombre entier quelconque. On tire de là

$$(3)\qquad \nu = k\pi t + a,$$

a étant une fonction arbitraire périodique; ce qui transforme la première équation (2) dans

$$(\beta)\qquad \omega_1 - \omega = -nk\pi t - na + \varepsilon.$$

On en conclut, par l'intégration,

$$\omega = -\tfrac{1}{2}nk\pi t^2 + (\tfrac{1}{7}nk\pi - na + \varepsilon)t + b, \tag{4}$$

b étant une nouvelle fonction arbitraire périodique.

D'après (3), la deuxième équation (2) peut s'écrire

$$\rho_1 = m\rho\cos^n(k\pi t + a). \tag{5}$$

Si l'on fait, pour abréger,

$$f(t) = m\cos^n(k\pi t + a),$$

de sorte que

$$\rho_1 = \rho f(t), \tag{5'}$$

$[f(t)]^2$ ou $f^2(t)$ sera une fonction proprement périodique, quelle que soit la parité de n et de k, et l'on pourra prendre, pour l'intégrale générale de l'équation (5) ou (5′),

$$\rho = \pm A[f^2(t)]^{\frac{t}{2}}, \tag{6}$$

où $f^2(t)$ est une quantité toujours positive, tant que f est supposée réelle, et où A est une fonction arbitraire périodique paire ou impaire.

On peut remarquer, à propos de cette intégrale ambiguë (6), où le signe $\pm$ doit être généralement conservé, que, si l'on considère t comme l'abscisse et ρ comme l'ordonnée d'une courbe, l'équation (5′) déterminera sans ambiguïté les points qui se correspondent sur cette courbe, c'est-à-dire qui répondent respectivement aux valeurs t et $t+1$ de l'abscisse; et ceci a lieu quelle que soit la fonction $f(t)$, supposée toujours périodique paire ou impaire.

En substituant dans la troisième équation (2) les valeurs de ν, ω, ρ, fournies respectivement par (3), (4), (6), on obtient la relation

$$\left\{\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{d\log A^2}{dt} + \frac{1}{2}\log[m^2\cos^{2n}(k\pi t + a)]\\ &\qquad - \left(\frac{db}{dt} - na + \varepsilon + \frac{nk\pi}{2}\right)\operatorname{tang}(k\pi t + a) = 0,\end{aligned}\right. \tag{7}$$

qui a lieu entre des fonctions proprement périodiques seulement. Si l'on se donne arbitrairement A et b, on pourra en déduire a par la résolution d'une équation transcendante, et il en résultera toujours pour a une forme périodique, comme cela doit être. Si l'on se donne A et a, on tirera de la relation précédente

$$\frac{db}{dt} = \mathrm{F}(t), \quad b = \int \mathrm{F}(t)\,dt,$$

où $\mathrm{F}(t)$ est périodique. Si cette quadrature ne donnait pas pour b une forme périodique, il faudrait égaler à zéro le coefficient de la partie proportionnelle à t, ce qui établirait une relation entre ε et les autres constantes.

En restreignant la généralité de la solution, on peut vérifier la relation (7) sans effectuer de quadrature ou sans résoudre une équation transcendante. Si l'on pose, en effet,

$$\tfrac{1}{2}\log \mathrm{A}^2 = \lambda \sin(k\pi t + a), \quad b = \lambda \cos(k\pi t + a),$$

λ étant une fonction indéterminée, la substitution de ces expressions dans l'équation (7) fournit

$$\begin{aligned} -\lambda = [&\tfrac{1}{2}\cos(k\pi t + a)\log m^2 \cos^{2m}(k\pi t + a) \\ &+ (na - \varepsilon - \tfrac{1}{2}nk\pi)\sin(k\pi t + a)] : \left(\frac{da}{dt} + k\pi\right), \end{aligned}$$

et il en résulte toujours pour $\frac{1}{2}\log \mathrm{A}^2$ et pour b des expressions proprement périodiques, quand on a adopté une pareille forme pour l'unique fonction arbitraire a qui subsiste actuellement dans la solution.

Lorsqu'on suppose a constant et k égal à zéro, l'équation (3) fournit pour ν une valeur constante : la courbe est donc une spirale logarithmique. Il semblerait cependant qu'il entre encore une fonction arbitraire dans les expressions (4) et (6) de ω et de ρ; mais il est facile de voir que, en tenant compte de (7), on peut éliminer t entre (4) et (6) et obtenir entre ρ et ω l'équation ordinaire de cette courbe. Au reste, rien ne s'oppose, dans le cas présent, à ce qu'on suppose A et b et, par suite, a constants, k étant toujours nul : les équations (4) et (6) appartiennent alors directement à la spirale logarithmique.

Second cas. — On a toujours les équations (1). Les équations (α) doivent être remplacées par

$$-\omega_1 = \theta + \varepsilon, \quad \rho_1 = mr,$$

et l'on a, par suite,

$$(2') \qquad \omega_1 + \omega - n\nu + \varepsilon = 0, \quad \rho_1 = m\rho\cos^n\nu, \quad \frac{d\rho}{\rho} = \operatorname{tang}\nu\, d\omega.$$

En suivant la même marche que dans le premier cas, on déduira de ces équations

$$\operatorname{tang}\nu_1 = -\operatorname{tang}\nu, \quad \nu_1 + \nu = k\pi,$$

k étant un nombre entier quelconque. Si l'on fait

$$(3') \qquad \nu = \frac{k\pi}{2} + c, \quad \text{et, par suite,} \quad \nu_1 = \frac{k\pi}{2} + c_1,$$

l'équation précédente deviendra

$$c_1 + c = 0;$$

en sorte que c est une fonction arbitraire périodique impaire. On tire ensuite de la première (2')

$$\omega_1 + \omega = \frac{nk\pi}{2} - \varepsilon + nc,$$

et, en intégrant,

$$(4') \qquad \omega = \frac{nk\pi}{4} - \frac{\varepsilon}{2} - nct + g,$$

g étant une fonction arbitraire périodique impaire. En faisant

$$f(t) = m\cos^n\left(\frac{k\pi}{2} + c\right),$$

et observant que $f^2(t)$ est toujours une fonction périodique paire, on aura

$$(6') \qquad \rho = \pm A[f^2(t)]^{\frac{t}{2}},$$

A étant une fonction arbitraire périodique quelconque. Les fonctions A, c, g devront vérifier la condition

$$(7') \qquad \frac{1}{2}\frac{d\log A^2}{dt} + \frac{1}{2}\log f^2(t) - \left(\frac{dg}{dt} - nc\right)\operatorname{tang}\left(\frac{k\pi}{2} + c\right) = 0,$$

qui a lieu entre des quantités de même nature, le dernier terme étant le produit de deux fonctions périodiques impaires. Cette équation donne lieu à quelques remarques analogues à celles du cas précédent. On aura, par exemple,

$$\frac{dg}{dt} = \mathrm{F}(t), \quad g = \int \mathrm{F}(t)\, dt,$$

$\mathrm{F}(t)$ étant une fonction périodique impaire, et l'intégration fournira généralement pour g une fonction de même nature.

L'analyse qui vient d'être développée, soit dans le premier, soit dans le second cas, peut être légèrement modifiée et simplifiée. Quand on est arrivé à l'équation (3), on peut former tout de suite l'équation (5) et, par suite, l'équation (6). La troisième (2) donne alors immédiatement

$$\omega = \int \cot\nu \frac{d\rho}{\rho},$$

et l'on peut reconnaître que cette expression de ω satisfait à l'équation (β). On en tire effectivement

$$d\omega = \cot\nu \frac{d\rho}{\rho},$$

et, par suite,

$$d\omega_1 - d\omega = \cot\nu_1 \frac{d\rho_1}{\rho_1} - \cot\nu \frac{d\rho}{\rho} = \cot\nu \left(\frac{d\rho_1}{\rho_1} - \frac{d\rho}{\rho}\right);$$

mais, d'après (5), on a

$$\frac{d\rho_1}{\rho_1} = \frac{d\rho}{\rho} + \frac{df(t)}{f(t)},$$

et, en mettant pour $f(t)$ ce que ce signe représente, on obtient

$$d(\omega_1 - \omega) = -n\left(k\pi + \frac{da}{dt}\right) dt,$$

ce qui est précisément la différentielle de l'équation (β). Une modification analogue peut être faite dans le second cas.

