ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

CLAUDE MORLET

Les méthodes de la topologie différentielle dans l'étude des variétés semi-linéaires

Annales scientifiques de l'É.N.S. 4e série, tome 1, nº 3 (1968), p. 313-394

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1968_4_1_3_313_0>

Ann. scient. Éc. Norm. Sup.,
4e série, t. 1, 1968, p. 313 à 394.

LES MÉTHODES
DE LA TOPOLOGIE DIFFÉRENTIELLE
DANS L'ÉTUDE DES VARIÉTÉS SEMI-LINÉAIRES

PAR CLAUDE MORLET.

TABLE DES MATIÈRES.

INTRODUCTION.

« L'enquête est comparable à une longue gestation, et la solution du problème au jour de la délivrance. »

MAO TSÉ TOUNG.

LA POSITION DU PROBLÈME. — Dès les origines de la topologie algébrique, pour étudier les variétés différentiables, on fut amené à les trianguler. Il est certain que trianguler une variété permet de ramener certaines questions à des problèmes combinatoires plus agréables à manier. C'est ce que H. Poincaré considère comme « une manière de représenter les variétés, ..., qui en facilite singulièrement l'étude ». On sait l'importance historique et la fécondité de ce point de vue. Plus récemment (depuis 1950), la topologie différentielle se développa rapidement, quand des mathématiciens, en tête desquels on doit citer R. Thom, virent le rôle que pouvait jouer le fibré vectoriel tangent des variétés différentiables, ainsi que la théorie des variétés transverses. L'étude des variétés semi-linéaires (combinatoires selon la vieille terminologie) se développait indépendamment. Les problèmes résolus étaient quelquefois les mêmes; ainsi le problème de Poincaré généralisé (une variété de dimension n qui a le type d'homotopie de S^n est-elle isomorphe à S^n ?) fut résolu à la même époque par S. Smale dans le cadre différentiable et par J. Stallings dans le cadre semi-linéaire. A la même époque, E. C. Zeeman montrait qu'un plongement semi-linéaire de S^p dans S^n est toujours isotope au plongement trivial si $n-p \geqq 3$, et A. Hæfliger montrait qu'il n'en est pas ainsi dans le cadre différentiable.

Le problème était donc posé de trouver des méthodes qui permettent d'étudier à la fois les variétés différentiables et les variétés semi-linéaires, et de mener une étude comparée des deux catégories; on essaya donc d'adapter les méthodes de la topologie différentielle à l'étude des variétés semi-linéaires. Un grand progrès fut accompli avec l'introduction des microfibrés (*cf.* J. Milnor [12]). Bien des problèmes ont été résolus grâce à ces microfibrés, mais on s'est toujours heurté au fait que, quand V est une sous-variété de M, on ne sait pas construire un microfibré normal à V dans M.

Les problèmes envisagés ici. — Le premier objet de ce travail est donc de construire les objets mathématiques qui doivent, dans le cadre semi-linéaire, jouer le rôle des fibrés vectoriels de la topologie différentielle. Ce sont les pseudofibrés [1] et les tubes que j'ai introduits aux chapitres II et V. Pour esquisser leur définition, je pourrais dire que ce sont des fibrés sans projection, alors que les microfibrés sont des fibrés avec projection mais sans fibre (la fibre étant un germe d'espace). On obtient facilement tous les résultats qu'on pouvait espérer, les seules difficultés qui s'introduisent concernent les images réciproques (on remarquera que dans la théorie des fibrés vectoriels la construction des images réciproques utilise la projection de façon essentielle); on a cependant des images réciproques définies à isomorphisme près. Au chapitre III, je traite des questions de transversalité. Là aussi, on a les théorèmes qu'on pouvait espérer; la grande nouveauté, par rapport au cadre différentiable, est que la notion de transversalité n'est pas locale : si deux sous-variétés de M sont localement transverses, elles ne sont en général pas transverses. La notion de transversalité locale est inutilisable, car elle ne permet pas de généraliser les théorèmes classiques du cadre différentiable.

Pour munir les pseudofibrés d'un groupe structural, j'ai été amené à poser une définition qui me semble intéressante (*cf.* chap. I). On sait que, si V est une variété semi-linéaire, le groupe des automorphismes de V ne possède aucune structure topologique « raisonnable ». On le considère d'ordinaire comme le groupe des o-simplexes d'un groupe semi-simplicial dont les p-simplexes sont les automorphismes de $\Delta_p \times V$ qui respectent la projection sur Δ_p. On peut aussi le considérer comme l'ensemble de o-simplexes de l'espace dont les p-simplexes sont les automorphismes de $\Delta_p \times V$ qui respectent les faces de Δ_p. On n'obtient pas ainsi un groupe semi-simplicial, car il n'y a pas de dégénérescences; ce qui m'a amené à introduire au chapitre I la notion d'ensemble (ou de groupe) quasi-simplicial. Le groupe structural des pseudofibrés de dimension n est le groupe quasi-simplicial obtenu en faisant $V = D^n$. On peut donner des définitions analogues pour les plongements de V dans W (*cf.* chap. I).

---

[1] Introduits également sous le nom de « block bundles » par Sanderson et Rourke (cf. *Bull. Amer. Soc.*, 1966).

Dans un article ultérieur, je comparerai ces nouveaux espaces aux espaces classiques de plongements (resp. de groupes d'automorphismes). En vue de cette étude, j'ai démontré dans le chapitre IV les théorèmes de fibration qui lient les espaces de plongements aux groupes d'automorphismes des variétés; théorèmes qui, dans le cas différentiable, ont été formulés par J. Cerf dans [2]. J'ai bien sûr deux séries de fibrations, puisque j'ai deux séries d'espaces de plongements et de groupes d'automorphismes. Ce chapitre commence par des rappels sur le théorème de trivialité des h-cobordismes de S. Smale. J'en ai donné un énoncé non classique, mais qui me semble le plus utilisable. Je signale à l'attention du lecteur le corollaire 1 qui suit : il permet de se passer de la théorie du « sunny collapsing » (on pourra, par exemple, comparer le corollaire 2, au chapitre 4 de [21]).

Le chapitre V contient des résultats qui par leur nature se rattachent au chapitre II, mais dont les démonstrations utilisent les résultats des chapitres III et IV.

J'ajouterai que le chapitre 0 est formé essentiellement de résultats classiques : je les ai démontrés ici, car dans la littérature, ils sont épars, et souvent incomplets.

Pour terminer, je voudrais remercier M. H. Cartan pour les conseils qu'il m'a donnés, et pour ses séminaires qui m'initièrent à la topologie algébrique. Je prie M. A. Haefliger de trouver ici l'expression de ma profonde reconnaissance pour ses conseils et ses critiques qui ont rendu possible le présent travail.

Qu'il me soit permis d'associer à ces remerciements MM. B. Malgrange et P. Samuel qui ont bien voulu faire partie du jury, M. R. Thom qui m'a permis d'exposer les premiers balbutiements de ce travail dans son séminaire, ainsi que MM. C. Weber et A. Gramain qui furent toujours de dévoués auditeurs.

CHAPITRE 0.

Généralités sur les polyèdres.

Dans ce chapitre, sauf au paragraphe 5, je vais rappeler un certain nombre de résultats démontrés dans le séminaire Zeeman à l'I.H.E.S. [21] (réf. SZ). Je généraliserai certains d'entre eux. Je m'efforcerai alors d'en donner des démonstrations complètes.

1. La catégorie des polyèdres. — Je rappelle qu'un complexe simplicial est la donnée d'un ensemble ordonné et d'une famille, stable par inclusion, de parties finies totalement ordonnées de cet ensemble

(on supposera toujours que cet ensemble de parties contient les parties à un élément).

Dans ce qui suit les complexes simpliciaux seront toujours localement finis (donc leur réalisation géométrique est localement compacte) et dénombrables (donc leur réalisation géométrique est réunion dénombrable de compacts).

On appellera triangulation d'un espace topologique X, un homéomorphisme de X sur la réalisation géométrique $|S|$ d'un complexe simplicial S.

On dira que la triangulation $X \xrightarrow{\varphi} |S|$ est une subdivision de la triangulation $X \xrightarrow{\varphi'} |S'|$, si l'homéomorphisme $\varphi' . \varphi^{-1} : |S| \to |S'|$ envoie linéairement tout simplexe de $|S|$ dans un simplexe de $|S'|$.

DÉFINITION. — Un polyèdre est un espace topologique, muni d'une classe de triangulations, telle que deux quelconques d'entre elles aient une subdivision commune. On supposera toujours que cette classe est maximale, et quand on parlera d'une triangulation d'un polyèdre, il s'agira toujours d'une triangulation de cette classe.

Un morphisme de polyèdres (encore appelé : application polyédrale ou PL-morphisme) est une application propre qui devient simpliciale pour un choix convenable des triangulations.

Les polyèdres et applications polyédrales forment une catégorie, à cause des résultats suivants que je ne démontrerai pas :

LEMME 1 (*cf.* SZ, lemme 5). — *Si* $f : K \to L$ *est simpliciale pour des triangulations* S *de* K *et* T *de* L, *et si* T′ *est une subdivision de* T, *il existe une subdivision* S′ *de S telle que f soit simpliciale pour* S′ *et* T′.

LEMME 2 (*cf.* SZ, lemmes 3 et 4). *Dans les mêmes conditions qu'au lemme* 1, *si f est propre, et si* S′ *est une subdivision de* S, *il existe une subdivision* T″ *de* T *et une subdivision* S″ *de* S′, *telles que f soit simpliciale de* S″ *dans* T″. *De plus, si f est injective, on peut s'arranger pour prendre* $S'' = S'$, *et pour que les sommets de* T″ *qui ne sont pas des sommets de* T *soient les images par f des sommets de* S′ *qui ne sont pas des sommets de* S; *ainsi les simplexes de* T *qui ne rencontrent pas l'image de f, ne sont pas subdivisés.*

Le lemme 2 devient faux si l'on ne suppose pas que f est propre. Il suffit pour s'en convaincre de considérer l'application de $\mathbf{R}$ dans le segment $[-1, +1]$, qui est linéaire sur chaque segment $[n, n+1]$ et envoie n sur $(-1)^n$, et la subdivision de $\mathbf{R}$ obtenue en divisant, pour tout n, le segment $[n, n+1]$ en n parties égales.

Remarque. — Certains auteurs ont pris pour morphismes de la catégorie des polyèdres les applications semi-linéaires, c'est-à-dire les applications qui sont localement des morphismes. Ces applications sont des morphismes si et seulement si elles sont propres (car avec les définitions que j'ai données tous les polyèdres sont paracompacts). Si elles ne sont pas propres il n'existe pas nécessairement des triangulations qui les rendent simpliciales. Par exemple, l'application de $\mathbf{N}$ dans $\mathbf{R}$ définie par $\varphi(n) = \frac{1}{n}$ est semi-linéaire, mais les points $\frac{1}{n}$ ne sont sommets d'aucune triangulation de $\mathbf{R}$. Quand je me placerai dans la catégorie des polyèdres et applications semi-linéaires, je le préciserai.

Sous-polyèdres. — Soit K un polyèdre, un sous-espace L de K sera appelé sous-polyèdre s'il existe une triangulation de K telle que L soit un sous-complexe. Il y a alors sur L une structure de polyèdre induit, et L est fermé dans K.

Nota. — On appellera triangulation de (K, L) toute triangulation de K pour laquelle L est un sous-complexe.

Les images directes et les images réciproques de sous-polyèdres sont des sous-polyèdres.

Produits. — La catégorie des ensembles simpliciaux est munie de produits; on en déduit que l'espace topologique produit de deux polyèdres est muni d'une structure naturelle de polyèdre, qui, s'ils sont compacts, en fait un produit dans la catégorie des polyèdres. S'ils ne sont pas compacts c'est le produit dans la catégorie dont les morphismes sont les applications semi-linéaires; ce qui justifie que dans tous les cas on l'appelle le produit des deux polyèdres donnés. Si l'on s'est donné une triangulation de chacun des deux polyèdres, il en résulte une triangulation naturelle du produit (car dans le mot « triangulation » il y a un ordre sur les sommets). Si f est un morphisme, le graphe de f est un sous-polyèdre du produit de la source par le but. Réciproquement, si le graphe d'une application continue est un sous-polyèdre de ce produit, cette application est semi-linéaire.

Mapping-cylindre. — Soit $f : S \to T$ un morphisme de la catégorie des complexes simpliciaux, on sait lui associer un complexe simplicial appelé mapping-cylindre et f, dont la réalisation géométrique est le mapping-cylindre (topologique) de f (il est localement fini si f est propre et si S et T sont localement finis). Soit f un morphisme du polyèdre K dans le polyèdre L, si l'on se donne des triangulations S et T qui rendent f simplicial, on en déduit une triangulation du mapping-cylindre topologique; mais la structure de polyèdre sous-jacente à cette triangulation dépend de S et de T. Il n'y a donc pas de mapping-cylindre dans la catégorie de polyèdres.

Sous-espaces ouverts. — Un procédé classique permet de trianguler les ouverts d'un espace triangulé. Ceci définit une structure de polyèdre sur chacun des ouverts d'un polyèdre. Mais l'injection d'un ouvert de K dans K n'est, en général, pas un morphisme, c'est cependant une application semi-linéaire.

Inversement on a le

LEMME 3 (*cf.* SZ, chap. 2). — *Soit* X *un espace topologique paracompact, et soit* (U_i) *un recouvrement ouvert de* X. *Si chacun des* U_i *est muni d'une structure de polyèdre de telle façon que les structures induites par* U_i *et* U_j *sur* $U_i \cap U_j$ *coïncident; alors il existe sur* X *une structure de polyèdre et une seule qui induit sur chacun des* U_i *la structure donnée.*

2. VOISINAGES DÉRIVÉS. — *Subdivisions étoilées.* — Soit K un polyèdre muni d'une triangulation S; si s est un simplexe de S, on appelle étoile de s et l'on note $\mathrm{st}(s)$ [ou, s'il est besoin de préciser, $\mathrm{st}_S(s)$] la réunion des simplexes fermés qui contiennent s. On appelle « link » de s, et l'on note $\mathrm{lk}(s)$ [ou $\mathrm{lk}_S(s)$] la réunion des simplexes de $\mathrm{st}(s)$ qui ne rencontrent pas s. $\mathrm{st}(s)$ est le joint de $\mathrm{lk}(s)$ et de s.

Soit x un point intérieur à s; on appelle subdivision élémentaire de S relative à x la triangulation obtenue en remplaçant dans $\mathrm{st}(s)$ la triangulation donnée par la triangulation canonique du joint de $\mathrm{lk}(s)$ et du cône de sommet x et de base ds (cône qu'on identifie à s); on notera xS cette nouvelle triangulation de K.

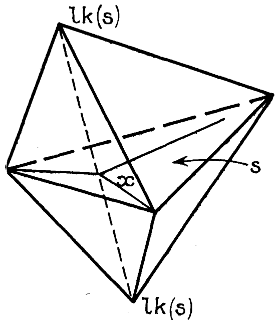

Fig. 1.

Si l'on remplace x par un autre point y de l'intérieur de s, on obtient une triangulation yS. Et il existe un automorphisme de K, et un seul, qui est l'identité hors de $\mathrm{st}(s)$, qui envoie x en y, et qui est simplicial de xS dans yS. Cet automorphisme est isotope à l'identité.

DÉFINITION. — Soit S une triangulation du polyèdre K; une subdivision T de S sera dite étoilée s'il existe une suite de triangulations de K :

$$S = S_0, \quad S_1, \quad \ldots, \quad S_n, \quad \ldots$$

telle que, pour tout i, S_{i+1} soit de la forme xS_i pour un certain x, et que, pour tout sous-polyèdre L compact de K qui soit un sous-complexe de S, il existe un entier N tel que pour $n \geqq N : S_n | L = T | L$.

Subdivisions barycentriques. — Soit K un polyèdre et S une triangulation de K, c'est-à-dire un homéomorphisme $K \to |S|$. Soit S^1 la subdivision barycentrique du complexe S; on a un homéomorphisme naturel $|S^1| \to |S|$ qui définit une subdivision de la triangulation S de K, appelée subdivision barycentrique canonique de S.

LEMME. — *La subdivision barycentrique canonique est étoilée.*

Démonstration. — Dans un complexe simplicial S un simplexe s sera dit maximal s'il n'est face d'aucun autre simplexe. Les simplexes maximaux sont les éléments maximaux pour la relation d'ordre « être une face de ». Les simplexes maximaux recouvrent S.

a. Soit K compact, S est fini, numérotons les simplexes de dimension > 0 de S : $s_1, \ldots, s_p$ de telle façon que pour tout i $(1 \leqq i \leqq p)$ s_i soit maximal dans $S_i = \bigcup_{j \geqq i} s_j$. Soit x_i le barycentre de s_i :

$$S^1 = x_p(x_{p-1}(\ldots(x_2(x_1(S)))\ldots)).$$

b. Si K est non compact, soit (K_n) une suite de compacts qui soient des sous-complexes de S, telle que pour tout n, K_{n+1} soit un voisinage de K_n, et que $\bigcup_n K_n = K$. (K est réunion dénombrable de compacts.) On numérote les simplexes de K de la façon suivante :

On met d'abord les simplexes contenus dans K_0 qui sont principaux (dans K); soit alors K^1 le sous-complexe de K, obtenu en enlevant ces simplexes. On met ensuite les simplexes de K^1 contenus dans K_1 et qui sont principaux (dans K^1); soit alors K^2 égal à K^1 moins ces simplexes. On met ensuite les simplexes de K^2 contenus dans K_2, et qui sont principaux (dans K^2), et ainsi de suite.

Soit alors pour tout n, $x_n = x(s_n)$ le barycentre de s_n. On pose

$$S_n = x_n(x_{n-1}(\ldots x_2(x_1(S))\ldots)),$$

ce qui définit S^1 comme subdivision étoilée.

Soit alors pour tout n, un point $y_n = y(s_n)$ dans l'intérieur de s_n. Posons $S'_n = y_n(y_{n-1}(\ldots y_2(y_1 S)\ldots))$. Il existe un automorphisme φ_n de K et un seul qui envoie tout simplexe de S sur lui-même et soit simplicial de S_n dans S'_n. De plus si, pour les simplexes s de S contenus dans un sous-polyèdre L de K (qui est un sous-complexe de S), $x(s) = y(s)$, alors $\varphi_n | L = \mathrm{Id}$.

Or, pour tout compact K_i, il existe un entier $N(i)$ tel que $n \geqq N(i)$ entraîne $\varphi_n | K_i = \varphi_{N(i)} | K_i$, donc on a un automorphisme limite φ qui envoie chaque simplexe de S sur lui-même et si, pour $s \subset L$, $x(s) = y(s)$, alors $\varphi | L = \mathrm{Id}$.

Soit S' la subdivision limite de S'_n, la subdivision S' est appelée « subdivision de type barycentrique » de la triangulation S.

Remarque. — Si S' et S'' sont des subdivisions de type barycentrique de S, il existe un automorphisme (unique) de $K = |S|$ qui soit simplicial de S' dans S'' et qui envoie chaque simplexe de S dans lui-même.

Collapsing simplicial. — Une face f d'un simplexe maximal s est dite libre si elle n'est contenue dans aucun autre simplexe que s et f.

Étant donnés dans S un simplexe maximal s et une face libre f de s, on dira que le sous-complexe S' obtenu en enlevant l'intérieur du simplexe s et l'intérieur de la face f, se déduit de S par un « collapsing élémentaire ».

DÉFINITION. — Étant donné un sous-complexe T de S, on dit que S collapse simplicialement sur T s'il existe une suite (éventuellement finie) de sous-complexes emboîtés :

$$S = S_0 \supset S_1 \supset S_2 \supset \ldots \supset S_n \supset \ldots,$$

tels que pour tout i $(0 \leqq i < n)$, S_{i+1} s'obtienne à partir de S_i par un collapsing élémentaire, et que pour tout compact X de $|S|$, il existe un entier N tel que $n \geqq N$ entraîne $X \cap |S_n| = X \cap |T|$.

Si $S - T$ n'a qu'un nombre fini de simplexes (en particulier si S est compact), la suite des (S_n) est finie.

DÉFINITION. — Étant donnés un polyèdre K, un sous-polyèdre L et une triangulation S de (K, L), on dira que K collapse simplicialement sur L pour la triangulation S de (K, L) si S collapse sur $S|L$.

Remarquons que si K collapse simplicialement sur L pour S, K collapse simplicialement sur L pour toute subdivision de type barycentrique de S.

EXEMPLES. — 1° Soit f une application simpliciale propre de Σ dans Σ'. Soit S la triangulation canonique du mapping cylindre $M(f)$ de f. S collapse sur $S\big|\,|\Sigma'| = \Sigma'$.

2° Si X collapse sur un sous-espace X' pour une triangulation Σ de (X, X'), et si S est une triangulation de (K, K'), alors $K \times X$ collapse simplicialement sur $K \times X' \cup K' \times X$ pour la triangulation produit $\Sigma \times S$.

3° La construction classique du joint de deux ensembles simpliciaux permet de définir le joint de deux polyèdres compacts. Si Σ est une triangulation de (X, X'), $X \vee \Delta_p$ collapse simplicialement sur $X' \vee \Delta_p$ pour la triangulation construite naturellement à partir de Σ et de la triangulation canonique de Δ_p. En particulier (en faisant $p = 0$) : si (K, K') est un couple de cônes, et Σ une triangulation qui respecte la structure de cône, K collapse simplicialement sur K' pour Σ.

4° Si K contient K′ qui contient K″, et si S est une triangulation de (K, K′, K″) pour laquelle K collapse simplicialement sur K′ et K′ collapse simplicialement sur K″, alors K collapse simplicialement sur K″ pour S.

5° On remarquera que si K collapse sur K′ pour une triangulation S de (K, K′) et si K et K′ sont compacts, K et K′ ont même type d'homotopie simple.

Remarque. — Je ne développerai pas la notion de collapsing (non simplicial) (*cf.* SZ). Je rappellerai seulement qu'on dit que le polyèdre X collapse élémentairement sur le sous-polyèdre X′ si $(\overline{X - X'}, \overline{X - X'} \cap X')$ est isomorphe à (Δ_n, Δ_{n-1}).

On dit que X collapse sur X′ si l'on peut obtenir X′ par une suite de collapsings élémentaires. Si X collapse simplicialement sur X′ pour Σ, X collapse sur X′. Inversement, on montre (et c'est d'ailleurs une conséquence du paragraphe 4 ci-dessous) que si X collapse sur X′, il existe une triangulation Σ de (X, X′) telle que X collapse simplicialement sur X′ pour Σ.

Sous-polyèdres complets pour une triangulation :

Définition. — Soit S un complexe simplicial, T un sous-complexe; on dit que T est complet dans S si, pour tout simplexe s de S, $ds \subset T$ entraîne $s \subset T$.

Soit K un polyèdre, L un sous-polyèdre, et S une triangulation de (K, L); on dit que L est complet pour S si $S \mid L$ est un sous-complexe complet de S.

Remarquons que :

a. Si $L \subset K$ est complet pour S, il l'est pour toute subdivision de S.

b. $L \subset K$ est complet pour S, pour tout simplexe s de S, $s \cap L$ est une face de s (éventuellement s tout entier ou $\emptyset$).

c. Si $L \subset K$ est complet pour S, il existe une unique application simpliciale $f : S \to I$ telle que $f^{-1}(o) = L$.

d. Si $L \subset K$ et si S est une triangulation de (K, L), L est complet pour toute subdivision de type barycentrique de S.

Voisinages dérivés. — Soit K un polyèdre, L un sous-polyèdre et S une triangulation de (K, L), on appelle voisinage simplicial de L (par rapport à S) et l'on note N(L, S) la réunion des simplexes (fermés) de S qui rencontrent L. On note dN(L, S) la réunion des simplexes de N(L, S) qui ne rencontrent pas L. Quand on parlera de la triangulation de N(L, S) sans préciser, il s'agira de la restriction de la triangulation S.

Définition. — Un voisinage dérivé de L est un voisinage de la forme $N(L, S^1)$ où S^1 est une subdivision de type barycentrique d'une triangulation S de (K, L) pour laquelle L est complet.

En particulier, quelle que soit la triangulation S de (K, L), $N(L, S^2)$ est un voisinage dérivé.

DÉFINITION. — Soit K un polyèdre, (J_i) et L des sous-polyèdres, et S une triangulation de $(K, (J_i), L)$. Si L est complet pour S, le couple $(N(L, S^1), (N(L \cap J_i), S^1 \mid J_i))$ (où S^1 désigne une subdivision de type barycentrique de S) sera appelé voisinage dérivé de L dans $(K, (J_i))$.

Remarquons que $N(L \cap J_i, S^1 \mid J_i) = N(L, S^1) \cap J_i$.

PROPOSITION 1. — *Soit* $(N(L, S^1), (N(L \cap J_i), S^1 \mid J_i))$ *un voisinage dérivé de* L *dans* $(K, (J_i))$; $N(L, S^1)$ *collapse simplicialement sur* $L \cup N(L \cap J_i, S^1 \mid J_i)$ *quel que soit i. En particulier (en faisant* $J_i = \emptyset$) $N(L, S^1)$ *collapse simplicialement sur* L.

Puisque, pour tout simplexe *s* de S, $s \cap L$ est une face de *s*, il suffit de démontrer cette proposition quand $K = \Delta_n$, $J_i = d\Delta_n$ et L = une face *f* de Δ_n (S étant la triangulation canonique). C'est alors trivial.

Le théorème d'isomorphisme :

PROPOSITION 2. — *Soit* K *un polyèdre,* (J_i) *et* L *des sous-polyèdres, et* S *et* T *deux triangulations de* $(K, (J_i), L)$ *pour lesquelles* L *est complet dans* K. *Il existe un automorphisme* μ *de* $(K, (J_i))$ *tel que :*

1° μ *soit l'identité sur* L *et sur* $\overline{K - (N(L, S) \cup N(L, T))}$;

2° $\mu(N(L, S^1)) = N(L, T^1)$ *et, pour tout i,*

$$\mu(N(L \cap J_i, S^1 \mid J_i)) = N(L \cap J_i, T^1 \mid J_i).$$

De plus, si $S \mid J_i = T \mid J_i$ *et* $S^1 \mid J_i = T^1 \mid J_i$, *on peut trouver un tel* μ *qui soit l'identité sur* J_i.

Si T *est une subdivision de* S, *on peut trouver un tel* μ *qui envoie chaque simplexe de* S *dans lui-même.*

Il suffit de démontrer ce résultat quand T est une subdivision de S. On notera *f* (resp. *g*) l'application simpliciale $|S| \to I$ (resp. $|T| \to I$) telle que $f^{-1}(0) = L$ [resp. $g^{-1}(0) = L$]. On pose pour tout α $(0 < \alpha < 1)$:

$$V(L, S, \alpha) = f^{-1}([0, \alpha]) \quad \text{et} \quad V(L, T, \alpha) = g^{-1}([0, \alpha]).$$

Si $S \mid J_i = T \mid J_i$:

$$V(L, T, \alpha) \cap J_i = V(L, S, \alpha) \cap J_i.$$

LEMME 1. — *Il existe pour toute triangulation* S *un automorphisme* η_S *de* $N(L, S)$ *qui est l'identité sur* L *et sur* $dN(L, S)$, *qui envoie tout simplexe de* S *dans lui-même (en particulier sa restriction à* J_i *est un automorphisme de* J_i) *et tel que*

$$\eta_S(N(L, S^1)) = V(L, S, \alpha).$$

De plus, si $S \mid J_i = T \mid J_i$ *et* $S^1 \mid J_i = T^1 \mid J_i$, *on peut trouver* η_S *et* η_T *tels qu'ils coïncident sur* J_i.

Démonstration. — Construisons $\eta_{\mathrm{S}} : \mathrm{S}^1$ a été construite comme une subdivision étoilée en choisissant à l'intérieur de chaque simplexe s de S un point $x(s)$ arbitrairement baptisé centre de s. Soit U l'ensemble des simplexes de $\mathrm{N}(\mathrm{L}, \mathrm{S})$ qui rencontrent L sans y être contenus tout entiers. Posons $y(s) = x(s)$ pour tout simplexe s de S qui n'est pas dans U, si s est dans U on prend pour $y(s)$ un point intérieur à s tel que $f(y(s)) = \alpha$. Les $y(s)$ définissent une subdivision de type barycentrique S'^1. η_{S} est l'automorphisme de K qui est simplicial de S^1 dans S'^1. Il est l'identité sur L et sur $\overline{\mathrm{K} - \mathrm{N}(\mathrm{L}, \mathrm{S})}$ et

$$\eta_{\mathrm{S}}(\mathrm{N}(\mathrm{L}, \mathrm{S}^1)) = \mathrm{N}(\mathrm{L}, \mathrm{S}'^1) = \mathrm{V}(\mathrm{L}, \mathrm{S}, \alpha).$$

Pour avoir le rabiot, il suffit, dans la construction de η_{T}, de choisir les mêmes $y(s)$ pour les simplexes s de $\mathrm{S} \mid \mathrm{J}_i$.

Le lemme 1 prouve que la proposition 2 est équivalente au lemme suivant :

LEMME 2. — *Soit* K *un polyèdre*, (J_i) *et* L *des sous-polyèdres*, S *une triangulation de* $(\mathrm{K}, (\mathrm{J}_i), \mathrm{L})$ *pour laquelle* L *est complet, et* T *une subdivision de* S. *Il existe un automorphisme* ψ *de* $\mathrm{N}(\mathrm{L}, \mathrm{S})$ *qui est l'identité sur* L *et sur* $d\mathrm{N}(\mathrm{L}, \mathrm{S})$, *qui envoie tout simplexe de* S *dans lui-même (et donc, pour tout i,* $\psi \mid \mathrm{J}_i$ *est un automorphisme de* J_i*) et tel que*

$$\psi(\mathrm{V}(\mathrm{L}, \mathrm{S}, \alpha)) = \mathrm{V}(\mathrm{L}, \mathrm{T}, \alpha) \qquad (0 < \alpha < 1).$$

Si $\mathrm{S} \mid \mathrm{J}_i = \mathrm{T} \mid \mathrm{J}_i$, *il existe un tel* ψ *qui est l'identité sur* J_i.

On va démontrer le lemme 2 quand L est compact, ce qui achèvera la démonstration de la proposition 2 quand L est compact.

Préliminaires à cette démonstration. — Soient L_0 et $d\mathrm{N}(\mathrm{L}, \mathrm{T})_0$ les ensembles de sommets des restrictions de T à L (qui n'est pas supposé compact) et à $d\mathrm{N}(\mathrm{L}, \mathrm{T})$. Soit U l'ensemble des simplexes de T qui rencontrent L et $d\mathrm{N}(\mathrm{L}, \mathrm{T})$ et U_0 ceux de ces simplexes qui sont de dimension 1. On a des applications naturelles $\mathrm{U}_0 \to \mathrm{L}_0$ et $\mathrm{U}_0 \to d\mathrm{N}(\mathrm{L}, \mathrm{T})_0$, qui font de U_0 un sous-ensemble de $\mathrm{L}_0 \times d\mathrm{N}(\mathrm{L}, \mathrm{T})_0$. Numérotons L_0 et $d\mathrm{N}(\mathrm{L}, \mathrm{T})_0$, il en résulte une relation d'ordre sur U_0 (restriction de la relation produit). Soit $\varphi : \mathrm{U}_0 \to]0, 1[$; on va définir un voisinage $\mathrm{V}(\mathrm{L}, \mathrm{T}, \varphi)$ de L. Pour cela il suffit de se donner $\mathrm{V}(\mathrm{L}, \mathrm{T}, \varphi) \cap s$ pour tous les simplexes s de U :

a. si $s \in \mathrm{U}_0$, $\mathrm{V}(\mathrm{L}, \mathrm{T}, \varphi) \cap s = g^{-1}([0, \varphi(s)]) \cap s$;

b. si $s \notin \mathrm{U}_0$, soient $s_1, \ldots, s_p$ les simplexes de U_0 qui sont des arêtes de s. Pour tout sous-ensemble $(s_{i_1}, \ldots, s_{i_q})$ totalement ordonné de $(s_1, \ldots, s_p)$ considérons l'enveloppe convexe dans s des $(\mathrm{V}(\mathrm{L}, \mathrm{T}, \varphi) \cap s_{i_j})$ $(j = 1, \ldots, q)$.

$V(L, T, \varphi) \cap s$ sera la réunion de tous ces sous-espaces pour tous les sous-ensembles totalement ordonnés de $(s_1, \ldots, s_p)$. Remarquons que :

1° Si ψ est la restriction de φ à $U_0(J_i)$ [où $U_0(J_i) = \{s \in U_0$ tels que $s \subset J_i\}$], alors

$$V(L, T, \varphi) \cap J_i = V(L \cap J_i, T \mid J_i, \psi).$$

2° Si $\varphi(s) = \alpha$ $(\forall s \in U_0)$, alors $V(L, T, \varphi) = V(L, T, \alpha)$. Les cellules engendrées par les $(s_{i_1}, \ldots, s_{i_q})$ donnent sur $dV(L, T, \alpha)$ une triangulation Σ qui subdivise la décomposition cellulaire canonique.

LEMME 3. — *Si $\varphi(s) < \alpha$ (resp. $> \alpha$), pour tout $s \in U_0$ il existe un isomorphisme*

$$g^{-1}(\alpha) \times I \xrightarrow{\mu} \overline{V(L, T, \alpha) - V(L, T, \varphi)}$$
$$\left[\textit{resp. } g^{-1}(\alpha) \times I \xrightarrow{\mu} \overline{V(L, T, \varphi) - V(L, T, \alpha)}\right]$$

qui pour tout $s \in U$ envoie $(g^{-1}(\alpha) \cap s) \times I$ dans s.

[*En particulier μ induit quel que soit i un isomorphisme de $(g^{-1}(\alpha) \cap J_i) \times I$ sur $(\overline{V(L, T, \alpha) - V(L, T, \varphi)}) \cap J_i$.*]

On définit μ successivement sur $\sigma \times I$ tous les simplexes σ de Σ. Si σ est de dimension 0, $\sigma = g^{-1}(\alpha) \cap s$ avec $s \in U_0$, on envoie I linéairement sur le segment $[g^{-1}(\alpha) \cap s, g^{-1}(\varphi(s)) \cap s]$. Pour σ quelconque, on connaît déjà l'image de tous les sommets de $\sigma \times I$; on prend la décomposition simpliciale canonique de $\sigma \times I$ (les sommets de σ sont ordonnés) et l'on plonge chacun d'eux linéairement dans le simplexe $s(\in U)$ correspondant.

COROLLAIRE. — *Si $\alpha < \varphi(s) < \beta$ $(\forall s \in U_0)$ et si γ est un nombre compris entre α et β $(\alpha < \gamma < \beta)$, il existe un automorphisme η de $N(L, T)$ qui soit l'identité sur L et $dN(L, T)$, et qui envoie tout simplexe s de U sur lui-même [ce qui entraîne que, pour tout i, $\eta(dN(L, T) \cap J_i) = dN(L, T) \cap J_i$], et qui transforme $V(L, T, \varphi)$ en $V(L, T, \gamma)$.*

De plus, si $\varphi(s) = \gamma$ pour $s \in U_0(J_i)$, on peut trouver un tel η qui soit l'identité sur J_i.

C'est une conséquence triviale du lemme 3.