2. Les coordonnées rectangulaires x, y, z du pied P de la perpendiculaire, abaissée de l'origine sur la tangente au point (x, y, z) d'une courbe quelconque (C), sont données par les formules

$$\mathrm{x} = x - \frac{r\,dr}{ds}\frac{dx}{ds}, \quad \mathrm{y} = y - \frac{r\,dr}{ds}\frac{dy}{ds}, \quad \mathrm{z} = z - \frac{r\,dr}{ds}\frac{dz}{ds}, \tag{1}$$

dans lesquelles

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2, \quad ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2.$$

Si l'on exige que les courbes (C) et (P) soient semblables, l'origine étant le centre de similitude, en désignant par x_1, y_1, z_1 les coordonnées du point de la courbe (C), qui est l'homologue du point P, on devra avoir, d'après ce qui a été dit au n° **2** du § III,

$$\text{x} = m(x_1 \cos\varepsilon - y_1 \sin\varepsilon), \quad \text{y} = m(x_1 \sin\varepsilon + y_1 \cos\varepsilon), \quad \text{z} = m z_1,$$

le second membre devant être augmenté d'une constante si l'on suppose m égal à l'unité positive. Les coordonnées x, y, z étant censées des fonctions d'une variable indépendante t, on pourra regarder x, y, z comme étant les valeurs de ces fonctions qui répondent à la valeur $t + 1$ de la variable indépendante. Cela posé, si l'on fait

$$(2) \qquad \frac{ds^2}{dt^2} = \lambda \frac{r\,dr}{dt},$$

λ étant une fonction indéterminée, l'élimination de x, y, z entre les deux groupes précédents d'équations fournira immédiatement

$$(3) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \lambda[x - m(x_1 \cos\varepsilon - y_1 \sin\varepsilon)], \\ \frac{dy}{dt} &= \lambda[y - m(x_1 \sin\varepsilon + y_1 \cos\varepsilon)], \\ \frac{dz}{dt} &= \lambda(z - m z_1]. \end{aligned} \right.$$

En adoptant les coordonnées semi-polaires

$$x = \rho \cos\omega, \quad y = \rho \sin\omega, \quad z = z,$$

ces équations pourront être remplacées par les suivantes :

$$(4) \quad \frac{d\rho}{dt} = \lambda(\rho - m\rho_1 \cos\theta), \quad \frac{d\omega}{dt} = \lambda\left(-\frac{m\rho_1}{\rho}\sin\theta\right), \quad \frac{dz}{dt} = \lambda(z - m z_1),$$

où, pour abréger,

$$\theta = \omega_1 - \omega + \varepsilon.$$

L'élimination des dérivées, au moyen de (4), transforme (2) dans

$$(5)\qquad zz_1 - mz_1^2 + \rho\rho_1 \cos\theta - m\rho_1^2 = 0.$$

En faisant la somme des carrés de (1) et ayant égard à (2), on obtient

$$(4')\qquad \frac{r\,dr}{dt} = \lambda(r^2 - m^2 r_1^2),$$

équation qui peut être regardée comme une conséquence des quatre équations (4), (5), lesquelles suffisent pour la complète détermination des quatre fonctions inconnues ρ, ω, z, λ. En désignant toujours par des indices les valeurs de ces fonctions, qui répondent aux valeurs $t+1$, $t+2$,... de la variable indépendante, la différentiation de l'équation (5) et l'élimination ultérieure des dérivées, au moyen de (4), fournissent une équation dans laquelle l'ensemble des termes qui multiplient λ se réduit précisément au premier membre de (5) et qui, après la suppression de ces termes et la division par λ_1, revient à

$$(6)\qquad \left\{\begin{aligned} &zz_1 - 2mz_1^2 + 2m^2 z_1 z_2 - 2m\rho_1^2 - mzz_2 \\ &\qquad + \rho\rho_1\cos\theta + 2m^2\rho_1\rho_2\cos\theta_1 - m\rho\rho_2\cos(\theta+\theta_1) = 0. \end{aligned}\right.$$

Des équations (5) et (6) on déduit

$$(7)\quad \cos\theta = \frac{mr_1^2 - zz_1}{\rho\rho_1},\quad \cos\theta_1 = \frac{mr_2^2 - z_1 z_2}{\rho_1\rho_2},\quad \cos(\theta+\theta_1) = \frac{2m^2 r_2^2 - r_1^2 - zz_2}{\rho\rho_2},$$

ce qui, substitué dans l'identité

$$\cos^2\theta + \cos^2\theta_1 + \cos^2(\theta+\theta_1) - 2\cos\theta\cos\theta_1\cos(\theta+\theta_1) - 1 = 0,$$

fournit, après avoir remplacé ρ^2 par $r^2 - z^2$ et opéré des réductions, une équation que l'on peut écrire sous la forme

$$(8)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{u_1 - m^2 u_2}{u_2}(u_2 z - 2mu_2 z_1 + u_1 z_2)^2 \\ &\quad + (uu_2 - u_1^2)\left(z_1^2 + \frac{u_1}{u_2} z_2^2 - 2mz_1 z_2 + m^2 u_2 - u_1\right) = 0, \end{aligned}\right.$$

en posant

$$r^2 = u.$$

Il faut rapprocher de cette équation l'équation (4') ou

$$\frac{1}{2}\frac{du}{dt} = \lambda(u - m^2 u_1), \tag{9}$$

et, en y joignant la troisième (4), on a trois équations propres à déterminer u, z, λ. On peut en déduire une équation aux différences mêlées ne renfermant qu'une fonction inconnue; mais l'équation, homogène et non linéaire, à laquelle on serait conduit, m'a paru devoir rentrer dans une classe si peu intégrable, par des moyens jusqu'ici quelconques, que je me suis borné à poursuivre le calcul dans un cas particulier qu'il faudrait d'ailleurs examiner avant d'aborder le cas général. Ce cas particulier correspond à l'hypothèse

$$uu_2 - u_1^2 = 0. \tag{10}$$

L'équation (8) exige alors que l'on ait

$$u_2 z - 2mu_2 z_1 + u_1 z_2 = 0; \tag{11}$$

car si l'on supposait nul le facteur $u_1 - m^2 u_2$, et par conséquent aussi $u - m^2 u_1$, $\frac{du}{dt}$ serait nul : r serait donc constant, c'est-à-dire que la courbe cherchée serait sphérique, circonstance qu'on peut ici exclure. Bien que l'on ait actuellement une équation de plus qu'il n'y a de fonctions à déterminer, le cas particulier dont il s'agit en ce moment admet une solution qui présente une certaine généralité relative. En faisant, pour un instant,

$$\frac{u_1}{u} = v,$$

l'équation (10) revient à

$$v_1 - v = 0,$$

c'est-à-dire que v est une fonction arbitraire périodique que je désignerai par a^2. On a donc, par l'intégration immédiate de l'avant-dernière équation,

$$r^2 = A^2 (a^2)^t, \tag{12}$$

A^2 étant une fonction arbitraire périodique. L'équation (10) devient, par suite,

$$z_2 - 2ma^2 z_1 + a^2 z = 0.$$

Cette équation, intégrée par la méthode ordinaire des exponentielles, fournit

$$(13)\qquad z = \mathrm{B}b^t + \mathrm{C}c^t,$$

en posant

$$(14)\qquad b = ma^2 + a\sqrt{m^2a^2 - 1}, \quad c = ma^2 - a\sqrt{m^2a^2 - 1},$$

et en désignant par B et C deux fonctions arbitraires périodiques. Maintenant il faudra satisfaire à la condition

$$(15)\qquad \lambda = \frac{\dfrac{dz}{dt}}{z - mz_1} = \frac{\dfrac{r\,dr}{dt}}{r^2 - m^2r_1^2},$$

résultant de (9) et de la troisième (4). En substituant au dernier membre la valeur (12) de r^2, on aura

$$(16)\qquad \lambda = \frac{\dfrac{\mathrm{A}'}{\mathrm{A}} + \log a + t\dfrac{a'}{a}}{1 - m^2a^2},$$

les accents indiquant les dérivées. On a ensuite, d'après (13) et (14),

$$z - mz_1 = \mathrm{B}(1 - mb)b^t + \mathrm{C}(1 - mc)c^t,$$

$$1 - mb = -\frac{b}{a}\sqrt{m^2a^2 - 1}, \quad 1 - mc = \frac{c}{a}\sqrt{m^2a^2 - 1},$$

et, en substituant dans le deuxième membre de (15), il vient

$$\lambda = \frac{(\mathrm{B}' + \mathrm{B}\log b)b^t + (\mathrm{C}' + \mathrm{C}\log c)c^t + (\mathrm{B}b^{t-1}b' + \mathrm{C}c^{t-1}c')t}{(-\mathrm{B}bb^t + \mathrm{C}cc^t)\dfrac{1}{a}\sqrt{m^2a^2 - 1}}.$$

Cette expression de λ devant coïncider avec la précédente, il faut d'abord que l'on ait

$$\frac{a(\mathrm{B}b^{t-1}b' + \mathrm{C}c^{t-1}c')}{\mathrm{B}bb^t - \mathrm{C}cc^t} = \frac{\dfrac{a'}{a}}{\sqrt{m^2a^2 - 1}},$$

égalité qui exige que

$$\frac{a^2b'}{b^2} = -\frac{a^2c'}{c^2} = \frac{a'}{\sqrt{m^2a^2 - 1}}.$$

Or ces conditions sont identiques en vertu des relations

$$\frac{1}{b} = m - \sqrt{m^2 - \frac{1}{a^2}}, \quad \frac{1}{c} = m + \sqrt{m^2 - \frac{1}{a^2}}.$$

Il faut de plus, pour la coïncidence des deux expressions de λ, que

$$\frac{a(B' + B\log b)b^t + a(C' + C\log c)c^t}{Bb b^t - Cc c^t} = \frac{\frac{A'}{A} + \log a}{\sqrt{m^2 a^2 - 1}},$$

et, par conséquent,

$$\frac{a(B' + B\log b)}{Bb} = -\frac{a(C' + C\log c)}{Cc} = \frac{\frac{A'}{A} + \log a}{\sqrt{m^2 a^2 - 1}};$$

d'où

$$(17) \qquad \frac{B'}{B} = \frac{\frac{b}{a}\left(\frac{A'}{A} + \log a\right)}{\sqrt{m^2 a^2 - 1}} - \log b, \quad \frac{C'}{C} = -\frac{\frac{c}{a}\left(\frac{A'}{A} + \log a\right)}{\sqrt{m^2 a^2 - 1}} - \log c.$$

L'addition de ces deux équations fournit

$$(18) \qquad \frac{B'}{B} + \frac{C'}{C} = \frac{2A'}{A}, \quad \text{et, par suite,} \quad BC = kA^2,$$

k étant une constante arbitraire. Si l'on se donne arbitrairement A et a, la première (17) fournira B par une quadrature, et la dernière (18) donnera tout de suite C. Si l'on se donne arbitrairement A et B, et par suite C, on pourra déduire a de l'une ou l'autre des équations (17), qui renferment cette quantité sous forme finie. Connaissant actuellement r et z, et par conséquent ρ, la première (7) donne immédiatement θ; et il est facile de s'assurer que, en vertu des expressions trouvées pour ces quantités, et de celle (16) de λ, la première (4) est identique. On tirera enfin de la deuxième (4)

$$(19) \qquad \omega = -m\int \lambda \frac{\rho_1}{\rho} \sin\theta \, dt;$$

mais il est nécessaire de faire voir que cette valeur de ω vérifie la relation

$$\theta = \omega_1 - \omega + \varepsilon,$$

qui fait suite aux équations (4). Or, si l'on différentie cette relation et que l'on substitue ensuite la précédente valeur de ω, on a

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{d\omega_1}{dt} - \frac{d\omega}{dt} = m\frac{\lambda\rho_1}{\rho}\sin\theta - m\frac{\lambda_1\rho_2}{\rho_1}\sin\theta_1,$$

ou bien

$$\frac{d\cos\theta}{dt} = m\frac{\lambda_1\rho_2}{\rho_1}\sin\theta_1\sin\theta - m\frac{\lambda\rho_1}{\rho}\sin^2\theta;$$

en mettant pour $\cos\theta$ sa valeur (7), effectuant, au premier membre, les différentiations, et ayant égard à (4′), ainsi qu'à la première et à la troisième (4), cette équation devient identique. Ainsi la solution est représentée par l'ensemble des équations (12), (13), (14), (17), (18) et (19); elle renferme finalement, comme on voit, deux fonctions arbitraires périodiques.

On peut toujours supposer a une fonction réelle. Tant que a^2 est supérieur à $\frac{1}{m^2}$, b et c sont réels, et il en est de même de B et C. Lorsque a^2 est inférieur à $\frac{1}{m^2}$, b et c sont imaginaires conjugués, et par suite aussi B et C, de sorte que z est toujours réel. Si l'on fait

$$a = \frac{1}{m}\frac{e^{\varphi}+e^{-\varphi}}{2},$$

on aura

$$b = \frac{1}{2m}(1+e^{2\varphi}), \quad c = \frac{1}{2m}(1+e^{-2\varphi})$$

et l'on pourra donner à φ des valeurs réelles quelconques ou des valeurs imaginaires de la forme $\varphi\sqrt{-1}$. Ces deux systèmes de valeurs correspondent aux deux cas qui viennent d'être signalés à l'instant.

L'un des exemples les plus simples s'obtient naturellement en supposant a, A, B, C des constantes arbitraires. Alors l'une ou l'autre des équations (17) établit entre a et m la relation finie et transcendante

$$\log a - \sqrt{m^2a^2-1}\,\log b = 0,$$

b ayant toujours la valeur (14). Je ne m'arrêterai pas à la discussion de cette courbe particulière.

Enfin on pourrait déduire de l'analyse précédente ce qui est relatif aux courbes planes, en considérant ici la première podaire. Mais si l'on voulait traiter la question par cette méthode, le plan simple serait de remonter aux équations (4) et (5), et d'y faire tout de suite z égal à zéro. Le reste du calcul s'achèverait sans peine, et il ne différerait pas essentiellement de celui qui a été ci-dessus développé spécialement pour le cas dont il s'agit.

§ V. — *Des courbes semblables aux lieux correspondants des centres des sphères osculatrices.*

1. Si l'on désigne par α, β, γ; ξ, η, ζ; λ, μ, ν les angles qui déterminent, par rapport à trois axes rectangulaires fixes, les directions respectives de la tangente, du rayon de courbure et de l'axe du plan osculateur, au point (x, y, z) d'une courbe quelconque, on a les quatre groupes ordinaires de formules

$$(1)\qquad \begin{cases} dx = \cos\alpha\, ds, & d\cos\alpha = \cos\xi\, d\sigma, \\ d\cos\lambda = \cos\xi\, d\tau, & d\cos\xi = -\cos\alpha\, d\sigma - \cos\lambda\, d\tau, \end{cases}$$

où ds, $d\sigma$, $d\tau$ représentent la différentielle de l'arc, l'angle de contingence et l'angle de torsion. En posant

$$(d\cos\xi)^2 + (d\cos\eta)^2 + (d\cos\zeta)^2 = d\sigma^2 + d\tau^2 = dv^2,$$

on tire de ces relations

$$d\,d\cos\xi = -\cos\xi\, dv^2 - \cos\alpha\, d\,d\sigma - \cos\lambda\, d\,d\tau,$$

et, par suite,

$$(d\,d\cos\xi)^2 + (d\,d\cos\eta)^2 + (d\,d\cos\zeta)^2 = dv^4 + (d\,d\sigma)^2 + (d\,d\tau)^2 = (d\,d\rho)^2,$$

dv et $d\,d\rho$ étant introduits auxiliairement. Si l'on considère comme connues ces deux quantités et qu'on pose

$$(2)\qquad d\sigma = dv\sin\varphi, \quad d\tau = dv\cos\varphi,$$

on aura, pour déterminer φ, l'équation

R désignant le rayon de courbure de la courbe sphérique qui aurait pour coordonnées rectangulaires $\cos\xi$, $\cos\eta$, $\cos\zeta$, et i étant l'inclinaison de ce rayon sur le plan de la tangente sphérique correspondante. Lorsque ces trois cosinus sont connus, on peut déterminer α, β, γ; λ, μ, ν au moyen des formules

$$-\cos\alpha\, d\frac{d\sigma}{d\tau} = d\frac{d\cos\xi}{d\tau} + \cos\xi\frac{dv^2}{d\tau}, \tag{4}$$

$$-\cos\lambda\, d\frac{d\tau}{d\sigma} = d\frac{d\cos\xi}{d\sigma} + \cos\xi\frac{dv^2}{d\sigma}, \tag{5}$$

que l'on déduit des expressions ci-dessus de $d\cos\xi$ et $dd\cos\xi$, en excluant le cas où $\frac{d\sigma}{d\tau}$ est constant, c'est-à-dire le cas des hélices, qui doit être et sera examiné à part dans ce qui suit.

Enfin je rappellerai qu'en désignant par x_0, y_0, z_0 les coordonnées du centre de la sphère osculatrice relative au point (x, y, z), par ds_0, $d\sigma_0$, $d\tau_0$ la différentielle de l'arc, l'angle de contingence et l'angle de torsion de l'arête de rebroussement (x_0, y_0, z_0) de la surface polaire, on a les relations

$$x_0 = x + \mathrm{R}\cos\xi - \frac{d\mathrm{R}}{d\tau}\cos\lambda, \tag{6}$$

$$dx_0 = \mp\, ds_0 \cos\lambda, \tag{7}$$

$$d\tau = d\sigma_0, \quad d\tau_0 = d\sigma, \tag{8}$$

$$ds_0 = \pm\left(\mathrm{R}\, d\tau + d\frac{d\mathrm{R}}{d\tau}\right), \tag{9}$$

dans lesquelles ds_0 doit avoir le même signe que ds. (*Voir* l'excellent *Cours de Calcul différentiel et intégral* de M. J.-A. Serret, t. I, p. 430 et suiv.)

2. Cela posé, si l'on s'impose la condition que la courbe $(x_0 y_0 z_0)$ soit semblable à la courbe (xyz), en nommant x_1, y_1, z_1 les coordonnées du point de cette dernière courbe, qui est l'homologue du point $(x_0 y_0 z_0)$, on pourra toujours, d'après une remarque précédemment faite, supposer aux axes une position telle, que l'on ait

$$mx_0 = x_1\cos\varepsilon + y_1\sin\varepsilon, \quad my_0 = -x_1\sin\varepsilon + y_1\cos\varepsilon, \quad mz_0 = z_1, \tag{10}$$

en sous-entendant, s'il le faut, aux seconds membres des constantes additionnelles.