Démontrons alors le lemme 2 pour L compact. — Soit α un nombre tel que, pour tout $x \in dN(L, T)_0$, $f(x) > \alpha$. [L est compact, donc $dN(L, T)$ est compact, donc il existe un tel α.] Pour tout s de U_0, on pose

$$\varphi(s) = g(f^{-1}(\alpha) \cap s).$$

On a alors $V(L, T, \varphi) = V(L, S, \alpha)$. Il suffit alors d'appliquer le corollaire qui précède, et de noter ψ le prolongement de η par l'identité, pour avoir le lemme 2. On a $\eta(s) = s$ pour tout simplexe de T, donc encore pour tout simplexe de S, donc, quel que soit i :

$$\eta(V(L, T, \varphi) \cap J_i) = V(L, S, \alpha) \cap J_i.$$

Démontrons la proposition 2 *quand* L *n'est pas compact* (en supposant que T est une subdivision de S) :

Soit (K_n) une suite de compacts de K, tels que $\bigcup K_n = K$ et que K_{n+1} contienne $N(K_n, S)$. Pour tout n il existe (d'après le lemme 2 du paragraphe 1) une subdivision T_n de S qui coïncide avec S sur $\overline{K - K_{n+1}}$ et avec T sur K_n (et si $S \mid J_i = T \mid J_i$, alors $T_n \mid J_i = T \mid J_i$). L est complet pour T_n.

Soit T_n^1 une subdivision de type barycentrique de T_n qui coïncide avec S^1 sur $\overline{K - K_{n+1}}$ et avec T^1 sur K_n. Considérons K_{n+2} muni des triangulations $T_n \mid K_{n+2}$ et $T_{n-1} \mid K_{n+2}$ et les sous-polyèdres $K_{n+2} \cap J_i$ et $K_{n+2} \cap L$. Appliquons la proposition 2 ($K_{n+2} \cap L$ est compact). Il existe un automorphisme μ_n de K_{n+2} qui transforme

$$N(L \cap K_{n+2}, T_{n-1}^1 \mid K_{n+2}) = N(L, T_{n-1}^1) \cap K_{n+2}$$

en

$$N(L \cap K_{n+2}, T_n^1 \mid K_{n+2}) = N(L, T_n^1) \cap K_{n+2}$$

et qui est l'identité sur L et sur tout sous-polyèdre sur lequel T_{n-1} et T_n coïncident, en particulier sur $\overline{K_{n+2} - K_{n+1}}$ et sur K_{n-1}, et éventuellement sur J_i. On notera encore μ_n le prolongement de cet automorphisme par l'identité sur $\overline{K - K_{n+2}}$. μ_n transforme alors $N(L, T_{n-1}^1)$ en $N(L, T_n^1)$, donc, quel que soit i,

$$\mu_n(N(L, T_{n-1}^1) \cap J_i) = N(L, T_n^1) \cap J_i.$$

(Tout simplexe de S est transformé en lui-même par μ_n.) Soit μ le composé de tous les μ_n [pour tout point x, la suite des $\mu_n(\mu_{n-1}(\ldots \mu_1(x) \ldots))$ est stationnaire]. μ transforme $N(L, T^1)$ en $N(L, S^1)$ et, pour tout i, $N(L, T^1) \cap J_i$ en $N(L, S^1) \cap J_i$; il est l'identité sur L, hors de $N(L, S)$ et éventuellement sur J_i. Ce qui achève la démonstration de la proposition 2.

3. Modèles locaux. Variétés et sous-variétés. — *Modèles locaux.* — Étant donnés un polyèdre K et une famille (finie) de sous-polyèdres (J_i) de K, on appelle germe de $(K, (J_i))$ en un point x de K, la famille de cônes emboîtés $(N(x, S^1), (N(x, S^1 \mid J_i)), x)$ de sommets x [où S^1 est la subdivision barycentrique d'une triangulation de $(K, (J_i))$ dont x est un sommet]. On remarquera que si $x \notin J_i$, $N(x, S^1 \mid J_i) = \emptyset$. D'après la proposition 2 la famille de cônes ainsi obtenue est indépendante (à isomorphisme près) de la triangulation choisie.

On appellera modèle local une famille de cônes (compacts) emboîtés $(B, (A_i), a)$ de sommet a. Le bord de ce modèle local est la famille $(dB, (dA_i))$ dont le modèle local est le cône de sommet a.

On dira que $(B, (A_i), a)$ est le modèle local de $(K, (J_i))$ en x si le germe de $(K, (J_i))$ en x est isomorphe à $(B, (A_i), a)$.

EXEMPLES :

DÉFINITION 1. — Un polyèdre est une variété semi-linéaire sans bord, de dimension n, si son modèle local en tout point est le cône de base S^{n-1} [qu'on notera (D^n, o)].

Nota. — J'identifie S^{n-1} au bord du cube unité de R^n, et D^n à ce cube lui-même.

DÉFINITION 2. — Un polyèdre est une variété semi-linéaire de dimension n (éventuellement à bord) si son modèle local est en chaque point :

— soit le cône de base S^{n-1};

— soit le cône de base D^{n-1}.

Les points où le modèle local est le cône de base D^{n-1} forment le bord, ce bord est évidemment une variété de dimension $n-1$.

Remarque. — Soit S une triangulation de $(K, (J_i))$ dont x est un sommet, alors $(\mathrm{st}_S(x), (\mathrm{st}_{S|J_i}(x))$ est isomorphe au germe de $(K, (J_i))$ en x.

Modèles locaux réguliers. — Soient $(K, (J_i))$ un polyèdre et une famille de sous-polyèdres, et X un sous-polyèdre de $\bigcap_i J_i$. Soit $(V, (U_i), z)$ un cône et des sous-cônes. On dira que X est régulier de type $(V, (U_i), z)$ en x $(x \in X)$, si le germe de $(K, (J_i), X)$ en x est isomorphe à $(V \times P, (U_i \times P), \{z\} \times P, \{(z, x)\})$ [où (P, x) est le germe de X en x].

Plus généralement, on dira que (X, Y) est régulier de type (F, F') dans $((K, K'), (L, L'))$, si le germe de (K, K', J, J', X, Y) en tout point x de X, est le produit du couple de cônes (F, F') par le germe de (X, Y) en x.

Exemples. — Notons D^p l'intersection de D^n par le sous-espace linéaire des p premières coordonnées, et D^q l'intersection de D^n par le sous-espace linéaire des q dernières coordonnées.

A. D^p est régulier de type (D^{n-p}, o) dans D^n.

B. Si $p+q-n \geq o$, $D^p \cap D^q$ est régulier de type $(D^{2n-p-q}, D^{n-q}, D^{n-p}, o)$ dans (D^n, D^p, D^q).

C. On dira que J est une sous-variété de codimension p de la variété (à bord) K, si J est une variété (à bord), et est, en chacun de ses points, régulier de type (D^p, o) dans K.

D. On dira que les sous-variétés J_1 et J_2 de codimensions p et q de K, sont en bonne position, si $J_1 \cap J_2$ est, en chacun de ses points, régulier de type (D^{p+q}, D^q, D^p) dans (K, J_1, J_2), et est une sous-variété de K.

Remarque. — Avec ces définitions, les sous-variétés sont sans bord relatif.

Notion de collier. — Étant donnés un polyèdre K et des sous-polyèdres (J_i) de K, un collier du sous-polyèdre K' de K dans $(K, (J_i))$ est un isomorphisme μ de $K' \times I$ sur un voisinage de K' dans K, tel que

$$\mu((K' \cap J_i) \times I) = J_i \cap \operatorname{Im}(\mu), \quad \forall i,$$

et que $\mu | K' \times \{o\} = \operatorname{Id}_{K'}$.

Remarque. — Une condition nécessaire pour que K' ait un collier dans $(K, (J_i))$, est que K' soit régulier de type (I, o) dans $(K, (J_i))$. On démontrera au paragraphe 4 du chapitre II, que cette condition est suffisante.

Lemme 1. — *Soient* K *un polyèdre,* (J_i) *une famille de sous-polyèdres, et* S *une triangulation de* $(K, (J_i))$ *pour laquelle un sous-polyèdre* X *de* K *est complet. Le bord du voisinage dérivé possède un collier dans ce voisinage dérivé; il en possède un également dans l'adhérence du complémentaire de ce voisinage.*

C'est une conséquence de la démonstration du lemme 3 du paragraphe 2.

Lemme 2. — *Soit f une application injective de* $(D^{n-1} \times V, (D^{n-1} \times U_i))$ *dans* $(K, (J_i))$. *Supposons que l'image de* $D^{n-1} \times V$ *soit contenue dans un sous-polyèdre* L *de* K *qui possède un collier dans* $(K, (J_i))$. *Alors la famille de polyèdres* $(K, (J'_i))$ *obtenue en recollant le cône sur* $(D^{n-1} \times V, (D^{n-1} \times U_i))$ *à* $(K, (J_i))$ *par f, est isomorphe à* $(K, (J_i))$, *par un isomorphisme qui est l'identité hors de l'image de* $d(D^{n-1} \times V) \times I$ *par le collier de* K'.

On s'en convaincra en regardant la figure 2.

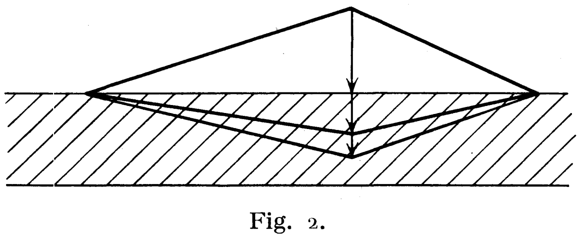

Fig. 2.

4. Les voisinages réguliers. — Dans ce qui suit, V désigne un cône et $(U_i)_{i=1,\ldots,N}$ une suite finie de sous-cônes dont l'intersection est réduite au sommet a de V.

Lemme 1. — *Soit f une injection de* $D^{n-1} \times V$ *dans le bord* $d(D^n \times V)$ *du cône* $D^n \times V$, *telle que,* $\forall i$, $f^{-1}(D^n \times U_i) = D^{n-1} \times U_i$, *et que* $f(o, a)$ *soit* *dans* $S^{n-1}\times\{a\}$. *Si* $f(d(D^{n-1}\times V))$ *a un collier* μ *dans* $(\overline{d(D^n\times V)-\mathrm{Im}(f)}, \overline{(d(D^n\times U_i)-f(D^{n-1}\times U_i))})$, f *se prolonge en un isomorphisme du cône de base* $(D^{n-1}\times V, (D^{n-1}\times U_i))$ *sur* $(D^n\times V, (D^n\times U_i))$.

Démonstration. — Soit λ l'homothétie de rapport λ $(0<\lambda<1)$ dans le cône $D^{n-1}\times V$. Avec μ et f on peut construire une application injective $g : D^{n-1}\times V\to d(D^n\times V)$, telle que, $\forall i$, $g^{-1}(D^n\times U_i)=D^{n-1}\times U_i$, que $f=g.\lambda$, et que $\mathrm{Im}(g)=\mathrm{Im}(f)\cup\mathrm{Im}(\mu)$ et $g(0, a)=f(0, a)$. Si l'on a choisi le collier μ assez « petit », $g(d(D^{n-1}\times V))$ a un collier η dans $(\overline{d(D^n\times V)-g(D^{n-1}\times V)}, \overline{(d(D^n\times U_i)-g(D^{n-1}\times U_i))})$. η permet de prolonger toute triangulation de $(\mathrm{Im}(\eta), (\mathrm{Im}(g)\cap d(D^n\times U_i)))$ en une triangulation de $(d(D^n\times V), (d(D^n\times U_i)))$, qui se prolonge elle-même en une triangulation de $(D^n\times V, (D^n\times U_i))$. Mais on peut choisir une triangulation de $(g(D^{n-1}\times V), (g(D^{n-1}\times U_i)))$ telle que $(f(D^{n-1}\times V), (f(D^{n-1}\times U_i)))$ soit un voisinage dérivé de $g(0, a)$ dans $(g(D^{n-1}\times V), (g(D^{n-1}\times U_i)))$. Il suffit donc de démontrer que si $(A, (B_i))$ est un voisinage dérivé d'un point de $S^{n-1}\times\{a\}$ dans $(d(D^n\times V), (d(D^n\times U_i)))$, il existe un isomorphisme du cône de base $(A, (B_i))$ sur $(D^n\times V, (D^n\times U_i))$, qui envoie identiquement la base de ce cône sur $(A, (B_i))$. Mais, d'après le paragraphe précédent, on peut choisir comme on veut la triangulation qui définit $(A, (B_i))$, et pour un choix judicieux de cette triangulation ceci est trivial.

LEMME 2. — *Soient* K *un polyèdre,* (J_i) *une famille de sous-polyèdres, et* Σ *une triangulation de* $(K, (J_i))$. *Soient* L *et* L′ *deux sous-complexes complets de* Σ. *Supposons que* L *et* L′ *soient disjoints, alors*

$$N(L, S^1)\cap N(L', S^1)=dN(L, S^1)\cap dN(L', S^1).$$

La frontière de $N(L, S^1)\cap N(L', S^1)$ *dans* $dN(L, S^1)$ *a un collier naturel dans* $(X, (X\cap J_i))$ [*où l'on a posé* $X=\overline{dN(L, S^1)-(N(L, S^1)\cap N(L', S^1))}$]. *Ce collier est la restriction du collier naturel de* $dN(L', S^1)$ *dans* $(\overline{K-N(L', S^1)}, \overline{(J_i-N(L', S^1\mid J_i))})$.

Démonstration. — Le collier naturel de $dN(L', S^1)$ dans $(\overline{K-N(L', S^1)}, \overline{(J_i-N(L', S^1 J_i))})$ respecte les simplexes de Σ qui rencontrent L et L′; on fait donc la démonstration dans chacun de ces simplexes. Il suffit donc de regarder le cas où $\Sigma=\Delta_p$ et où L et L′ sont deux faces disjointes de Δ_p, c'est alors trivial.

LEMME 3. — *Soient* K *un polyèdre et* (J_i) *une famille de sous-polyèdres de* K. *Soient* X *et* Y $(Y\subset X)$ *deux sous-polyèdres de* $J=\bigcap_i J_i$, *et* S *une triangulation de* $(K, (J_i), X, Y)$ *telle que* X *collapse simplicialement sur* Y.

Supposons que J *soit, en chacun des points de* $X - Y$, *régulier de type* $(V, (U_i), u)$ *dans* $(K, (J_i))$.

a. Si en tout point de $X - Y$, J *est une variété (éventuellement à bord), il existe un isomorphisme* μ *de* $(N(Y, S^2), (N(Y, S^2 | J_i)))$ *sur* $(N(X, S^2), (N(X, S^2 | J_i)))$. *On construira même un tel isomorphisme qui sera l'identité sur* Y.

b. Si en tout point de $X - Y$, J *est une variété sans bord, on peut trouver un tel isomorphisme qui soit la restriction d'un automorphisme de* $(K, (J_i))$, *qui est l'identité hors de* $N(\overline{X - Y}, S)$.

Démonstration. — Elle se fait par récurrence sur la dimension n de la variété J au voisinage de $X - Y$. Le lemme est vide si cette dimension est nulle. Supposons qu'il soit démontré quand cette dimension est $n - 1$, et donnons-nous $(K, (J_i), X, Y)$ tels que cette dimension soit n.

Il suffit de considérer le cas où $X - Y$ est un unique simplexe σ de dimension $p + 1$ dont toutes les faces sauf une, qu'on notera σ', sont dans Y. On notera y et z les barycentres de σ et σ'. Le segment yz est un simplexe t de S^1. Tout simplexe de S^2 qui rencontre X, rencontre soit Y, soit y, soit z, mais un seul des trois. De plus, si $s \cap Y \neq \emptyset$ et $s' \cap y \neq \emptyset$, et si $s \cap s' \neq \emptyset$, s rencontre $d\sigma$. [En effet : on peut supposer que s et s' sont de dimension 1, il existe alors un simplexe u de S^1 qui contient y et dont $s \cap s'$ est le barycentre. s est contenu dans un simplexe u' de S^1 dont u est une face (on peut avoir $u = u'$). u' est un simplexe de S^1 qui rencontre Y et contient y, donc $u' \cap Y = u' \cap d\sigma$, donc $s \cap d\sigma = s \cap Y \neq \emptyset$.] Il en résulte que

$$N(Y, S^2) \cap N(y, S^2) = N(\overline{d\sigma - \sigma'}, S^2) \cap N(y, S^2).$$

On montre de la même façon que

$$N(Y, S^2) \cap N(z, S^2) = N(\overline{d\sigma - \sigma'}, S^2) \cap N(z, S^2).$$

$(N(y, S^2), (N(y, S^2 | J_i)))$ et $(N(z, S^2), (N(z, S^2 | J_i)))$ sont isomorphes à $(D^n \times V, (D^n \times U_i))$, et leur intersection est l'étoile du milieu m de yz dans la triangulation naturelle de $dN(y, S^2)$, elle est donc isomorphe à $(D^{n-1} \times V, (D^{n-1} \times U_i))$. D'où, par application des lemmes 1 et 2, puis du lemme 2 du paragraphe précédent, $(N(t, S^2), (N(t, S^2 | J_i)))$ est isomorphe à $(D^n \times V, (D^n \times U_i))$.

Posons $(dN(t, S^2), (dN(t, S^2 | J_i))) = (P, (Q_i))$. Il résulte de ce qui précède que $A = N(Y, S^2) \cap N(t, S^2)$ est contenu dans P.

[On pose $N(Y, S^2 | J_i) \cap N(t, S^2 | J_i) = A \cap Q_i = B_i$.]

On pose $\overline{P - A} = A'$ et $\overline{Q_i - B_i} = B'_i$ $(= A' \cap B_i)$. D'après le lemme 2, $A \cap A'$ a un collier dans $(A', (B'_i))$. $A \cap A'$ a aussi un collier dans $(A, (B_i))$ car, si l'on note L le plus grand sous-complexe de Σ qui ne rencontre pas X, $A' = N(L, S^2) \cap N(t, S^2)$ et $B'_i = N(L, S^2 \mid J_i) \cap N(t, S^2 \mid J_i)$. Donc pour tout voisinage dérivé $(C, (D_i))$ de A' dans $(P, (Q_i))$, il existe un automorphisme de $(P, (Q_i))$ qui transforme $(C, (D_i))$ en $(A', (B'_i))$.

Posons $M = dN(t, S^2 \mid \sigma)$, M est isomorphe à D^{p-1}. M et A' sont complets pour $S^2 \mid P$, donc $(C', (D'_i)) = (N(M, S^3 \mid P), (N(M, S^3 \mid Q_i)))$ est isomorphe à $(D^{n-1} \times V, (D^{n-1} \times U_i))$ à cause de l'hypothèse de récurrence. Mais $(\overline{P - C'}, \overline{(Q_i - D'_i)})$ est un voisinage dérivé de A' dans $(P, (Q_i))$. Donc $(A, (B_i))$ est isomorphe à $(D^{n-1} \times V, (D^{n-1} \times U_i))$. L'assertion résulte de l'application successive des lemmes 2 et 1 et du lemme 2 du paragraphe précédent.

Pour démontrer l'assertion *b* on remarque que, si J est une variété sans bord au voisinage de $X - Y$, $(P, (Q_i))$ est isomorphe au bord du cône $(D^n \times V, (D^n \times U_i))$. Il en résulte que $(A', (B'_i))$ est isomorphe à $(D^{n-1} \times V, (D^{n-1} \times U_i))$. L'assertion *b* résulte alors de l'application des lemmes 2 et 1 et du lemme 2 du paragraphe précédent à $(N(t, S^2), (N(t, S^2 \mid J_i)))$ et $(N(L, S^2), (N(L, S^2 \mid J_i)))$.

Définition. — Soient $(K, (J_i))$ un polyèdre et une famille de sous-polyèdres, et X un sous-polyèdre de K. On dira que $(M, (N_i))$ est un voisinage régulier de X dans $(K, (J_i))$ si :

a. M est un voisinage fermé de X dans K, et pour tout i, $N_i = M \cap J_i$.

b. Il existe une injection de $j : M \to K$, qui est l'identité sur X, telle que $(j(M), j(N_i))$ soit un voisinage dérivé de X dans $(K, (J_i))$. En particulier, $\forall\, i$, $j^{-1}(J_i) = N_i$.

Nota. — Il arrivera qu'on pose $X \cap J_i = Y_i$, et qu'on dise que $(M, (N_i))$ est un voisinage régulier de $(X, (Y_i))$ dans $(K, (J_i))$.

Remarque. — Tout voisinage dérivé est régulier. Deux voisinages réguliers de X dans $(K, (J_i))$ sont isomorphes par un isomorphisme qui est l'identité sur X.

Proposition 3. — *Soit* K *une variété semi-linéaire, et soit* J *une sous-variété de* K. *Si* X *est un sous-polyèdre de* J, (U, V) *est un voisinage régulier de* X *dans* (K, J) *si et seulement si :*

1° U *est un voisinage fermé de* X *dans* K, *et une variété de même dimension que* K;

2° $V = U \cap J$ et V *est une sous-variété de* U;

3° U *collapse sur* V *et* V *collapse sur* X.

En particulier, si Y *est un sous-polyèdre de* X *et si* X *collapse sur* Y, *les voisinages réguliers de* X *et de* Y *coïncident.* (C'est un résultat classique qui résulte immédiatement du lemme 3.)

Remarque. — Soit $(U, (V_i))$ un voisinage régulier de X dans $(K, (J_i))$. Une condition nécessaire et suffisante pour que ce soit un voisinage dérivé de X dans $(K, (J_i))$, pour une certaine triangulation est que la frontière de U dans K (topologique) ait un collier dans $\left(\overline{K - U}, \overline{(J_i - V_i)}\right)$, et un collier dans $(U, (V_i))$.

Théorème 1. — *Soient* K_0 *un polyèdre et* $(K_i)_{i>0}$ *une famille de sous-polyèdres. Soit* L *un sous-polyèdre de* K_0. *Soient* $((V_i), W)$ *et* $((V'_i), W')$ *deux voisinages dérivés de* X *dans* $((K_i), L)$. *Si* $W = W'$, *il existe un automorphisme* μ *de* $((K_i), L)$ *qui transforme* V_i *en* V'_i *pour tout* i, *et qui est l'identité sur* L. *On va même construire un tel* μ *qui sera pseudo-isotope à l'identité parmi les automorphismes de* $((K_i), L)$ *qui sont l'identité sur* L. *De plus si,* $\forall\, i$, V_i *et* V'_i *coïncident au voisinage d'un sous-polyèdre* P *de* W, *on peut trouver un* μ *(et une pseudo-isotopie) qui sont l'identité au voisinage de* P.

Démonstration. — On sait déjà que ceci est vrai si les triangulations qui définissent $((V_i, W)$ et $((V'_i), W')$ coïncident sur K, et sur un voisinage de P. Ceci permet de démontrer le lemme quand P contient W.

Dans le cas général, je ferai une récurrence sur la dimension de $K_0 - L$. Si elle est zéro il n'y a rien à démontrer. Supposons le lemme vrai quand $\dim(K_0 - L) \leq n - 1$, et considérons le cas où $\dim(K_0 - L) = n$. Soit S une triangulation de (dW, P) qui se prolonge en une triangulation de $((dV_i), dW)$. A cause de la remarque ci-dessus, il suffit de montrer que, si S' est un sous-complexe de S contenant P, et si au voisinage de S', V'_i et V_i coïncident ($\forall\, i$), et si σ est un simplexe de S non contenu dans S', mais dont le bord est dans S' (on pose $S'' = S' \cup \sigma$), il existe un μ comme dans l'énoncé, tel que, au voisinage de S'', $\mu(V'_i)$ et V_i coïncident, pour tout i.

Soit (Ω_i) un voisinage régulier de S' dans (V_i), on le choisit suffisamment petit pour que ce soit aussi un voisinage régulier de S' dans (V'_i), et pour que, $\forall\, i$, $\Omega_i \cap \sigma$ soit une boule D (la même pour tous les i) de dimension p $(= \dim \sigma)$ plongée dans l'intérieur de σ. Soit $((A_i), B, (T_i), (T'_i), U)$ un voisinage dérivé de D dans $((K_i), L, (V_i), (V'_i), W)$, suffisamment petit pour que $D' = U \cap dW$ soit un voisinage dérivé de D dans dW, contenu dans l'intérieur de σ. $((dV_i), dW)$ est, en tous les points de σ, régulier d'un certain type $((F_i), G, a)$, et $((A_i), B, (T_i), U)$ est isomorphe à $\left((D' \times F_i \times I), D' \times G \times I, \left(D' \times F_i \times I_{\frac{1}{2}}\right), D' \times G \times I_{\frac{1}{2}}\right)$ $\left(\text{où } I_{\frac{1}{2}} \text{ est le segment } \left[0, \frac{1}{2}\right]\right)$ par un isomorphisme qui envoie identiquement $D' \times \{a\} \times \left\{\frac{1}{2}\right\}$ sur D'. Mais ces espaces sont des cônes emboîtés $\left(D' \text{ étant un cône de sommet son centre, et } I \text{ un cône de sommet } \frac{1}{2}\right)$, dont $((dA_i), dB, (dT_i), dU)$ désignera la famille des bords, c'est-à-dire des frontières dans $((K_i), L, (V_i), W.)$ L'isomorphisme ci-dessus indique que $((dT_i), dU)$ est un voisinage dérivé dans $((dA_i), dB)$ de tout point intérieur à dU dans dB. On montre de la même façon que $((dT'_i), dU)$ est un autre voisinage dérivé de ce point dans $((dA_i), dB)$. Comme $dA_0 - dB$ est de dimension au plus $n-1$, on peut appliquer l'hypothèse de récurrence à ces deux voisinages dérivés. Il existe donc un automorphisme η de $((dA_i), dB)$ qui est l'identité sur dB et au voisinage de $dD'(\subset dU)$, transforme dT_i en dT'_i $(\forall i)$ et est pseudo-isotope à l'identité parmi les automorphismes de $((dA_i), dB)$ qui vérifient ces propriétés. On construit l'automorphisme μ de $((K_i), L)$ cherché, en étendant η à l'extérieur de $((A_i), B)$ par le collier naturel de $((dA_i), dB)$ dans $\left(\overline{(K_i - A_i)}, \overline{L - B}\right)$ (puis par l'identité), et à l'intérieur de $((A_i), B)$ par projection conique.

Théorème 2. — *Les données étant celles du théorème 1, soit* $((V_i), W)$ *un voisinage dérivé de* X *dans* $((K_i), L)$ *et* $((V'_i), W')$ *un voisinage régulier de* X *dans* $((K_i), L)$. *Si* $W = W'$, *et si quel que soit le point* x *de* $W - dW$, $((V'_i), W')$ *est un voisinage de* x *dans* $((K_i), L)$, *il existe une pseudo-isotopie* h *de plongements de* $((V_i), W)$ *dans* $((K_i), L)$, *qui est l'identité sur* $I \times W$, *et telle que* $h_0 = \mathrm{Id}$, *et* $h_1(V_i) = V'_i$ *pour tout* i.

Je ne ferai pas la démonstration; elle est analogue à celle du théorème 1.

5. Les problèmes de prolongements d'automorphismes.

Lemme 1. — *Soient* F_0 *un cône de sommet* a, $(F_i)_{i>0}$ *une famille de sous-cônes de* F_0 *et* F' *un sous-cône de* F_0. *Soit* η *une injection de* $(D^n, S^{n-1}) \times F'^{\varepsilon}$ *(dans tout ce qui suit, pour tout cône* C, C^{ε} *désigne un voisinage de son sommet) dans* $(D^n, S^{n-1}) \times F'$. *Une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une injection* φ *de* $(D^n, S^{n-1}) \times ((F_i^{\varepsilon}), F'^{\varepsilon})$ *dans* $(D^n, S^{n-1}) \times ((F_i), F')$ *dont l'image est un voisinage de* $D^n \times \{a\}$ *et dont la restriction à* $D^n \times F'^{\varepsilon}$ *est égale à* η, *est que, pour tout point* x *de* D^n, *il existe un voisinage* $V(x)$ *de* x *dans* D^n, *et une injection* α_x *de* $(V(x), V(x) \cap S^{n-1}) \times ((F_i^{\varepsilon}), F'^{\varepsilon})$ *dans* $(D^n, S^{n-1}) \times ((F_i), F')$ *dont l'image est un voisinage de* $\alpha_x(x)$, *et dont la restriction à* $V(x) \times F'^{\varepsilon}$ *est égale à* η.

La condition est évidemment nécessaire, montrons qu'elle est suffisante. C'est trivial pour $n = 0$; on va faire une récurrence sur n. Remarquons d'abord que si μ_0 et μ_1 sont des automorphismes de $(D^n, S^{n-1}) \times ((F_i), F')$, il est équivalent de montrer le lemme pour η ou pour $\mu_0 . \eta . \mu_1$ (qui vérifie également les hypothèses du lemme). On peut en particulier supposer que $\eta \mid D^n \times \{a\}$ est l'identité, si non on pose $\mu = (\eta \mid D^n \times \{a\})^{-1} \times \mathrm{Id}_{((F_i), F')}$ et l'on remplace η par $\eta . \mu$.

Soit P une section de D^n parallèle à une de ses faces. Par application de l'hypothèse de récurrence à P $(\approx D^{n-1})$, avec $((G_i), G') = ((F_i \times I), F' \times I)$

$\Big($I étant considéré comme un cône de sommet $\frac{1}{2}$ si P n'est pas une face de D^n, et comme un cône de sommet o si P est une face de $D^n\Big)$, on trouve un voisinage $V(P)$ de P dans D^n, et une injection ψ_P de $(V(P), V(P) \cap S^{n-1}) \times ((F_i^\varepsilon), F'^\varepsilon)$ dans $D^n \times ((F_i), F')$, dont la restriction à $V(P) \times F'_\varepsilon$ est égale à η, et dont l'image est un voisinage de $P \times \{a\}$ dans $D^n \times ((F_i), F')$. On peut naturellement choisir $(V(P), \psi_P)$ de façon que $V(P)$ soit la portion de D^n contenue entre deux hyperplans parallèles à P à une distance ε_P.

Soient $P_1, P_2, \ldots, P_j, \ldots, P_m$ une famille de sections par des hyperplans parallèles (P_1 et P_m étant des faces opposées de D^n) tels que, $\forall j$, $d(P_j, P_{j+1}) < \varepsilon_j + \varepsilon_{j+1}$. On peut donc trouver un hyperplan Q_j entre P_j et P_{j+1} et parallèle à eux, qui rencontre $V(P_j)$ et $V(P_{j+1})$. En général $\psi_{P_j} | Q_j \times ((F_i), F')$ et $\psi_{P_{j+1}} | Q_j \times ((F_i), F')$ ne sont pas égaux. Mais si $((A_i), B, (C_i), D)$ est un voisinage dérivé (assez petit!!!) de $Q_j \times \{a\}$ dans $((D^n \times F_i), D^n \times F', (S^{n-1} \times F_i), S^{n-1} \times F')$, $\psi_{P_j}((A_i), B, (C_i), D)$ et $\psi_{P_{j+1}}((A_i), B, (C_i), D)$ sont des voisinages dérivés de $Q_j \times \{a\}$ dans $((D^n \times F_i), D^n \times F', (S^{n-1} \times F_i), S^{n-1} \times F')$, et $\psi_{P_j}(B, D) = \psi_{P_{j+1}}(B, D)$. Appliquons à ces deux voisinages le théorème 1 du paragraphe 4. Il existe un automorphisme de $(D^n, S^{n-1}) \times ((F_i), F')$ qui est l'identité sur $D^n \times F'$ et transforme l'un en l'autre. On fait opérer cet automorphisme sur $\psi_{P_{j+1}}$. Supposons qu'on ait pris pour $((A_i), B, (C_i), D)$ le produit d'un voisinage dérivé de $\{a\}$ dans $((F_i), F')$ par un voisinage dérivé de Q_j dans D^n qui est la partie de D^n comprise entre deux hyperplans Q'_j et Q''_j parallèles à Q_j; on est alors ramené au cas où $\psi_{P_j}^{-1} . \psi_{P_{j+1}}$ définit un isomorphisme d'un voisinage de $Q'_j \times \{a\}$ (ou $Q''_j \times \{a\}$) dans $Q'_j \times ((F_i), F')$ [ou $Q''_j \times ((F_i), F')$] sur un autre. Mais D^n est naturellement isomorphe à $Q'_j \times I$, ce qui permet de prolonger cet isomorphisme en un isomorphisme d'un voisinage de $D^n \times \{a\}$ dans $D^n \times ((F_i), F')$ sur un autre (cet isomorphisme est l'identité sur $D^n \times F'$). En multipliant $\psi_{P_{j+1}}$ par cet isomorphisme, on est ramené au cas où ψ_{P_j} et $\psi_{P_{j+1}}$ coïncident sur $Q'_j \times ((F_i), F')$; en faisant ceci pour tout j, on obtient une famille de ψ_{P_j} qui se recollent deux à deux. pour donner le φ cherché.

Proposition 4. — *Soient* $((K_i), K')$ *une famille de polyèdres,* f *un automorphisme de* $(K' \times I, K' \times \{o\})$, *et* g *un automorphisme de* $((K_i), K')$ *tel que* $f | K' \times \{o\} = g | K'$. *Une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe un automorphisme* G *de* $((K_i \times I), K' \times I)$ *tel que* $G | K' \times I = f$ *et que* $G | ((K_i \times \{o\}), K' \times \{o\}) = g$, *est que, pour tout point* x *de* $K' \times I$, *il existe un voisinage* $((V_i), V')$ *de* x *dans* $((K_i \times I), K' \times I)$ *et une injection* α_x *de* $((V_i), V')$ *dans* $((K_i \times I), K' \times I)$, *dont l'image est un voisinage de* $f(x)$, *et quelle que* $\alpha_x | K' \times I = f | V'$ *et que,* $\forall i$, $\alpha_x | K_i \times \{o\} = g | V_i$.

Démonstration. — On peut supposer que g est l'identité. Pour toute famille $((K_i), K')$ il existe des entiers n tels que $((K_i), K')$ soit le produit de D^n par une famille de polyèdres $((L_i), L')$; je noterai $\beta((K_i), K')$ le plus grand de ces nombres; et je poserai $\gamma((K_i), K') = \dim K' - \beta((K_i), K')$. Je vais raisonner par récurrence sur $\gamma((K_i), K')$. Je remarque que la proposition est triviale si $\gamma((K_i), K') = 0$; et je suppose que je l'ai démontrée pour $\gamma((K_i), K') < n$. Soit alors une famille de polyèdres, telle que $\gamma((K_i), K') = n$.

Il suffit de construire un voisinage (U_i) de K' dans (K_i) et une injection H de $((U_i \times I), K' \times I)$ dans $((K_i \times I), K' \times I)$ dont l'image est un voisinage de $K' \times I$, dont la restriction à $(K_i \times \{0\})$ est l'identité, et dont la restriction à $K' \times I$ est f. En effet, on peut toujours supposer que (U_i) est un voisinage dérivé de K' dans (K_i) et que $(H(U_i \times I))$ est un voisinage dérivé de $K' \times I$ dans $(K_i \times I)$. On peut alors modifier H de façon que $(H(U_i \times I)) = (U_i \times I)$ et que $(H(dU_i \times I)) = (dU_i \times I)$. Mais (dU_i) a un collier dans $(\overline{K_i - U_i})$, et au moyen de ce collier on peut prolonger H en un automorphisme de $((K_i \times I), K' \times I)$.