La différentiation de ces équations, en observant que $m\,ds_0$ est égal à ds_1, et ayant égard à (1) et à (7), fournit

$$(11)\qquad \begin{cases} \mp\cos\lambda = \cos\alpha_1 \cos\varepsilon + \cos\beta_1 \sin\varepsilon, \\ \mp\cos\mu = -\cos\alpha_1 \sin\varepsilon + \cos\beta_1 \cos\varepsilon, \\ \mp\cos\nu = \cos\gamma_1. \end{cases}$$

En faisant attention que $d\sigma_0$ est ici égal à $d\sigma_1$, et que, par suite, d'après (8),

$$(12)\qquad d\tau = d\sigma_1,$$

la différentiation des précédentes équations donne, en faisant toujours usage de (1),

$$(13)\qquad \begin{cases} \mp\cos\xi = \cos\xi_1 \cos\varepsilon + \cos\eta_1 \sin\varepsilon, \\ \mp\cos\eta = -\cos\xi_1 \sin\varepsilon + \cos\eta_1 \cos\varepsilon, \\ \mp\cos\zeta = \cos\zeta_1, \end{cases}$$

d'où, en différentiant et faisant la somme des carrés, résulte d'abord

$$(14)\qquad dv_1 = \pm\, dv,$$

le signe ambigu n'ayant pas jusqu'ici de dépendance nécessaire avec les précédents.

L'intégration des équations (13) rentre, comme cas particulier, dans celle des équations considérées au § III; mais on peut aussi, si l'on veut, les intégrer directement comme il suit, en sous-entendant toujours que toutes les variables introduites sont des fonctions d'une certaine variable indépendante t dont la différence constante est l'unité, et employant les indices 1, 2,... pour indiquer les valeurs des fonctions qui répondent aux valeurs $t+1$, $t+2$, ... de cette variable indépendante. La troisième (13) montre d'abord que

$$\zeta = n\pi t + \psi,$$

ψ étant une fonction arbitraire périodique et n un nombre entier quelconque, impair dans le cas du signe supérieur, pair pour le cas du signe inférieur. Puis, en posant

$$\cos\xi = \sin\zeta \cos\omega, \quad \cos\eta = \sin\zeta \sin\omega,$$

les deux premières (13) deviennent

$$\mp \sin\zeta = \sin\zeta_1 \frac{\cos(\omega_1 - \varepsilon)}{\cos\omega}, \quad \mp \sin\zeta = \sin\zeta_1 \frac{\sin(\omega_1 - \varepsilon)}{\sin\omega},$$

d'où l'on tire

$$\operatorname{tang}(\omega_1 - \varepsilon) = \operatorname{tang}\omega,$$

et, par suite,

$$\omega_1 - \omega = n'\pi + \varepsilon, \quad \omega = (n'\pi + \varepsilon)\, t + \varpi,$$

n' étant un nombre entier quelconque et ϖ une fonction périodique arbitraire. On satisfera à la condition relative à l'ambiguïté des signes en prenant toujours n' pair, et supposant n impair ou pair suivant que, dans les premiers membres de (13), on doit adopter les signes supérieurs ou les signes inférieurs. On aura ainsi, sous ces conditions,

$$(15) \quad \begin{cases} \cos\xi = \sin(n\pi t + \psi)\cos(\overline{n'\pi + \varepsilon}\, t + \varpi), \\ \cos\eta = \sin(n\pi t + \psi)\sin(\overline{n'\pi + \varepsilon}\, t + \varpi), \\ \cos\zeta = \cos(n\pi t + \psi). \end{cases}$$

En absorbant $n'\pi$ dans ε, supposé différent de zéro, on peut encore adopter les formules équivalentes

$$(15') \quad \cos\xi = \sqrt{1 - c^2}\cos(\varepsilon t + \varpi), \quad \cos\eta = \sqrt{1 - c^2}\sin(\varepsilon t + \varpi), \quad \cos\zeta = c,$$

c étant une fonction arbitraire périodique, paire dans le cas des signes inférieurs, impaire dans le cas des signes supérieurs, et $\sqrt{1 - c^2}$ devant, dans ce dernier cas, être assimilé à une fonction périodique impaire.

Maintenant, les expressions (15) ou (15′) étant introduites dans (3), on en conclura φ par une quadrature et, par suite, $d\sigma$ et $d\tau$ au moyen de (2). Mais il y a une condition particulière à remplir, à savoir la condition (12), laquelle revient à

$$dv_1 \sin\varphi_1 = dv \cos\varphi, \quad \text{ou} \quad \sin\varphi_1 = \pm\cos\varphi,$$

et, par conséquent, on a

$$(16) \quad \varphi_1 \mp \varphi = (2p + 1)\frac{\pi}{2},$$

p étant un nombre entier quelconque, pair quand on prend dans (14) le signe supérieur et impair dans le cas contraire. La quadrature (3), savoir

$$\varphi = \int d\upsilon \operatorname{tang} i,$$

fournira une expression de la forme

$$\varphi = kt + h + f(t),$$

h et k étant des constantes, et $f(t)$ une fonction périodique, généralement paire. En la supposant paire, il faudra prendre dans (16) le signe supérieur, et l'on aura

$$k = (2p+1)\frac{\pi}{2},$$

ce qui servira à déterminer ε généralement, en supposant connues toutes les autres quantités. Si $f(t)$ pouvait être impaire, il faudrait prendre dans (16) le signe inférieur, et l'on aurait

$$2h = (2p+1)\frac{\pi}{2},$$

k devant être nul dans le cas présent.

Les angles α, β, γ se tireront ensuite des formules (4), en supposant toujours variable le rapport $\frac{d\sigma}{d\tau} = \operatorname{tang}\varphi$. Puis, en observant que

$$ds_0 = \frac{1}{m}\, ds_1 = \frac{1}{m} R_1\, d\sigma_1 = \frac{1}{m} R_1\, d\tau,$$

l'équation (9) pourra s'écrire

$$\mp \frac{1}{m} R_1 + R + \frac{d\frac{dR}{d\tau}}{d\tau} = 0. \tag{17}$$

Quand on aura tiré R de cette équation, on obtiendra finalement x, y, z par les quadratures

$$x = \int R\cos\alpha\, d\sigma, \quad y = \int R\cos\beta\, d\sigma, \quad z = \int R\cos\gamma\, d\sigma. \tag{18}$$

3. La difficulté de la question est réduite actuellement à l'intégration de l'équation (17). Il s'offre immédiatement un cas particulier où la difficulté disparaît : c'est le cas où l'on suppose R constant. On sait que, R étant constant, l'arête de rebroussement de la surface polaire se confond avec le lieu des centres de courbure. Dans la question présente, il faudra prendre $m = \pm 1$; l'équation (17) sera identique, et, ayant adopté les formules générales (15), la solution s'achèvera comme on vient de l'indiquer.

Lorsque R est supposé variable, en mettant en évidence la variable indépendante t, l'équation (17) pourra s'écrire

$$\mp \frac{1}{m} R_1 + R + \frac{1}{2} \frac{d\theta}{dt} \frac{dR}{dt} + \theta \frac{d^2R}{dt^2} = 0, \tag{17'}$$

où, pour abréger, on a posé

$$\frac{1}{\theta} = \frac{d\tau^2}{dt^2},$$

R_1 étant censé répondre actuellement à la valeur $t+1$ de t. Il convient de remarquer, à ce propos, qu'en vertu des relations (2), (14), (16), on a

$$\frac{d\tau_1^2}{dt^2} = \frac{dv^2}{dt^2} \cos^2\varphi_1 = \frac{dv^2}{dt^2} \sin^2\varphi = \frac{dv^2}{dt^2} - \frac{d\tau^2}{dt^2},$$

et, par suite,

$$\frac{d\tau_2^2}{dt^2} = \frac{d\tau^2}{dt^2}, \quad \text{c'est-à-dire} \quad \theta_2 = \theta,$$

en sorte que θ est une fonction périodique dont l'amplitude de période est 2.

Cela étant, si l'on différentie deux fois de suite l'équation (17'), on en déduira $\frac{dR_1}{dt}$, $\frac{d^2R_1}{dt^2}$ au moyen de R et de ses dérivées jusqu'au quatrième ordre. En changeant ensuite, dans la même équation, t en $t+1$, on aura une nouvelle équation d'où l'on pourra éliminer R_1, $\frac{dR_1}{dt}$, $\frac{d^2R_1}{dt^2}$ au moyen de (17') elle-même, et des expressions de $\frac{dR_1}{dt}$, $\frac{d^2R_1}{dt^2}$ qu'on en a tout à l'heure déduites. L'équation à laquelle on arrivera ainsi sera à coefficients périodiques, en prenant 2 pour amplitude de période, et rentrera conséquemment dans la classe de celles dont il a été question au § II.

4. Je vais examiner, avec quelques détails, le cas, jusqu'ici exclu, où le rapport $\frac{d\sigma}{d\tau} = \tang\varphi$ est supposé constant. La formule (3) montre que R est constamment égal à l'unité, dv, par sa nature, ne pouvant être toujours nul. La courbe sphérique ($\cos\xi$, $\cos\eta$, $\cos\zeta$) est donc présentement un grand cercle, et il existe, en conséquence, une relation linéaire entre ces trois cosinus : ce qui résulte aussi, d'ailleurs, de la considération des équations (4), qui s'intègrent immédiatement dans le cas présent. Ainsi l'on a

$$g\cos\xi + g'\cos\eta + g''\cos\zeta = 0,$$

g, g', g'' étant des constantes. En substituant, dans cette relation, les formules (13), changeant dans le résultat trouvé t en $t-1$, et soustrayant ensuite l'équation précédente, on aura

$$\left(g'\cos\frac{\varepsilon}{2} + g\sin\frac{\varepsilon}{2}\right)\cos\xi = \left(g\cos\frac{\varepsilon}{2} - g'\sin\frac{\varepsilon}{2}\right)\cos\eta,$$

en mettant de côté l'hypothèse de $\sin\frac{\varepsilon}{2}$ égal à zéro. Cette équation, jointe à la précédente et à l'équation ordinaire entre les trois cosinus, fournit pour $\cos\xi$, $\cos\eta$, $\cos\zeta$ des valeurs constantes (circonstance qu'on peut exclure), à moins que g et g' ne soient nuls en même temps. Il faut donc que $\cos\zeta$ soit nul, et les équations (15) peuvent être réduites aux suivantes :

$$\cos\xi = -\cos(\overline{\pi + \varepsilon t + \varpi}), \quad \cos\eta = -\sin(\overline{\pi + \varepsilon t + \varpi}), \quad \cos\zeta = 0,$$

où l'on a adopté les signes actuels, à cause que, dans (13), il faut prendre les signes supérieurs par la raison indiquée un peu plus loin. On a, par suite,

$$dv = d(\overline{\pi + \varepsilon t + \varpi}), \quad v = \overline{\pi + \varepsilon t} + \varpi,$$

et, conformément à (14),

$$v_1 - v = \pi + \varepsilon.$$

La relation (16) exige en même temps que φ soit égal à $(2p+1)\frac{\pi}{4}$, ou simplement à $\frac{\pi}{4}$. Comme ici

$$\cos\xi = -\cos v, \quad \cos\eta = -\sin v,$$

si l'on se reporte au calcul de l'Ouvrage cité (p. 448 et suiv.) on aura

$$\cos\alpha = -\tfrac{1}{2}\sqrt{2}\sin\upsilon, \quad \cos\beta = \tfrac{1}{2}\sqrt{2}\cos\upsilon, \quad \cos\gamma = \tfrac{1}{2}\sqrt{2};$$

$$\cos\lambda = -\tfrac{1}{2}\sqrt{2}\sin\upsilon, \quad \cos\mu = \tfrac{1}{2}\sqrt{2}\cos\upsilon, \quad \cos\nu = -\tfrac{1}{2}\sqrt{2};$$

$\cos\gamma$ et $\cos\nu$ étant constants et de signes contraires, la dernière (11) montre que, dans les groupes (12) et (13) et, par suite, dans (17), il faut adopter les signes supérieurs. Enfin, d'après (2),

$$d\sigma = d\tau = \tfrac{1}{2}\sqrt{2}\,d\upsilon;$$

de sorte que

$$dx = -\tfrac{1}{2}\mathrm{R}\sin\upsilon\,d\upsilon, \quad dy = \tfrac{1}{2}\mathrm{R}\cos\upsilon\,d\upsilon, \quad dz = \tfrac{1}{2}\mathrm{R}\,d\upsilon,$$

et il faut déterminer R au moyen de l'équation

$$-\frac{1}{m}\mathrm{R}_1 + \mathrm{R} + 2\frac{d^2\mathrm{R}}{d\upsilon^2} = 0,$$

où, R étant censé une fonction de la variable indépendante actuelle υ, R_1 est la valeur de cette fonction qui répond à la valeur suivante υ_1 :

$$\upsilon_1 = \upsilon + \pi + \varepsilon = \upsilon + h,$$

de cette même variable indépendante. En appliquant à l'équation précédente la méthode ordinaire des exponentielles, on aura

$$\mathrm{R} = \Sigma \mathrm{A}_\rho e^{\rho\upsilon},$$

les A_ρ étant des constantes arbitraires, et le Σ s'étendant aux racines en nombre infini de l'équation

$$(\rho) \qquad e^{\rho h} - m(1 + 2\rho^2) = 0.$$

De ces diverses expressions on conclut

$$x = \frac{1}{2}\sum \frac{\mathrm{A}_\rho}{1+\rho^2} e^{\rho\upsilon}(\cos\upsilon - \rho\sin\upsilon),$$

$$y = \frac{1}{2}\sum \frac{\mathrm{A}_\rho}{1+\rho^2} e^{\rho\upsilon}(\sin\upsilon + \rho\cos\upsilon),$$

$$z = \frac{1}{2}\sum \frac{\mathrm{A}_\rho}{\rho} e^{\rho\upsilon},$$

les seconds membres étant augmentés, si l'on veut, de constantes arbitraires.

On peut faire généralement une vérification, en calculant x_0, y_0, z_0, au moyen de (6) d'une part, et en déduisant, d'autre part, ces mêmes quantités des formules (10). Les formules (6) deviennent, dans le cas présent,

$$x_0 = x - \mathrm{R}\cos v + \frac{d\mathrm{R}}{dv}\sin v, \quad y_0 = y - \mathrm{R}\sin v - \frac{d\mathrm{R}}{dv}\cos v, \quad z_0 = z + \frac{d\mathrm{R}}{dv},$$

et, en y introduisant les expressions précédentes, on obtient

$$-x_0 = \frac{1}{2}\sum \frac{1+2\rho^2}{1+\rho^2}\mathrm{A}_\rho e^{\rho v}(\cos v - \rho\sin v),$$

$$-y_0 = \frac{1}{2}\sum \frac{1+2\rho^2}{1+\rho^2}\mathrm{A}_\rho e^{\rho v}(\sin v + \rho\cos v),$$

$$-z_0 = \frac{1}{2}\sum \frac{1+2\rho^2}{\rho}\mathrm{A}_\rho e^{\rho v}.$$

D'un autre côté, les mêmes expressions de x, y, z donnent, par exemple,

$$x_1\cos\varepsilon + y_1\sin\varepsilon = -\frac{1}{2}\sum e^{\rho h}\frac{\mathrm{A}_\rho}{1+\rho^2}e^{\rho v}(\cos v - \rho\sin v),$$

et, en éliminant $e^{\rho h}$ au moyen de l'équation (ρ), le second membre se réduit à

$$-m\frac{1}{2}\sum \frac{1+2\rho^2}{1+\rho^2}\mathrm{A}_\rho e^{\rho v}(\cos v - \rho\sin v),$$

c'est-à-dire à mx_0, ce qui est conforme aux conditions (10).

Dans le cas très-particulier où R est supposé constant, l'équation aux différences mêlées qui doit déterminer R exige, comme on l'a déjà dit, que m soit égal à l'unité. L'équation (ρ) admet alors une racine nulle, et l'on retrouve une hélice ordinaire en faisant ρ nulle dans les expressions ci-dessus de x et de y; quant à z, comme on peut ajouter une constante arbitraire au second membre, on pourra poser, en passant à la limite,

$$\frac{\mathrm{A}_\rho}{\rho} + \text{const.} = 0.$$

On obtiendra ainsi

$$x = \tfrac{1}{2}\mathrm{R}\cos v, \quad y = \tfrac{1}{2}\mathrm{R}\sin v, \quad z = \tfrac{1}{2}\mathrm{R}v,$$

On peut remarquer généralement que, dans les équations qui fournissent la solution pour le cas des hélices, la quantité $h = \varepsilon + \pi$ reste arbitraire, mais toujours différente de zéro. Cependant, en la supposant infiniment petite, on obtient

$$\rho = \pm\sqrt{\frac{1-m}{2m}},$$

et ces deux racines fournissent une hélice qui répond encore aux conditions géométriques de la question.

Le cas le plus simple, après celui de l'hélice ordinaire signalé il y a un instant, est celui où l'on prend, dans l'expression ci-dessus de R, une seule exponentielle. En se donnant à volonté une valeur réelle de ρ, on peut tirer m ou h de l'équation (ρ). Si l'on désigne par a et c deux constantes réelles quelconques, et qu'on pose

$$\rho = \operatorname{tang} c,$$

on aura

$$x = a\cos c\cos(v+c)\,e^{v\operatorname{tang} c},\quad y = a\cos c\sin(v+c)\,e^{v\operatorname{tang} c},\quad z = a\cot c\, e^{v\operatorname{tang} c},$$

d'où

$$\operatorname{tang}\theta = \frac{y}{x} = \operatorname{tang}(v+c),\quad r = \sqrt{x^2+y^2} = a\cos c\, e^{v\operatorname{tang} c}.$$

et, par conséquent,

$$\theta = v + c,\quad r = a\cos c\, e^{(\theta - c)\operatorname{tang} c};$$

la base du cylindre est donc une spirale logarithmique, et l'on obtient la courbe (x_0, y_0, z_0) en faisant tourner l'hélice actuelle (xyz) de deux angles droits autour de l'axe des z, puis la dilatant suivant les z et les rayons vecteurs r dans le rapport de $1 + 2\operatorname{tang}^2 c$ à l'unité.