Construisons H. Posons $\beta((K_i), K') = \beta$; il existe une famille de polyèdres $((L_i), L')$ dont le produit par D^β est isomorphe à $((K_i), K')$ [dans la suite on identifiera $((K_i), K')$ et $((L_i), L') \times D^\beta$]. Soit S une triangulation de $((L_i), L')$; elle permet de définir une suite de sous-polyèdres (X^j) de L', tels que $\bigcup_j X^j = L'$, que $X^0 = \emptyset$, et que, $\forall j$, X^{j+1} soit la réunion de X^j et d'un simplexe σ de S dont le bord est dans X^j. Posons

$$((N(X^j, S^2 \mid K_i)), N(X^j, S^2 \mid K')) = ((A_i^j), B^j).$$

On va construire pour tout j, par récurrence sur j, une injection H^j de $((A_i^j \times D^\beta \times I), B^j \times D^\beta \times I)$ dans $((K_i \times I), K' \times I)$ dont la restriction à $((K_i \times \{0\}), K' \times \{0\})$ est l'identité, dont la restriction à $K' \times I$ est f, dont l'image est un voisinage de $f(X^j \times D^\beta \times I)$ dans $((K_i \times I), K' \times I)$, et qui vérifie la condition de prolongement local imposée à f dans l'énoncé. Supposons connu H^j; posons $\overline{L_i - A_i^j} = C_i^j$ et $\overline{L' - B^j} = D^j$. Posons $D^j \cap \sigma = Y$. $((A_i^{j+1} \cap C_i^j), B^{j+1} \cap D^j)$ est un voisinage dérivé de Y dans $((C_i^j), D^j)$; donc $(((A_i^{j+1} \cap C_i^j) \times D^\beta \times I), (B^{j+1} \cap D^j) \times D^\beta \times I)$ est un voisinage dérivé de $Y \times D^\beta \times I$ dans $((C_i^j \times D^\beta \times I), D^j \times D^\beta \times I)$. Mais il existe une famille de cônes $((G_i), G')$ telle que Y soit régulier de type $((G_i), G')$ dans $((C_i^j), D^j)$; on a alors

$$(((A_i^{j+1} \cap C_i^j) \times D^\beta \times I), (B^{j+1} \cap D^j) \times D^\beta \times I) = Y \times D^\beta \times I \times ((G_i), G').$$

La condition de prolongement local entraîne que $f(Y \times D^\beta \times I)$ est aussi régulier de type $((G_i), G')$ dans

$$(\overline{(K_i \times I - H^j(A_i^j \times D \times I))}, \overline{K' \times I - f(B^j \times D \times I)});$$

donc tout voisinage dérivé de $f(Y\times D^\beta\times I)$ dans cette famille de polyèdres est isomorphe à $Y\times D^\beta\times I\times((G_i), G')$. On est donc ramené, modulo ces identifications de voisinages dérivés, au problème suivant : trouver un automorphisme μ de $Y\times D^\beta\times I\times((G_i), G')$ qui prolonge un automorphisme donné η de $Y\times D^\beta\times I\times G'$ $[\eta|Y\times\{o\}\times D^\beta\times G'=\mathrm{Id}]$, qui est l'identité sur $Y\times\{o\}\times((G_i), G')$ et qui coïncide avec un automorphisme donné ν de

$$dY\times D^\beta\times I\times((G_i), G')$$
$$[dY\approx S^{q-1},\ Y\approx D^q;\ \nu|dY\times D^\beta\times\{o\}\times((G_i), G')=\mathrm{Id}];$$

sachant que l'automorphisme $\eta\cup\nu$ de $(Y\times D^\beta\times G'\cup dY\times D^\beta\times((G_i),G')\times I$ vérifie la condition de prolongement local.

Oublions ν; par application du lemme 1 on prolonge η en un isomorphisme φ d'un voisinage de $Y\times D^\beta\times I\times\{a\}$ [a est le sommet de $((G_i), G')$ dans $Y\times D^\beta\times I\times((G_i), G')$, sur un autre]. On peut se ramener au cas où $\varphi|Y\times D^\beta\times\{o\}\times((G_i), G')=\mathrm{Id}$, et où φ est un automorphisme d'un voisinage dérivé de $Y\times D^\beta\times I\times\{a\}$ dans $Y\times D^\beta\times I\times((G_i), G')$. Le complémentaire de ce voisinage dérivé est isomorphe à $Y\times D^\beta\times I\times I\times((dG_i), dG')$, et l'on cherche à prolonger $\eta|Y\times D^\beta\times I\times I\times dG'$ par un automorphisme qui coïncide avec φ sur $Y\times D^\beta\times I\times\{o\}\times((dG_i), dG')$. Par application de l'hypothèse de récurrence $[\dim dG'=\dim G'-1<\gamma((K_i), K')=n$ et $Y\times D^\beta\times I$ est une boule] un tel prolongement existe. En recollant avec φ, on obtient un automorphisme Φ de $Y\times D^\beta\times I\times((G_i), G')$ qui prolonge η et est l'identité sur $Y\times D^\beta\times\{o\}\times((G_i), G')$. En général Φ ne prolonge pas ν, mais on peut modifier Φ de façon que ceci soit vérifié en se servant d'un collier de dY dans Y.

Squelettes intrinsèques et alvéoles :

Définition. — Étant donnés un polyèdre X et des sous-polyèdres (Y_i) (en nombre fini) de X, on dira que le point x de X est d'indice p dans $(X, (Y_i))$, s'il existe une triangulation Σ de $(X, (Y_i))$ telle que x soit contenu dans l'intérieur d'un p-simplexe, et s'il n'existe pas de triangulation de $(X, (Y_i))$ telle que x soit contenu dans l'intérieur d'un $(p+1)$-simplexe.

Exemples. — Un point isolé est d'indice o. Les points d'une variété de dimension n, sont d'indice n s'ils sont à l'intérieur et d'indice $n-1$ s'ils sont sur le bord.

Il est clair que l'indice de x dans $(X, (Y_i))$ est un invariant du germe de $(X, (Y_i))$ en x. Par conséquent, tout automorphisme de $(X, (Y_i))$ envoie chaque point sur un point de même indice. L'ensemble des points d'indice au plus p de $(X, (Y_i))$ est fermé dans X — on verra plus loin que c'est un sous-polyèdre de X — c'est l'intersection des p-squelettes de toutes les triangulations de $(X, (Y_i))$, on le notera $(X, (Y_i))_p$ et on l'appellera le p-squelette intrinsèque de $(X, (Y_i))$. $(X, (Y_i))_p - (X, (Y_i))_{p-1}$ est l'ensemble des points d'indice p.

Remarque. — Si l'on ajoute un sous-polyèdre Y_N, l'indice de chaque point décroît ou reste inchangé, il est certainement inchangé pour tous les points qui n'appartiennent pas à Y_N.

LEMME 2. — $(X, (Y_i))_p - (X, (Y_i))_{p-1}$ *est une variété de dimension* p, *en général non fermée dans* X.

En effet : soit x un point d'indice p de $(X, (Y_i))$, il existe une triangulation Σ de $(X, (Y_i))$, telle que x soit dans l'intérieur d'un simplexe σ de dimension p de Σ. Si y est un point voisin de x dans X, deux cas peuvent se présenter :

a. Si $y \notin \sigma$, y est intérieur à un simplexe de Σ dont σ est une face, donc de dimension supérieure à p; donc y est d'indice au moins $p+1$.

b. Si $y \in \sigma$, alors, si y est assez voisin de x, y est intérieur à σ; les germes de $(X, (Y_i))$ en x et y sont alors isomorphes, donc y est aussi d'indice p.

LEMME 3 :

$$(X \times R, (Y_i \times R))_{p+1} = (X, (Y_i))_p \times R.$$

En effet : il est évident que si x est d'indice p, quel que soit t dans R, (x, t) est d'indice au moins $p+1$ dans $(X \times R, (Y_i \times R))$. Inversement s'il existe une triangulation de $(X \times R, (Y_i \times R))$ telle que (x, t) soit dans un $(p+1)$-simplexe; on peut toujours se ramener au cas où la projection de chacun des simplexes sur R est une application linéaire; cette triangulation induit alors sur le sous-polyèdre $X \times \{t\}$ une décomposition cellulaire, et (x, t) est dans une cellule de dimension au moins p, ce qui permet de construire une triangulation de $(X, (Y_i))$ telle que x soit dans l'intérieur d'un p-simplexe.

LEMME 4. — $(X, (Y_i))_p$ *est un sous-polyèdre de dimension au plus* p *de* X.

C'est trivial pour $p = 0$. On va raisonner par récurrence sur p; supposons donc que ce soit vrai pour $p-1$. On va montrer que $(X, (Y_i))_p$ est un sous-polyèdre au voisinage de chacun de ses points. Soit donc x un point d'indice q $(q < p)$, soit $(A, (B_i))$ ce qu'on obtient en enlevant d'un voisinage dérivé de x son bord et x. $(A, (B_i))$ est de la forme $R \times (A', (B'_i))$; d'après l'hypothèse de récurrence appliquée à $(A', (B'_i))$ et le lemme 3 appliqué à ce produit, l'ensemble des points d'indice p de $(A, (B_i))$ est la trace sur $(A, (B_i))$ d'un sous-cône du voisinage dérivé choisi. D'où le résultat.

Remarques. — 1° $\bigcup_{p+q=n} X_p \times Y_q$ contient $(X\times Y)_n$, mais il n'y a pas égalité en général (exemple : le produit de deux variétés à bord). Par contre, $(X\times I, X\times\{0\}, X\times\{1\})_p = (X_{p-1}\times I)\ (X_p\times\{0, 1\})$. Si V est une variété sans bord de dimension n, $(X\times V)_p = X_{p-n}\times V$.

2° La démonstration du lemme 3 prouve que le modèle local de $(X, (Y_i))$ en un point de $(X, (Y_i))_p - (X, (Y_i))_{p-1}$ est localement constant, donc constant sur chaque composante connexe.

3° Soit V_p une composante connexe de $(X, (Y_i))_p - (X, (Y_i))_{p-1}$, $\overline{V}_p - V_p$ est contenu dans $(X, (Y_i))_{p-1}$. Soit V_q une composante connexe de $(X, (Y_i))_q - (X, (Y_i))_{q-1}$ $(q<p)$ qui rencontre V_p. Soit $x\in\overline{V}_p\cap V_q$, il existe une partie du germe de $(X, (Y_i))$ en x qui est dans V_p, ceci reste vrai pour tous les points voisins donc pour tous les points de V_q, donc $V_q\subset\overline{V}_p$.

Définition. — On appelle alvéoles intrinsèques de $(X, (Y_i))$ les adhérences des composantes connexes des $(X, (Y_i))_p - (X, (Y_i))_{p-1}$.

Toute alvéole intrinsèque est, d'après la remarque ci-dessus, la réunion d'une variété et d'alvéoles intrinsèques de dimension inférieure.

Remarque. — Soit $((K_i), K')$ une famille de sous-polyèdres de $K = \bigcup_i K_i \cup K'$; une condition nécessaire pour qu'un automorphisme de K′ se prolonge en un automorphisme de $((K_i), K')$, est qu'il respecte les alvéoles intrinsèques de $((K_i), K')$ contenues dans K′. Il est facile de voir que cette condition n'est pas suffisante. Par contre, je vais démontrer :

Proposition 5. — *Soient* $((K_i), K')$ *une famille de polyèdres, f un automorphisme de* $((K_i), K')$, *et g un automorphisme de* $K'\times I$, *tels que* $f|K' = g|K'\times\{0\}$. *Une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe un automorphisme* G *de* $((K_i\times I), K'\times I)$ *dont la restriction à* $((K_i\times\{0\}), K'\times\{0\})$ *est f, et la restriction à* $K'\times I$ *est g, est que g respecte les alvéoles intrinsèques de* $((K_i\times I), K'\times I, (K_i\times\{0\}), K'\times\{0\})$ *contenues dans* $K'\times I$.

Démonstration. — La condition est évidemment nécessaire, on montrera qu'elle est suffisante en faisant une récurrence sur la dimension de K′. La proposition est triviale si $\dim K' = 0$, supposons qu'elle soit démontrée quand $\dim K' < n$, et considérons le cas où $\dim K' = n$. On peut supposer que f est l'identité.

Il suffit de montrer qu'on peut appliquer la proposition 4, c'est-à-dire que g est localement prolongeable en tous points de $K'\times I$. Soit x un point de K′, je vais montrer que g est localement prolongeable en tout point de $\{x\} \times \mathrm{I}$. Soit y un point de $\{x\} \times \mathrm{I}$. Soient $((\mathrm{A}_i), \mathrm{A}', a)$ un voisinage dérivé de y dans $((\mathrm{K}_i \times \mathrm{I}), \mathrm{K}' \times \mathrm{I}, \{x\} \times \mathrm{I})$, et $((\mathrm{B}_i), \mathrm{B}', b)$ un voisinage dérivé de $g(y)$ dans $((\mathrm{K}_i \times \mathrm{I}), \mathrm{K}' \times \mathrm{I}, g(\{x\} \times \mathrm{I}))$, tels que $g(\mathrm{A}') = \mathrm{B}'$ [donc $g(a) = b$]. a et b sont des segments d'extrémités α, α' et $\beta = g(\alpha)$, $\beta' = g(\alpha')$. Soient $((d\mathrm{A}_i), d\mathrm{A}')$ et $((d\mathrm{B}_i), d\mathrm{B}')$ les bords de ces voisinages dérivés. Supposons que la condition de prolongement local soit vérifiée au voisinage de α.

1° $g \mid d\mathrm{A}' : d\mathrm{A}' \to d\mathrm{B}'$ se prolonge en un automorphisme de $((d\mathrm{A}_i), d\mathrm{A}')$ sur $((d\mathrm{B}_i), d\mathrm{B}')$ au voisinage de α (c'est une conséquence de l'hypothèse de prolongement local au voisinage de α, et du théorème 1 du paragraphe 4). Il en résulte que les cônes $((\mathrm{A}_i), \mathrm{A}', a)$ et $((\mathrm{B}_i), \mathrm{B}', b)$ sont isomorphes.

2° L'hypothèse de récurrence entraîne alors que $g \mid d\mathrm{A}'$ se prolonge en un automorphisme du complémentaire d'un voisinage dérivé de α' dans $((d\mathrm{B}_i), d\mathrm{B}')$. D'où par deux projections coniques successives, $g \mid \mathrm{A}'$ se prolonge en un isomorphisme de $((\mathrm{A}_i), \mathrm{A}')$ sur $((\mathrm{B}_i), \mathrm{B}')$; c'est-à-dire que g est prolongeable au voisinage de y.

Ceci prouve que l'ensemble des points de $\{x\} \times \mathrm{I}$ au voisinage desquels g est prolongeable, est fermé et contient $\{x\} \times \{0\}$. Comme il est ouvert, c'est $\{x\} \times \mathrm{I}$ tout entier. Ce qui termine la démonstration.

Corollaire 1. — *Soient* $((\mathrm{K}_i), \mathrm{K}')$ *une famille de polyèdres,* f *un automorphisme de* $((\mathrm{K}_i), \mathrm{K}')$ *et* g *un automorphisme de* $(\mathrm{K}' \times \mathrm{I}, \mathrm{K}' \times \{0, 1\})$, *tels que* $f \mid \mathrm{K}' = g \mid \mathrm{K}' \times \{0\}$. *Si* g *respecte les alvéoles intrinsèques de* $((\mathrm{K}_i \times \mathrm{I}), \mathrm{K}' \times \mathrm{I}, (\mathrm{K}_i \times \{0, 1\}), \mathrm{K}' \times \{0, 1\})$ *contenues dans* $\mathrm{K}' \times \mathrm{I}$, *il existe un automorphisme de* $((\mathrm{K}_i \times \mathrm{I}), \mathrm{K}' \times \mathrm{I}, (\mathrm{K}_i \times \{0, 1\}), \mathrm{K}' \times \{0, 1\})$ *tel que* $\mathrm{G} \mid ((\mathrm{K}_i \times \{0\}), \mathrm{K}' \times \{0\}) = f$ et $\mathrm{G} \mid \mathrm{K}' \times \mathrm{I} = g$.

Si $\bigcup_i \mathrm{K}_i - \mathrm{K}'$ est l'intérieur d'une alvéole intrinsèque de $((\mathrm{K}_i), \mathrm{K}')$, il suffit d'appliquer la proposition 5, la condition supplémentaire est automatiquement vérifiée pour des raisons de dimension. Dans le cas général on rajoute à K' successivement toutes les alvéoles intrinsèques de $((\mathrm{K}_i), \mathrm{K}')$.

Corollaire 2. — *Soit* $(\mathrm{K}, \mathrm{K}')$ *un couple de polyèdres; si, pour tout point* x *de* K' *il existe un voisinage* $\mathrm{V}(x)$ *de* x *dans* K *tel que toute triangulation de* $\mathrm{K}' \cap \mathrm{V}(x)$ *se prolonge en une triangulation de* $\mathrm{V}(x)$, *alors quel que soit l'automorphisme* f *de* $(\mathrm{K}, \mathrm{K}')$ *et quel que soit l'automorphisme* g *de* $(\mathrm{K}' \times \mathrm{I}, \mathrm{K}' \times \{0, 1\})$ *tel que* $g \mid \mathrm{K}' \times \{0\} = f \mid \mathrm{K}'$, *il existe un automorphisme* G *de* $(\mathrm{K} \times \mathrm{I}, \mathrm{K}' \times \mathrm{I}, \mathrm{K} \times \{0, 1\}, \mathrm{K}' \times \{0, 1\})$ *tel que* $\mathrm{G} \mid (\mathrm{K} \times \{0\}, \mathrm{K}' \times \{0\}) = f$, *et que* $\mathrm{G} \mid \mathrm{K}' \times \mathrm{I} = g$.

C'est toujours le cas quand K' est, en chacun de ses points, régulier d'un certain type dans K. On verra au chapitre IV que c'est toujours le cas quand K est une variété, et que K' est de codimension au moins 3 dans K (et $K \cap dK$ de codimension au moins 3 dans dK).

C'est une conséquence du corollaire 1, puisque la condition imposée assure que les alvéoles intrinsèques de (K, K') contenues dans K' coïncident avec les alvéoles intrinsèques de K'.

CHAPITRE I.

LES ESPACES DE PSEUDO-ISOTOPIE.

1. ENSEMBLES SEMI-SIMPLICIAUX. — Je rappelle qu'un ensemble semi-simplicial est un foncteur contravariant de la catégorie semi-simpliciale Δ dans la catégorie des ensembles, c'est-à-dire la donnée d'une suite d'ensembles $(X_n)_{n \geqq 0}$ et de deux familles d'applications $f_i : X_n \to X_{n-1}$ et $d_i : X_n \to X_{n+1}$ $(0 \leqq i \leqq n)$ vérifiant les trois conditions suivantes :

$$
\begin{array}{lll}
(\alpha) & f_i f_j = f_i f_{j+1} & \text{chaque fois que } i \leqq j; \\
(\beta) & f_i d_i = f_{i+1} d_i = \mathrm{Id}, & \\
 & f_j d_i = d_i f_{j-1} & \text{chaque fois que } j > i+1, \\
 & f_j d_i = d_{i-1} f_j & \quad \text{»} \quad \text{»} \quad \text{»} \quad j < i; \\
(\gamma) & d_j d_i = d_i d_{j-1} & \quad \text{»} \quad \text{»} \quad \text{»} \quad i < j.
\end{array}
$$

EXEMPLES. — A. *Espaces d'isotopie différentiables.* — Soient V et W deux variétés C^∞, soit $(\mathrm{Plgt}_I(V, W))_p$ l'ensemble des plongements de $\Delta_p \times V$ dans $\Delta_p \times W$ respectant la projection sur Δ_p ($\Delta_p \times V$ et $\Delta_p \times W$ sont des variétés à coins — je ne reviendrai pas sur la notion de plongement d'une variété à coins dans une autre —). On définit des applications

$$f_i : \quad (\mathrm{Plgt}_I(V, W))_p \to (\mathrm{Plgt}_I(V, W))_{p-1}$$

en prenant la restriction à $f_i(\Delta_p) \times V$ des éléments de $(\mathrm{Plgt}_I(V, W))_p$. On définit des applications

$$d_i : \quad (\mathrm{Plgt}_I(V, W))_p \to (\mathrm{Plgt}_I(V, W))_{p+1}$$

en associant à tout $g : \Delta_p \times V \to \Delta_p \times W$ l'application de $\Delta_{p+1} \times V$ dans $\Delta_{p+1} \times W$ définie par $(x, y) \to (x, p_2\, g(\pi x, y))$, où π est la projection de Δ_{p+1} sur Δ_p correspondant à la $i^{\text{ième}}$ dégénérescence. On vérifie qu'on a ainsi défini un ensemble semi-simplicial, qu'on note $\mathrm{Plgt}_I(V, W)$. Si V est compacte, c'est un sous-ensemble semi-simplicial du complexe singulier de l'espace topologique $\mathrm{Plgt}(V, W)$ muni de la topologie C^r $(r \geqq 1)$, il a le même type d'homotopie que cet espace (*cf.* [2]). On utilisera plus souvent l'ensemble semi-simplicial $\mathrm{Plgt}_I(V, W, f_0)$ qui, étant donné un plongement f_0 de V dans W, est le sous-ensemble semi-simplicial du précédent formé des simplexes $\Delta_p \times V \to \Delta_p \times W$ dont la restriction à $\Delta_p \times dV$ est $\mathrm{Id}_{\Delta_p} \times f_0 \mid dV$. Si M est une sous-variété de V, on définit $\mathrm{Plgt}_{\mathrm{I}}^{\mathrm{M}}(V, W, f_0)$, c'est le sous-ensemble simplicial du précédent formé des simplexes dont la restriction à $\Delta_p \times M$ est $\mathrm{Id}_{\Delta_p} \times f_0 \mid M$. On définit de façon analogue le groupe semi-simplicial $\mathrm{Aut}_{\mathrm{I}}(V)$ dont les p-simplexes sont les automorphismes de $\Delta_p \times V$ qui respectent la projection sur Δ_p, et le sous-groupe semi-simplicial $\mathrm{Aut}_{\mathrm{I}}(V \bmod A)$ formé des automorphismes qui sont l'identité sur un fermé A donné dans V. Un cas particulier important est celui où $A = dV$. Enfin, si E est un voisinage tubulaire de la sous-variété V de W, on notera g_0 l'injection naturelle de E dans W, et $\mathrm{Plgt}_{\mathrm{I}}^{\mathrm{V}}(E, W, g_0)$ sera l'ensemble semi-simplicial dont les isomorphismes de $\Delta_p \times E$ sur un voisinage tubulaire de $\Delta_p \times V$ dans $\Delta_p \times W$ qui respectent la projection sur Δ_p, et sont l'identité sur $\Delta_p \times (V \cup (dW \cap E))$.

B. *Espaces d'isotopie semi-linéaires.* — Soient V et W deux polyèdres, on définit comme dans le cas différentiable l'ensemble semi-simplicial $\mathrm{Inj}_{\mathrm{I}}(V, W)$, dont les p-simplexes sont les applications injectives de $\Delta_p \times V$ dans $\Delta_p \times W$ qui respectent la projection sur Δ_p. Si V est un sous-polyèdre de W (on notera f_0 l'injection naturelle de V dans W), on notera $\mathrm{Plgt}_{\mathrm{I}}(V, W)$ le sous-ensemble semi-simplicial de $\mathrm{Inj}_{\mathrm{I}}(V, W)$ formé des simplexes s qui vérifient la condition :

(1) *Les alvéoles intrinsèques de* $(\Delta_p \times W, (f_i(\Delta_p) \times W), s(\Delta_p \times V))$ *qui sont dans* $s(\Delta_p \times V)$ *sont les images par s des alvéoles intrinsèques de* $(\Delta_p \times W, (f_i(\Delta_p) \times W), \Delta_p \times V)$ *qui sont dans* $\Delta_p \times V$.

On remarquera que si V est une sous-variété de la variété W, cette condition équivaut à dire que $s(\Delta_p \times V)$ est une sous-variété de $\Delta_p \times W$. Cette condition est automatiquement vérifiée si $\dim W - \dim V \geqq 3$ et $\dim dW - \dim(V \cap dW) \geqq 3$ (*cf.* corollaire 3 de la proposition 2 du chapitre IV). On définit, comme dans le cas différentiable, les sous-espaces $\mathrm{Plgt}_{\mathrm{I}}(V, W, f_0)$ et $\mathrm{Plgt}_{\mathrm{I}}^{\mathrm{M}}(V, W, f_0)$.

Si V est un polyèdre, $(V_i)_{i \in \mathrm{I}}$ (I fini) et V′ des sous-polyèdres de V, on notera $\mathrm{Aut}_{\mathrm{I}}(V, (V_i) \bmod V')$ l'ensemble semi-simplicial dont les p-simplexes sont les automorphismes de $\Delta_p \times V$ qui respectent la projection sur Δ_p, qui, quel que soit i, induisent un automorphisme de $\Delta_p \times V_i$, et sont l'identité sur $\Delta_p \times V'$.

Si E est un voisinage dérivé de V dans la variété W, et si g_0 est l'injection naturelle de E dans W, $\mathrm{Plgt}_{\mathrm{I}}(E, W, g_0)$ est, d'après la définition générale donnée ci-dessus, l'ensemble semi-simplicial dont les p-simplexes sont les isomorphismes de $\Delta_p \times E$ sur un voisinage dérivé de $\Delta_p \times V$ dans $\Delta_p \times W$, qui sont l'identité sur $\Delta_p \times (V \cup (E \cap dW))$ et respectent la projection sur Δ_p.

C. *Espaces de pseudo-isotopie différentiables.* — Soient V et W deux variétés C^∞, soit $(\mathrm{Plgt}_{\mathrm{PI}}(V, W))_p$ l'ensemble des plongements (sans bord relatif, transversaux au bord) de $\Delta_p \times V$ dans $\Delta_p \times W$, qui, pour toute face $\Delta_q \to \Delta_p$ de Δ_p, induisent un plongement de $\Delta_q \times V$ dans $\Delta_q \times W$; et vérifient la condition :

(*a*) *Quel que soit le point x d'une face (de dimension quelconque)* F *de Δ_p, et quel que soit le point y de* V, *l'application linéaire tangente à f en (x, y) est la somme directe de l'application linéaire tangente à $f | F \times V$ en (x, y), et de l'application identique du sous-espace linéaire de Δ_p engendré par x et la face* F′ *opposée à* F.

On définit des applications :

$$f_i : \quad (\mathrm{Plgt}_{\mathrm{PI}}(V, W))_p \to (\mathrm{Plgt}_{\mathrm{PI}}(V, W))_{p-1}$$

en associant à tout simplexe sa restriction à $f_i(\Delta_p) \times V$.

On définit des applications :

$$d_i : \quad (\mathrm{Plgt}_{\mathrm{PI}}(V, W))_p \to (\mathrm{Plgt}_{\mathrm{PI}}(V, W))_{p+1}$$

de la façon suivante : on note π la projection de Δ_{p+1} sur Δ_p qui correspond à la $i^{\text{ième}}$ dégénérescence, et l'on définit une application $\chi : \Delta_p \times I \to \Delta_{p+1}$ en envoyant (θ, t) sur le point qui divise le segment $\pi^{-1}(\theta)$ dans le rapport $\frac{t}{1-t}$. On pose alors pour tout $g : \Delta_p \times V \to \Delta_p \times W$:

$$d_i g(y, \tau) = (\chi(p_1 g(y, \theta), t), p_2 g(y, \theta))$$

[où l'on a choisi un point (θ, t) dans $\chi^{-1}(\tau)$, le résultat ne dépendant pas de ce choix]. La condition (*a*) assure que $d_i g$ est une application différentiable. On remarquera que si g respecte la projection sur Δ_p, on retrouve le $d_i g$ défini dans l'exemple A. On vérifie qu'on a ainsi défini un ensemble semi-simplicial qu'on note $\mathrm{Plgt}_{\mathrm{PI}}(V, W)$. $\mathrm{Plgt}_{\mathrm{I}}(V, W)$ est un sous-ensemble semi-simplicial de $\mathrm{Plgt}_{\mathrm{PI}}(V, W)$; ils ont d'ailleurs les mêmes o-simplexes.

On définit de façon analogue des ensembles semi-simpliciaux : $\mathrm{Plgt}_{\mathrm{PI}}(V, W, f_0)$; $\mathrm{Plgt}^{\mathrm{M}}_{\mathrm{PI}}(V, W, f_0)$; $\mathrm{Aut}_{\mathrm{PI}}(V)$; $\mathrm{Aut}_{\mathrm{PI}}(V \bmod A)$ et $\mathrm{Plgt}^{\mathrm{V}}_{\mathrm{PI}}(E, W, g_0)$.

D. *Espaces de pseudo-isotopie semi-linéaires.* — Si V et W sont des polyèdres, on définit $(\mathrm{Inj}_{\mathrm{PI}}(V, W))_p$ comme l'ensemble des injections de $\Delta_p \times V$ dans $\Delta_p \times W$ qui, pour toute face $\Delta_q \to \Delta_p$ de Δ_p induisent une injection de $\Delta_q \times V$ dans $\Delta_q \times W$. On définit des applications f_i comme dans le cas différentiable, malheureusement les applications $d_i g$ définies comme ci-dessus ne sont en général pas semi-linéaires. Plus exactement, une condition nécessaire et suffisante pour que l'application $d_i g$ soit semi-linéaire est que g respecte la $i^{\text{ème}}$ coordonnée barycentrique de Δ_p. On ne peut donc pas construire ainsi un ensemble semi-simplicial; l'objet du paragraphe 2 ci-dessous est de définir une catégorie qui englobe l'objet (sans dégénérescences) qu'on vient de définir. En fait, on pourrait s'arranger pour construire tout de même des dégénérescences, mais il faudrait faire un certain nombre de choix, et l'on perdrait toutes les fonctorialités qu'on attend (et que je n'ai pas détaillées), en particulier $\mathrm{Aut}_{\mathrm{PI}}(V)$ ne serait pas un groupe semi-simplicial.

2. Ensembles quasi-simpliciaux. — On notera Δ' la sous-catégorie de la catégorie simpliciale Δ formée des mêmes objets et dont les morphismes sont les morphismes injectifs de Δ (ceux qui sont engendrés par les faces).

Définition. — Un ensemble quasi-simplicial est un foncteur de Δ' dans la catégorie des ensembles, c'est-à-dire la donnée d'une suite d'ensembles $(X_n)_{n\geqq 0}$ et, pour tout n et tout i $(0\leqq i\leqq n)$, d'une application $f_i : X_n \to X_{n-1}$ (appelée $i^{\text{ième}}$ opérateur de face); les f_i étant astreintes à vérifier la relation

$$(\alpha)\quad f_j f_i = f_i f_{j+1} \quad \text{chaque fois que } i\leqq j.$$

Les éléments de X_n seront appelés les n-simplexes de X.

Si X et X′ sont deux ensembles quasi-simpliciaux, un morphisme de X dans X′ est un morphisme de foncteurs, c'est-à-dire une suite d'applications $(g_n)_{n\geqq 0}$, $(g_n : X_n \to X'_n)$ telles que, pour tout n et tout i, $g_{n-1} f_i = f_i g_n$.

Remarque. — Un groupe quasi-simplicial est un foncteur (contravariant) de Δ' dans la catégorie des groupes.

Exemples. — A. Tout ensemble semi-simplicial est muni naturellement d'une structure d'ensemble quasi-simplicial (il suffit d'oublier les dégénérescences).

B. Un complexe simplicial X définit naturellement un ensemble quasi-simplicial (formé des simplexes non dégénérés de l'ensemble semi-simplicial habituellement associé à X). Ceci ne définit par un foncteur de la catégorie des complexes simpliciaux et applications simpliciales dans la catégorie des ensembles quasi-simpliciaux. Pour avoir un tel foncteur il faut prendre pour morphismes de la catégorie des complexes simpliciaux, les applications simpliciales qui sont injectives sur chaque simplexe (non dégénéré).

C. *Espaces de pseudo-isotopie semi-linéaires* (*cf.* § 1, exemple D). — On vérifie que les applications f_i définies ci-dessus vérifient la condition α. On a donc défini un ensemble quasi-simplicial $\mathrm{Inj}_{\mathrm{PI}}(V, W)$. On définit le sous-ensemble quasi-simplicial $\mathrm{Plgt}_{\mathrm{PI}}(V, W)$ formé des simplexes de $\mathrm{Inj}_{\mathrm{PI}}(V, W)$ qui vérifient la condition (1) (*cf.* § 1, exemple B). On définit aussi $\mathrm{Plgt}_{\mathrm{PI}}(V, W, f_0)$ et $\mathrm{Plgt}^{\mathrm{M}}_{\mathrm{PI}}(V, W, f_0)$. On définit de la même façon le groupe quasi-simplicial $\mathrm{Aut}_{\mathrm{PI}}(\mathrm{V}, (\mathrm{V}_i) \bmod \mathrm{V}')$ (automorphismes de V qui, pour tout i, induisent un automorphisme de V_i, et sont l'identité sur V').

Remarques. — 1° Les ensembles quasi-simpliciaux et semi-simpliciaux font partie de la classe d'objets mathématiques qu'on désignera sous le vocable d'espaces quand il n'y aura aucune ambiguïté sur leur nature.

2° La catégorie des ensembles quasi-simpliciaux est munie de produits. Le produit de X et de Y a pour ensemble de n-simplexes l'ensemble $\mathrm{X}_n \times \mathrm{Y}_n$ et, pour tout i, $f_i(x, y) = (f_i(x), f_i(y))$. Le foncteur d'oubli des dégénérescences de la catégorie des ensembles semi-simpliciaux dans la catégorie des ensembles quasi-simpliciaux commute donc aux produits.

3° Soit X un ensemble semi-simplicial, et S un complexe simplicial. Notons $\bar{\mathrm{S}}$ l'ensemble semi-simplicial attaché à S. Toute application quasi-simpliciale de S dans X se prolonge en une application semi-simpliciale de $\bar{\mathrm{S}}$ dans X. Ceci définit une correspondance bijective des applications (quasi-simpliciales) de S dans X, sur les applications (semi-simpliciales) de $\bar{\mathrm{S}}$ dans X.

3. Les fibrés principaux quasi-simpliciaux. — Dans ce qui suit, G désigne un groupe quasi-simplicial qui vérifie la condition de Kan. (Pour définir la condition de Kan, on remarque que la définition habituelle pour les ensembles semi-simpliciaux ne fait pas intervenir les dégénérescences, on peut donc la recopier pour les ensembles quasi-simpliciaux.)

Exemple. — Les espaces $\mathrm{Aut}_{\mathrm{PI}}$ et $\mathrm{Plgt}_{\mathrm{PI}}$ définis ci-dessus vérifient la condition de Kan. Je vais faire la démonstration pour $\mathrm{Aut}_{\mathrm{PI}}(\mathrm{V})$. [Ce n'est pas une conséquence du fait que $\mathrm{Aut}_{\mathrm{PI}}(\mathrm{V})$ est un groupe !]. Soit A la réunion de toutes les faces de $\Delta_p\,(p \geqq 1)$ sauf une, il suffit de montrer que tout automorphisme φ de $\mathrm{A} \times \mathrm{V}$ qui, pour toute face F de Δ_p contenue dans A définit un automorphisme de $\mathrm{F} \times \mathrm{V}$, se prolonge en un p-simplexe de $\mathrm{Aut}_{\mathrm{PI}}(\mathrm{V})$. Soit α un isomorphisme de Δ_p sur $\mathrm{A} \times \mathrm{I}$ qui envoie A identiquement sur $\mathrm{A} \times \{0\}$. $(\alpha \times \mathrm{Id}_{\mathrm{V}})^{-1}\,(\varphi \times \mathrm{Id}_{\mathrm{I}})\,(\alpha \times \mathrm{Id}_{\mathrm{V}})$ est un p-simplexe de $\mathrm{Aut}_{\mathrm{PI}}(\mathrm{V})$ et coïncide avec φ sur $\mathrm{A} \times \mathrm{V}$.