Je ferai remarquer, à propos de cet exemple, que si l'on prenait, un peu plus généralement, l'hélice

$$x = a\cos\theta\, e^{k\theta},\quad y = a\sin\theta\, e^{k\theta},\quad z = b\,e^{k\theta},$$

où a, b, k sont trois constantes quelconques, de sorte que la base du cylindre est toujours une spirale logarithmique, mais la courbe coupe actuellement les génératrices sous un angle quelconque (et non plus de 45 degrés), on trouverait, pour l'arête de rebroussement de la surface polaire, une courbe *de même nature,* mais non plus semblable généralement à la proposée.

On aurait encore un cas, relativement simple, en se donnant arbitrairement deux valeurs de ρ et déterminant m et h au moyen des deux équations obtenues en substituant dans l'équation (ρ) les deux valeurs dont il s'agit.

Il resterait à séparer, dans le cas général des hélices, les racines de l'équation (ρ), ce qu'on pourrait faire par les méthodes de Cauchy ou autrement; mais j'ai cru pouvoir me dispenser de ce calcul.

Je me dispense également d'examiner particulièrement l'hypothèse, exclue en passant, où l'on admet que ε est égal à zéro.

Enfin je ferai remarquer, en terminant ce paragraphe, qu'on pourrait imaginer d'autres questions, non dépourvues d'intérêt, en faisant intervenir, au lieu de l'arête de rebroussement de la surface polaire, les développées gauches ou le lieu des centres de courbure; mais il m'a paru, d'après un aperçu rapide, que les difficultés d'intégration devenaient beaucoup plus grandes.

§ VI. — *Généralisation d'un problème d'Euler.*

1. Le problème d'Euler dont il s'agit ici peut être énoncé, si l'on veut, de la manière suivante : « Trouver la courbe dans laquelle le carré de la normale en un point quelconque surpasse d'une quantité constante donnée l'ordonnée élevée par le pied de cette normale et terminée à la même courbe. » La question correspondante, pour le cas des trois dimensions, doit avoir pour objet naturellement de « déterminer la surface telle, que le carré de la normale, terminée au plan horizontal des xy, surpasse d'une quantité constante donnée l'ordonnée verticale de la même surface menée par le pied de cette normale. »

En désignant par $f(x, y)$ l'ordonnée verticale de la surface, relative au point quelconque (x, y, f), par x_1, y_1 les coordonnées du point où cette normale rencontre le plan des xy, on voit tout de suite que les équations du problème actuel sont

$$x_1 = x + f\frac{df}{dx}, \quad y_1 = y + f\frac{df}{dy},$$

$$\left(1 + \frac{df^2}{dx^2} + \frac{df^2}{dy^2}\right)f^2 = k + [f(x_1, y_1)]^2,$$

k étant une constante donnée; mais, en vue d'une certaine extension analytique, je prendrai le cas de la Géométrie à $n+1$ dimensions, et je considérerai, en conséquence, le système d'équations

$$x_1 = x + f\frac{df}{dx}, \quad y_1 = y + f\frac{df}{dy}, \ldots, \quad z_1 = z + f\frac{df}{dz},$$
$$\left(1 + \frac{df^2}{dx^2} + \frac{df^2}{dy^2} + \ldots + \frac{df^2}{dz^2}\right) f^2 = k + [f(x_1, y_1, \ldots, z_1)]^2,$$

où la fonction inconnue f dépend des n variables indépendantes x, $y, \ldots, z$.

Conformément à ce qui a été dit au n° 4 du § I, on peut regarder x, $y, \ldots, z$ comme des fonctions indéterminées de n nouvelles variables indépendantes $t, \theta, \ldots, \tau$ et $x_1, y_1, \ldots, z_1$ comme les valeurs que prennent ces fonctions quand les nouvelles variables indépendantes s'accroissent simultanément de l'unité. La caractéristique Δ étant censée répondre à l'accroissement total d'une fonction, si l'on pose

$$f^2 = u,$$

le précédent système d'équations pourra être remplacé par le suivant :

$$(1) \qquad \begin{cases} 2\Delta x = \dfrac{du}{dx}, \quad 2\Delta y = \dfrac{du}{dy}, \ldots, \quad 2\Delta z = \dfrac{du}{dz}, \\ \Delta u + k = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + \ldots + (\Delta z)^2. \end{cases}$$

2. La relation identique

$$\frac{du}{dt} = \frac{du}{dx}\frac{dx}{dt} + \frac{du}{dy}\frac{dy}{dt} + \ldots + \frac{du}{dz}\frac{dz}{dt}$$

revient, en vertu de la première ligne (1), à

$$(2) \qquad \frac{du}{dt} = 2\Delta x\frac{dx}{dt} + 2\Delta y\frac{dy}{dt} + \ldots + 2\Delta z\frac{dz}{dt},$$

et l'on aurait pareillement

$$(2') \qquad \frac{du}{d\theta} = 2\Delta x\frac{dx}{d\theta} + 2\Delta y\frac{dy}{d\theta} + \ldots + 2\Delta z\frac{dz}{d\theta}.$$

La comparaison des deux expressions de $\frac{d^2 u}{dt\,d\theta}$, déduites de (2) et (2′), fournit

$$
(3)\qquad \left\{
\begin{aligned}
&\frac{dx}{dt}\frac{d\Delta x}{d\theta}-\frac{dx}{d\theta}\frac{d\Delta x}{dt}+\frac{dy}{dt}\frac{d\Delta y}{d\theta}-\frac{dy}{d\theta}\frac{d\Delta y}{dt}+\ldots\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad +\frac{dz}{dt}\frac{d\Delta z}{d\theta}-\frac{dz}{d\theta}\frac{d\Delta z}{dt}=0,
\end{aligned}
\right.
$$

et les $\frac{n(n-1)}{2}$ équations comprises dans ce type expriment certaines conditions d'intégrabilité qui seront utiles tout à l'heure pour un cas particulier, mais dont la considération peut aussi être évitée, comme on le verra plus loin.

La différentiation de la dernière équation (1) donne

$$\Delta\frac{du}{dt}=2\Delta x\frac{d\Delta x}{dt}+2\Delta y\frac{d\Delta y}{dt}+\ldots+2\Delta z\frac{d\Delta z}{dt};$$

mais, en différentiant par Δ l'équation (2), on a

$$\Delta\frac{du}{dt}=2\Delta x\frac{d\Delta x}{dt}+2\frac{dx}{dt}\Delta\Delta x+2\frac{d\Delta x}{dt}\Delta\Delta x+\ldots,$$

en sous-entendant les termes analogues en $y, \ldots, z$. Si l'on observe que

$$x_1=x+\Delta x,\quad \frac{dx_1}{dt}=\frac{dx}{dt}+\frac{d\Delta x}{dt},$$

la comparaison des deux précédentes expressions de $\Delta\frac{du}{dt}$ fournit la première du groupe suivant, les autres équations de ce groupe provenant d'un calcul analogue,

$$
(4)\qquad \left\{
\begin{aligned}
&\frac{dx_1}{dt}\Delta\Delta x+\frac{dy_1}{dt}\Delta\Delta y+\ldots+\frac{dz_1}{dt}\Delta\Delta z=0,\\
&\frac{dx_1}{d\theta}\Delta\Delta x+\frac{dy_1}{d\theta}\Delta\Delta y+\ldots+\frac{dz_1}{d\theta}\Delta\Delta z=0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
&\frac{dx_1}{d\tau}\Delta\Delta x+\frac{dy_1}{d\tau}\Delta\Delta y+\ldots+\frac{dz_1}{d\tau}\Delta\Delta z=0.
\end{aligned}
\right.
$$

Comme le déterminant fonctionnel

$$\begin{vmatrix} \frac{dx_1}{dt} & \frac{dy_1}{dt} & \dots & \frac{dz_1}{dt} \\ \frac{dx_1}{d\theta} & \frac{dy_1}{d\theta} & \dots & \frac{dz_1}{d\theta} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{dx_1}{d\tau} & \frac{dy_1}{d\tau} & \dots & \frac{dz_1}{d\tau} \end{vmatrix}$$

ne peut être identiquement nul, sans quoi les variables $x_1, y_1, \dots, z_1$ et, par suite, aussi $x, y, \dots, z$ ne seraient pas indépendantes, les équations (4), en y regardant $\Delta\Delta x, \Delta\Delta y, \dots, \Delta\Delta z$ comme des inconnues, exigent qu'on ait

$$(5) \qquad \Delta\Delta x = 0, \quad \Delta\Delta y = 0, \dots, \quad \Delta\Delta z = 0.$$