Définition. — On dira que l'ensemble quasi-simplicial X est muni d'une structure de fibré principal de groupe G si, pour tout n, on a une opération de G_n sur X_n, de telle façon que :

1° $\forall\, x \in \mathrm{X}_n$, $\forall\, g \in \mathrm{G}_n$, $\forall\, i\ (0 \leqq i \leqq n) : f_i(gx) = f_i(g)\, f_i(x)$;

2° $\forall\, n$, G_n opère de façon simplement transitive sur X_n.

Base. — Pour tout n, on pose $B_n = \frac{X_n}{G_n}$. Les f_i définissent (à cause de la condition 1) des applications $f_i : B_n \to B_{n-1}$ qui vérifient la relation α. On a donc défini un ensemble quasi-simplicial B, qui sera appelé la base du fibré X. L'application naturelle de X dans B est un morphisme. G vérifie la condition de Kan, donc cette application vérifie la condition de Kan. On l'appelle la projection du fibré. On appellera section du fibré tout morphisme $s : B \to X$ qui, composé avec la projection, donne l'application identique de B.

DÉFINITION. — Soient X et X′ deux fibrés principaux de groupe G; on dira que le morphisme $f : X \to X'$ est un morphisme de fibrés de groupe G si, $\forall\, n$, $\forall\, x \in X_n$, $\forall\, g \in G_n : f(gx) = gf(x)$.

Remarques. — 1° Si $G \times X \to X$ est un fibré principal semi-simplicial, le foncteur « oubli des dégénérescences » le transforme en un fibré principal quasi-simplicial.

2° Si A est un ensemble quasi-simplicial, et si X est un fibré principal quasi-simplicial de groupe G et de base B, $X \times A$ est un fibré principal quasi-simplicial de groupe G et de base $B \times A$. En particulier, $G \times A$ est un fibré principal de groupe G et de base A, c'est le fibré trivial de base A.

3° Le fait que le groupe G vérifie la condition de Kan entraîne que la projection des fibrés de groupe G vérifie la condition de Kan.

4° Tout morphisme de fibrés $f : X \to X'$ qui induit un isomorphisme sur les bases est un isomorphisme (on montre facilement que, $\forall\, n$, $f_n : X_n \to X'_n$ est un isomorphisme). En particulier, les trivialisations d'un fibré correspondent biunivoquement à ses sections. Ceci implique en particulier que tout fibré de base Δ_p est trivial.

LEMME. — *Soit* X *un fibré de base* B *et de groupe* G, *et soit* φ *un morphisme de* B′ *dans* B. G *opère naturellement sur* $X \times_B B'$. *Cette opération définit sur* $X \times_B B'$ *une structure de fibré de groupe* G, *dont la base s'identifie naturellement à* B′. *Ce fibré est le seul fibré de base* B′ *et de groupe* G (*à isomorphisme près*) *tel qu'il existe un morphisme de ce fibré dans* X *qui induise* φ *sur les bases.*

DÉFINITION. — $X \times_B B'$ est appelé l'image réciproque de (X, B) par φ. Si φ est l'injection naturelle d'un sous-ensemble quasi-simplicial dans B, on l'appelle encore la restriction de X à B′, et on le note $X | B'$.

Remarque. — La catégorie des fibrés principaux de groupe G, et morphismes de fibrés de groupes G a des limites inductives. La base d'une limite inductive est la limite inductive des bases.

THÉORÈME. — *Soit* B *un complexe simplicial, et soit* C *un sous-complexe simplicial de* B, *tel que* B *collapse sur* C. (*On rappelle que* G *vérifie la condition de Kan.*)

a. Tout fibré de groupe G *et de base* C *s'étend en un fibré de groupe* G *et de base* B.

b. Soient deux fibrés X *et* X' *de groupe* G *et de base* B; *tout isomorphisme* f *de* $X|C$ *sur* $X'|C$, *s'étend en un isomorphisme* F *de* X *sur* X'.

Démonstration. — Il suffit de démontrer ces assertions quand B collapse élémentairement sur C. Ce sont alors des conséquences triviales du fait que les fibrés de base Δ_p sont triviaux, et du fait que G, donc aussi la projection des fibrés de groupe G, vérifie la condition de Kan.

COROLLAIRE 1. — *Soient* B *un complexe simplicial et* C *un sous-complexe simplicial de* B. *Soient* X *un fibré de groupe* G *et de base* $B\times I$ (*produit, au sens habituel, des complexes simpliciaux* B *et* I), *et* f *un isomorphisme de* $X|C\times I$ *sur* $(X|C\times\{o\})\times I$, *alors* f *se prolonge en un isomorphisme* F *de* X *sur* $(X|B\times\{o\})\times I$.

COROLLAIRE 2. — *Soient* B *un complexe simplicial et* C *un sous-complexe simplicial de* B. *Soit* X *un fibré de groupe* G *et de base le complexe simplicial* $B\times I$. *Soit* $\mu : C\times I\times G \to X$ *une trivialisation de* X *au-dessus de* $C\times I$; *il existe un isomorphisme* φ *de* $X|B\times\{o\}$ *sur* $X|B\times\{1\}$, *tel que*

$$\mu|C\times\{1\}\times G=\varphi|(X|C\times\{o\}).\mu|C\times\{o\}\times G.$$

EXEMPLES. — A. Soit V une sous-variété de la variété semi-linéaire W, et soit M une sous-variété de V. On note f_0 l'injection naturelle de V dans W. $\mathrm{Aut}_{\mathrm{PI}}(W \bmod dW\cup V)$ est un sous-groupe quasi-simplicial de $\mathrm{Aut}_{\mathrm{PI}}(W \bmod dW\cup M)$. L'opération naturelle du sous-groupe sur le groupe fait de $\mathrm{Aut}_{\mathrm{PI}}(W \bmod dW\cup M)$ un fibré principal de groupe $\mathrm{Aut}_{\mathrm{PI}}(W \bmod dW\cup V)$, dont la base s'identifie à un sous-ensemble quasi-simplicial de $\mathrm{Plgt}^{M}_{\mathrm{PI}}(V, W, f_0)$.

B. Soit V une sous-variété de la variété semi-linéaire W. Soit E un voisinage dérivé de V dans W, et soit g_0 l'injection naturelle de E dans W. $\mathrm{Aut}_{\mathrm{PI}}(W \bmod dW\cup E)$ est un sous-groupe quasi-simplicial de $\mathrm{Aut}_{\mathrm{PI}}(W \bmod dW\cup V)$, ce qui définit une fibration principale dont la base s'identifie à un sous-ensemble quasi-simplicial de $\mathrm{Plgt}^{V}_{\mathrm{PI}}(E, W, g_0)$.

C. Soient V une sous-variété de la variété semi-linéaire W, M une sous-variété de V, et f_0 l'injection naturelle de V dans W. $\mathrm{Aut}_{\mathrm{PI}}(V \bmod dV\cup M)$ opère sur $\mathrm{Plgt}^{M}_{\mathrm{PI}}(V, W, f_0)$, ce qui définit une fibration principale. La base B est l'espace (PI) des sous-variétés de (W, M) isomorphes à (V, M). Cet espace est muni naturellement d'une structure d'ensemble semi-simplicial En effet : si l'on regarde la définition des $d_i g$ dans l'exemple D du paragraphe 1, on s'aperçoit que pour un g quelconque, $d_i g$ n'est pas, en général, une application semi-linéaire, mais son image est une sous-variété semi-linéaire de $\Delta_{p+1} \times W$ qui ne dépend que de l'image de g. Ceci définit de façon naturelle des dégénérescences dans l'ensemble quasi-simplicial B, qui est donc muni d'une structure semi-simpliciale naturelle.

Nota. — Le chapitre IV ci-dessous précisera les bases des fibrations A et B ci-dessus.

DÉFINITION. — *Fibrés de fibre* F, *à groupe structural.* — Soit F un ensemble quasi-simplicial, et G un groupe quasi-simplicial (qui vérifie la condition de Kan) qui opère transitivement sur F. Un fibré de base B, de fibre F et de groupe structural G, est la donnée d'un ensemble quasi-simplicial E, d'une projection $\varpi : E \to B$ (surjective), et :

1° pour toute application $\varphi : \Delta_p \to B$, d'un isomorphisme

$$\eta_\varphi : \quad \Delta_p \times_B E \to \Delta_p \times F;$$

2° pour tout triple d'applications $\varphi : \Delta_p \to B$, $\varphi' : \Delta_{p'} \to B$ et $\pi : \Delta_{p'} \to \Delta_p$, tel que $\varphi . \pi = \varphi'$, d'un simplexe $g_{\varphi'\varphi} \in G_{p'}$, tel que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \Delta_{p'} \times_B E & \xrightarrow{\eta_{\varphi'}} & \Delta_{p'} \times F \\ \downarrow{\scriptstyle \pi \times_B \mathrm{Id}_E} & & \downarrow{\scriptstyle \pi \times g_{\varphi'\varphi}} \\ \Delta_p \times_B E & \xrightarrow{\eta_\varphi} & \Delta_p \times F \end{array}$$

soit commutatif;

— ceci de telle façon que, quel que soit le triple $(\varphi, \varphi', \varphi'')$ on ait $\pi(g_{\varphi\varphi'})\, g_{\varphi'\varphi''} = g_{\varphi\varphi''}$.

En particulier, tout fibré principal de groupe G est un fibré de fibre G et de groupe structural G. Si E est un fibré principal de groupe G, $E \times F/G$ [où G opère sur $E \times F$ par $g(e, f) = (ge, gf)$] est un fibré de fibre F et de groupe structural G. Ceci définit une équivalence entre les fibrés principaux de groupe G et les fibrés de fibre F et de groupe structural G.

4. GROUPES D'HOMOTOPIE (*cf.* [22] : Groupes d'homotopie, 1re définition (chap. I, § 3)). — Si l'on regarde la référence ci-dessus, on remarque que la définition et les propriétés des groupes d'homotopie d'un ensemble semi-simplicial de Kan ne font pas intervenir les opérateurs de dégénérescence. Ceci permet de récrire toute la théorie des groupes d'homotopie

pour les ensembles quasi-simpliciaux qui vérifient la condition de Kan et sont munis de points de base (où l'on appelle point de base d'un ensemble quasi-simplicial X un sous-ensemble quasi-simplicial de X isomorphe à l'ensemble quasi-simplicial sous-jacent à l'ensemble semi-simplicial Δ_0). Je ne le ferai pas. On peut récrire les théories classiques : suites exactes d'homotopie des fibrés, etc.

Exemples. — Je vais donner une description géométrique des groupes d'homotopie des espaces de plongements et d'automorphismes que j'ai définis dans les paragraphes précédents. Pour ne pas allonger inutilement, je ne le ferai que pour l'espace des automorphismes d'une variété V qui sont l'identité sur le bord.

A. $\pi_i(\mathrm{Aut}_{\mathrm{PI}}(\mathrm{V} \bmod d\mathrm{V}))$. — Les éléments de ce groupe sont représentés par les automorphismes de $\mathrm{D}^i \times \mathrm{V}$ qui sont l'identité sur

$$d(\mathrm{D}^i \times \mathrm{V}) = \mathrm{S}^{i-1} \times \mathrm{V} \cup \mathrm{D}^i \times d\mathrm{V}.$$

Deux tels automorphismes f_0 et f_1 sont équivalents s'il existe un automorphisme F de $\mathrm{D}^i \times \mathrm{V} \times \mathrm{I}$ qui est l'identité sur $d(\mathrm{D}^i \times \mathrm{V}) \times \mathrm{I}$, et tel que

$$\mathrm{F} \mid \mathrm{D}^i \times \mathrm{V} \times \{0\} = f_0 \qquad \text{et} \qquad \mathrm{F} \mid \mathrm{D}^i \times \mathrm{V} \times \{1\} = f_1.$$

B. $\pi_i(\mathrm{Aut}_{\mathrm{I}}(\mathrm{V} \bmod d\mathrm{V}))$. — Les éléments de ce groupe sont représentés par les automorphismes de $\mathrm{D}^i \times \mathrm{V}$ qui sont l'identité sur $d(\mathrm{D}^i \times \mathrm{V})$ et qui respectent la projection sur D^i. Deux tels automorphismes f_0 et f_1 sont équivalents s'il existe un automorphisme F de $\mathrm{D}^i \times \mathrm{V} \times \mathrm{I}$, qui est l'identité sur $d(\mathrm{D}^i \times \mathrm{V}) \times \mathrm{I}$ et respecte la projection sur $\mathrm{D}^i \times \mathrm{I}$, et tel que

$$\mathrm{F} \mid \mathrm{D}^i \times \mathrm{V} \times \{0\} = f_0 \qquad \text{et} \qquad \mathrm{F} \mid \mathrm{D}^i \times \mathrm{V} \times \{1\} = f_1.$$

C. $\pi_i(\mathrm{Aut}_{\mathrm{PI}}(\mathrm{V} \bmod d\mathrm{V}), \mathrm{Aut}_{\mathrm{I}}(\mathrm{V} \bmod d\mathrm{V}))$ [qu'on notera

$$\pi_i^{\mathrm{rel}}(\mathrm{Aut}(\mathrm{V} \bmod d\mathrm{V}))$$

pour abréger les notations]. — Les éléments de ce groupe sont représentés par des automorphismes de $\mathrm{D}^i \times \mathrm{V}$ qui sont l'identité sur $\mathrm{D}^i \times d\mathrm{V}$ et sur $\mathrm{S}_+^{i-1} \times \mathrm{V}$ (où S_+^{i-1} est une demi-sphère de S^{i-1}, et S_-^{i-1} la demi-sphère complémentaire) et dont la restriction à $\mathrm{S}_-^{i-1} \times \mathrm{V}$ respecte la projection sur S_-^{i-1}. Deux tels automorphismes sont équivalents s'il existe un automorphisme F de $\mathrm{D}^i \times \mathrm{V} \times \mathrm{I}$, qui est l'identité sur $(\mathrm{D}^i \times d\mathrm{V} \cup \mathrm{S}_+^{i-1} \times \mathrm{V}) \times \mathrm{I}$, dont la restriction à $\mathrm{S}_-^{i-1} \times \mathrm{I} \times \mathrm{V}$ respecte la projection sur $\mathrm{S}_-^{i-1} \times \mathrm{I}$, et tel que

$$\mathrm{F} \mid \mathrm{D}^i \times \mathrm{V} \times \{0\} = f_0 \qquad \text{et} \qquad \mathrm{F} \mid \mathrm{D}^i \times \mathrm{V} \times \{1\} = f_1.$$

CHAPITRE II.

PSEUDOFIBRÉS ET TUBES.

1. PSEUDOFIBRÉS (²). — Soit $|\Sigma| \to X$ une triangulation d'un polyèdre X, et soit (F, F′) un couple de polyèdres; considérons un fibré principal semi-simplicial $\mathcal{F}$ de base Σ et de groupe $\mathrm{Aut}_{\mathrm{I}}(\mathrm{F} \bmod \mathrm{F}')$. Une construction classique associe à ces données leur réalisation géométrique qui est un fibré $|\mathcal{F}|$ de base X et de fibre F, muni d'un sous-fibré trivialisé de base X et de fibre F′. Rappelons la construction de cette réalisation géométrique :

A tout simplexe s de $\mathcal{F}$ on associe le polyèdre $|s| \times \mathrm{F}$ et l'on effectue les recollements définis par les applications :

a. $g : |s| \times \mathrm{F} \to |s'| \times \mathrm{F}$, chaque fois que $s' = sg$ $(g \in \mathrm{Aut}_{\mathrm{I}}(\mathrm{F} \bmod \mathrm{F}'))$;

b. $|\varphi| \times \mathrm{Id}_{\mathrm{F}} : |s'| \times \mathrm{F} \to |s| \times \mathrm{F}$, chaque fois que $s' = \varphi . s$ (φ étant un opérateur de face ou de dégénérescence).

La projection sur X est déduite des projections

$$|s| \times \mathrm{F} \to |s| \to |\pi(s)|$$

(π désignant la projection de $\mathcal{F}$ sur Σ). Le sous-fibré est l'image des $|s| \times \mathrm{F}'$, il est naturellement trivialisé.

Soit maintenant un fibré principal quasi-simplicial $\mathcal{F}_1$, de base Σ et de groupe $\mathrm{Aut}_{\mathrm{PI}}(\mathrm{F} \bmod \mathrm{F}')$; la même construction associe à $\mathcal{F}_1$, un polyèdre $|\mathcal{F}_1|$, mais pas de projection de $|\mathcal{F}_1|$ sur X, car les fonctions qui définissent les recollements ne respectent pas les projections $|s| \times \mathrm{F} \to |\pi(s)|$. Cependant pour tout simplexe σ de Σ, il existe un sous-polyèdre de $|\mathcal{F}_1|$ qui est l'image de $|s| \times \mathrm{F}$, pour tous les s tels que $\pi(s) = \sigma$; ce sous-polyèdre joue le rôle du paquet des fibres qui sont au-dessus des points de σ. Si $\mathrm{F}' \neq \emptyset$, on a un sous-polyèdre $|\mathcal{F}'_1|$ de $|\mathcal{F}_1|$ qui est naturellement identifié à $\mathrm{X} \times \mathrm{F}'$. Plus généralement :

DÉFINITION 1. — Étant donnés un polyèdre X, une triangulation Σ de X, un polyèdre F et une famille $((\mathrm{F}_i), \mathrm{F}')$ de sous-polyèdre de F (on notera j_0 l'injection naturelle de F′ dans F), on appellera *pseudofibré* de

(²) Notion qui n'a rien de commun avec celle qui a été introduite par Mme M. H. SCHWARTZ dans le *Bulletin de la Société mathématique de France*, 1960, p. 1 à 55.

base (X, Σ) et de fibre $(F, (F_i) \bmod F')$ un heptuple $(X, E, (E_i), E', j, \Sigma, (E_\sigma))$, où E est un polyèdre, les E_i des sous-polyèdres de E, j un isomorphisme de $X \times F'$ sur le sous-polyèdre E' de E, et les $E_\sigma (\sigma \in \Sigma)$ des sous-polyèdres de E, tels que :

(1) $\forall \sigma, \sigma' \in \Sigma : E_\sigma \cap E_{\sigma'} = E_{\sigma \cap \sigma'}$;

(2) $\bigcup_{\sigma \in \Sigma} E_\sigma = E$;

(3) $\forall \sigma \in \Sigma$, il existe un isomorphisme φ_σ de $\sigma \times F$ sur E_σ, tel que :

(α) $\forall i : \varphi_\sigma(\sigma \times F_i) = E_\sigma \cap E_i$ [on posera souvent $E_\sigma \cap E_i = (E_\sigma)_i$] et $\varphi_\sigma | \sigma \times F' = j | \sigma \times F'$ (on posera $E_\sigma \cap E' = E'_\sigma$).

(β) $\forall \sigma' \in \Sigma, \sigma' \subset \sigma : \varphi_\sigma(\sigma' \times F) = E_{\sigma'}$.

Remarque. — Si $(X, E, (E_i), E', j, \Sigma, (E_\sigma))$ est un pseudofibré de fibre $(F, (F_i) \bmod F')$, $(X, E, \Sigma, (E_\sigma))$ est un pseudofibré de fibre F [i. e. $(F, (\emptyset) \bmod \emptyset)$]; et, pour tout i, $(X, E_i, \Sigma, (E_\sigma)_i)$ est un pseudofibré de fibre F_i.

Il est clair que la réalisation géométrique décrite ci-dessus associe à tout fibré principal quasi-simplicial de base Σ et de groupe $\mathrm{Aut}_{\mathrm{PI}}(F, (F_i) \bmod F')$, un pseudofibré de base (X, Σ) et de fibre $(F, (F_i) \bmod F')$. Inversement à tout pseudofibré de base (X, Σ) et de fibre $(F, (F_i) \bmod F')$ on fait correspondre un fibré principal $\mathcal{F}$ de base Σ et de groupe $\mathrm{Aut}_{\mathrm{PI}}(F, (F_i) \bmod F')$ de la façon suivante : les simplexes de $\mathcal{F}$ sont toutes les applications φ_σ qui peuvent intervenir dans la définition du pseudofibré, l'action du groupe sur l'ensemble de ces applications est évidente, ainsi que la définition des opérateurs de face (il n'y a pas de dégénérescence puisqu'on est dans le cadre quasi-simplicial). Ces deux correspondances sont, bien entendu, inverses l'une de l'autre. On aura même deux foncteurs réciproques entre la catégorie des fibrés principaux de groupe $\mathrm{Aut}_{\mathrm{PI}}(F, (F_i) \bmod F')$ dont la base est un complexe simplicial (localement fini et dénombrable à l'infini) et celle des pseudofibrés de fibre $(F, (F_i) \bmod F')$, si l'on pose la définition :

Définition 2. — Un *morphisme* du *pseudofibré* $(X, E, (E_i), j, \Sigma, (E_\sigma))$ dans le pseudofibré $(Z, G, (G_i), G', k, S, (G_s))$ [tous deux de fibre $(F, (F_i) \bmod F')$] est un couple d'applications $f : X \to Z$ et $E \to G$ tel que :

a. f soit la réalisation géométrique d'un morphisme quasi-simplicial de Σ dans S [c'est-à-dire une application simpliciale de (X, Σ) dans (Z, S) injective sur chaque simplexe non dégénéré].

b. $\forall i : g^{-1}(G_i) = E_i$; pour tout simplexe σ de Σ : $g(E_\sigma) = G_{f(\sigma)}$; et $gj = k.(f \times \mathrm{id}_{F'})$.

Je laisse au lecteur le soin d'en déduire les isomorphismes. Je précise cependant qu'une trivialisation du pseudofibré $(X, E, (E_i), j, \Sigma, (E_\sigma))$ est un isomorphisme g de $X \times F$ sur E tel que, $\forall i$, $g(X \times F_i) = E_i$, que $g \mid X \times F' = j$, et que, $\forall \sigma \in \Sigma$, $g(\sigma \times F) = E_\sigma$.

2. Changements de triangulation et théorème d'homotopie. — La notion de pseudofibré définie au paragraphe 1 est étroitement dépendante d'une triangulation du polyèdre de base. Je vais étudier cette dépendance. Je démontrerai d'abord trois lemmes :

Lemme 1. — *Soit* $(X, E, (E_i), E', j, \Sigma, (E_\sigma))$ *un pseudofibré de fibre* $(F, (F_i) \bmod F')$. *Soient* U *et* U' *deux sous-polyèdres de* X *qui sont des sous-complexes de* Σ, *tels que* $U' \subset U$ *et que* U *collapse sur* U'. *Toute trivialisation* $f' : U' \times F \to E$, *définie au-dessus de* U', *se prolonge en une trivialisation au-dessus de* U.

En particulier, si Σ *est une triangulation de* D^p, *tout pseudofibré de base* (D^p, Σ) *est trivial.*

Je ne sais pas démontrer ce lemme directement, je remarquerai cependant que, si U collapse simplicialement sur U' pour Σ, il résulte, par réalisation géométrique, du théorème du paragraphe 3 du chapitre I; il est donc déjà démontré dans ce cas particulier.

Lemme 2. — *Considérons le quintuple* $(\Delta_p, \Delta_p \times F, (\Delta_p \times F_i), \Delta_p \times F'$ $\mathrm{Id}_{\Delta_p} \times j_0)$, *et soit* Σ *une triangulation de* $d\Delta_p$ *qui subdivise la triangulation naturelle. Soit* $(E_\sigma)_{\sigma \in \Sigma}$ *une famille de sous-polyèdre de* $d\Delta_p \times F$, *telle que* $(d\Delta_p, d\Delta_p \times F, (d\Delta_p \times F_i), d\Delta_p \times F', \mathrm{Id}_{d\Delta_p} \times j_0, \Sigma, (E_\sigma))$ *soit un pseudofibré de fibre* $(F, (F_i), \bmod F')$ *et que, pour toute face* f_k *de* Δ_p : $\bigcup_{\sigma \subset f_k} E_\sigma = f_k \times F$. *Alors il existe un automorphisme* η *de* $\Delta_p \times F$, *qui induit,* $\forall i$, *un automorphisme de* $\Delta_p \times F_i$, *qui est l'identité sur* $\Delta_p \times F'$, *et tel que, pour tout simplexe* σ *de* Σ, *on ait* $\eta(\sigma \times F) = E_\sigma$. *Ce qui entraîne que, pour toute face* f_k *de* Δ_p, *on ait :* $\eta(f_k \times F) = f_k \times F$.

Lemme 3. — *Soit* $(X, E, (E_i), E', j, \Sigma, (E_\sigma))$ *un pseudofibré de fibre* $(F, (F_i) \bmod F')$. *Soit* Σ' *une subdivision de* Σ. *Il existe une famille de sous-polyèdres* $(D_{\sigma'})_{\sigma' \in \Sigma'}$ *faisant de* $(X, E, (E_i), E', j, \Sigma', (D_{\sigma'}))$ *un pseudofibré de fibre* $(F, (F_i) \bmod F')$, *et telles que,* $\forall \sigma \in \Sigma$, $\bigcup_{\sigma' \subset \sigma} D_{\sigma'} = E_\sigma$.

De plus on peut se donner a priori *les* $D_{\sigma'}$, *vérifiant ces conditions, pour tous les simples* σ' *contenus dans un sous-complexe de* Σ.

Je démontrerai les lemmes 1, 2 et 3 par une récurrence globale. Le schéma de la démonstration est le suivant :

$$\begin{array}{l} \text{Lemme 1 vrai pour } \dim(\mathrm{U}-\mathrm{U}') < i \\ \qquad\qquad \Downarrow \\ \text{Lemme 2 vrai pour } p \leqq i \\ \qquad\qquad \Downarrow \\ \text{Lemme 3 vrai pour } \dim \mathrm{X} \leqq i \\ \qquad\qquad \Downarrow \\ \text{Lemme 1 vrai pour } \dim(\mathrm{U}-\mathrm{U}') \leqq i. \end{array}$$

Tous ces lemmes sont triviaux en dimension zéro. Si $\mathrm{U}-\mathrm{U}'$ dans le lemme 1, ou X dans le lemme 3 ne sont pas de dimension finie, on fait ensuite une récurrence sur les squelettes.

Démonstrations :

A. Lemme 1 $\Rightarrow$ lemme 2 :

Premier cas. — Il existe un simplexe σ_0 de dimension $p-1$ dans Σ, tel que $\mathrm{E}_{\sigma_0} = \sigma_0 \times \mathrm{F}$. On choisit alors un isomorphisme α de $\Delta_{p-1} \times \mathrm{I}$ sur Δ_p, qui envoie $d\Delta_p - \sigma_0$ sur $\Delta_{p-1} \times \{1\}$. On pose $a = \alpha \times \mathrm{Id}_{\mathrm{F}}$. On applique le lemme 1 à la partie du pseudofibré qui est au-dessus de la boule $d\Delta_p - \sigma_0$, ce qui nous donne un automorphisme f de $(d\Delta_p - \sigma_0) \times \mathrm{F}$. Il suffit de poser

$$= a(((a \mid \Delta_{p-1} \times \{1\})^{-1} f(a \mid \Delta_{p-1} \times \{1\})) \times \mathrm{Id}_{\mathrm{I}})\, a^{-1}.$$

Deuxième cas. — Il n'existe pas un tel σ_0. Soit σ_0 un simplexe quelconque d'une face f_k de Δ_p. On applique le lemme 1 avec $\mathrm{U} = f_k$ et $\mathrm{U}' = \sigma_0$, et en prenant pour trivialisation sur U′, l'une des fonctions φ_{σ_0} qui entrent dans la définition des pseudofibrés. On obtient ainsi un $(p-1)$-simplexe g de $\mathrm{Aut}_{\mathrm{PI}}(\mathrm{F}, (\mathrm{F}_i) \bmod \mathrm{F}')$; soit G un p-simplexe de ce groupe, dont g est une face. (Il en existe car le groupe vérifie la condition de Kan.) Il suffit de démontrer le lemme pour la famille de sous-polyèdres $\mathrm{G}^{-1}(\mathrm{E}_\sigma)$, et l'on est ramené au premier cas.

B. Lemme 2 $\Rightarrow$ lemme 3 :

On ordonne les simplexes de Σ de façon que la dimension soit une fonction croissante; et l'on applique le lemme 2 à tous les simplexes de Σ successivement, en les prenant dans l'ordre croissant.

C. Lemme 3 $\Rightarrow$ lemme 1 :

Il suffit de savoir (*cf.* SZ, th. 4) que si U collapse sur U′, il existe une subdivision Σ' de Σ pour laquelle U collapse simplicialement sur U′; on applique alors le lemme 3 et le lemme 1 dans le cas — déjà démontré — où U collapse sur U′ pour la triangulation qui sert à définir le pseudofibré.

Proposition 1. — *Soit* $(\mathrm{X}, \mathrm{E}, (\mathrm{E}_i), \mathrm{E}', j, \Sigma, (\mathrm{E}_\sigma))$ *un pseudofibré de fibre* $(\mathrm{F}, (\mathrm{F}_i) \bmod \mathrm{F}')$. *Si* Σ *est une subdivision d'une triangulation* Σ', *et si l'on pose, pour tout* σ' *de* Σ' : $D_{\sigma'} = \bigcup_{\sigma \subset \sigma'} E_\sigma$; $(X, E, (E_i), E', j, \Sigma', (D_{\sigma'}))$ *est un pseudofibré de fibre* $(F, (F_i) \bmod F')$.

Il suffit de montrer qu'il existe des isomorphismes $\varphi_{\sigma'}$, ce qui est une conséquence immédiate du lemme 1.

Remarque. — Ce pseudofibré est entièrement déterminé par la donnée des E_σ; au contraire, dans le lemme 3, les $D_{\sigma'}$ ne sont pas bien déterminés, à chaque pas de la démonstration on fait le choix d'une des fonctions qui vérifient les conclusions du lemme 2. Du lemme 3 et de la proposition 1, on déduit que, $(X, E, (E_i), E', j)$ étant donné, si pour une triangulation Σ de X il existe des E_σ tels que $(X, E, (E_i), E', j, \Sigma, (E_\sigma))$ soit un pseudofibré de fibre $(F, (F_i) \bmod F')$, pour toute triangulation Σ' de X, il existe des $D_{\sigma'}$ tels que $(X, E, (E_i), E', j, \Sigma', (E_{\sigma'}))$ soit un pseudofibré de fibre $(F, (F_i) \bmod F')$; X est alors régulier de type $(F, (F_i), F')$ dans $(E, (E_i), E')$.

LEMME 4. — *Soit* $\alpha = (X, E, (E_i), E', j, \Sigma, (E_\sigma))$ *un pseudofibré de fibre* $(F, (F_i) \bmod F')$. *Soient* (Y, Σ') *un polyèdre triangulé, et* S *une triangulation de* $X \times Y$ *qui subdivise linéairement la décomposition cellulaire de* $X \times Y$ *dont les cellules sont les produits* $\sigma \times \sigma'$ $(\sigma \in \Sigma, \sigma' \in \Sigma')$. *Il existe une famille de sous-polyèdres* $(D_s)_{s \in S}$ *de* $E \times Y$, *telle que* $(X \times Y, E \times Y, (E_i \times Y), E' \times Y, j \times \mathrm{Id}_Y, S, (D_s))$ *soit un pseudofibré de fibre* $(F, (F_i) \bmod F')$, *et que, pour tout couple* $(\sigma \in \Sigma, \sigma' \in \Sigma')$: $\bigcup_{s \subset \sigma \times \sigma'} D_s = E_\sigma \times \sigma'$.

C'est une généralisation du lemme 3, la démonstration est analogue à celle du lemme 3 : On applique le lemme 2 à toutes les cellules $\sigma \times \sigma'$ successivement, en les prenant par ordre croissant des dimensions. Comme au lemme 3, on peut se donner *a priori* les D_s pour tous les s contenus dans un sous-complexe cellulaire de $\Sigma \times \Sigma'$, et vérifiant les conditions ci-dessus.

THÉORÈME (Théorème d'homotopie). — *Soit* X *un polyèdre muni d'une triangulation* Σ. *Soit* S *une triangulation de* $X \times I$, *qui subdivise la décomposition cellulaire définie par* Σ *et la triangulation naturelle de* I. *Soit* $(X \times I, E, (E_i), E', j, S, (D_s))$ *un pseudofibré de base* $(X \times I, S)$. *Posons*

$$E^0 = \bigcup_{s \subset X \times \{0\}} D_s; \qquad E'^0 = E' \cap E^0 \qquad \textit{et} \qquad E_i^0 = E^0 \cap E_i.$$

$(X, E^0, (E_i^0), E'^0, j \mid X \times \{o\} \times F', S \mid X \times \{o\}, (D_s))$ *est un pseudofibré, et il existe un isomorphisme* $\eta : E^0 \times I \to E$, *qui envoie identiquement* $j(X \times \{o\} \times F') \times I$ *sur* $j(X \times I \times F')$ *et* $E^0 \times \{o\}$ *sur* E^0, *et tel que*, $\forall \sigma \in \Sigma$,

$$\eta\Bigl(\bigcup_{s \subset \sigma \times \{0\}} D_s \times I\Bigr) = \bigcup_{s \subset \sigma \times I} D_s \qquad \textit{et} \qquad \bigcup_{s \subset \sigma \times \{1\}} D_s = \eta\Bigl(\bigcup_{s \subset \sigma \times \{0\}} D_s \times \{1\}\Bigr).$$

Démonstration. — Posons, $\forall \sigma \in \Sigma$, $E_\sigma = \bigcup_{s \subset \sigma \times \{0\}} D_s$; d'après la proposition 1, $(X, E^0, (E_i^0), E'^0, j \mid X \times \{o\} \times F', \Sigma, (E_\sigma))$ est un pseudofibré. Appliquons le lemme 4 à ce pseudofibré, à I (= Y) et à la triangulation S, il donne des sous-polyèdres D'_s de $E^0 \times I$, tels que $(X \times I, E^0 \times I, (E_i^0 \times I), E'^0 \times I, j \mid X \times \{o\} \times F' \times Id_I, S, (D'_s))$ soit un pseudofibré. Il suffit de montrer que ce pseudofibré est isomorphe au pseudofibré donné et plus précisément qu'il existe un isomorphisme qui prolonge l'isomorphisme naturel au-dessus de $X \times \{o\}$ (on a, bien entendu, choisi $D'_s = D_s$ quand $s \subset X \times \{o\}$). Ceci est une conséquence du lemme 3 et du fait qu'on peut construire une subdivision de S telle que $X \times I$ collapse sur X simplicialement.

Corollaire 1. — *Soit* Σ *une triangulation du polyèdre* X *et* Σ' *la triangulation naturelle de* I. *Soit* $(X \times I, E, (E_i), E', j, \Sigma \times \Sigma', (E_s))$ *un pseudofibré. Posons* $E^0 = \bigcup_{s \subset X \times \{0\}} E_s$ *et* $E^1 = \bigcup_{s \subset X \times \{1\}} E_s$, *les pseudofibrés* $(X, E^0, (E^0 \cap E_i), E^0 \cap E', j \mid X \times \{o\} \times F', \Sigma, (E_\sigma))$ *et* $(X, E^1, (E^1 \cap E_i), E^1 \cap E', j \mid X \times \{1\} \times F', \Sigma, (E_\sigma))$ *sont isomorphes.*

On remarquera que ce dernier énoncé est aussi une conséquence du théorème du paragraphe 3 du chapitre I.