3. Avant de continuer la solution dans sa généralité, j'examinerai un cas particulier, qui se présente assez naturellement, et qui répond à la supposition spéciale, savoir que x ne dépend que de t, y que de $\theta, \dots, z$ que de τ. Cette supposition rend identiques les $\frac{n(n-1)}{2}$ équations (3). De plus, les équations (5) fournissent tout de suite

$$(6) \qquad x = at + a', \quad y = b\theta + b', \dots, \quad z = c\tau + c',$$

a et a' étant des fonctions arbitraires et périodiques de t, dont elles dépendent uniquement; b et b' des fonctions arbitraires et périodiques de θ, dont elles dépendent uniquement, etc. En observant que, dans le cas présent, on a

$$(7) \qquad \begin{cases} \frac{du}{dt} = \frac{du}{dx}\frac{dx}{dt} = 2\Delta x \frac{dx}{dt} = 2a\left(\frac{d\,at}{dt} + \frac{da'}{dt}\right), \\ \frac{du}{d\theta} = \frac{du}{dy}\frac{dy}{d\theta} = 2\Delta y \frac{dy}{d\theta} = 2b\left(\frac{d\,b\theta}{d\theta} + \frac{db'}{d\theta}\right), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

on en conclut que u est de la forme

$$\varphi(t) + \psi(\theta) + \dots + \chi(\tau),$$

et que, par suite,

$$\Delta u = \Delta\varphi + \Delta\psi + \ldots + \Delta\chi.$$

La dernière équation (1) devient donc

$$\Delta\varphi + \Delta\psi + \ldots + \Delta\chi + k = a^2 + b^2 + \ldots + c^2;$$

et, par conséquent, en désignant par α, β,..., γ des constantes arbitraires, assujetties toutefois à la condition

$$\alpha + \beta + \ldots + \gamma = k,$$

la comparaison des termes de même nature, dans les deux membres de la précédente équation, exige que

$$\Delta\varphi = a^2 - \alpha, \quad \Delta\psi = b^2 - \beta, \ldots, \quad \Delta\chi = c^2 - \gamma.$$

Chacune de ces équations s'intègre tout de suite, isolément; et, si l'on désigne par a'', b'',..., c'' des fonctions arbitraires et périodiques de t, θ,..., τ, respectivement, on a finalement

$$(8) \qquad u = (a^2 - \alpha)t + a'' + (b^2 - \beta)\theta + b'' + \ldots + (c^2 - \gamma)\tau + c''.$$

La substitution de cette expression dans les équations (7) fournit, entre les fonctions arbitraires, les relations suivantes :

$$(9) \qquad \left\{ \begin{array}{l} a^2 + 2a\dfrac{da'}{dt} - \dfrac{da''}{dt} + \alpha = 0, \\ b^2 + 2b\dfrac{db'}{d\theta} - \dfrac{db''}{d\theta} + \beta = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ c^2 + 2c\dfrac{dc'}{d\tau} - \dfrac{dc''}{d\tau} + \gamma = 0; \end{array} \right.$$

d'où l'on peut déduire, si l'on veut, sous forme finie, les fonctions a, b,..., c, en prenant arbitrairement les $2n$ fonctions périodiques d'une seule variable respectivement : a', a''; b', b'',... ; c', c''.

On peut remarquer que l'élimination des paramètres t, θ,..., τ entre les équations (6) et (8) ne donne pas pour u une fonction de la seule quantité $(x^2 + y^2 + \ldots + z^2)$ et qu'ainsi, dans le cas des trois dimensions, la surface ne résulte pas de la rotation autour de l'axe des f de l'une des courbes planes répondant au problème d'Euler. Si u était effectivement une fonction de $(x^2 + y^2 + \ldots + z^2)$ seulement, $x, y, \ldots, z$ devraient être proportionnels à $\frac{du}{dx}, \frac{du}{dy}, \ldots, \frac{du}{dz}$, ou, d'après (1), à Δx, $\Delta y, \ldots, \Delta z$: on devrait donc avoir, en ayant égard à (6),

$$t + \frac{a'}{a} = \theta + \frac{b'}{b} = \ldots = \tau + \frac{c'}{c},$$

résultat inadmissible, car, h étant une constante, il en résulterait

$$\frac{a'}{a} = h - t, \quad \frac{b'}{b} = h - \theta, \ldots, \quad \frac{c'}{c} = h - \tau,$$

et les fonctions $\frac{a'}{a}, \frac{b'}{b}, \ldots, \frac{c'}{c}$ ne seraient pas périodiques.

Lorsqu'il n'y a qu'une seule variable indépendante x, la solution ci-dessus se confond avec celle de Poisson, laquelle n'est ni moins complète ni moins uniforme que celle de M. Ellis, rapportée par M. Boole [1]. Si, en effet, au lieu de tirer a de la première équation (9), la seule qui subsiste actuellement, on tire a'' de cette même équation, la solution est représentée par les formules

$$x = at + a',$$
$$u = 2\int a\left(a + t\frac{da}{dt} + \frac{da'}{dt}\right) dt,$$

qui ne diffèrent que par la notation de celles de M. Ellis. De plus, il n'est pas tenu compte, dans la solution rapportée par M. Boole, de la remarque que fait Poisson à la page 146 (3°) de son Mémoire. Conformément à cette remarque, il faudrait examiner si la quantité que M. Boole désigne par u_{t+1} ou $\chi(x)$ ne peut pas être constante. Cette hypothèse donnerait le cercle comme dans la solution de Poisson. Cette courbe

---

[1] Dans l'excellent Ouvrage sur les différences finies de ce dernier auteur, on trouve, à la page 238, le passage suivant : « The following once famous problem ingaged in succession the attention of Euler, Biot and Poisson. But the subjoined solution, which alone is caracterised by unity and completeness, is due to the late M. Ellis ». (*Cambridge Journal*, vol. III, p. 131).

particulière est d'ailleurs fournie à M. Ellis par un certain facteur qui se trouve, dès le début, égalé à zéro. Mais à ce point de vue, bien particulier il est vrai, la solution de M. Ellis, telle qu'elle est rapportée par M. Boole, serait moins complète que celle de Poisson.

4. J'ai supposé jusqu'ici que la caractéristique Δ correspondait à l'accroissement simultané *un* de toutes les variables indépendantes. Mais, d'après ce qui a été dit au § I, on peut supposer, sans nuire à la généralité de la question, que cette caractéristique correspond à l'accroissement *un* de l'unique variable t, les autres variables $\theta, \ldots, \tau$ ne changeant pas. En se plaçant désormais à ce point de vue, les équations (5) auront pour intégrales

$$x = at + a', \quad y = bt + b', \ldots, \quad z = ct + c'; \tag{10}$$

a, a', b, b',..., c, c' étant des fonctions tout à fait arbitraires de t, $\theta, \ldots, \tau$, mais périodiques relativement à la première de ces variables. Par la substitution dans les équations (3), on obtient les deux groupes

$$\begin{gathered}
a\frac{da}{d\theta} + \frac{da}{d\theta}\frac{da'}{dt} - \frac{da}{dt}\frac{da'}{d\theta} + \ldots = 0, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
a\frac{da}{d\tau} + \frac{da}{d\tau}\frac{da'}{dt} - \frac{da}{dt}\frac{da'}{d\tau} + \ldots = 0, \\
\frac{da}{d\theta}\frac{da'}{d\tau} - \frac{da}{d\tau}\frac{da'}{d\theta} + \ldots = 0, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{gathered}$$

où il faudrait écrire les termes analogues en b, b',...; c, c'. Le premier groupe est formé de $(n-1)$ équations où figurent les dérivées partielles relatives à t, et le second groupe contient les $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ équations où ne figurent pas de dérivées relatives à cette même variable.

Ici s'offre encore naturellement une manière toute particulière de satisfaire à ces *conditions d'intégrabilité* : elle consiste à supposer que a' est une fonction arbitraire de a; b' une fonction arbitraire de b;....

Bien que ce cas puisse être censé compris dans la solution générale, donnée un peu plus loin, il m'a paru convenable de le traiter directement, à cause de sa simplicité relative. D'après l'hypothèse multiple qui vient d'être faite, les équations du second groupe deviennent identiques; et quant à celles du premier, elles se réduisent à

$$a\frac{da}{d\theta}+b\frac{db}{d\theta}+\ldots+c\frac{dc}{d\theta}=0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$a\frac{da}{d\tau}+b\frac{db}{d\tau}+\ldots+c\frac{dc}{d\tau}=0;$$

de sorte que, en posant

$$a^2+b^2+\ldots+c^2=h^2,$$

h^2 ne peut être qu'une fonction périodique de t, indépendante de $\theta,\ldots,\tau$. Pour simplifier je supposerai h tout à fait constant, c'est-à-dire indépendant aussi de t. La dernière équation (1) devient d'ailleurs, dans la même hypothèse,

$$\Delta u=h^2-k;$$

d'où

$$u=(h^2-k)t+v,$$

v étant une fonction arbitraire de $\theta,\ldots,\tau$, contenant t sous forme périodique. On aura ensuite, d'après (2) et (2'),

$$\frac{dv}{dt}=k+h^2+2a\frac{da'}{dt}+2b\frac{db'}{dt}+\ldots+2c\frac{dc'}{dt},$$
$$\frac{dv}{d\theta}=\qquad 2a\frac{da'}{d\theta}+2b\frac{db'}{d\theta}+\ldots+2c\frac{dc'}{d\theta},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;$$

et, par conséquent,

$$v=(k+h^2)t+2\int a\,da'+2\int b\,db'+\ldots+2\int c\,dc'.$$

Comme v doit être périodique par rapport à t, il faut prendre nécessairement $h^2 = -k$.

5. Je reviens au cas général. En posant, pour abréger,

$$a^2 + b^2 + \ldots + c^2 = r^2,$$

et, substituant les valeurs (10) dans (2) et (2′), on obtient

$$\frac{du}{dt} = 2r^2 + 2t\frac{rdr}{dt} + 2\left(a\frac{da'}{dt} + b\frac{db'}{dt} + \ldots + c\frac{dc'}{dt}\right),$$
$$\frac{du}{d\theta} = \qquad 2t\frac{rdr}{d\theta} + 2\left(a\frac{da'}{d\theta} + b\frac{db'}{d\theta} + \ldots + c\frac{dc'}{d\theta}\right),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

On a aussi

$$\Delta u = r^2 - k;$$

d'où

(11) $$u = (r^2 - k)t + v,$$

v étant une fonction arbitraire de toutes les variables indépendantes, mais périodique relativement à t. De là résulte, en ayant égard aux précédentes expressions de $\frac{du}{dt}, \frac{du}{d\theta}, \ldots$,

(12) $$dv = (r^2 + k)\,dt + 2a\,da' + 2b\,db' + \ldots + 2c\,dc'.$$

Soit pris arbitrairement

(13) $$v = \mathrm{F}(t, \theta, \ldots, \tau),$$

F étant une fonction donnée quelconque de $t, \theta, \ldots, \tau$, contenant toutefois sous forme périodique seulement la première de ces variables. Soient, en même temps,

(14) $$\begin{cases} a' = \psi(t, \theta, \ldots, \tau), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ c' = \chi(t, \theta, \ldots, \tau), \end{cases}$$

$\psi, \ldots, \chi$ étant des fonctions arbitraires indépendantes, de la même nature que F. On tirera de ces dernières équations

$$(15)\quad \begin{cases} t = \varpi(a', b', \ldots, c'), \\ \theta = \rho\,(a', b', \ldots, c'), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \tau = \omega\,(a', b', \ldots, c'), \end{cases}$$

et, en substituant ces valeurs dans F, cette dernière quantité deviendra une fonction de a', b',..., c' que je désignerai par w. L'équation (12) donnera donc

$$(16)\qquad dw = (r^2 + k)\, d\varpi + 2(a\,da' + b\,db' + \ldots + c\,dc'),$$

d'où, à cause de l'indépendance des variables a', b',..., c', résulte

$$(17)\quad \begin{cases} (r^2 + k)\dfrac{d\varpi}{da'} + 2a - \dfrac{dw}{da'} = 0, \\ (r^2 + k)\dfrac{d\varpi}{db'} + 2b - \dfrac{dw}{db'} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ (r^2 + k)\dfrac{d\varpi}{dc'} + 2c - \dfrac{dw}{dc'} = 0. \end{cases}$$

On tirera de ces équations les valeurs de a, b, ..., c en a', b', ..., c'; après quoi on pourra remettre pour a', b',..., c' les seconds membres des équations (14).

Il est presque superflu de faire observer que les expressions de a, b,..., c ainsi trouvées seront périodiques relativement à t, et que, de plus, la solution définitive n'exige, en réalité, aucune intégration.

Les équations (17), écrites comme il suit :

$$(17')\quad \begin{cases} 2a = \dfrac{dw}{da'} - (r^2 + k)\dfrac{d\varpi}{da'}, \\ 2b = \dfrac{dw}{db'} - (r^2 + k)\dfrac{d\varpi}{db'}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ 2c = \dfrac{dw}{dc'} - (r^2 + k)\dfrac{d\varpi}{dc'}, \end{cases}$$

étant élevées au carré et ensuite ajoutées, donnent

$$(18)\qquad P(r^2 + k)^2 - 2Q\,(r^2 + k) + R = 0,$$

où, pour abréger,

$$P = \frac{d\varpi^2}{da'^2} + \frac{d\varpi^2}{db'^2} + \ldots + \frac{d\varpi^2}{dc'^2},$$

$$Q = \frac{d\varpi}{da'}\frac{dw}{da'} + \ldots + \frac{d\varpi}{dc'}\frac{dw}{dc'} + 2,$$

$$R = \frac{dw^2}{da'^2} + \frac{dw^2}{db'^2} + \ldots + \frac{dw^2}{dc'^2} + 4k.$$

En résolvant l'unique équation du second degré (18), pour en tirer $r^2 + k$, on obtiendra donc immédiatement, par (17'), les expressions finies de $a, b, \ldots, c$.

Maintenant il est clair que, dans l'application, il n'est pas nécessaire, quand on a posé les équations (14), d'en déduire les équations inverses (15). On peut, en effet, par les formules ordinaires, pour le changement des variables indépendantes, ne faire figurer directement dans les équations (17') et (18) que les dérivées $\frac{dF}{dt}, \frac{dF}{d\theta}, \ldots, \frac{dF}{d\tau}; \frac{d\psi}{dt}, \frac{d\psi}{d\theta}, \ldots, \frac{d\psi}{d\tau}, \ldots; \frac{d\chi}{dt}, \frac{d\chi}{d\theta}, \ldots, \frac{d\chi}{d\tau}$; mais il me paraît assez inutile d'effectuer cette transformation générale, qui n'offre aucune espèce de difficulté théorique nouvelle.

Il faut remarquer que la solution précédente, qui peut être regardée comme générale, laisse échapper certains cas particuliers. Elle suppose implicitement, en effet, que les fonctions $a', b', \ldots, c'$ sont indépendantes entre elles. Si l'on faisait une hypothèse contraire, il faudrait revenir à la différentielle (12). Comme des $2n$ fonctions a, a'; $b, b', \ldots$; c, c', $n - 1$ doivent être indépendantes, afin que, d'après (10), $x, y, \ldots, z$ le soient également, il faudrait partager ces fonctions en deux groupes, en spécifiant quelles sont celles qu'on suppose indépendantes, et considérer toutes les autres comme des fonctions de celles-là, et de t si l'on veut. Alors on déduirait de (12) n relations que je ne développerai pas davantage, pour ne pas trop insister sur le problème actuel. On trouve un exemple particulier de ce qui vient d'être dit dans le cas spécial développé au n° 4, où un nombre quelconque des quantités a', $b', \ldots, c'$ peuvent être supposées constantes; mais les n équations dont je viens de parler exigent, suivant le choix des variables indépendantes adoptées, des développements ultérieurs plus ou moins complexes.

Au reste, on peut observer généralement que si, après avoir posé les équations (13) et (14), on conserve pour variables indépendantes les quantités t, $\theta, \ldots, \tau$, l'équation (12) fournira immédiatement

$$r^2+k+2a\frac{d\psi}{dt}+\ldots+2c\frac{d\chi}{dt}-\frac{dF}{dt}=0,$$

$$2a\frac{d\psi}{d\theta}+\ldots+2c\frac{d\chi}{d\theta}-\frac{dF}{d\theta}=0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$2a\frac{d\psi}{d\tau}+\ldots+2c\frac{d\chi}{d\tau}-\frac{dF}{d\tau}=0.$$

On voit sur-le-champ qu'on peut déduire $a, b, \ldots, c$ de ces équations moyennant la résolution d'une équation du second degré et d'autres du premier. La formation de cette équation est moins simple que lorsqu'on prenait $a', b', \ldots, c'$ pour les variables indépendantes; mais on a ici l'avantage que les quantités que l'on a en vue de déterminer se trouvent tout de suite exprimées au moyen des variables indépendantes les plus naturelles, $t, \theta, \ldots, \tau$.

Par exemple si, prenant le cas des surfaces, on pose

$$v=\theta^2,\quad a'=\theta\sin 2\pi t,\quad b'=\theta\cos 2\pi t,$$

l'équation (12) fournira

$$a\sin 2\pi t+b\cos 2\pi t=\theta,$$

$$-a\cos 2\pi t+b\sin 2\pi t=\frac{r^2+k}{4\pi\theta};$$

en faisant la somme des carrés, on aura une équation d'où l'on déduira

$$\frac{r^2+k}{4\pi\theta}=2\pi\theta\pm\sqrt{(4\pi^2-1)\theta^2-k},$$

et l'on conclura ensuite a et b des deux équations précédentes.