Remarque. — Ces deux derniers énoncés ont une forme relative. Si dans le théorème on s'est donné un sous-complexe Y de Σ, et une fonction μ de $\bigcup_{s \subset Y \times \{0\}} D_s \times I$ dans $\bigcup_{s \subset Y \times I} D_s$ qui vérifie les conclusions du théorème au-dessus de $Y \times I$, on peut trouver un η qui prolonge μ.

Corollaire 2. — *Soient* α *et* (Y, Σ') *comme au lemme* 4, *le pseudofibré de base* $(X \times Y, \Sigma \times \Sigma')$ *construit au lemme* 4 *n'est pas déterminé de façon unique, mais il l'est à isomorphisme près. On l'appelle le produit de* α *par* (Y, Σ'); *on le note* $\alpha \times (Y, \Sigma')$ (*ou* $\alpha \times Y$ *s'il n'y a pas de confusion possible*).

On remarquera que, pour tout sommet s de la triangulation Σ' de Y, le pseudofibré de base X obtenu en prenant la restriction de $\alpha \times Y$ à $(X \times \{s\}, \Sigma \times \Sigma' \mid X \times \{s\})$, s'identifie naturellement à α. En particulier, si Y = I, les restrictions de $\alpha \times I$ à $X \times \{o\}$ et à $X \times \{1\}$ s'identifient naturellement à α.

Définition. — Soient α et α' deux pseudofibrés, et soient φ_1 et φ_2 deux isomorphismes de α sur α', qui induisent l'identité sur la base commune (X, Σ); on dira que φ_1 et φ_2 sont *homotopes* s'il existe une triangulation S de I, et un isomorphisme Φ de $\alpha \times (I, S)$ sur $\alpha' \times (I, S)$ qui induit l'identité sur la base, et dont les restrictions à $X \times \{o\}$ et $X \times \{1\}$ sont respectivement φ_1 et φ_2 (modulo les identifications naturelles ci-dessus). Cette relation est évidemment une relation d'équivalence sur l'ensemble des morphismes de α sur α'.

Remarque. — On a vu ci-dessus que $\alpha\times(Y, \Sigma')$ n'est défini qu'à un isomorphisme près. On peut préciser de la façon suivante : Si dans la construction du lemme 4 on fait des choix différents, on obtient des pseudofibrés différents; soient β et β' deux d'entre eux; il existe une méthode naturelle pour construire un isomorphisme de β sur β', mais dans cette méthode on doit faire un certain nombre de choix, et l'isomorphisme ainsi construit n'est pas unique; mais tous les isomorphismes qu'on peut obtenir ainsi sont homotopes.

3. Images réciproques et sommes de Whitney. — Soient

$$\alpha = (X, E, (E_i), E', j, \Sigma, (E_\sigma))$$

un pseudofibré de fibre $(F, (F_i) \operatorname{mod} F')$, (X', Σ') un polyèdre triangulé, et f une application simpliciale (i. e. : dans la catégorie semi-simpliciale) de Σ' dans Σ (on notera également f l'application de X' dans X qui en résulte). Soit $(M(f), M(\Sigma, \Sigma'))$ le mapping cylindre de f, muni de la structure de polyèdre qui résulte de Σ et Σ'. $M(f)$ collapse sur X pour la triangulation $M(\Sigma, \Sigma')$. Soit $(M(f), G, (G_i), G', k, M(\Sigma, \Sigma'), (D_s))$ un pseudofibré de base $(M(f), M(\Sigma, \Sigma'))$ dont la restriction à (X, Σ) est isomorphe à α (on sait qu'il en existe un, et qu'il est unique à isomorphisme près; *cf.* théorème du paragraphe 3 du chapitre I).

Définition. — La restriction de ce pseudofibré à (X', Σ') est appelée l'*image réciproque* de α par f. On note $f^\star(\alpha)$ cette image réciproque.

$f^\star(\alpha)$ n'est pas bien déterminé, mais sa classe d'isomorphisme l'est. Plus précisément si l'on construit $f^\star(\alpha)$ de deux façons différentes, il existe une classe, modulo homotopie, naturelle d'isomorphismes entre les deux pseudofibrés obtenus. Dans la suite, quand un pseudofibré sera défini à un isomorphisme près, ce sera toujours en ce sens. Quand on dira que deux pseudofibrés sont isomorphes, cela signifiera qu'il existe une classe, modulo homotopie, naturelle d'isomorphismes de l'un sur l'autre.

Théorème. — *Si f et g sont homotopes, $f^\star(\alpha)$ et $g^\star(\alpha)$ sont isomorphes.*

C'est une conséquence du théorème du paragraphe 2.

Remarque. — Si f est injective, posons $H = \bigcup\limits_{\sigma\subset f(X')} E_\sigma$, alors $(f(X'), H, (H\cap E_i), H\cap E', j\,|\,f(X')\times F', \Sigma\,|\,f(X'), (E_\sigma))$ est un pseudofibré de base $(f(X'), \Sigma\,|\,f(X'))$ $(\approx (X', \Sigma'))$. Ce pseudofibré est, toujours d'après le théorème d'homotopie, isomorphe à $f^\star(\alpha)$.

On notera que si f est l'application identique de Σ, $f^\star(\alpha)$ et α sont isomorphes; et que si g est une application simpliciale de Σ'' dans Σ', $(f.g)^\star(\alpha)$ et $g^\star(f^\star(\alpha))$ sont isomorphes.

LEMME 1. — *Soient* $\alpha = (X, E, j, \Sigma, (E_\sigma))$ *et* $\beta = (Z, G, k, \Sigma', (G_{\sigma'}))$ *deux pseudofibrés de fibres respectives* $(F \bmod \{a\})$ *et* $(F' \bmod \{a'\})$ (*où* F *et* F' *sont des cônes de sommets respectifs a et a' — et en supprimant dans la notation les images de j et de k*). *Soit* S *une triangulation qui subdivise linéairement la décomposition cellulaire de* $X \times Z$ *dont les cellules sont les* $\sigma \times \sigma'$ $(\sigma \in \Sigma, \sigma' \in \Sigma')$. *Il existe une famille* $(D_s)_{s \in S}$ *de sous-polyèdres de* $E \times G$, *telle que* $(X \times Z, E \times G, (E \times k(Z), j(X) \times G), j(X) \times k(Z), j \times k, S, (D_s))$ *soit un pseudofibré de fibre* $(F \times F', (F \times \{a'\}, \{a\} \times F') \bmod \{(a, a')\})$, *et que*, $\forall \sigma \in \Sigma$ *et* $\forall \sigma' \in \Sigma'$: $\bigcup_{s \subset \sigma \times \sigma'} D_s = E_\sigma \times G_{\sigma'}$.

C'est une généralisation du lemme 3 du paragraphe 2; on le démontre en appliquant le lemme 2 du paragraphe 2, successivement à toutes les cellules $\sigma \times \sigma'$. J'aurais pu réunir les lemmes 3 et 4 du paragraphe 2 et ce lemme sous un même énoncé; je ne l'ai pas fait car cet énoncé serait beaucoup trop compliqué, et inutile sous sa forme la plus générale.

DÉFINITION 1. — Ce pseudofibré est appelé la somme externe de α et β, on le note $\alpha \underset{\text{Ext}}{\oplus} \beta$. Il n'est pas déterminé de façon unique, mais il l'est à isomorphisme près; c'est une conséquence de la forme relative du lemme ci-dessus (que je n'ai pas énoncée pour ne pas alourdir l'énoncé) et du théorème d'homotopie du paragraphe 2.

DÉFINITION 2. — Étant donnés deux pseudofibrés α et β de base (X, Σ), on appelle somme de Whitney de α et β, et l'on note $\alpha \oplus \beta$, l'image réciproque de $\alpha \underset{\text{Ext}}{\oplus} \beta$ par l'application diagonale $(X, \Sigma) \to (X \times X, \Sigma \times \Sigma)$.

Remarques. — 1° $\alpha \oplus \beta$ et $\beta \oplus \alpha$ sont isomorphes; $(\alpha \oplus \beta) \oplus \gamma$ et $\alpha \oplus (\beta \oplus \gamma)$ sont isomorphes.

2° Si f est simpliciale de (X', Σ') dans (X, Σ), $f^\star(\alpha \oplus \beta)$ et $f^\star(\alpha) \oplus f^\star(\beta)$ sont isomorphes.

LEMME 2. — *Soient* $\alpha = (X, D, j, \Sigma, (D_\sigma))$ *un pseudofibré de fibre* $(F \bmod \{a\})$ *et* S *une triangulation de* $(D, j(X))$ *telle que*, $\forall \sigma \in \Sigma$, D_σ *soit un sous-complexe de* S. *Soit* $\beta = (D, G, k, S, (G_s))$ *un pseudofibré de fibre* $(F' \bmod \{a'\})$. *Posons*, $\forall \sigma \in \Sigma$, $B_\sigma = \bigcup_{s \subset D_\sigma} G_s$. *Alors* $\left(X, G, \left(k(D), \bigcup_{s \subset j(X)} G_s\right), k.j(X), k.j, \Sigma, (B_\sigma)\right)$ *est un pseudofibré de fibre* $(F \times F', (F \times \{a\}, \{a'\} \times F') \bmod \{(a, a')\})$; *on l'appelle le composé des deux pseudofibrés* α *et* β.

Pour montrer ce lemme il suffit de trouver, pour tout σ, un isomorphisme de B_σ sur $\sigma \times (F \times F')$, qui jouisse des propriétés voulues. Cet isomorphisme est donné par le lemme 1 du paragraphe 2, qu'on applique à chaque D_σ (D_σ est isomorphe à $\sigma \times F$, donc collapse sur chacun de ses points).

Théorème 2. — *Soient* $\eta = (Z, E, j, \Sigma', (E_{\sigma'}))$ *et* $\eta' = (Z, E', j', \Sigma', (E'_{\sigma'}))$ *deux pseudofibrés de base* (Z, Σ') *et de fibres respectives* $(F \bmod \{a\})$ et $(F' \bmod \{a'\})$. *Soit* π *une projection de* E *sur* $j(Z)$, *telle que* $\pi . j = \mathrm{Id}_Z$. $\pi^\star(\eta')$ *est un pseudofibré de base* (E, S) (*pour une triangulation appropriée* S *de* E). *Le pseudofibré composé de* η *et de* $\pi^\star(\eta')$ *est isomorphe à* $\eta \oplus \eta'$.

Démonstration. — Remarquons d'abord que, avec les notations du lemme 2, si $f : Z \to X$ est une injection (simpliciale d'une triangulation Σ' de Z dans Σ), et si $f^\star(\alpha) = (Z, G, k, T, (G_t))$, on a une injection naturelle φ de G dans E; et le composé de $f^\star(\alpha)$ et de $\varphi^\star(\beta)$ est (isomorphe à) l'image réciproque par f du composé de α et β.

En particulier, avec les notations du théorème, soit $X = Z \times Z$, $\Sigma = \Sigma' \times \Sigma'$ et f l'application diagonale $Z \to Z \times Z$. Posons $\alpha = p_1^\star(\eta)$ (où p_1 est la première projection du produit $Z \times Z$) et $\beta = \pi_2^\star(\eta')$ (où π_2 est la seconde projection du produit $E \times Z$). Alors $f^\star(\alpha) = \eta$, et φ est une application de E dans $E \times Z$, homotope à $\mathrm{Id}_E \times \pi$, donc $\varphi^\star(\beta) = \pi^\star(\eta')$; donc le composé de $f^\star(\alpha)$ et de $\varphi^\star(\beta)$ est égal au composé de η et de $\pi^\star(\eta')$. D'autre part, le composé de α et de β est, par construction même (*cf.* lemme 1) $\eta \underset{\mathrm{Ext}}{\oplus} \eta'$; donc l'image réciproque de ce composé par f est, par définition, $\eta \oplus \eta'$.

Remarque. — C'est dans ces deux dernières démonstrations qu'on s'est, pour la première fois, servi du fait que la fibre des pseudofibrés considérés est un cône : on a eu besoin, à plusieurs reprises, du fait que ce cône collapse sur son sommet.

4. Le théorème fondamental. — Dans ce qui suit F est un cône de sommet a, les (F_i) et F' sont des sous-cônes de F; on supposera $F' \neq \emptyset$ (c'est-à-dire $a \in F'$).

Définition 1. — Supposons donnés un polyèdre K, une famille (K_i) de sous-polyèdres de K, un sous-polyèdre X de $\bigcap_i K_i$, l'image K' d'une injection j_0 de $X \times F'$ dans K, telle que $j_0 | X \times \{a\} = \mathrm{Id}_X$, un sous-polyèdre X_0 de X, et une triangulation Σ de (X, X_0). Une donnée $(F, (F_i) \bmod F')$-pseudofibrée normale à X dans $(K, (K_i), K', j_0)$, relative à Σ et définie sur X_0, est un couple $((E_\sigma), j)$, où (E_σ) est une famille $(\sigma \in \Sigma | X_0)$ de sous-polyèdres de K, et j une injection de $X_0 \times F'$ dans K', telles que :

1° $E = \bigcup_{\sigma \subset X_0} E_\sigma$, soit un voisinage (dans K) de l'intérieur de X_0 dans X;

2° j et $j_0 | X_0 \times F'$ coïncident au voisinage de $X_0 \times \{a\}$;

3° $(X_0, E, (E \cap K_i), E \cap K', j, \Sigma, (E_\sigma))$ soit un pseudofibré de fibre $(F, (F_i) \bmod F')$.

Nota. — Si l'on ne précise pas sur quel sous-polyèdre X_0 une donnée pseudofibrée est définie, c'est qu'elle l'est sur X tout entier. Le pseudofibré ainsi défini sera appelé un pseudofibré normal à X dans $(K, (K_i), K', j_0)$. Un tel pseudofibré normal n'est bien sûr pas unique.

Remarque. — S'il existe une donnée $(F, (F_i) \bmod F')$-pseudofibrée normale à X dans $(K, (K_i), K', j_0)$ relative à une triangulation de X, il en existe une relative à une triangulation quelconque de X, et X est régulier de type $(F, (F_i), F')$ dans $(K, (K_i), K')$. Il en résulte que s'il existe aussi une donnée $(G, (G_i) \bmod G')$-pseudofibrée normale à X dans $(K, (K_i), K', j_0)$, c'est que $(G, (G_i), G') = (F, (F_i), F')$.

Définition 2. — Soit $((E_\sigma), j)$ une donnée pseudofibrée normale à X dans $(K, (K_i), K', j_0)$ relative à une triangulation Σ de X, définie sur un sous-complexe X' de Σ; on dira que la donnée pseudofibrée $((D_s), k)$ définie sur X'' et relative à S, est subordonnée à $((E_\sigma), j)$, si S est une subdivision de Σ, si X'' est un sous-complexe de Σ, et si, $\forall \sigma \subset X'', \bigcup_{s \subset \sigma} D_s \subset E_\sigma$.

L'objet de ce paragraphe est de démontrer le résultat suivant, qui (*cf.* ses corollaires) justifie l'introduction de la notion de pseudofibré.

Proposition 2 (Théorème fondamental). — *Soient* K *un polyèdre*, (K_i) *une famille de sous-polyèdres de* K, X *un sous-polyèdre de* $\bigcap_i K_i$, K' *l'image d'une injection* j_0 *de* $X \times F'$ *dans* K *telle que* $j_0 | X \times \{a\} = \mathrm{Id}_X$, *et soit* $((E_\sigma), j)$ *une donnée* $(F, (F_i) \bmod F')$*-pseudofibrée, relative à une triangulation* Σ *de* X, *normale à* X *dans* $(K, (K_i), K', j_0)$, *définie sur un voisinage* U *d'un sous-polyèdre* X_0 *de* X (*qui est un sous-complexe de* Σ). *Si* X *est une variété sans bord* (*cf.* corollaire 3 ci-dessous), *si* X *est régulier de type* $(F, (F_i), F')$ *dans* $(K, (K_i), K')$, *et si les alvéoles intrinsèques de* $(F, (F_i), F')$ *contenues dans* F' *sont les alvéoles intrinsèques de* $(F', \{a\})$, *il existe une donnée* $(F, (F_i) \bmod F')$*-pseudofibrée* $((G_s), k)$, *normale à* X *dans* $(K, (K_i), K', j_0)$, *relative à une subdivision* S *de* Σ, *et dont la restriction à* $S | X_0$ *est subordonnée à la restriction de* $((E_\sigma), j)$ *à* $\Sigma | X_0$.

Cet énoncé est très technique, dans la suite il servira surtout par les corollaires qui suivent. Je conseille au lecteur éventuel de lire d'abord ceux-ci, s'il veut comprendre celui-là.

Corollaire 1. — *Soit* V *une variété sans bord*, M *une sous-variété de* V, *de codimension n; il existe un voisinage* E *de* M *dans* V, *tel que, pour toute triangulation* Σ *de* M, *il existe des sous-polyèdres* E_σ *de* E, *tels que*

$(X, E, j, \Sigma, (E_\sigma))$ *soit un pseudofibré de fibre* $(D^n \bmod \{o\})$ (*où* j *est l'injection naturelle de* M *dans* E).

C'est ce qu'on obtient en faisant dans la proposition, $X_0 = \emptyset$, et $(F, (F_i) \bmod F') = (D^n \bmod \{o\})$.

COROLLAIRE 2. — *Soient* K *un polyèdre,* (K_i) *une famille de sous-polyèdres de* K, *et* X *un sous-polyèdre de* K, *qui est régulier de type* $(I, \{o\})$ *dans* $(K, (K_i))$. *Soit* U *un ouvert de* K, *et soit* μ *un collier de* $(U \cap X, (U \cap X \cap K_i))$ *dans* $(U, (U \cap K_i))$. *Soit* L *un sous-polyèdre de* $U \cap X$, *fermé dans* X; *il existe un collier* η *de* $(X, (X \cap K_i))$ *dans* $(K, (K_i))$, *tel que* $\mu | L \times I$ *et* $\eta | L \times I$ *coïncident au voisinage de* $L \times \{o\}$.

Démontrons d'abord deux lemmes.

LEMME 1. — *Soit* $(F, (F_i), F')$ *un cône et des sous-cônes, l'application naturelle de* $\mathrm{Aut}_{\mathrm{PI}}(F \times I, ((F_i \times I), F \times \{o\}) \bmod F' \times I)$ *dans* $\mathrm{Aut}_{\mathrm{PI}}(F, (F_i) \bmod F')$ *est une équivalence d'homotopie.*

C'est trivial.

LEMME 2. — *Soit* $(X, E, ((E_i), D), E', j, \Sigma, (E_\sigma))$ *un pseudofibré de fibre* $(F \times I, ((F_i \times I), F \times \{o\}) \bmod F' \times I)$. *Il existe un isomorphisme* α *de* $D \times I$ *sur* E, *tel que* $\alpha | D \times \{o\} = \mathrm{Id}_D$, *que, pour tout* i, $\alpha((D \cap E_i) \times I) = E_i$ *que,* $\forall \sigma \in \Sigma$, $\alpha((D \cap E_\sigma) \times I) = E_\sigma$ *et que*

$$j(x, f, t) = \alpha(j(x, f, o), t) \qquad (\forall (x, f, t) \in X \times F' \times I).$$

De plus, si l'on s'est donné un sous-complexe X' *de* Σ *et un isomorphisme* β *de* $\left(D \cap \bigcup_{\sigma \subset X'} E_\sigma\right) \times I$ *sur* $\bigcup_{\sigma \subset X'} E_\sigma$, *qui vérifie les conditions ci-dessus pour la restriction à* X' *du pseudofibré donné, alors on peut trouver un* α *qui prolonge* β.

C'est une conséquence du lemme 1, et du fait qu'un pseudofibré est déterminé, à isomorphisme près, par le fibré principal quasi-simplicial qui lui est associé.

Démonstration du corollaire 2. — On fait une induction sur les alvéoles intrinsèques de X, en les prenant par ordre croissant des dimensions. Soit donc A une alvéole intrinsèque de X, et B son intérieur; soit U un voisinage ouvert de $A - B$ dans K, supposons que μ soit défini sur $(U \cap X) \times I$, et que $\mu((U \cap X) \times I)$ soit contenu dans U. D'après la proposition 2, on peut trouver une famille de cônes $(F, (F_i))$, telle qu'il existe existe un pseudofibré de fibre $(F, (F_i) \bmod \{a\})$ normal à B dans $(X - (A - B), (X - (A - B) \cap K_i), B)$. Ce pseudofibré et μ permettent de définir, sur un voisinage U' de $A - B$ dans B [et même sur un voisinage de $(A - B) \cup (L \cap B)$, si L rencontre B], un pseudofibré normal à B dans $(K - (A - B), (X - (A - B), (K - (A - B)) \cap K_i), B)$, de fibre $(F \times I, (F \times \{o\}, (F_i \times I)) \bmod \{(a, o)\})$. On applique alors la proposition 2 pour prolonger ce pseudofibré à B tout entier, et le lemme 2 au pseudofibré prolongé; ce qui donne un prolongement de μ à un voisinage de A dans X.

Remarque. — Supposons qu'on se soit donné un collier η_0 de $(X \cap K_0)$ dans K_0. On pourra trouver un collier μ de X dans K qui prolonge $\eta_0 | (X \cap K_0) \times [o, \varepsilon]$, si et seulement si η_0 respecte les alévoles intrinsèques de $(K, (K_i))$ contenues dans K_0 (*cf.* proposition 5 du chapitre I).

Corollaire 3. — *Dans la proposition* 2 *il suffit de supposer que* X *est une variété, mais pas nécessairement qu'elle est sans bord.*

Corollaire 2 *bis.* — *Soit* V *une variété à bord, il existe un collier de* dV *dans* V; *si* M *est une sous-variété de* V, *il en existe un qui induit un collier de* dM *dans* M (*cf.* SZ, chap. 5).

Corollaire 3 *bis.* — *Soit* M *une sous-variété de* V, *tout pseudofibré normal à* dM *dans* dV *se prolonge en un pseudofibré normal à* M *dans* V.

Avant de démontrer la proposition 2, je vais énoncer et démontrer un lemme :

Lemme 3. — *Soit* $((E_\sigma), j)$ *une donnée pseudofibrée normale à* X *dans* $(K, (K_i), K', j_0)$ *relative à une triangulation* Σ *de* X. *Soit* U *un voisinage, ouvert dans* K, *d'un sous-polyèdre* X' *de* X *qui est un sous-complexe de* Σ. *Il existe une donnée pseudofibrée,* $((E'_\sigma), j')$, *normale à* X *dans* $(K, (K_i), K', j_0)$, *subordonnée à* $((E_\sigma), j)$, *telle que,* $\forall \sigma \subset X'$, $E'_\sigma \subset U$, *et que* $E'_\sigma = E_\sigma$ *pour tout simplexe* σ *de* $\Sigma | X'$ *tel que* $E_\sigma \subset U$, *et pour tout simplexe de* Σ *qui ne rencontre pas* X'.

Démonstration. — Il suffit de regarder le cas où X' est un simplexe de Σ, soit σ, et où $\bigcup_{\sigma' \subset d\sigma} E_{\sigma'} \subset U$. Je vais montrer que, dans ce cas, on peut construire $((E'_\sigma), j')$ en modifiant seulement les E_s relatifs aux simplexes s qui contiennent σ. Si E_σ est contenu dans U il n'y a rien à changer; sinon, par application du lemme 1 du paragraphe 2, on construit une injection Φ de $\mathrm{st}_\Sigma(\sigma) \times F$ dans K, telle que, $\forall \sigma' \subset \mathrm{st}_\Sigma(\sigma) : \Phi(\sigma \times F) = E_\sigma$. $\Phi^{-1}(U)$ est un voisinage ouvert de $\sigma \times \{a\}$ qui contient $d\sigma \times F$. Il existe donc une injection η de $\mathrm{st}_\Sigma(\sigma) \times F$ dans lui-même qui est l'identité sur $d(\mathrm{st}_\Sigma(\sigma) \times F)$ et sur $\mathrm{st}_\Sigma(\sigma) \times \{a\}$, et respecte la projection sur $\mathrm{st}_\Sigma(\sigma)$, telle que $\eta(\sigma \times F)$ soit contenu dans $\Phi^{-1}(U)$. On pose alors, pour tout simplexe σ' de $\mathrm{st}_\Sigma(\sigma)$: $E'_{\sigma'} = (\Phi . \eta)(\sigma' \times F)$, et l'on pose $j' = j$ hors de $\mathrm{st}_\Sigma(\sigma) \times F'$ et $j' = \Phi . \eta (= j . \eta)$ sur $\mathrm{st}_\Sigma(\sigma) \times F'$.

Démonstration de la proposition 2. — On fait une récurrence sur la dimension de X, dans ce qui suit je pose $\dim X = n+p$, donc je suppose que la proposition est vraie pour $\dim X < n+p$. Elle est triviale si $\dim X = 0$. On peut toujours supposer que X_0 est un sous-complexe de Σ; soit alors t un simplexe de Σ non contenu dans X_0, mais dont le bord est dans X_0; posons $X_0 \cup t = X_1$; il suffit de montrer qu'on peut trouver une donnée pseudofibrée normale, définie sur un voisinage de X_1, dont la restriction à X_0 est subordonnée à $((E_\sigma), j)$. On verra qu'on peut construire une telle donnée qui coïncide avec $((E_\sigma), j)$ hors de $N(X_0, \Sigma)$, ce qui permet de conclure dans le cas non compact.

A cause du lemme 3 du paragraphe 2, on peut supposer que la donnée pseudofibrée $((E_\sigma), j)$ est relative à une subdivision (aussi fine qu'on veut) de Σ. Posons $\dim t = p$ et $\dim X - \dim t = n$. Soit D' un voisinage de D^p dans R^p, et soit α une injection de $D' \times D^n$ dans X, telle que $\alpha(D^p \times \{0\}) = t$. On peut supposer que $(\alpha(D' \times D^n), \alpha(D^p \times D^n))$ est un couple de sous-complexes de la triangulation Σ' qui sert à définir $((E_\sigma), j)$. Posons $A = \bigcup_{\sigma \subset \alpha(D' \times D^n)} E_\sigma$ et $B = \bigcup_{\sigma \subset \alpha(D^p \times D^n)} E_\sigma$, ainsi que $A_i = A \cap K_i$, $B_i = B \cap K_i$ et $A' = A \cap K'$, $B' = B \cap K'$. Posons

$$L = \overline{K - A}, \qquad L_i = \overline{K_i - A_i} \qquad \text{et} \qquad L' = \overline{K' - L'}.$$

$(\alpha(t \times D^n), \alpha(dt \times D^n))$ est régulier de type $(F, (F_i), F')$ dans $((L, (L_i), (B, (B_i), B'))$. Donc tout voisinage dérivé $(M, (N_i), M')$ de t dans $(L, (L_i), L')$, tel que $M \cap X = \alpha(t \times D^n)$, est isomorphe (par un isomorphisme β qui prolonge α) à $(t \times D^n) \times (F, (F_i), F')$. On peut même trouver un β tel que $\beta(dt \times D^n) \times (F, (F_i), F') = (B \cap M, (B \cap N_i), B \cap M')$, et que $\beta \,|\, (t \times D^n) \times F'$ et $j_0 \,|\, (\alpha(t \times D^n) \times F')$ coïncident sur un voisinage de $t \times D^n \times \{a\}$ dans $t \times D^n \times F'$ [cette dernière assertion est possible à cause de la proposition 5 du chapitre 0, et à cause de la condition imposée aux alvéoles de $(F, (F_i), F')$]. D'après le lemme 3 on peut remplacer $((E_\sigma), j)$ par $((E^1_\sigma), j^1)$ telle que $B^1 = \bigcup_{\sigma \subset \alpha(dt \times D^n)} E^1_\sigma$ soit contenu dans $B \cap M$. On a alors, modulo β, une donnée pseudofibrée normale à $dt \times D^n$ dans $(dt \times D^n) \times (F, (F_i), F')$; d'après l'hypothèse de récurrence sa restriction à un voisinage de $dt \times \{0\}$, se prolonge en une donnée $((D_u), k)$ normale à $d(t \times D^n)\ (\approx S^{p+n-1})$ dans $d(t \times D^n) \times (F, (F_i), F')$. A cause du théorème d'isomorphisme des voisinages dérivés, on peut supposer que $\bigcup_{s \subset d(t \times D^n)} D_s = d(t \times D^n) \times F$; on conclut alors grâce au lemme 2 du paragraphe 2 [et l'on reporte le pseudofibré normal à $t \times D^n$ dans $(t \times D^n) \times (F, (F_i), F')$ ainsi construit, dans la figure initiale, en en prenant l'image par β].

5. Tubes. — Dans ce paragraphe la fibre est $(D^n \bmod \{o\})$, D^n étant considéré comme un cône de sommet o.

Définition 1. — Soient E un polyèdre, j une injection d'un polyèdre X dans E, et (F_i) une famille finie de sous-polyèdres de E. On posera $j^{-1}(F_i) = Y_i$. On dira que $((X, (Y_i)), (E, (F_i)), j)$ est un n-tube d'âme $(X, (Y_i))$, s'il existe une triangulation de Σ, $(X, (Y_i))$ et des sous-polyèdres E_σ de E, tels que $(X, E, j, \Sigma, (E_\sigma))$ et, pour tout i, $(Y_i, F_i, j \mid Y_i, \Sigma \mid Y_i, (E_\sigma))$ soient des pseudofibrés de fibre $(D^n \bmod \{o\})$.

Remarque. — D'après le paragraphe 2, dans cette définition on peut remplacer $(\exists \Sigma, \exists (E_\sigma))$ par $(\forall \Sigma, \exists (E_\sigma))$. On dira que (E_σ) est une donnée pseudofibrée sur le tube, relative à Σ.

Il est clair que, contrairement à la notion de pseudofibré, la notion de tube ne dépend pas d'une triangulation particulière de X; d'ailleurs, dans le cas où l'âme est une variété (sans sous-polyèdres), on peut donner la caractérisation intrinsèque suivante :

Théorème. — *Soit* X *une variété; pour que* (X, E, j) *soit un n-tube d'âme* X *il faut et il suffit que :*

1° *En tout point de* X, $j(X)$ *soit régulier de type* $(D^n, \{o\})$ *dans* E;

2° E *soit un voisinage régulier de* $j(X)$ *dans* E.

La nécessité est évidente. La suffisance résulte de la proposition 2 et du théorème d'isomorphisme des voisinages réguliers.

Définition 2. — Un isomorphisme du tube $((X, (Y_i)), (E, (F_i)), j)$ sur le tube $((X', (Y'_i)), (E', (F'_i)), j')$ est un isomorphisme de E sur E' qui induit, pour tout i, un isomorphisme de F_i sur F'_i, et induit un isomorphisme de $j(X)$ sur $j'(X')$.

Lemme. — *Soit* $((X, (Y_i)), (E, (F_i)), j)$ *un n-tube,* $((X \times I, X \times \{o, 1\}), (Y_i \times I), (Y_i \times \{o, 1\})), (E \times I, E \times \{o, 1\}, (F_i \times I), (F_i \times \{o, 1\})), j \times \mathrm{Id}_I)$ *est un n-tube; on l'appelle le produit par* I *du tube donné.*

C'est une conséquence du lemme 4 du paragraphe 2.

Proposition 3. — *Soit* $((X \times I, X \times \{o, 1\}), (Y_i \times I), (Y_i \times \{o, 1\})), (E, (E^0, E^1), (F_i), (F_i^0, F_i^1)), j)$ *un n-tube, il est isomorphe au produit par* I *du tube* $((X, (Y_i)), (E^0, (F_i^0)), j \mid X \times \{o\})$.

C'est une conséquence du théorème d'homotopie pour les pseudofibrés (*cf.* § 2).

COROLLAIRE. — *Soit* $((X\times I, X\times\{0, 1\}), (E, (E^0, E^1)), j)$ *un* n*-tube, il est isomorphe au produit par* I *du tube* $(X, E^0, j\,|\,X\times\{0\})$. *En d'autres termes, il existe un isomorphisme* μ *de* $E^0\times I$ *sur* E, *tel que*

$$j=\mu.(j\,|\,X\times\{0\}\times \mathrm{Id}_I),$$

que $\mu\,|\,E^0\times\{0\}=\mathrm{Id}_{E^0}$ *et que* $\mu\,|\,E^0\times\{1\}$ *soit un isomorphe de* E^0 *sur* E^1.

PROPOSITION 4. — *Soient* V *une variété à bord,* $((V, dV), (E, G), j)$ *un* n*-tube,* Σ *une triangulation de* (V, dV) *et* (E_σ) *et* (E'_σ) *deux données pseudo-fibrées sur ce tube, relatives à* Σ, *telles que, pour tout simplexe* σ *de* Σ *contenu dans* dV, $E_\sigma=E'_\sigma$. *Il existe un automorphisme* η *du tube* (V, E, i) $(\eta : E\to E)$ *tel que* $\eta(E_\sigma)=E'_\sigma$ *pour tout simplexe* σ, *que* $\eta\,|\,E_\sigma=\mathrm{Id}$ *chaque fois que* $\sigma\subset dV$; *on peut même trouver un tel* η *qui est pseudo-isotope à l'identité parmi les automorphismes de* E *qui sont l'identité sur* $\bigcup_{\sigma\subset dV} E_\sigma$ *et sur* $j(V)$.

Démonstration. — Considérons le produit par I du tube $((V, dV)), (E, G), j)$. (E_σ) et (E'_σ) et le produit par I de $\left(dV, \bigcup_{\sigma\subset dV} E_\sigma, j\,|\,dV, \Sigma\,|\,dV, (E_\sigma)\right)$ définissent une donnée pseudofibrée sur le tube $(d(V\times I), E\times\{0, 1\}\cup G\times I, j\times \mathrm{Id}_I\,|\,d(V\times I))$. D'après le corollaire 3 *bis* de la proposition 2, et le théorème d'isomorphisme des voisinages réguliers, cette donnée pseudofibrée se prolonge en une donnée pseudofibrée sur le tube $(V\times I, E\times I, j\times \mathrm{Id}_I)$. Il ne reste plus qu'à appliquer le théorème d'homotopie du paragraphe 2.

COROLLAIRE 1. — *Soient* V *une variété,* (V, E, j) *un* n*-tube,* (E_σ) *une donnée pseudofibrée sur ce tube, et* $\eta : E\to E$ *un automorphisme de ce tube;* η *est pseudo-isotope [parmi les automorphismes de* E *qui sont l'identité sur* $j(V)$*] à un automorphisme qui conserve les* E_σ.

Il suffit d'appliquer la proposition 4 à (E_σ) et à $(E'_\sigma)=\eta(E_\sigma)$.

COROLLAIRE 2. — *Tout tube d'âme une variété détermine à un isomorphisme près, pour toute triangulation de son âme, un pseudofibré. Il ne semble pas qu'il en soit de même quand l'âme n'est pas une variété.*

Il en résulte que la notion de tube n'a un réel intérêt que quand l'âme est une variété.

6. IMAGES RÉCIPROQUES ET SOMMES DE WHITNEY DE TUBES. — *Images réciproques.* — Soit $\alpha=(V, E, j)$ un n-tube dont l'âme est une variété, et soit $(X', (Y'_k))$ un polyèdre et une famille de sous-polyèdres. Si f est un morphisme de X' dans V, et Σ et Σ' des triangulations de V et $(X', (Y'_k))$ qui rendent f simpliciale, à toute donnée pseudofibrée (E_σ) sur α, relative à Σ, on peut associer (*cf.* § 3) l'image réciproque du pseudofibré (V, E,

$j, \Sigma, (E_\sigma))$; c'est un pseudofibré de base (X', Σ') qui définit un tube d'âme $(X', (Y'_k))$. Ce tube ne dépend, à isomorphisme près, ni du choix de Σ et Σ', ni du choix de (E_σ) (*cf.* corollaire 2 de la proposition 4, et paragraphe 3).

Définition. — Le tube ainsi construit est appelé l'image réciproque de α par f et noté $f^\star(\alpha)$.

Si f est l'application identique de V, $f^\star(\alpha)$ est isomorphe à α. Si X' est une variété $(Y'_k = \emptyset, \forall k)$, et si g est un morphisme de X'' dans X', on a un isomorphisme entre $g^\star(f^\star(\alpha))$ et $(f.g)^\star(\alpha)$.

Remarque. — Pour les questions d'unicité à isomorphisme près et d'isomorphisme naturel entre des tubes définis à isomorphisme près, tout se passe comme pour les pseudofibrés (*cf.* la définition des images réciproques de pseudofibrés).

Proposition 5. — *Si f est homotope à g, il existe un isomorphisme (c'est-à-dire une classe d'isomorphismes naturelle) de $f^\star(\alpha)$ sur $g^\star(\alpha)$.*

C'est la traduction de la proposition 3 en termes de tubes.

Sommes externes. — D'après le lemme 1 du paragraphe 3, si $((X, (Y_i)), (E, (F_i)), j)$ et $((X', (Y'_k)), (E', (F'_k)), j')$ sont deux tubes de fibres respectives D^n et $D^{n'}$, $((X \times X', (Y_i \times X'), (X \times Y'_k), (Y_i \times Y'_k)), (E \times E', (F_i \times E'), (E \times F'_k), (F_i \times F'_k)), j \times j')$ est un $(n+n')$-tube. Ceci permet de poser la définition suivante :

Définition 2. — Le tube ainsi construit est appelé la somme externe des deux tubes donnés. Cette somme sera notée par le signe $\bigoplus_{\text{Ext}}$.

Cette somme est évidemment commutative et associative. Si les tubes α et β ont pour base des variétés V et W, et si f et g sont des morphismes de X et Y dans V et W respectivement, on a un isomorphisme (i. e. une classe naturelle...) de $(f \times g)^\star\left(\alpha \bigoplus_{\text{Ext}} \beta\right)$ sur $f^\star(\alpha) \bigoplus_{\text{Ext}} g^\star(\beta)$.

Sommes internes :

Définition 3. — Étant donnés deux tubes α et β d'âme une même variété V, on appelle somme interne de α et β (ou somme de Whitney) et l'on note $\alpha \oplus \beta$, le tube d'âme V qui est l'image réciproque de $\alpha \bigoplus_{\text{Ext}} \beta$, par l'application diagonale du produit $V \times V$.

On a bien sur les relations $\alpha \oplus \beta = \beta \oplus \alpha$, et $\alpha \oplus (\beta \oplus \gamma) = (\alpha \oplus \beta) \oplus \gamma$, à classe d'isomorphismes naturelle près.

On peut en déduire une théorie du groupe de Grothendieck. Je ne développe pas cette théorie, puisque, à cause du théorème d'existence des microfibrés normaux stables (*cf.* [12]), on trouve la même que pour les microfibrés semi-linéaires.

PROPOSITION 6. — *Soient* $\alpha = (V, E, j)$ *et* $\beta = (V, E', j')$ *deux tubes d'âme une variété* V, *et de fibres respectives* D^n *et* $D^{n'}$. *Soit* π *une projection de* E *sur* $j(V)$, *telle que* $\pi \mid j(V) = \mathrm{Id}$ (*il en existe* !). *Posons* $\pi^\star(\beta) = (E, U, j'')$. $(V, U, j''.j)$ *est un* $(n+n')$*-tube isomorphe à* $\alpha \oplus \beta$.

C'est la traduction en termes de tubes du théorème 2 du paragraphe 3.

CHAPITRE III.

TRANSVERSALITÉ.

1. DÉFINITIONS ET PROPRIÉTÉS ÉLÉMENTAIRES.

DÉFINITION 1. — Soient V une variété, M un sous-polyèdre de V et f un plongement de la variété W dans V; on dira que f est transverse à M au voisinage d'un sous-polyèdre fermé K de W, s'il existe :

a. un voisinage U de K dans W et une triangulation Σ de $(W, U, f^{-1}(M))$;

b. une donnée pseudofibrée (E_σ) normale à $f(W)$ dans V (on posera $\dim V - \dim W = n$)

tels que, pour tout simplexe σ de Σ contenu dans $U \cap f^{-1}(M)$, E_σ soit contenu dans M, et que l'ensemble de ces E_σ soit une donnée pseudofibrée [de fibre $(D^n \bmod \{o\})$] normale à $f(W) \cap M$ dans M, définie sur $f(U) \cap M$.

On dira que f est transverse à M, si dans cette définition on peut prendre $U = K = W$.

Remarquons que dire que f est transverse à M, c'est dire qu'on peut construire un pseudofibré normal à $f(W)$ dans V, et un pseudofibré normal à $f(W) \cap M$ dans M, tels que f induise un morphisme de pseudofibrés.

DÉFINITION 2. — Soient V une variété, M un sous-polyèdre de V, et f une application d'une variété W dans V; on dira que f est transversale sur M au voisinage d'un fermé K de W, s'il existe un plongement α de W dans une variété $\mathcal{W}$, tel que le plongement $f \times \alpha : W \to V \times \mathcal{W}$ soit transverse à $M \times \mathcal{W}$ au voisinage de K.

Transitivité. — Si f est un plongement transverse à M, et si le plongement g de la variété X dans W est transverse à $f^{-1}(M)$, $f.g$ est transverse à M. De même, si la fonction f est transversale sur M, et si la fonction $g : X \to W$ est transversale sur $f^{-1}(M)$, $f.g$ est transversale sur M.

Remarque. — La notion de transversalité ainsi définie est globale, contrairement à la notion de transversalité classique dans le cadre différentiable. On montrera (*cf.* proposition 2 ci-dessous) que si M et W sont deux sous-variétés de V, dire que W est localement transverse à M, c'est dire que M et W sont en bonne position. Mais si M et W sont en bonne position, l'injection naturelle f de W dans V n'est pas nécessairement transversale sur M (donc, *a fortiori*, pas transverse à M) comme le montre l'exemple suivant dû à Hudson. D'après [10], il existe (pour $p=8$ par exemple) un n-tube (S^p, E, j) qui n'est pas trivial (car il ne l'est pas stablement) tel qu'il existe une équivalence d'homotopie fibrée $\alpha : dE \to S^p \times S^{n-1}$ (où dE est le bord de la variété E). On peut construire E par recollement de deux boules A et B isomorphes à $D^p \times D^n$, le long de $S^{p-1} \times D^n$. De même, $S^p \times D^n$ est la réunion de deux boules A′ et B′. On définit une application η de E dans $S^p \times D^n$ de la façon suivante : on envoie A isomorphiquement sur A′, puis on prolonge en une application de $A \cup dB$ sur $A' \cup dB'$ (en se servant de α). On prolonge enfin en une application de E dans $S^p \times D^n$ en regardant B et B′ comme les cônes sur leurs bords. L'application ainsi obtenue est telle que $\varphi^{-1}(S^p \times \{o\})$ est l'âme de E. Il existe donc pour N grand un plongement g de E dans $S^p \times D^n \times R^N$ tel que $g^{-1}(S^p \times \{o\} \times R^N)$ soit l'âme de E. Posons $S^p \times D^n \times R^N = V$, $S^p \times \{o\} \times R^N = W$, et $g(E) = M$. V et W sont en bonne position (c'est une conséquence du corollaire 4 de la proposition 1 du chapitre IV). Si W était transverse à M, E serait trivial (car ce serait l'image inverse du tube normal à W dans V, par l'application $M \cap W \to W$), ce qui n'est pas.

Transversalité au sens de Williamson. — Supposons que $f : W \to V$ soit un plongement transverse à M et que $f(W)$ ait un microfibré normal dans V; il existe un voisinage U(W) de $f(W)$ dans V, et une projection p de U(W) sur $f(W)$ telle que $f(W) \to U(W) \xrightarrow{p} f(W)$ soit un microfibré, et que la restriction à $M \cap U(W)$ de p définisse un microfibré normal à $N = M \cap f(W)$ dans M. Cette projection n'est en général pas la projection donnée, mais elle lui est pseudo-isotope. On retrouve donc la notion de transversalité au sens de Williamson.

2. Les théorèmes d'existence.

Proposition 1. — *Soient* M *un sous-polyèdre d'une variété* V, *et* f *un plongement d'une variété* W *dans* V. *Si* f *est transverse à* M *au voisinage d'un fermé* K *de* W, *il existe, dans tout voisinage* $\mathcal{C}^0$ *de* f, *un plongement* g *de* W *dans* V *transverse à* M, *égal à* f *sur* K, *et isotope à* f *parmi les plongements de* W *dans* V *qui coïncident avec* f *sur* K.

Corollaire 1. — *Soient* M *un sous-polyèdre de* V, *et* f *une application d'une variété* W *dans* V, *transversale sur* M *au voisinage d'un fermé* K *de* W, *il existe, dans tout voisinage* $\mathcal{C}^0$ *de* f, *une application* g *de* W *dans* V *transversale sur* M, *qui coïncide avec* f *sur* K.

En effet : soit $\alpha : \mathrm{W} \to \mathcal{W}$ un plongement tel que $f \times \alpha$ soit un plongement transverse à $\mathrm{M} \times \mathcal{W}$ au-dessus d'un voisinage de K. On applique la proposition à ce plongement, et l'on compose l'application obtenue avec la projection

$$p_1 : \quad \mathrm{V} \times \mathcal{W} \to \mathrm{V}.$$

Corollaire 2. — *Soit* f *une application* (*resp. un plongement*) *de la variété* W *dans la variété* V, *et soit* M *un sous-polyèdre de* V, *il existe dans tout voisinage* $\mathcal{C}^0$ *de* f *une application* g (*resp. un plongement* g *isotope à* f) *telle que*

$$\dim g^{-1}(\mathrm{M}) = \dim \mathrm{W} + \dim \mathrm{M} - \dim \mathrm{V}.$$

En particulier, si $\dim \mathrm{W} + \dim \mathrm{M} - \dim \mathrm{V} < 0$, $g^{-1}(\mathrm{M}) = \emptyset$.

Pour démontrer la proposition 1 je démontrerai deux lemmes :

Lemme 1. — *Désignons par* R^p_+ *la partie de* R^p *définie par* $x_p \geq 0$. *Soient* U *un voisinage compact d'un compact* A *de* R^p_+, F *un fermé de* U, M *un sous-polyèdre de* $\mathrm{U} \times \mathrm{R}^n$, *et* U' *un voisinage ouvert de* F *dans* U, *tel que* $(\mathrm{U}' \times \mathrm{R}^n) \cap \mathrm{M} = ((\mathrm{U}' \times \{0\}) \cap \mathrm{M}) \times \mathrm{R}^n$. *Il existe une injection* β *de* $\mathrm{U} \times \mathrm{D}^n$ *dans* $\mathrm{U} \times \mathrm{R}^n$ *qui est l'identité au voisinage de* $\mathrm{F} \times \mathrm{D}^n$ *et au voisinage de* $d\mathrm{U} \times \mathrm{D}^n$ (*où* $d\mathrm{U}$ *est la frontière de* U *dans* R^p_+), *tel que, pour un certain voisinage* U^1 *de* $\mathrm{A} \cup \mathrm{F}$ *dans* U, $(\beta^{-1}(\mathrm{M}) \cap (\mathrm{U}^1 \times 0)) \times \mathrm{D}^n$ *soit un voisinage de* $\beta^{-1}(\mathrm{M}) \cap (\mathrm{U}^1 \times \{0\})$ *dans* $\beta^{-1}(\mathrm{M}) \cap (\mathrm{U}^1 \times \mathrm{R}^n)$. *On peut même trouver un tel* β *dans tout voisinage* $\mathcal{C}^0$ *de l'identité.*

Démonstration. — Soit Σ une triangulation linéaire de $(\mathrm{U} \times \mathrm{R}^n, \mathrm{M})$. Soit a un point de R^n tel que $\mathrm{U} \times \{a\}$ ne rencontre pas de simplexe de dimension inférieure à p de Σ. L'ensemble des points qui vérifient cette propriété est un ouvert partout dense de R^n, donc il existe un voisinage ω (connexe) de a dont tous les points vérifient cette propriété. Soit S une triangulation de $(\omega, \{a\})$. Soient $\sigma_1, \ldots, \sigma_N$ les p-simplexe de Σ qui rencontrent $\mathrm{U} \times \{a\}$ (ordonnés de façon arbitraire). Soient σ un simplexe de Σ qui rencontre $\mathrm{U} \times \{a\}$, et s un simplexe de S de sommets $s_1, \ldots, s_q$, $\sigma \cap (\mathrm{U} \times s)$ est l'enveloppe convexe des points $\sigma_i \cap (\mathrm{U} \times s_j)$ [pour tout $j \in (1, \ldots, q)$ et tout i tel que $\sigma_i \subset \sigma$]. Ces points $\sigma_i \cap (\mathrm{U} \times s_j)$ sont ordonnés (par le produit de l'ordre sur les σ_i, et de l'ordre naturel des s_j) donc le convexe $\sigma \cap (\mathrm{U} \times s)$ a une triangulation naturelle $\mathrm{T}_{\sigma, s}$ (*cf.* SZ, lemme 1, p. 5) dont les sommets sont les $\sigma_i \cap (\mathrm{U} \times s_j)$. Si $\sigma' \subset \sigma$ et $s' \subset s$, $\mathrm{T}_{\sigma', s'}$ et $\mathrm{T}_{\sigma, s} | \sigma \cap (\mathrm{U} \times s')$ coïncident, donc les $\mathrm{T}_{\sigma, s}$ se recollent en une triangulation T de $\mathrm{U} \times \omega$. T est naturellement isomorphe à $\mathrm{T} | \mathrm{U} \times \{a\} \times \mathrm{S}$ (car, quel que soit σ et quel que soit s, $\mathrm{T}_{\sigma, s}$ est isomorphe à $\mathrm{T}_{\sigma, s_1} \times \mathrm{S} | s$). Cet isomorphisme définit un automorphisme de $U\times\omega$, soit η, tel que $\eta(M)=(M\cap(U\times\{a\}))\times\omega$. Soit U^1 un voisinage de $A\cup F$ tel que $U^1\cap dU\subset U'$; il existe une triangulation Σ' de $(U\times R^n, ((U^1\times\{a\})\cap M)\times R^n)$ qui coïncide avec Σ au voisinage de $(dU\cap M)\times R^n$. On construit à partir de Σ' un automorphisme η', de façon analogue à η, tel que

$$\eta'((U^1\times\{a\})\cap M)\times\omega\subset((U^1\times\{a\})\cap M)\times R^n.$$

$\eta'.\eta^{-1}$ est le β cherché [car η et η' coïncident au voisinage de $(dU\cup F)\times R^n$]. Il est d'autant plus petit (au sens $\mathcal{C}^0$) que Σ et Σ' sont fines.

Lemme 2. — *Avec les hypothèses de la proposition* 2, *si* A *est un fermé de* W *contenu dans un ouvert* U^0 *de* W *dont l'adhérence est une boule, il existe un plongement g transverse à* M *au voisinage de* $A\cup K$, *aussi proche de f (au sens* $\mathcal{C}^0$*) qu'on veut, égal à f sur un voisinage de* K, *et isotope à f parmi les plongements qui coïncident avec f au voisinage de* K.

Démonstration. — On pose $\dim V-\dim W=n$. Soit (E_σ) une donnée pseudofibrée normale à $f(W)$ dans V, telle que pour tout σ d'un voisinage U'_0 de K, $f(\sigma)\subset M$ entraîne $E_\sigma\subset M$. La restriction de ce pseudofibré à U^0 est triviale. Ceci définit une carte locale $\alpha: U^0\times(D^n, o)\to(V, f(W))$ telle que $\alpha^{-1}(M)\cap(\alpha^{-1}(f(U'_0))\times D^n)=(\alpha^{-1}(M)\cap\alpha^{-1}(f(U'_0\times o))\times D^n$. On applique le lemme 1 à une boule compacte contenue dans U^0, et à $M'=\alpha^{-1}(M)$, avec $U'=\alpha^{-1}(U'_0)$. On modifie le plongement f par β, qui définit une donnée pseudofibrée normale au nouveau plongement au-dessus de U, et cette donnée se recolle à l'ancienne car β est l'identité au voisinage de $dU\times D^n$. On vérifie que le nouveau plongement est isotope à f.

Démonstration de la proposition 2. — Il suffit d'appliquer le lemme 2 un certain nombre (éventuellement infini) de fois.

Remarque. — La proposition 1 affirme que f et g sont isotopes. En regardant bien les démonstrations ci-dessus, on voit qu'en fait on a construit une isotopie h_t parmi les automorphismes de V qui sont l'identité sur K, isotopie telle que $h_0=\mathrm{Id}$, et que $g=h_1.f$ soit transverse à M.

3. Applications transversales sur une sous-variété.

Lemme. — *Soit* (D^n, Y, o) *une famille de cônes emboîtés, si* $(D^n\times D^q, Y\times D^q, (o, o))$ *est isomorphe à* (D^{n+q}, D^{n+q-p}, o), (D^n, Y, o) *est isomorphe à* (D^n, D^{n-p}, o).

C'est trivial si $q=o$, et grâce à une induction sur q, il suffit de démontrer le cas où $q=1$ $(D^q=I)$. L'isomorphisme donné envoie alors $d(D^n\times I)$ sur dD^{n+1}, donc envoie $(D^n\times\{o\}, Y\times\{o\})$ $[\approx(D^n, Y)]$ sur un voisinage dérivé d'un point de S^{n-p} dans (S^n, S^{n-p}); et ce voisinage dérivé est isomorphe à (D^n, D^{n-p}).

PROPOSITION 2. — *Si* M *est une sous-variété de codimension* p *de* V, *et si l'application* $f: W \to V$ *est transversale sur* M *au voisinage de* K, *il existe un ouvert* U *de* W *contenant* K, *tel que* $f^{-1}(M) \cap U$ *soit une sous-variété de codimension* p *de* U.

J'ai déjà utilisé ce résultat dans une remarque au paragraphe 1. Je vais maintenant le démontrer. Il suffit de le faire quand f est un plongement transverse à M. Soit alors x un point de $f^{-1}(M)$, et soit (D^n, Y, x) le germe de $(W, f^{-1}(M))$ en x. Le germe de $(V, f(W), M)$ en $f(x)$ est isomorphe à $(D^n \times D^q, D^n \times \{o\}, Y \times D^q, (x, o))$; $(D^n \times D^q, Y \times D^q, (x, o))$ est donc isomorphe au germe de (V, M) en $f(x)$, c'est-à-dire à (D^{n+q}, D^{n+q-p}, o); donc, d'après le lemme ci-dessus, (D^n, Y, o) est isomorphe à (D^n, D^{n-p}, o). D'où le résultat. Il résulte aussi de cette démonstration que, si f est un plongement transverse à M, $f(W)$ et M sont en bonne position.

PROPOSITION 3. — *Soient* W *et* M *deux sous-variétés de* V, *on notera* j *et* i *les injections respectives de* W *et* M *dans* V. *Il est équivalent de dire que* j *est transverse à* M, *ou que* i *est transverse à* W.

Soient, en effet, n la codimension de W dans V, et p la codimension de M dans V. Soit N l'intersection de M et W. D'après le théorème 2 du paragraphe 3 du chapitre II, dire que j est transverse à M, est équivalent à dire qu'un pseudofibré normal à N dans (V, W, M) est la somme de Whitney d'un pseudofibré normal à N dans W et d'un pseudofibré normal à N dans M. Cette condition fait jouer des rôles symétriques à W et M, d'où le résultat.

COROLLAIRE 1. — *Si* $f: W \to V$, *est une application transversale sur la sous-variété* M *de* V, *le tube normal à la sous-variété* $f^{-1}(M)$ *dans* W, *est l'image réciproque du tube normal à* M *dans* V, *par l'application* $f|f^{-1}(M) : f^{-1}(M) \to M$.

COROLLAIRE 2. — *Si* f *est une application de* W *dans* V *transversale sur* M, *et si le tube normal à* M *dans* V *est trivialisé* [*resp. : a son groupe structural réduit à* PL_p *ou* O_p] *le tube normal à* $f^{-1}(M)$ *dans* W *est naturellement trivialisé* (*resp. : a son groupe structural réduit à* PL_p *ou* O_p).

Il suffit de le voir pour un plongement transverse. C'est alors une conséquence de l'unicité à isomorphisme près du pseudofibré normal à une sous-variété (*cf.* proposition 4 du chapitre II). Mais il faut préciser à quoi près ces restrictions de groupe structural sont définies. Disons-le pour une trivialisation : une trivialisation est un isomorphisme de $f^{-1}(M) \times D^p$ sur un voisinage de $f^{-1}(M)$ dans W, ce qui est défini c'est la classe modulo pseudo-isotopie de tels isomorphismes. Plus précisément si f est un plongement transverse : il existe une classe, modulo pseudo-isotopie, de trivialisations du tube normal à $f^{-1}(\mathrm{M})$ dans W, dont chaque élément se prolonge en une trivialisation du pseudofibré normal à M dans V qui est pseudo-isotope à la trivialisation donnée.

Remarque. — Si M et W sont des sous-variétés de V de codimensions respectives m et w, et si M et W sont en bonne position, on a vu que W n'est pas en général transverse à M. Posons $\mathrm{M} \cap \mathrm{W} = \mathrm{N}$. Il existe un pseudofibré de fibre $(\mathrm{D}^{m+w}, \mathrm{D}^m, \mathrm{D}^w \bmod \{o\})$, normal à N dans (V, W, M); on a vu que W est transverse à M si et seulement si ce pseudofibré est la somme de Whitney des pseudofibrés normaux à N dans W et dans M; les obstructions à ce qu'il en soit ainsi sont dans le fait que le groupe $\mathrm{Aut}_{\mathrm{PI}}(\mathrm{D}^{m+w} \bmod \mathrm{D}^m \cup \mathrm{D}^w)$ n'a pas le type d'homotopie du point.

CHAPITRE IV.

Les théorèmes de fibration de Cerf.

1. Le théorème de Smale. — Toutes les variétés considérées ici sont compactes.

Définition. — Un h-cobordisme entre deux variétés sans bord W et W′ est une variété U, et un isomorphisme i de la réunion disjointe de W et W′ sur le bord de U, telle que les injections de W et de W′ dans U soient des équivalences d'homotopie.

Si, de plus, la torsion de Whitehead $\tau(\mathrm{U}, \mathrm{W})$ est nulle [ou, ce qui revient au même, $\tau(\mathrm{U}, \mathrm{W}') = o$], on dira que (U, i) est un s-cobordisme entre W et W′. En particulier, si $\mathrm{Wh}(\pi_1(\mathrm{U}))$ est nul, tout h-cobordisme est un s-cobordisme.

Remarquons qu'un h-cobordisme définit une équivalence d'homotopie de W sur W′; nous la noterons $h(\mathrm{U}, i)$, ou plus simplement $h(\mathrm{U})$.

Je vais maintenant généraliser cette notion.

a. Cas des variétés à bord. — Soient W et W′ deux variétés à bord de dimension n, un h-cobordisme entre W et W′ est la donnée d'une variété à bord U de dimension $m + 1$, d'une injection i de la réunion disjointe de W et W′ dans le bord de U, et d'un isomorphisme f de $\overline{d\mathrm{U} - i(\mathrm{W} \cup \mathrm{W}')}$ sur $d\mathrm{W} \times \mathrm{I}$, tel que $i \mid d\mathrm{W} = f^{-1} \mid d\mathrm{W} \times \{o\}$. De telle façon que les injections de W et W′ dans U, induites par i, soient des équivalences d'homotopie.

Si de plus la torsion de Whitehead $\tau(\mathrm{U}, \mathrm{W})$ est nulle, on dira que (U, i, f) est un s-cobordisme entre W et W′.

Un h-cobordisme définit donc un isomorphisme de $d\mathrm{W}$ sur $d\mathrm{W}'$, et cet isomorphisme se prolonge en une équivalence d'homotopie de W sur W′.

On notera $h(\mathrm{U})$ cette application, sans perdre de vue que $h(\mathrm{U})$ n'est définie qu'à un isomorphisme près, mais que sa restriction au bord est un isomorphisme bien déterminé de $d\mathrm{W}$ sur $d\mathrm{W}'$.

b. Cas des couples de variétés. — Étant donnés deux couples de variétés (W, T) et $(\mathrm{W}', \mathrm{T}')$, un h-cobordisme entre ces deux couples est un quadruple $(\mathrm{U}, i, f, \mathrm{F})$, où :

— U est une variété $(\dim \mathrm{U} = 1 + \dim \mathrm{W} = 1 + \dim \mathrm{W}')$;

— i est une injection de la réunion disjointe de W et W' dans le bord de U;

— f est un isomorphisme de $\overline{d\mathrm{U} - i(\mathrm{W} \cup \mathrm{W}')}$ sur $d\mathrm{W} \times \mathrm{I}$, tel que $i \mid d\mathrm{W} = f^{-1} \mid (d\mathrm{W} \times \{0\})$;

— F est un plongement de $\mathrm{T} \times \mathrm{I}$ dans U.

Ces données étant astreintes aux conditions :

α : $\mathrm{F}(\mathrm{T} \times \{1\}) = i(\mathrm{T}')\,[\subset i(\mathrm{W}')]$;

β : $\mathrm{F} \mid \mathrm{T} \times \{0\}$ est l'isomorphisme identique de T sur $i(\mathrm{T})$;

γ : $\mathrm{F} \mid d\mathrm{T} \times \mathrm{I} = f^{-1} \mid d\mathrm{T} \times \mathrm{I}$;

δ : i induit des équivalences d'homotopie de W et de W' sur U, et aussi des équivalences d'homotopie de $\mathrm{W} - \mathrm{T}$ et $\mathrm{W}' - \mathrm{T}'$ sur $\mathrm{U} - \mathrm{Im}\,\mathrm{F}$.

Ici encore un h-cobordisme définit une application $h(\mathrm{U})$ de la paire (W, T) sur la paire $(\mathrm{W}', \mathrm{T}')$; $h(\mathrm{U})$ est une équivalence d'homotopie, et sa restriction à $d\mathrm{W} \cup \mathrm{T}$ est un isomorphisme bien déterminé de $d\mathrm{W} \cup \mathrm{T}$ sur $d\mathrm{W}' \cup \mathrm{T}'$.

Si de plus il existe un voisinage tubulaire Ω de $\mathrm{Im}\,\mathrm{F}$ dans U, tel que $\Omega \cap i(\mathrm{W})$ soit un voisinage tubulaire de $i(\mathrm{T})$ dans $i(\mathrm{W})$, et tel que $\tau(\overline{\mathrm{U} - \Omega}, \overline{\mathrm{W} - (\mathrm{W} \cap i^{-1}(\Omega))}) = 0$, on dira que $(\mathrm{U}, i, f, \mathrm{F})$ est un s-cobordisme. *Nota :* On ne peut pas parler de la torsion de $\mathrm{W} - \mathrm{T}$ dans $\mathrm{U} - \mathrm{Im}\,\mathrm{F}$ car ces espaces ne sont pas compacts.

On a une notion évidente de h-cobordisme isomorphes. De plus, à tout couple (W, T), on peut faire correspondre, par multiplication par I, un h-cobordisme (qui est d'ailleurs un s-cobordisme) entre (W, T) et lui-même. On dira qu'un h-cobordisme est trivial s'il est isomorphe à un h-cobordisme ainsi construit. Trivialiser un h-cobordisme est donc équivalent à prolonger f^{-1} et F par un isomorphisme de $\mathrm{W} \times \mathrm{I}$ sur U. En particulier, une trivialisation donne une représentation de $h(\mathrm{U})$ par un isomorphisme.

Proposition 1 (Théorème de Smale). — *Tout s-cobordisme entre des couples* (W, T) *et* $(\mathrm{W}', \mathrm{T}')$, *tels que* $\dim \mathrm{W} = \dim \mathrm{W}' \geq 5$, *est trivial.*

Ce théorème est classique dans le cadre différentiable, je ne vais pas en donner une démonstration complète; mais, renvoyant le lecteur aux démonstrations classiques (par exemple [1] ou [16], ou encore [24] pour le cas non simplement connexe) je vais détailler les points techniques qui, très connus dans le cadre différentiable, le sont beaucoup moins dans le cadre semi-linéaire.

a. Démonstration du cas des paires à partir du cas des variétés. — Soit (U, i, f, F) un s-cobordisme entre les paires (W, T) et (W', T'). Soit α un pseudofibré normal à $F(T\times I)$ dans U, qui induit des pseudofibrés normaux à $i(T)$ dans $i(W)$ et à $i(T')$ dans $i(W')$, et induit le pseudofibré naturel, normal à $F(dT\times I)$ dans $\overline{dU - i(W\cup W')}\,[=f^{-1}(dW\times I)]$. L'existence d'un tel α est assurée par le corollaire 3 *bis* de la proposition 2 du chapitre II. Le théorème d'homotopie appliqué à α, définit un isomorphisme Φ du produit par I d'un voisinage tubulaire X de T dans W, sur un voisinage tubulaire de $F(T\times I)$ dans U; cet isomorphisme prolonge f^{-1} et F. Posons alors $\overline{W - X} = W_1$, $\overline{U - \Phi(X\times I)} = U_1$, et $i^{-1}(U_1)\cap W' = W'_1$. La restriction de i à $W_1\cup W'_1$ est une injection i_1 de $W_1\cup W'_1$ dans dU_1; et $i_1\,|\,W_1$ (resp. $i_1\,|\,W'_1$) est une équivalence d'homotopie de torsion nulle. De plus, $f^{-1}\,|\,(dW\cap W_1)\times I$ et $\Phi\,|\,(X\cap W_1)\times I$ se recollent pour donner un isomorphisme f_1, tel que (U_1, i_1, f_1) soit un s-cobordisme entre W_1 et W'_1. Si la proposition est vraie pour les s-cobordismes de variétés, ce s-cobordisme est trivial, et si Ψ en est une trivialisation, Φ et Ψ se recollent pour définir une trivialisation du s-cobordisme de paires qui était donné.

b. Cas des s-cobordismes de variétés. — A la lecture des démonstrations données dans [1], [16] ou [24], on remarque qu'on peut écrire la même démonstration dans le cadre semi-linéaire pourvu qu'on ait démontré :

1° Un théorème analogue à la proposition 1 du chapitre III, qui permet de déplacer un plongement pour le rendre transverse à quelque chose. En fait, il faut savoir qu'on peut réaliser ce déplacement par une isotopie d'automorphismes de la variété ambiante (*cf.* Remarque à la fin du paragraphe 2 du chapitre III).

2° Des théorèmes de plongement dans les limites de la stabilité de Whitney.

3° La « construction de Whitney » qui permet d'enlever deux à deux les points d'intersection de deux sous-variétés.

Je donne dans l'appendice ci-dessous des démonstrations de ces deux derniers points.

Remarque. — Si (U, i, f, F) est un h-cobordisme entre les paires (W, T) et (W', T'), (U, i, f) est un h-cobordisme entre W et W'. Si $\pi_1(W - T)\to\pi_1(W)$ est un isomorphisme, si l'un de ces h-cobordismes est un s-cobordisme, l'autre en est un également. On s'en convaincra en calculant la torsion $\tau(U_1, W_1)$ (*cf.* démonstration du cas *a*) à partir d'une triangulation de (U, U_1).

Je vais maintenant donner quelques conséquences du théorème de Smale.

COROLLAIRE 1. — *Soient* W *une variété* (*compacte, orientable*), V *une sous-variété de* W; *notons* f_0 *l'injection naturelle de* V *dans* W. *Soit* $f : V\times I \to W\times I$ *un* 1-*simplexe de* $\mathrm{Plgt}_{\mathrm{PI}}(V, W, f_0)$ *tel que* $f|V\times\{0\} = f_0$; *si* $\dim W - \dim V \geqq 3$, *il existe un* 1-*simplexe* g *de* $\mathrm{Aut}_{\mathrm{PI}}(W \bmod dW)$ *tel que* $f = g.(f_0\times \mathrm{Id}_I)$.

Démonstration. — $(W\times I, f(V\times I))$ définit un h-cobordisme entre $(W\times\{0\}, f(V\times\{0\}))$ et $(W\times\{1\}, f(V\times\{1\}))$. Si $\dim W \geqq 5$, le résultat est une conséquence immédiate de la proposition 1, en tenant compte de la remarque ci-dessus quand $\pi_1(W) \neq \emptyset$.

Si $\dim V = 0$ ($\dim W = 3$ ou 4), c'est une conséquence immédiate du théorème 3 de l'appendice.

Si $\dim W = 4$ et $\dim V = 1$. Remarquons d'abord que si f et f' sont deux 1-simplexes de $\mathrm{Plgt}_{\mathrm{PI}}(V, W, f_0)$, tels que

$$f|V\times\{0\} = f'|V\times\{0\} = f_0 \qquad \text{et} \qquad f|V\times\{1\} = f'|V\times\{1\},$$

et s'il existence un 1-simplexe F de $\mathrm{Plgt}_{\mathrm{PI}}(V\times I, W\times I, f)$, tel que $F|V\times I\times\{0\} = f$, et $F|V\times I\times\{1\} = f'$, on peut appliquer le résultat déjà démontré à F, ce qui montre qu'il est équivalent de démontrer ce résultat pour f ou pour f'.

a. Si $W = D^4$. D'après le théorème 1 de l'appendice, il existe un 1-simplexe h de $\mathrm{Aut}_I(D^4 \bmod S^3)$, tel que $hf|V\times\{0\} = hf|V\times\{1\} = f_0$, hf est un 0-simplexe de $\mathrm{Plgt}_{\mathrm{PI}}(V\times I, D^4\times I, f_0\times \mathrm{Id}_I)$; d'après le corollaire du théorème 4 de l'appendice, il existe un 1-simplexe du même espace, dont les sommets sont hf et $f_0\times \mathrm{Id}_I$. D'où le résultat d'après la remarque ci-dessus. Il en résulte (*cf.* corollaire 3 ci-dessous), que toute application injective d'une variété de dimension 3 dans une variété de dimension 6 est localement plate (i. e. : est un plongement).

b. W quelconque. On peut supposer que V est connexe; donc V est S^1 ou D^1; si $V = S^1$, on peut fixer un point s de V grâce au cas déjà démontré des dimensions 4 et 0, ce qui permet de se ramener au cas où $V = D^1$; dans la suite on supposera donc que $V = D^1$. Notons p_1 et p_2 les deux projections du produit $W\times I$. Soit h_0 un 1-simplexe de $\mathrm{Aut}_{\mathrm{PI}}(W)$ tel que $p_1.h_0.f|dV\times I$ soit une injection de $V\times I$ dans W. (Il en existe !). $2.\dim(V\times I) \leqq \dim W$ donc, d'après le théorème 2 de l'appendice, il existe dans tout voisinage $\mathcal{C}^0$ de $p_1.h_0.f$, une application g localement injective et l'on peut trouver un simplexe h_1 de $\mathrm{Aut}_{\mathrm{PI}}(W \bmod dW)$ tel que $g = p_1.(h_1.h_0.f)$. On peut trouver un simplexe h_2 de $\mathrm{Aut}_{\mathrm{PI}}(W \bmod dW)$

tel que $g' = p_1.(h_2.h_1.h_0.f)$ soit injective [on fait sortir les points doubles par le bord relatif de $g(V \times I)$ dans W]. Soit alors U un voisinage régulier de $g'(V \times I)$ dans W ($U \approx D^4$); $h_2.h_1.h_0.f(V \times I)$ est contenu dans $U \times I$; il suffit d'appliquer à cette situation le cas a.

Corollaire 2. — *Soit f un plongement de D^p dans D^n, si $n - p \geqq 3$, la figure formée par D^n et $f(D^p)$ est isomorphe à la figure formée par D^n et son intersection par un p-plan.*

C'est une conséquence du corollaire 1, car f définit une pseudo-isotopie entre les voisinages dérivés dans $(S^{n-1}, f(S^{p-1}))$, de deux points opposés de $f(S^{p-1})$.

Corollaire 3. — *Soit f une application injective (resp. localement injective) d'une variété V de dimension p dans une variété W de dimension n; si $n - p \geqq 3$, et si $f^{-1}(dW) = dV$, f est un plongement (resp. une immersion).*

Il suffit de montrer que f est localement plate, ce qui est une conséquence du corollaire 2 ci-dessus.

Remarque. — Compte tenu de ce résultat, le (a) du théorème 2 de l'appendice s'écrit : si $2p + 1 \leqq n$, et $n - p \geqq 3$, et si $f^{-1}(dW) = dV$, il existe dans tout voisinage $\mathcal{C}^0$ de f un plongement de V dans W.

Corollaire 4. — *Soit f un plongement de D^p dans D^n, tel que $f(D^p) \cap D^q = D^{p+q-n}$ ($p + q - n \geqq 0$), et que $f(D^p)$ et D^q soient en bonne position (D^q et D^{p+q-n} étant des sections linéaires de D^n). Si $n - p \geqq 3$, $(D^n, D^q, f(D^p))$ est isomorphe à la figure naturelle formée par D^n et ses sections par un p-plan et un q-plan transverses.*

Démonstration. — Un voisinage dérivé de D^q dans $(D^n, D^q, f(D^p))$ est isomorphe à cette figure naturelle. L'adhérence de son complémentaire est de la forme $(S^{n-q-1} \times D^q \times I, f(S^{n-q-1} \times D^{p+q-n} \times I))$, c'est un 1-simplexe de $\mathrm{Plgt}_{\mathrm{PI}}(S^{n-q-1} \times D^{p+q-n}, S^{n-q-1} \times D^q, f_0)$; on lui applique le corollaire 1.

Je vais maintenant énoncer un résultat, bien connu dans le cadre différentiable, qui est une conséquence de la démonstration de la proposition 1.

Corollaire 5. — *Soit V une variété de dimension n ($n \geqq 6$), f une injection d'une variété U de dimension $n - 1$ dans dV. Si $\pi_j(f)$ est nul pour $j \leqq i$ ($i \leqq n - 2$), et si $\pi_1(dV - U) \to \pi_1(V)$ est un isomorphisme, il existe une présentation par anses, $V = U \times I + h_1 + \ldots + h_N$ [$U \times \{0\}$ étant identifié à $f(U)$], ne comportant que des anses d'indice au moins $i + 1$.*

2. Fibrations des espaces de pseudo-isotopie. — Je vais énoncer et démontrer, pour les espaces de pseudo-isotopie, les analogues des principaux théorèmes de fibration de la thèse de J. Cerf [2]. Je me placerai

dans le cadre semi-linéaire pour respecter l'unité de ce papier, mais les résultats que je vais énoncer sont aussi valables dans le cadre différentiable.

Dans ce qui suit, W désigne une variété semi-linéaire compacte, et V un sous-polyèdre de W; f_0 est l'injection naturelle de V dans W. E est un voisinage dérivé de V dans W, dE est la frontière (topologique) de E dans W, et g_0 est l'injection naturelle de E dans W. M est un sous-polyèdre de V.

Proposition 2. — *Si* $\dim W \geqq 3 + \dim V$, *la base de la fibration principale quasi-simpliciale définie par* $\mathrm{Aut}_{\mathrm{PI}}(W \bmod dW \cup V)$ *sur* $\mathrm{Aut}_{\mathrm{PI}}(W \bmod dW)$ *est une réunion de composantes connexes de* $\mathrm{Plgt}_{\mathrm{PI}}(V, W, f_0)$.

Démonstration. — Il suffit de montrer que l'application naturelle

$$\mathrm{Aut}_{\mathrm{PI}}(W \bmod dW) \to \mathrm{Plgt}_{\mathrm{PI}}(V, W, f_0)$$

vérifie la condition de Kan.

Soit donc σ un simplexe de dimension p de $\mathrm{Plgt}_{\mathrm{PI}}(V, W, f_0)$, et soient $s_0, \ldots, s_{p-1}$ des relèvements de ses p premières faces. Comme $\mathrm{Aut}_{\mathrm{PI}}(W \bmod dW)$ vérifie la condition de Kan (*cf.* chap. I, § 3), on peut supposer que les applications $s_0, \ldots, s_{p-1}$ de $\Delta_{p-1} \times W$ dans lui-même sont égales à $\mathrm{Id}_{\Delta_{p-1}} \times f_0$. Soit α un isomorphisme de Δ_p sur $I \times \Delta_{p-1}$, qui transforme la dernière face de Δ_p en $\{1\} \times \Delta_{p-1}$. L'application $(\alpha \times \mathrm{Id}_W).\sigma.(\alpha^{-1} \times \mathrm{Id}_V)$ est un 1-simplexe s de $\mathrm{Plgt}_{\mathrm{PI}}(\Delta_{p-1} \times V, \Delta_{p-1} \times W, \mathrm{Id}_{\Delta_{p-1}} \times f_0)$. Il suffit de montrer que s se relève en un 1-simplexe S de $\mathrm{Aut}_{\mathrm{PI}}(\Delta_{p-1} \times W \bmod d(\Delta_{p-1} \times W))$; car $(\alpha^{-1} \times \mathrm{Id}_W).S.(\alpha \times \mathrm{Id}_W)$ sera alors le relèvement cherché. Il suffit donc de démontrer le lemme suivant :

Lemme. — *L'application naturelle*

$$\mathrm{Aut}_{\mathrm{PI}}(W \bmod dW) \to \mathrm{Plgt}_{\mathrm{PI}}(V, W, f_0)$$

vérifie la condition de Kan pour les 1*-simplexes.*

Démonstration. — Si V est une sous-variété de W, c'est le corollaire 1 de la proposition 1. Si V n'est pas une sous-variété de W, notons V_i l'adhérence des alvéoles intrinsèques de (W, V) de dimension i, qui sont contenues dans $V \cap \mathrm{Int}\,W$. Pour tout i, notons U_i un voisinage régulier de $V_i\,[= f_0(V_i)]$ dans W. Soit s un 1-simplexe de $\mathrm{Plgt}_{\mathrm{PI}}(V, W, f_0)$ tel que $s \mid V \times \{0\} = f_0$; on va construire, pour tout i, par récurrence sur i, des 1-simplexes S_i et T_i de $\mathrm{Aut}_{\mathrm{PI}}(W \bmod dW)$ tels que $S_i.(f_0 \times \mathrm{Id}_I)$ et s coïncident sur $((U_{i-1} \cap V) \cup V_i) \times I$, et que $T_i.(f_0 \times \mathrm{Id}_I)$ et s coïncident sur $(U_i \cap V) \times I$. L'existence de S_0 est une conséquence immédiate du corollaire 1 de la proposition 1.

a. Supposons qu'on ait construit S_i. On considère un pseudofibré normal à $(V_i - V_{i-1}) \times I$ dans $((W - V_{i-1}) \times I, S_i^{-1} s((V - V_{i-1}) \times I))$ et on lui applique le théorème d'homotopie, ce qui nous donne un isomorphisme d'un voisinage de $V_i \times I$ dans $W \times I$ sur un autre. Par un argument de collier, on étend cet isomorphisme en un 1-simplexe T'_i de $\mathrm{Aut}_{\mathrm{PI}}(W \bmod dW)$ tel que $T'_i . (f_0 \times \mathrm{Id}_I)((U_i \cap V) \times I) = S_i^{-1} s((U_i \cap V) \times I)$. On en déduit T_i grâce à la proposition 5 du chapitre 0.

b. Supposons que T_i soit construit. On construit le 1-simplexe S_{i+1} en appliquant le corollaire 1 de la proposition 1 à $T_i^{-1} s \,|\, (\overline{V_{i+1} - V_{i+1} \cap U_i}) \times I$, qui est un 1-simplexe de $\mathrm{Plgt}_{\mathrm{PI}}(\overline{V_{i+1} - V_{i+1} \cap U_i}, \overline{W - U_i}, f_0)$.

COROLLAIRE 1. — *Si* V *est une variété, et si* $\mathrm{Plgt}^{\mathrm{M}}_{\mathrm{PI}}(V, W, f_0)$ *est connexe,* $\mathrm{Plgt}_{\mathrm{PI}}(V, W, f_0)$ *est fibré de fibre* $\mathrm{Plgt}^{\mathrm{M}}_{\mathrm{PI}}(V, W, f_0)$ *et de groupe structural* $\mathrm{Aut}_{\mathrm{PI}}(W \bmod dW \cup M)$. *La base de cette fibration est une réunion de composantes connexes de* $\mathrm{Plgt}_{\mathrm{PI}}(M, W, f_0 \,|\, M)$.

COROLLAIRE 2. — *Soient* W *une variété (de dimension* n*), et* f *une injection d'un polyèdre* X *dans* W, *si* $n - \dim W \geqq 3$, *et si* $n - \dim f^{-1}(dW) \geqq 4$, *les alvéoles intrinsèques de* $(W, f(X))$ *contenues dans* X, *coïncident avec les images par* f *des alvéoles intrinsèques de* X.

Démonstration. — On fait une récurrence sur n, on suppose donc que le résultat est vrai si $\dim W < n$ (l'assertion est vide si $\dim W \leqq 2$). Soit x un point d'indice p de X, soit $(A, f(B), f(D^p))$ le germe de $(W, f(X), f(X_p))$ en $f(x)$. Ce germe est le cône sur son bord $(dA, f(dB), f(S^{p-1}))$. Il suffit de trouver un couple de cônes (M, N) de sommet a, et un isomorphisme φ du cône $(A, f(B), f(D^p))$ sur $(M \times D^p, N \times D^p, \{a\} \times D^p)$.

Enlevons dans $(dA, f(dB), f(S^{p-1}))$ des voisinages dérivés disjoints de deux points de $f(S^{p-1})$; ce qui reste peut être considéré comme l'image d'une injection η de $Y \times I$ dans $S^{n-2} \times I$ [telle que $\eta^{-1}(S^{n-2} \times \{0\}) = Y \times \{0\}$, et $\eta^{-1}(S^{n-2} \times \{1\}) = Y \times \{1\}$], où Y est un polyèdre de dimension au plus $n - 5$. L'hypothèse de récurrence entraîne que η est un 1-simplexe de $\mathrm{Plgt}_{\mathrm{PI}}(Y, S^{n-2}, \eta \,|\, Y \times \{0\})$. On lui applique la proposition 2; et l'on recolle les voisinages dérivés qu'on a enlevés; ce qui permet d'écrire un isomorphisme de $(A, f(B), f(D^p))$ sur le produit par I du germe $(A^1, B^1, f(D^{p-1}))$ d'un point (quelconque) de $f(S^{p-1})$ dans $(dA, f(dB), f(S^{p-1}))$. On répète la même construction sur $(dA^1, dB^1, f(S^{p-2}))$, et ainsi de suite, p fois, ce qui donne (M, N, φ).

Une conséquence triviale du corollaire 2 est le :

COROLLAIRE 3. — *Si* $\dim W - \dim V \geqq 3$, *et si* $\dim dW - \dim dW \cap V \geqq 3$, *les espaces* $\mathrm{Inj}_{\mathrm{PI}}(V, W)$ *et* $\mathrm{Plgt}_{\mathrm{PI}}(V, W)$ *coïncident.*

PROPOSITION 3 (Théorème d'isotopie locale). — *La base de la fibration principale quasi-simpliciale définie par* $\mathrm{Aut}_{\mathrm{PI}}(\mathrm{W} \bmod d\mathrm{W} \cup \mathrm{E})$ *sur* $\mathrm{Aut}_{\mathrm{PI}}(\mathrm{W} \bmod d\mathrm{W} \cup \mathrm{V})$ *est une réunion de composantes connexes de* $\mathrm{Plgt}^{\mathrm{V}}_{\mathrm{PI}}(\mathrm{E}, \mathrm{W}, g_0)$.

Démonstration. — Il suffit de montrer que l'application naturelle

$$\mathrm{Aut}_{\mathrm{PI}}(\mathrm{W} \bmod d\mathrm{W} \cup \mathrm{V}) \to \mathrm{Plgt}^{\mathrm{V}}_{\mathrm{PI}}(\mathrm{E}, \mathrm{W}, g_0)$$

vérifie la condition de Kan.

Pour cela on remarque, comme pour la proposition 2, qu'il suffit de le faire pour les 1-simplexes; pour les 1-simplexes on applique le théorème des voisinages dérivés et un argument de collier.

3. FIBRATIONS DES ESPACES D'ISOTOPIE. — Les résultats énoncés ici ont été démontrés par Hudson (*cf.* [7]), du moins quand V est une sous-variété de W. J'en donne cependant une démonstration complète, car l'utilisation de ce qui précède permet de simplifier la démonstration de Hudson. Les notations sont les mêmes qu'au paragraphe précédent.

Préliminaires. — Soit F^r_0 la face de dimension r de Δ_q qui contient les $r+1$ premiers sommets. On appellera hypervoisinage de F^0_0 dans Δ_q, tout sous-polyèdre U de Δ_q, tel que $\mathrm{F}^0_0 \in \mathrm{U}$, et que, quel que soit r $(0 \leqq r < q)$, $\mathrm{U} \cap \mathrm{F}^{r+1}_0$ soit un voisinage dans F^{r+1}_0 de l'intérieur de $\mathrm{U} \cap (\mathrm{F}^r_0 - \mathrm{F}^{r-1}_0)$ (dans F^r_0). En particulier, quel que soit r $(\leqq q)$, $\mathrm{U} \cap \mathrm{F}^r_0$ est un hypervoisinage de F^0_0 dans F^r_0. Toute intersection finie d'hypervoisinages de F^0_0 est un hypervoisinage de F^0_0. Tout sous-polyèdre qui contient un hypervoisinage est un hypervoisinage.

Si T est une triangulation de Δ_q, il existe un simplexe de T et un seul qui est un hypervoisinage de F^0_0 dans Δ_q (il est défini par le fait qu'il est le seul à avoir, pour tout r, $r+1$ sommets dans F^r_0). Tout hypervoisinage contient un hypervoisinage de ce type. L'intérêt de la notion d'hypervoisinage réside dans le fait qu'on peut démontrer le :

LEMME 1. — *Soit* P *une assertion portant sur les sous-polyèdres de* Δ_q; *supposons que :*

1° P(X) *vrai, et* $\mathrm{Y} \subset \mathrm{X}$ *entraîne* P(Y) *vrai.*

2° *Si* Σ *est une triangulation de* X, *telle que* X *collapse simplicialement, et si, pour tout simplexe* σ *de* Σ, $\mathrm{P}(\sigma)$ *est vrai, alors* P(X) *est vrai.*

3° *Quelle que soit l'injection linéaire* $\Delta_q \xrightarrow{\alpha} \Delta_q$ *il existe un hypervoisinage* U *de* F^0_0 *dans* Δ_q, *tel que* $\mathrm{P}(\alpha(\mathrm{U}))$ *soit vrai.*

Alors $\mathrm{P}(\Delta_q)$ *est vrai.*

Démonstration. — On fait une récurrence sur q; pour $q = 1$ c'est le théorème de Borel-Lebesgue. Supposons que le lemme soit vrai pour $q-1$, et considérons le cas de la dimension q.

A. Quelle que soit l'injection linéaire $\Delta_q \xrightarrow{\alpha} \Delta_q$ il existe un voisinage V de F_0^0 dans Δ_q, tel que $P(\alpha(V))$ soit vrai. En effet : soit Δ_{q-1} la face de Δ_q opposée à F_0^0; soient Y un sous-polyèdre de Δ_{q-1} et C(Y) le cône de base Y et de sommet $F_0^0(C(\Delta_{q-1}) = \Delta_q)$. Considérons l'assertion :

Q(Y) : *Il existe un voisinage* X *de* F_0^0 *dans* C(Y), *tel que* P(X) *soit vrai.*

La propriété Q vérifie les conditions 1, 2 et 3, donc, d'après l'hypothèse de récurrence, $Q(\Delta_{q-1})$ est vrai.

B. Il résulte de A que tout point x de Δ_q possède un voisinage U tel que P(X) soit vrai (on peut recouvrir l'angle solide autour de chaque point par les images d'un nombre fini d'injection α). On achève alors la démonstration grâce à la compacité de Δ_q, et grâce au fait que toute triangulation de Δ_q admet une subdivision qui collapse simplicialement.

Soit maintenant X un sous-polyèdre de Δ_q; on dira que l'application $f : X \times V \to X \times W$ est Δ_q-régulière, si $p_1 . f = p_1$ (où p_1 est la première projection du produit).

Lemme 2. — *Soient* V *et* W *deux polyèdres, on supposera que* V *est compact. Soit* g *une application de* $\Delta_q \times V$ *dans* $\Delta_q \times W$, *telle que, quelle que soit la face* F *de* Δ_q, $F \times V = g^{-1}(F \times W)$. *Pour toute triangulation* Σ *de* $\Delta_q \times V$ *il existe une application* g' *de* $\Delta_q \times V$ *dans* $\Delta_q \times W$, *telle que,* $\forall \sigma \in \Sigma$, $g'(\sigma) = g(\sigma)$, *et qui est* Δ_q*-régulière au-dessus d'un hypervoisinage* X *de* F_0^0 *dans* Δ_q. *Si* $g | \sigma$ *est* Δ_q*-régulière,* $g' | \sigma = g | \sigma$. *Si* g *est injective (resp. surjective),* g' *est injective (resp. surjective).*

Démonstration. — Soient T et S des triangulations de $\Delta_q \times V$ et $\Delta_q \times W$ telles que g soit simpliciale de T dans S, et que T soit une subdivision de Σ. On peut supposer qu'il existe des triangulations T_0 et S_0 et V et W, telles que T et S soient des subdivisions de $\Delta_q \times T_0$ et $\Delta_q \times S_0$. Ainsi les projections $p_1 : \Delta_q \times V \to \Delta_q$ et $p_1 : \Delta_q \times W \to \Delta_q$, sont linéaires sur les simplexes de T et S. Soient $t_1, \ldots, t_N$ les simplexes de T dont l'image par p_1 est un hypervoisinage de F_0^0 dans Δ_q (ils sont en nombre fini car V est compact). Posons pour tout $i : s_i = g(t_i)$; $p_1(s_i)$ est un hypervoisinage de F_0^0 dans Δ_q, à cause des conditions d'incidence sur les faces qu'on a imposées à g.

$$U = \bigcap_{i \leq N} p_1(t_i) \cap \bigcap_{i \leq N} p_1(s_i)$$ est un hypervoisinage de F_0^0 dans Δ_q. Soit τ_0 un hypervoisinage de F_0^0 dans Δ_q, qui est un simplexe d'une triangulation linéaire $\mathfrak{T}$ de Δ_q, et qui est contenu dans U. Soit τ l'hypervoisinage de F_0^0 dans Δ_q défini par la subdivision barycentrique de $\mathfrak{T}$. Soient $x_0, \ldots, x_j, \ldots, x_q$ les sommets de τ (ordonnés de façon que $x_j \in F_0^j$). Quels que soient i et j, $p_1^{-1}(x_j) \cap t_i$ contient des points intérieurs au simplexe $t_i \cap F_0^j \times V$, on en choisit un qu'on note x_{ij}. De même on choisit un point y_{ij} dans l'intersection de $p_1^{-1}(x_j)$ et de l'intérieur du simplexe $s_i \cap F_0^j \times W$. Soient T'

et S' les subdivisions de T et S, obtenues en ajoutant les sommets x_{ij} (à T) et y_{ij} (à S) par subdivision étoilée (et en opérant par ordre décroissant des dimensions des simplexes $t_i \cap F_0^j \times V$ et $s_i \cap F_0^j \times W$). Il existe une unique application simpliciale g' de T' dans S' telle que $g'(x_{ij}) = y_{ij}\,[\forall (i, j)]$ et qui vérifie la condition $g'(t) = g(t)$ pour tout simplexe t de T. Il est évident que g' est Δ_q-régulière au-dessus de τ. Si $g \mid t_i \cap F_0^j \times V$ est Δ_q-régulière, on choisit $y_{ij} = g(x_{ij})$, ce qui entraîne que, pour tout t tel que $g \mid t$ soit Δ_q-régulière, $g' \mid t = g \mid t$.

Proposition 2 *bis*. — *Si* $\dim W \geqq 3 + \dim V$, *la base de la fibration principale définie par* $\mathrm{Aut}_I(W \bmod dW \cap V)$ *sur* $\mathrm{Aut}_I(W \bmod dW)$ *est une réunion de composantes connexes de* $\mathrm{Plgt}_I(V, W, f_0)$.

Démonstration. — Il suffit de montrer que l'application naturelle

$$\mathrm{Aut}_I(W \bmod dW) \to \mathrm{Plgt}_I(V, W, f_0)$$

vérifie la condition de Kan.

Soit donc σ un simplexe de $\mathrm{Plgt}_I(V, W, f_0)$, considérons l'assertion, portant sur les sous-polyèdres X de Δ_p :

P(X) : *Il existe un automorphisme* η_X *de* $X \times W$, *qui est l'identité sur* $X \times dW$, *qui est* Δ_p*-régulier, et tel que* $\sigma \mid X \times V = \eta_X(\mathrm{Id}_X \times \varphi)$ (*où* φ *est une injection de* V *dans* W).

Il suffit de montrer que $P(\Delta_p)$ est vrai. Il suffit donc de vérifier les hypothèses 1, 2 et 3 du lemme 1. Pour 1 et 2 c'est trivial. Montrons la condition 3. Soit α une injection linéaire de Δ_p dans lui-même. Considérons l'application $(\alpha^{-1} \times \mathrm{Id}_W).\sigma.(\alpha \times \mathrm{Id}_V)$ de $\Delta_p \times V$ dans $\Delta_p \times W$. Elle est injective, donc d'après le corollaire 3 de la proposition 2, c'est un p-simplexe de $\mathrm{Plgt}_{PI}(V, W, f_0)$. D'après la proposition 2, ce simplexe se relève en un p-simplexe de $\mathrm{Aut}_{PI}(W \bmod dW)$, on applique à ce relèvement le lemme 2 ci-dessus, ce qui donne la condition 3 du lemme 1.

Corollaire. — *Si* $\mathrm{Plgt}_I^M(V, W, f_0)$ *est connexe, et si* V *est une variété,* $\mathrm{Plgt}_I(V, W, f_0)$ *est fibré de fibre* $\mathrm{Plgt}_I^M(V, W, f_0)$ *et de groupe structural* $\mathrm{Aut}_I(W \bmod dW \cup M)$. *La base de cette fibration est une réunion de composantes connexes de* $\mathrm{Plgt}_I(M, W, f_0 \mid M)$.

Proposition 3 *bis* (Théorème d'isotopie locale). — *La base de la fibration principale définie par* $\mathrm{Aut}_I(W \bmod dW \cup E)$ *sur* $\mathrm{Aut}_I(W \bmod dW \cup V)$ *est une réunion de composantes connexes de* $\mathrm{Plgt}_I^V(E, W, g_0)$.

Démonstration. — Elle est analogue à celle de la proposition 2 *bis*.

Remarque. — On rapprochera les propositions 2 et 2 *bis* (ainsi que 3 et 3 *bis*), et l'on remarquera que les o-simplexes de $\mathrm{Plgt}_I(V, W, f_0)$ qui sont dans l'image de $\mathrm{Aut}_{\mathrm{I}}(\mathrm{W} \bmod d\mathrm{W})$ sont les o-simplexes de $\mathrm{Plgt}_{\mathrm{PI}}(\mathrm{V}, \mathrm{W}, f_0)$ qui sont dans l'image de $\mathrm{Aut}_{\mathrm{PI}}(\mathrm{W} \bmod d\mathrm{W})$. Il en résulte que les suites exactes d'homotopie relatives de ces fibrations se terminent par

$$\pi_1^{\mathrm{rel}}(\mathrm{Aut}(\mathrm{W} \bmod d\mathrm{W})) \to \pi_1^{\mathrm{rel}}(\mathrm{Plgt}(\mathrm{V}, \mathrm{W}, f_0)) \to 0$$

et par

$$\pi_1^{\mathrm{rel}}(\mathrm{Aut}(\mathrm{W} \bmod d\mathrm{W} \cup \mathrm{V})) \to \pi_1^{\mathrm{rel}}(\mathrm{Plgt}^{\mathrm{V}}(\mathrm{E}, \mathrm{W}, g_0)) \to 0.$$

4. Appendice. — Je vais démontrer quelques théorèmes de plongement utiles à la démonstration de la proposition 1. Ces résultats sont classiques dans le cas différentiable; je vais donner des démonstrations qui se rapprochent le plus possible de celles du cadre différentiable. Des résultats plus fins ont été démontrés dans [8] et [9]; je n'ai démontré ici que ce qui est utile au contexte. En ce qui concerne le théorème 4, je signale qu'on pourra en trouver une élégante démonstration dans [18].

Lemme 1. — *Soit* X *un complexe simplicial fini de sommets* (x_i) $(i = 1, \ldots, \mathrm{N})$ *et soit* Y *le sous-complexe simplicial engendré par les* x_i *d'indice au moins* 2. *Soit* g *une application de* Y *dans* $\mathbf{R}^n$, *linéaire sur chaque simplexe. Pour tout point* z *de* $\mathbf{R}^n$, *on définit une application* g_z *de* X *dans* $\mathbf{R}^n$, *linéaire sur chaque simplexe en posant* $g_z(x_1) = z$ *et* $g_z \mid \mathrm{Y} = g$. *Posons* $\dim \mathrm{X} = p$.

1° *Si* g *est injective, l'ensemble des* z *tels que* g_z *soit injective est un ouvert de* $\mathbf{R}^n$, *il est partout dense si* $2p + 1 \leq n$, *il est connexe au voisinage de chacun des points de* $\mathbf{R}^n$ *si* $2p + 2 \leq n$.

2° *Si* g *est localement injective, l'ensemble des* z *tels que* g_z *soit localement injective est un ouvert partout dense si* $2p \leq n$, *il est connexe au voisinage de tout point de* $\mathbf{R}^n$ *si* $2p + 1 \leq n$.

Démonstration. — Pour l'assertion 1. On vérifie facilement que l'ensemble des z tels que g_z soit injective, contient le complémentaire (dans $\mathbf{R}^n$) d'un nombre fini de sous-variétés linéaires de dimension au plus $2p$.

Pour l'assertion 2 : L'ensemble des z tels que g_z soit localement injective contient le complémentaire d'un nombre fini de sous-variétés linéaires de dimension au plus $2p - 1$.

Lemme 2. — *Soit* U *l'ensemble ouvert des points* z *tels que* g_z *soit injective. Soient* y *et* y' *deux points de* U *tels que le segment* yy' *soit dans* U; *il existe une isotopie* h_t *d'automorphismes de* $\mathbf{R}^n$, *telle que* $h_0 = \mathrm{Id}$, *et que* $h_1 \cdot g_y = g_{y'}$. *De plus on peut trouver une telle isotopie parmi les automorphismes de* $\mathbf{R}^n$ *qui sont l'identité hors d'un voisinage (aussi petit qu'on veut) de* $\bigcup_{z \in yy'} g_z(\mathrm{st}_{\mathrm{X}}(x_1))$.

Si l'on est dans le cadre de l'assertion 2 du lemme 1, on a un résultat analogue, mais h_t opère non plus sur $g_y(\mathrm{X})$ mais sur $g_y(\mathrm{A})$, où A est l'ensemble des simplexes de X qui rencontrent $\mathrm{st}_{\mathrm{X}}(x)$.

Démonstration. — Il existe une triangulation Σ de $\mathbf{R}^n$ dont y est un sommet, telle que $\mathrm{st}_\Sigma(y) \cap g_y(\mathrm{X}) = g_y(\mathrm{st}_\mathrm{X}(x_1))$. [Il en existe une telle que $g_y(\mathrm{st}_\mathrm{X}(x_1))$ soit contenu dans $\mathrm{st}_\Sigma(y)$; il suffit de la subdiviser correctement.] Alors pour tout point y_1 voisin de y, il existe une triangulation Σ_1 de $\mathbf{R}^n$ qui coïncide avec Σ hors de $\mathrm{st}_\Sigma(y)$, et telle qu'il existe un isomorphisme et un seul de Σ_1 sur Σ qui est l'identité hors de $\mathrm{st}_\Sigma(y)$ et qui envoie y_1 en y. Cet isomorphisme définit un automorphisme de $\mathbf{R}^n$, qui est l'identité hors de $\mathrm{st}_\Sigma(y)$, et est évidemment isotope à l'identité; ce qui prouve le lemme si y' est assez voisin de y. Dans le cas général, on découpe le segment yy' en morceaux par un argument de compacité.

THÉORÈME 1. — *Soient f et g deux applications injectives d'une variété* V *de dimension p dans* D^n, *tels que* $f|d\mathrm{V} = g|d\mathrm{V}$. *Si* $2p+2 \leq n$, *il existe une isotopie parmi les automorphismes de* D^n *qui sont l'identité sur* S^{n-1}, *qui transforme f en g. Si* $2p+1 \leq n$, *il existe une homotopie régulière (i. e. : un chemin parmi les applications localement injectives) qui relie f à g; et cette déformation de f à g peut, localement, être réalisée par une isotopie d'automorphismes de* D^n *qui sont l'identité sur* S^{n-1}.

Démonstration. — Soit X une triangulation de V qui rend f et g linéaires. Soient (x_i) les sommets de X. D'après le lemme 1 on peut passer de f à g par une famille continue d'applications linéaires injectives (resp. localement injectives) de X dans D^n; dans cette déformation on peut s'arranger pour ne déplacer que l'un des x_i à la fois. On applique alors le lemme 2.

COROLLAIRE. — *Soit f une application injective (resp. localement injective) d'une variété* V *de dimension p dans une variété* W *de dimension n. Si* $2p+1 \leq n$, *et si* $f^{-1}(d\mathrm{W}) = d\mathrm{V}$, *$f$ est un plongement (resp. une immersion).*

Il suffit de montrer que f est localement plate. On regarde cela dans le bord des étoiles des points de $f(\mathrm{V})$. Il s'agit de savoir si un plongement de S^{p-1} dans S^{n-1} peut être transformé en le plongement naturel par un automorphisme de S^{n-1}, la réponse est oui, à cause du théorème 1 $[2(p-1)+2 \leq n-1]$.

THÉORÈME 2. — *Soit f une application d'une variété* V *de dimension p dans une variété* W *de dimension n, telle que* $f^{-1}(d\mathrm{W}) = d\mathrm{V}$. *Il existe dans tout voisinage* $\mathcal{C}^0$ *de f :*

a. un plongement si $2p+1 \leq n$;

b. une application localement injective si $2p \leq n$.

Il suffit d'appliquer le lemme 1 dans chaque carte locale de W; on applique le corollaire ci-dessus pour compléter l'assertion *a*.

THÉORÈME 3. — *Soient f et g deux plongements d'une variété* V *de dimension* 1, *dans une variété* W *de dimension* n $(n \geq 4)$, *tels que* $f|d\mathrm{V} = g|d\mathrm{V}$. *Si f et g sont homotopes* $(\mathrm{mod}\, d\mathrm{V})$ *il existe une isotopie parmi les automorphismes de* W *qui sont l'identité sur* dW, *qui transforme f en g.*

Démonstration. — On peut supposer V connexe. V est alors isomorphe à I ou à S^1. On ramène le cas $V = S^1$ au cas $V = I$ en fixant un point. Par application du lemme 1 on construit une famille continue d'injections de V dans W qui joint f à g. Un voisinage régulier de l'image d'une telle injection est une boule, dans cette boule on applique le théorème 1.

LEMME 3. — *Quel que soit* $n \geq 1$, *la suspension*

$$\pi_0(\mathrm{Aut}_{\mathrm{PI}}(\mathrm{D}^n \bmod \mathrm{o})) \to \pi_0(\mathrm{Aut}_{\mathrm{PI}}(\mathrm{D}^{n+1} \bmod \mathrm{o}))$$

est un isomorphisme; ces groupes sont isomorphes à $\mathbf{Z}_2$.

Quel que soit $n \geq 3$, *la suspension*

$$\pi_1(\mathrm{Aut}_{\mathrm{PI}}(\mathrm{D}^n \bmod \mathrm{o})) \to \pi_1(\mathrm{Aut}_{\mathrm{PI}}(\mathrm{D}^{n+1} \bmod \mathrm{o}))$$

est surjective.

Démonstration. — La première assertion est triviale, démontrons la seconde. Un élément de $\pi_1(\mathrm{Aut}_{\mathrm{PI}}(\mathrm{D}^n \bmod \mathrm{o})$, est une classe d'automorphismes μ de $\mathrm{I} \times \mathrm{D}^n$ qui sont l'identité sur $\mathrm{I} \times \{\mathrm{o}\}$ et sur $\{\mathrm{o}, 1\} \times \mathrm{D}^n$. Son image par la suspension est obtenue en multipliant par Id_{I} (en identifiant D^{n+1} à $\mathrm{D}^n \times \mathrm{I}$). Soit ν un représentant d'un élément de $\pi_1(\mathrm{Aut}_{\mathrm{PI}}(\mathrm{D}^{n+1} \bmod \mathrm{o}))$, et soit x le point de D^{n+1} qui est identifié au point (o, o) de $\mathrm{D}^n \times \mathrm{I}$. $\nu | \mathrm{I} \times \{x\}$ est un plongement de I dans $\mathrm{I} \times \mathrm{S}^n$; d'après le théorème 1, on peut modifier ν, sans changer sa classe, de façon que $\nu | \mathrm{I} \times \{x\}$ soit l'identité. Grâce au théorème d'isomorphisme des voisinages dérivés on construit un μ tel que le produit de ν et du suspendu de μ soit l'identité sur $\mathrm{I} \times \mathrm{S}^n_+$. Pour conclure il suffit de remarquer que $\mathrm{Aut}_{\mathrm{PI}}(\mathrm{D}^p \bmod \mathrm{S}^{p-1})$ a le type d'homotopie du point.

THÉORÈME 4 (Construction de Whitney). — *Soit* V *une variété, de dimension m. Posons $m = p + q$. Soient* $\varphi : \mathrm{D}^p \to \mathrm{V}$ *et* $\psi : \mathrm{D}^q \to \mathrm{V}$ *deux injections dont l'image est dans l'intérieur de* V. *Supposons que* φ *et* ψ *soient localement plates en tous les points de* $\varphi($*intérieur* $\mathrm{D}^p)$ *et de* $\psi($*intérieur* $\mathrm{D}^q)$ *respectivement, et que* $\mathrm{Im}(\varphi)$ *et* $\mathrm{Im}(\psi)$ *se coupent transversalement en exactement deux points* A *et* B (*située dans l'image des intérieurs*). *On suppose que :*

a. $p \geq 2$, $q \geq 3$.

b. Par rapport à une orientation — arbitraire — d'un voisinage de $\varphi(\mathrm{D}^p) \cup \psi(\mathrm{D}^q)$ *dans* V, *les points d'intersection sont de signes opposés.*

c. Il existe un chemin c qui relie ces deux points dans $\varphi(\mathrm{D}^p)$ *et un chemin* c' *qui les relie dans* $\psi(\mathrm{D}^q)$, *qui sont homotopes parmi les chemins qui les relient dans* V.

Alors il existe une isotopie d'automorphismes de V, *dont le support est une boule de dimension m contenue dans* V, *laissant* $\varphi(\mathrm{S}^{p-1})$ *et* $\psi(\mathrm{S}^{q-1})$ *fixes, telle que la transformée de* φ *par cette isotopie et* ψ *aient des images disjointes.*

Il suffit de copier la démonstration classique dans le cadre différentiable (*cf.* [19]) en se servant des théorèmes 1, 2, 3 et 4 ci-dessus.

Corollaire. — *Soient f et g deux plongements d'une variété* V *de dimension p dans* D^n, *tels que* $f|d\mathrm{V} = g|d\mathrm{V}$. *Si* $2p+1 \leq n$, *ces deux plongements sont pseudo-isotopes.*

CHAPITRE V.

Compléments.

Dans ce chapitre, pour simplifier les notations, je noterai A_n le groupe quasi-simplicial $\mathrm{Aut}_{\mathrm{PI}}(\mathrm{D}^n \bmod 0)$.

1. Les espaces classifiants BA_n. — Soit $\mathrm{U}_n^t (t \geq 3)$ l'ensemble quasi-simplicial dont les p-simplexes sont les plongements $\Delta_p \times \mathrm{D}^n \to \Delta_p \times \mathrm{D}^{n+t}$ (plongements sans bord relatif et transversaux au bord) qui envoient $\Delta_p \times \{0\}$ identiquement sur lui-même, et qui, pour toute face $\Delta_q \to \Delta_p$, induisent un plongement de $\Delta_q \times \mathrm{D}^n$ dans $\Delta_q \times \mathrm{D}^{n+t}$. [Avec les notations du chapitre I, cet espace s'appellerait $\mathrm{Plgt}_{\mathrm{PI}}^{\{0\}}(\mathrm{D}^n, \mathrm{D}^{n+t})$.] Pour tout t, on a une application naturelle de U_n^t dans U_n^{t+1}; on note U_n la limite inductive.

Pour tout t, A_n opère sur U_n^t (*cf.* chap. I, § 3, exemple C) définit un fibré principal quasi-simplicial dont la base sera notée BA_n^t. Cette opération de A_n est compatible avec les suspensions $\mathrm{U}_n^t \to \mathrm{U}_n^{t+1}$, ce qui permet de définir un ensemble quasi-simplicial BA_n qui est à la fois la limite inductive des BA_n^t et le quotient de U_n par A_n. D'après le chapitre I (§ 3, exemple C) BA_n^t (donc aussi BA_n) est muni d'une structure semi-simpliciale naturelle.

Lemme 1. — *Si* $i < t$ (*et si* $t \geq 3$) : $\pi_i(\mathrm{U}_n^t) = 0$.

On va démontrer ce lemme par récurrence sur n. Il est trivial pour $n = 0$; supposons-le démontré pour $(n-1)$. Un élément de $\pi_i(\mathrm{U}_n^t)$ est un plongement :

$$\varphi : \quad \Delta_i \times \mathrm{D}^n \to \Delta_i \times \mathrm{D}^{n+t}$$

tel que $\varphi(x, y) = (x, y)$ si $x \in d\Delta_i$, et que $\varphi(x, 0) = (x, 0)$ pour tout x. (On identifie une fois pour toutes D^n à une section de D^{n+t} par un espace linéaire de dimension n.)

Soit s un point de $dD^n (= S^{n-1})$, φ induit un plongement η de Δ_i dans $\Delta_i \times S^{n+t-1}$, défini par $\eta(x) = \varphi(x, s)$. La projection de l'image de η sur S^{n+t-1} est un sous-polyèdre de dimension au plus i; comme $i < t \leqq t + n - 1$ $(n \geqq 1)$, il existe une boule B dans S^{t+n-1}, telle que l'image de η soit contenue dans l'intérieur de $\Delta_i \times B$. Mais $\Delta_i \times B$ est une boule de dimension $i + n + t - 1$, et comme $i + n + t - 1 \geqq i + 3$, ce plongement est isotope au plongement naturel; d'après la proposition 2 *bis* du chapitre IV, on peut réaliser cette isotopie en faisant opérer une isotopie d'automorphismes de $\Delta_i \times B$, qui sont l'identité sur le bord. On modifie φ par cette isotopie, ce qui ne change pas sa classe dans $\pi_i(U_n^t)$, et l'on est ramené au cas où $\varphi(x, s) = (x, s)$ pour tout x de Δ_i.

Soient S_+^{n-1} et S_+^{n+t-1} les demi-sphères qui ont leur centre en s; par application du théorème d'isomorphisme des voisinages dérivés, on se ramène au cas où $\varphi | \Delta_i \times S_+^{n-1}$ définit un plongement de $\Delta_i \times S_+^{n-1}$ dans $\Delta_i \times S_+^{n+t-1}$, c'est-à-dire un élément de $\Delta_i(U_{n-1}^t)$ (en identifiant les demi-sphères aux boules de même dimension); cet élément est nul d'après l'hypothèse de récurrence. En appliquant la proposition 2 du chapitre IV, on modifie φ (sans changer sa classe) de façon que $\varphi(x, y) = (x, y)$ si (x, y) appartient à $\Delta_i \times S_+^{n-1}$ et que $\varphi(\Delta_i \times S_-^{n-1}) \subset \Delta_i \times S^{n+t-1}$. Mais, puisque $t \geqq 3$, ce plongement de $\Delta_i \times S_-^{n-1}$ dans $\Delta_i \times S_-^{n+t-1}$ est isotope au plongement naturel. Ceci permet de modifier φ (sans changer sa classe) de façon que $\varphi(x, y) = (x, y)$ si y appartient à S^{n-1}. Ce plongement est alors isotope au plongement trivial puisque $t \geqq 3$. Ce qui prouve que φ est équivalent à zéro dans $\pi_i(U_n^t)$, donc que $\pi_i(U_n^t) = 0$.

Corollaire 1 :

$$\pi_i(U_n) = 0 \quad \textit{pour tout } i \textit{ et pour tout } n.$$

C'est, en effet, la limite inductive des $\pi_i(U_n^t)$.

Corollaire 2 :

$$\pi_i(BA_n^t) = \pi_{i-1}(A_n) \qquad \textit{pour} \quad i < t \qquad (t \geqq 3),$$
$$\pi_i(BA_n) = \pi_{i-1}(A_n).$$

Ceci résulte des suites exactes d'homotopie des fibrés qui définissent ces espaces.

Lemme 2. — *Soit* $(B, i, E, \Sigma, E_\sigma)$ *un pseudofibré de fibre* $(D^n \bmod 0)$, *si* B *est de dimension* p *et si* $t \geqq p$ (*et* $t \geqq 3$), *il existe une injection* f *de* E *dans* $B \times D^{n+t}$, *telle que* $f(i(x)) = (x, 0)$ *pour tout point* x *de* B, *et que*, $\forall \sigma \in \Sigma$, f *induise une injection de* E_σ *dans* $\sigma \times D^{n+t}$.

De plus si l'on s'est donné un sous-complexe B' *de* Σ, *et une injection* $f_{B'}$, *définie sur* $\bigcup_{\sigma \subset B'} E_\sigma$, *et vérifiant les propriétés ci-dessus, on peut construire* f *de façon qu'elle prolonge* $f_{B'}$.

Démonstration. — Il suffit de montrer la dernière assertion dans le cas où un seul simplexe, σ, de Σ n'est pas contenu dans B' (donc $d\sigma \subset B'$). Donnons-nous un isomorphisme φ de $\sigma \times D^n$ sur E_σ. Il s'agit de trouver une injection de $E_\sigma [= \varphi(\sigma \times D^n)]$ dans $\sigma \times D^{n+t}$ qui prolonge une application donnée de la partie de E_σ qui est au-dessus de $d\sigma [= \varphi(d\sigma \times D^n)]$. Ceci est possible car d'après le lemme 1, et à cause des hypothèses de dimension qu'on a faites, $\pi_{\dim \sigma - 1}(U_n^t) = 0$).

PROPOSITION 1. — *Pour tout tube* $\alpha = (B, i, E)$ *d'âme une variété, il existe un tube* $\beta = (B, i', E')$ *tel que la somme de Whitney* $\alpha \oplus \beta$ *soit triviale. On peut ajouter que si* $\dim B = p$, *on peut trouver un* β *dont les fibres sont de dimension* p.

Pour s'en persuader, on applique le corrollaire 3 de la proposition 2 du chapitre II à $f(E) \subset B \times D^{n+t}$, où f est l'application dont le lemme 2 ci-dessus affirme l'existence.

COROLLAIRE. — *Pour tout pseudofibré* α *de fibre* $(D^n \bmod 0)$ *dont la base est de dimension finie, il existe un pseudofibré* β *de même base et de fibre* $(D^N \bmod 0)$ (N *suffisamment grand*), *tel que la somme de Whitney* $\alpha \oplus \beta$ *soit un pseudofibré trivial.*

Si la base est une variété triangulée, c'est une conséquence triviale de la proposition. Si la base n'est pas une variété, on la plonge dans R^N (N suffisamment grand), et l'on prolonge le pseudofibré donné à un voisinage dérivé de l'image de ce plongement. Ce voisinage dérivé est une variété, on lui applique ce qui précède, il suffit alors de restreindre le pseudofibré trouvé à la base initiale.

LEMME 3. — *Si* $t \geqq 3$, *et si* $\dim B < t$, *il existe une bijection naturelle entre les classes d'isomorphisme des pseudofibrés de fibre* $(D^n \bmod 0)$ *et de base* (B, Σ) (*où* Σ *est une triangulation donnée de* B) *et l'ensemble des classes d'homotopie d'applications semi-simpliciales de l'ensemble semi-simplicial* $\bar{\Sigma}$ *attaché à* Σ, *dans* BA_n^t.

Démonstration. — Soit $(B, i, E, \Sigma, E_\sigma)$ un pseudofibré, et soit f une injection de E dans $B \times D^{n+t}$ comme au lemme 2. Donnons-nous pour tout simplexe σ de Σ, un isomorphisme φ_σ de $\sigma \times D^n$ sur E_σ qui vérifie les conditions 3α et 3β de la définition 1 du paragraphe 3 du chapitre II. A tout simplexe σ de Σ, on peut associer le simplexe de U_n^t défini par $f.\varphi_\sigma$. Ceci ne définit pas une application quasi-simpliciale de Σ dans U_n^t car si σ' est une face de σ, $f.\varphi_{\sigma'}$ n'est pas égal, en général, à $f.\varphi_\sigma | \sigma' \times D^n$ (puisque $\varphi_{\sigma'}$ n'est pas égal, en général, à $\varphi_\sigma | \sigma' \times D^n$). Mais $\varphi_{\sigma'}^{-1}.\varphi_\sigma$ est un simplexe de A_n, donc on a défini une application quasi-simpliciale de Σ dans le quotient de U_n^t par l'action de A_n, c'est-à-dire dans BA_n^t; ce qui (*cf.* chap. I, § 2, dernière remarque) définit une application semi-simpliciale de $\bar{\Sigma}$ dans BA_n^t.

Si l'on change l'injection f en une autre, f', on obtient une autre application; on va montrer qu'il existe une application quasi-simpliciale du complexe simplicial $\Sigma\times \mathrm{I}$ dans BA_n^t dont les restrictions à $\Sigma\times\{0\}$ et $\Sigma\times\{1\}$ soient les applications déduites de f et f'; ceci démontrera que la classe d'homotopie de l'application semi-simpliciale $\bar\Sigma$ dans BA_n^t déduite de l'application quasi-simpliciale de Σ dans BA_n^t construite ci-dessus ne dépend pas de f. Pour construire cette application de $\Sigma\times \mathrm{I}$ dans BA_n^t, on considère le produit par I du pseudofibré $(\mathrm{B}, i, \mathrm{E}, \Sigma, \mathrm{E}_\sigma)$, c'est un pseudofibré relatif à la triangulation $\Sigma\times \mathrm{I}$ de $\mathrm{B}\times \mathrm{I}$. On lui applique la partie relative du lemme 2 ci-dessus, ce qui nous donne une application F de $\mathrm{E}\times \mathrm{I}$ dans $\mathrm{B}\times \mathrm{D}^{n+t}\times \mathrm{I}$, telle que $\mathrm{F}|\mathrm{E}\times\{0\}=f$, $\mathrm{F}|\mathrm{E}\times\{1\}=f'$. Il suffit alors d'appliquer à F la construction appliquée à f et f'.

On vérifie aisément qu'on obtient la correspondance inverse en associant à toute application $\varphi:\bar\Sigma\to \mathrm{BA}_n^t$, le pseudofibré associé, par réalisation géométrique, au fibré principal de base Σ et de groupe A_n qui est l'image inverse par l'application $\Sigma\to\bar\Sigma\to \mathrm{BA}_n^t$, du fibré U_n^t de base BA_n^t.

Proposition 2. — *Quel que soit l'entier n, et quelle que soit la variété* B, *si* $t\geqq 3$ *et si* $t>\dim \mathrm{B}$, *on a une bijection naturelle de l'ensemble des classes d'isomorphisme des tubes d'âme* B *et de fibre* D^n, *sur l'ensemble des classes d'homotopie d'applications continues de* B *dans la réalisation géométrique de l'ensemble semi-simplicial* BA_n^t.

C'est une conséquence facile du lemme 3, des théorèmes d'unicité des données pseudofibrées qu'on peut mettre sur un tube donné (*cf.* chap. II, § 2 et 5), et du théorème d'approximation simpliciale.

Corollaire. — *Quel que soit n, et quelle que soit la variété* B, *il existe une bijection naturelle de l'ensemble des classes d'isomorphismes des n-tubes d'âme* B, *sur l'ensemble des classes d'homotopie d'applications continues de* B *dans la réalisation géométrique de* BA_n.

Il suffit de passer à la limite inductive.

2. Les groupes $\pi_i(\mathrm{A}_n)$. — Soit $\mathcal{G}_n$ l'ensemble semi-simplicial des applications de degré ± 1 de S^{n-1} sur elle-même. On définit une application quasi-simpliciale de A_n dans $\mathcal{G}_n$, par restriction au bord de D^n. Cette application commute avec les suspensions $\mathcal{G}_n\to\mathcal{G}_{n+1}$ et $\mathrm{A}_n\to \mathrm{A}_{n+1}$. Le résultat principal de ce paragraphe s'énonce :

Proposition 3. — $\pi_i(\mathcal{G}_n, \mathrm{A}_n)\to\pi_i(\mathcal{G}_{n+1}, \mathrm{A}_{n+1})$ *est un isomorphisme pour* $n\geqq 3$. *Ces groupes sont égaux à* $\mathbf{Z}$ *si i est divisible par* 4 *et différent de zéro (pour* $i=0$, *ce groupe est* 0), *à* $\mathbf{Z}_2$ *si* $i+2$ *est divisible par* 4, *ils sont nuls pour i impair.*

Démonstration. — Elle se fera en deux temps : on définira d'abord des groupes de cobordisme Φ_i^n et l'on montrera que Φ_i^n est naturellement isomorphe à $\pi_i(\mathcal{G}_n, A_n)$ (pour tout i et tout n !). On montrera ensuite que les groupes Φ_i^n sont stables par suspension. Cette démonstration est l'analogue semi-linéaire de celle de Levine qui permet de calculer les groupes de nœuds des sphères différentiables (*cf.* [11], et surtout [5]).

Les groupes Φ_i^n. — Un élément de Φ_i^n est représenté par une sous-variété V (avec bord relatif) de dimension i de S^{i+n-1}, muni d'un champ normal semi-linéaire [c'est-à-dire qu'on s'est donné une injection φ de $V \times D^{n-1}$ dans S^{i+n-1} telle que $\varphi(x, 0) = x$, pour tout x de V]. On supposera que φ est trivial au-dessus de S_+^{i-1}, ce qui signifie que, au voisinage de S_+^{i-1}, V coïncide avec S_+^i, et que, au-dessus de ce voisinage, φ coïncide avec le champ normal à S_+^i naturel (qu'on notera φ_0).

Deux telles données (V_1, φ_1) et (V_2, φ_2) seront considérées comme équivalentes s'il existe une sous-variété W (à bord relatif) de $S^{i+n-1} \times I$, dont le bord soit la réunion de $V_1 \times \{0\}$, de $V_2 \times \{1\}$ et de $S^{i-1} \times I$, et un champ normal à W dans $S^{i+n-1} \times I$, soit ψ, qui, en restriction à $V_1 \times \{0\}$ et $V_2 \times \{1\}$ redonne φ_1 et φ_2 respectivement, et qui est trivial au voisinage de $S_+^{i-1} \times I$. Φ_i^n est l'ensemble des classes d'équivalence.

Φ_i^n est muni d'une structure de groupe naturelle dont l'élément neutre est la classe de (S_+^i, φ_0) (*cf.* [5]).

On définit un homomorphisme de Φ_i^n dans Φ_i^{n+1}, appelé suspension, en plongeant S^{i+n-1} dans S^{i+n}, et en munissant ce plongement de son champ normal naturel.

LEMME 1. — *Il existe un isomorphisme*

$$\alpha : \quad \Phi_i^n \to \pi_i(\mathcal{G}_n, A_n)$$

compatible avec les suspensions.

Soit un collier η de dV dans V ($\eta : dV \times I \to V$, et $\eta(x, 0) = x, \forall x$); on en déduit une application injective :

$$\varphi' : \quad I \times S^{i-1} \times D^{n-1} \to S^{i+n-1},$$

en posant $\varphi'(t, x, z) = \varphi(\eta(x, t), z)$. On peut, grâce au théorème du collier (chap. II, corollaire 2 *bis* de la proposition 2), prolonger φ' en une injection :

$$\Phi : \quad [-1, +1] \times S^{i-1} \times D^{n-1} \to S^{i+n-1},$$

ce qui, modulo l'identification naturelle de $[-1, +1] \times D^{n-1}$ avec D^n, définit un champ normal à S^{i-1} dans S^{n+i-1}; on peut s'arranger pour que, au-dessus de S_+^{i-1}, Φ coïncide avec le champ naturel Φ_0. Le théorème des voisinages réguliers permet alors de modifier Φ au-dessus de S_-^{i-1} de façon que $\operatorname{Im}\Phi = \operatorname{Im}\Phi_0$ [sans changer la classe de (V, φ)]. $\overline{S^{n+i-1} - \operatorname{Im}\Phi_0}$ s'identifie naturellement à $S^{n-1}\times D^i$. La construction de Thom appliquée à la sous-variété $\overline{V-\operatorname{Im}\eta}$ de $S^{n-1}\times D^i$, munie de la restriction du champ φ, détermine une application continue f de D^i dans $\mathcal{G}_n$. Le couple (f, Φ) détermine un élément de $\pi_i(\mathcal{G}_n, A_n)$. Par une construction analogue portant sur les équivalences (W, ψ), on montre que l'élément de $\pi_i(\mathcal{G}_n, A_n)$ ainsi obtenu ne dépend que de la classe de (V, φ). Ce qui définit l'homomorphisme α.

Montrons que α est surjectif (l'injectivité se démontre par une construction analogue portant sur les équivalences). Soit (f, Φ) un représentant d'un élément de $\pi_i(\mathcal{G}_n, A_n)$. Soit s un point de S^{n-1}, R_s le rayon de D^n relatif à s. $\Phi^{-1}(R_s\times S^{i-1})$ est une sous-variété de $D^n\times S^{i-1}(\subset S^{i+n-1})$ avec champ normal canonique. Soit f' une approximation de f telle que f' et f coïncident sur $S^{n-1}\times S^{i-1}$ et que f' soit transversale sur s (ce qui est possible puisque $p_2.f|S^{n-1}\times S^{i-1}$ est transversale sur s). $f'^{-1}(s)$ est une sous-variété Y, avec champ normal, de $D^i\times S^{n-1}(\subset S^{n+i-1})$. Cette variété et celle qui a été déduite de Φ se recollent, ainsi que les champs normaux. On obtient un couple (V, φ) qui définit un élément de Φ_i^n dont l'image par α est la classe de (f, Φ).

Ceci démontre le lemme. La compatibilité avec les suspensions est une conséquence triviale des définitions.

Le calcul des Φ_i^n. *Les groupes* $P_i'^n$. — Considérons les couples $(\tilde{V}, \tilde{\varphi})$, où $\tilde{V}$ est une sous-variété différentiable (avec bord relatif) de S^{i+n-1}, dont le bord est un lissage de S^{i-1} (naturellement plongée dans S^{i+n-1}) et $\tilde{\varphi}$ un champ normal à $\tilde{V}$. Deux tels couples $(\tilde{V}_1, \tilde{\varphi}_1)$ et $(\tilde{V}_2, \tilde{\varphi}_2)$ seront considérés comme équivalents s'il existe une sous-variété (avec bord relatif) $\tilde{W}$ de $S^{i+n-1}\times I$, dont le bord est la réunion de $\tilde{V}_1\times\{0\}$, de $\tilde{V}_2\times\{1\}$, et de $\tilde{X}$ (où $\tilde{X}$ est une sous-variété de $S^{i+n-1}\times I$ qui est un lissage de $S^{i-1}\times I$, naturellement plongé dans $S^{i+n-1}\times I$), et un champ normal à $\tilde{W}$ dans S^{i+n-1}, qui par restriction donne $\tilde{\varphi}_1$ et $\tilde{\varphi}_2$. L'ensemble quotient sera noté $P_i'^n$; on le munit facilement d'une structure de groupe. Si $n\geqq 3$, la condition « $d\tilde{V}$ est un lissage de S^{i-1} naturellement plongée dans S^{i+n-1} » est équivalente à la condition « $d\tilde{V}$ est semi-différentiablement équivalente à S^{i-1} ».

Les théorèmes de lissage et de triangulation classiques permettent d'énoncer le lemme :

LEMME 2. — *Il existe un isomorphisme, compatible avec les suspensions :* $\Phi_i^n \to P_i'^n$.

Calcul des $P_i'^n$ (*quand* $n\geqq 3$). — Posons $P_i' = \varinjlim_n P_i'^n$. Si $n\geqq 5$, toute sphère d'homotopie est un lissage de la vraie sphère, donc $P_i' = P_i$

(i. e. : le groupe défini par Kervaire et Milnor; *cf.* [10] ou [5]). Si $i \leqq 6$, tout lissage de la vraie sphère semi-linéaire est la vraie sphère différentiable, donc $P'_i = A_i$ (mêmes références). Il en résulte que $P'_i = \mathbf{Z}$ si $i = 4k$ $(i \neq 0)$, $\mathbf{Z}_2$ si $i = 4k + 2$, o si i est impair. Tout revient donc à démontrer que $P'^n_i \to P'_i$ est un isomorphisme pour $n \geqq 3$.

Surjectivité. — Il faut montrer que le générateur de P'_i (quand il existe) est plongeable dans S^{i+2}. Pour $i \geqq 6$, c'est démontré dans le papier de Levine, et c'est dû au fait qu'on connaît une construction explicite de ce générateur par attachement d'anses. Pour $i = 2$, il s'agit de plonger une variété de dimension 2 dans S^4; on sait, d'après Whitney, qu'on peut trouver une immersion, on fait alors « sortir » les points doubles par le bord. Pour $i = 4$, on sait qu'on peut représenter le générateur de P'_4 par une variété simplement connexe; d'après Haefliger (*cf.* [4], dernier théorème énoncé) cette variété est plongeable dans S^6. *Nota :* Il n'y a pas lieu de s'inquiéter de la façon dont le bord est plongé puisqu'on est en codimension au moins 3.

Injectivité. — Il suffit de montrer que si $(\tilde{V}, \tilde{\varphi})$ définit un élément de P'^n_i qui est zéro dans P'_i, les modifications sphériques qui transforment $\tilde{V}$ en une boule sont réalisables plongées dans S^{i+n-1}; ceci est démontré dans le papier de Levine.

Proposition 4. — *a. L'application naturelle*

$$SO(1) \to A_1$$

est une équivalence d'homotopie.

b. L'application naturelle

$$SO(2) \to A_2$$

est une équivalence d'homotopie.

L'assertion a est triviale. Montrons b. Il suffit pour cela de montrer que $P'^2_i = \pi_i(\mathcal{G}_2, SO(2))$. Dans [5] on démontre que $\pi_i(\mathcal{G}_2, SO(2)) = (\Phi^2_i)_{\text{diff}}$, le groupe obtenu de façon analogue à Φ^2_i, mais en partant de variétés différentiables. Or P'^2_i et $(\Phi^2_i)_{\text{diff}}$ sont isomorphes d'après un résultat de C. T. C. Wall (*cf.* [23]) qui s'énonce :

Soit (S^{p+2}, S^p) un nœud différentiable, il est non noué, si et seulement si le nœud semi-linéaire obtenu en le triangulant est non noué.

3. Microfibrés. — Dans ce qui suit je suppose connue la théorie des microfibrés semi-linéaires (*cf.* [12]).

Avec les notations introduites au chapitre I, et en appelant $\mathcal{A}^n$ les germes à l'origine des plongements de D^n dans $\mathbf{R}^n$ qui conservent l'origine;

le groupe semi-simplicial PL_n s'écrit $\mathcal{C}\!\ell^n_{\mathrm{I}}$. A tout plongement on peut associer son germe à l'origine, ce qui donne des applications

$$\mathrm{Plgt}^0_{\mathrm{I}}\,(D^n, \mathbf{R}^n, \mathrm{Id}_{D^n}) \to \mathcal{C}\!\ell^n_{\mathrm{I}} = PL_n,$$

$$\mathrm{Plgt}^0_{\mathrm{PI}}\,(D^n, \mathbf{R}^n, \mathrm{Id}_{D^n}) \to \mathcal{C}\!\ell^n_{\mathrm{PI}}.$$

Ces applications sont évidemment des équivalences d'homotopie.

De plus, l'application

$$\mathrm{Aut}_{\mathrm{PI}}\,(D^n \bmod \{o\}) \to \mathrm{Plgt}^0_{\mathrm{PI}}\,(D^n, \mathbf{R}^n, \mathrm{Id}_{D^n})$$

est une équivalence d'homotopie à cause du théorème d'isomorphisme des voisinages dérivés.

On a donc une application naturelle (définie à homotopie près) de PL_n dans $\mathrm{Aut}_{\mathrm{PI}}(D^n \bmod \{o\}) = A_n$.

Existence des microfibrés normaux. — Soit A'_n le sous-groupe quasi-simplicial de A_n formé des simplexes $\Delta_p \times D^n \to \Delta_p \times D^n$ qui respectent la projection sur Δ_p dans un voisinage de $\Delta_p \times \{o\}$. On a une application naturelle de A'_n dans PL_n (en prenant les germes à l'origine) et cette application est une équivalence d'homotopie (à cause du théorème d'isomorphisme des voisinages dérivés). L'application $PL_n \to A_n$ qui en résulte est évidemment la même (à homotopie près) que celle qui a été définie ci-dessus.

Ceci permet de poser très simplement le problème de l'existence des microfibrés normaux (non stables) : Soit V une sous-variété de la variété M, il existe un pseudofibré α normal à V dans M (*cf.* proposition 2 du chapitre II).

Existe-t-il un microfibré normal à V dans M, et, si oui, est-il unique ?

Ce problème est équivalent au suivant :

Existe-t-il une restriction du groupe structural A_n de α à $PL_n (\approx A'_n)$? Et, si oui, on peut se poser la question de savoir si une telle restriction est unique [i. e. : de savoir si deux telles restrictions proviennent d'une même restriction du groupe structural de $\alpha \times I$ (de base $V \times I$)]; ce problème est équivalent au suivant : étant données deux projections π et π' de microfibrés normaux à V dans M, existe-t-il une projection π qui définisse un microfibré normal à $V \times I$ dans $M \times I$, telle que ses restrictions à $M \times \{o\}$ et $M \times \{1\}$ soient π et π'. On dira alors que ces deux projections sont pseudo-isotopes.

Pour résoudre ces problèmes, il suffit de calculer les groupes d'homotopie relatifs $\pi_i(A_n, PL_n)$. Dans [25], on démontre que $\pi_i(PL, PL_n) = 0$ si $i \leq n-1$. Il résulte du paragraphe 2 ci-dessus que $\pi_i(PL, A_n) = 0$

(je rappelle que l'existence des microfibrés normaux stables entraîne que la limite inductive des A_n est la même que celle des PL_n, c'est PL) pour $i \leq n-1$; donc $\pi_i(A_n, PL_n) = 0$ pour $i \leq n-2$. On peut donc énoncer :

THÉORÈME 1. — *Soit* V *une sous-variété de la variété* M, *supposons que* V *ait le type d'homotopie d'un complexe de dimension* k, *et que*

$$\dim M - \dim V = n;$$

alors, si $k \leq n-1$, *il existe un microfibré normal à* V *dans* M. *Si* $k \leq n-2$, *deux tels microfibrés ont des projections pseudo-isotopes.*

En particulier, si $\dim V \leq n-1$, *il existe un microfibré normal à* V *dans* M; *si* $\dim V \leq n-2$, *deux tels microfibrés ont des projections pseudo-isotopes.*

Cette dernière assertion est démontrée dans [25].

Quelques précisions. — Je vais maintenant raffiner ce résultat. Pour cela je vais écrire les analogues semi-linéaires de la fibration classique de base S^n définie par $SO(n)$ sur $SO(n+1)$. Il y en a deux : une pour les espaces indiciés PI, l'autre pour les espaces indiciés I. Dans ce qui suit je me sers de façon essentielle du résultat bien connu que les espaces $\mathrm{Aut}_I(D^p \bmod S^{p-1})$ et $\mathrm{Aut}_{PI}(D^p \bmod S^{p-1})$ ont le type d'homotopie du point.

Il en résulte en particulier que les applications naturelles (quand j'oublie les indices I ou PI, le résultat est vrai quel que soit cet indice) :

$$\mathrm{Aut}(S^n) \to \mathrm{Aut}(D^{n+1} \bmod \{0\})$$

sont des équivalences d'homotopie.

Soit s un point de S^n, on a des fibrations d'espace $\mathrm{Aut}(S^n)$, de groupe $\mathrm{Aut}(S^n \bmod \{s\})$ et de base $\mathrm{Plgt}(\{s\}, S^n)$, pourvu que $n \geq 3$ (*cf.* chap. IV, § 2 et 3). Mais $\mathrm{Plgt}(\{s\}, S^n)$ est fibré de groupe $\mathrm{Aut}(S^n \bmod S^n_+)$ $[\approx \mathrm{Aut}(D^n \bmod S^{n-1}) \approx \text{point}]$ et de base $\mathfrak{A}^n$. On a donc, au type d'homotopie près, des fibrations de Kan :

$$\begin{array}{ccc}
PL_n & \qquad & A_n \\
\downarrow & & \downarrow \\
\mathrm{Aut}_I(D^{n+1} \bmod \{0\}) & & A_{n+1} \\
\downarrow & & \downarrow \\
\mathrm{Plgt}_I(\{s\}, S^n) & & \mathrm{Plgt}_{PI}(\{s\}, S^n)
\end{array}$$

Tout ceci (y compris la fibration sur les SO) jouit de propriétés de fonctorialité telles qu'on a des morphismes de fibrés de Kan :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{SO}(n) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{PL}_n \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{A}_n \arrow[d] \\
\mathrm{SO}(n+1) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Aut}_{\mathrm{I}}(\mathrm{D}^{n+1} \bmod \{o\}) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{A}_{n+1} \arrow[d] \\
\mathrm{S}^n \arrow[r] & \mathrm{Plgt}_{\mathrm{I}}(\{s\}, \mathrm{S}^n) \arrow[r] & \mathrm{Plgt}_{\mathrm{PI}}(\{s\}, \mathrm{S}^n)
\end{tikzcd}$$

$\mathrm{Plgt}_{\mathrm{I}}(\{s\}, \mathrm{S}^n)$ est le complexe singulier semi-linéaire de S^n, donc la flèche entre les deux premières bases est une équivalence d'homotopie. D'autre part, on a une application naturelle de $\mathrm{Plgt}_{\mathrm{PI}}(\{s\}, \mathrm{S}^n)$ dans S^n $[\approx \mathrm{Plgt}_{\mathrm{I}}(\{s\}, \mathrm{S}^n)]$, qui fait de S^n un rétracte de $\mathrm{Plgt}_{\mathrm{PI}}(\{s\}, \mathrm{S}^n)$; donc la suite exacte d'homotopie du couple $(\mathrm{Plgt}_{\mathrm{PI}}(\{s\}, \mathrm{S}^n), \mathrm{Plgt}_{\mathrm{I}}(\{s\}, \mathrm{S}^n))$ se scinde en des suites (qui sont d'ailleurs des sommes directes) :

$$0 \to \pi_i(\mathrm{S}^n) \to \pi_i(\mathrm{Plgt}_{\mathrm{PI}}(\{s\}, \mathrm{S}^n)) \to \pi_i^{\mathrm{rel}}(\mathrm{Plgt}(\{s\}, \mathrm{S}^n)) \to 0.$$

Dans [8], on trouve le résultat suivant :

Soit f une application d'une variété M (de dimension m) dans une variété Q de dimension q, telle que $f | d\mathrm{M}$ soit un plongement de $d\mathrm{M}$ dans $d\mathrm{Q}$. Alors si $\pi_r(\mathrm{M}) = 0$ pour $r \leqq 3m - 2q + 2$, et si $\pi_r(f) = 0$ pour $r \leqq 2m - q + 1$, f est homotope à un plongement.

On en déduit que $\pi_i^{\mathrm{rel}}(\mathrm{Plgt}(\{s\}, \mathrm{S}^n)) = 0$ si $i \leqq 2n - 3$ (et $n \geqq 3$). D'où, pour $i \leqq 2n - 3$ $(n \geqq 3)$ l'homomorphisme naturel

$$\pi_i(\mathrm{SO}(n+1)/\mathrm{SO}(n)) \to \pi_i(\mathrm{A}_{n+1}/\mathrm{A}_n)$$

est un isomorphisme. D'où, pour $i \leqq 2n - 3$ $(n \geqq 3)$ l'homomorphisme naturel

$$\pi_i(\mathrm{SO}/\mathrm{SO}(n)) \to \pi_i(\mathrm{PL}/\mathrm{A}_n)$$

est un isomorphisme.

Donc la composée des deux flèches

$$\pi_i(\mathrm{SO}/\mathrm{SO}(n)) \to \pi_i(\mathrm{PL}/\mathrm{PL}_n) \to \pi_i(\mathrm{PL}/\mathrm{A}_n)$$

est un isomorphisme; c'est-à-dire que $\pi_i(\mathrm{SO}/\mathrm{SO}(n))$ [ou $\pi_i(\mathrm{PL}/\mathrm{A}_n)$] est facteur direct dans $\pi_i(\mathrm{PL}/\mathrm{PL}_n)$. Il me semble raisonnable de conjecturer que ce facteur direct est $\pi_i(\mathrm{PL}/\mathrm{PL}_n)$ tout entier.

Écrivons la suite exacte d'homotopie du triple $(\mathrm{PL}, \mathrm{A}_n, \mathrm{PL}_n)$, elle donne

$$\pi_n(\mathrm{PL}/\mathrm{PL}_n) \xrightarrow{\alpha} \pi_n(\mathrm{PL}/\mathrm{A}_n) \to \pi_{n-1}(\mathrm{A}_n/\mathrm{PL}_n) \to \pi_{n-1}(\mathrm{PL}/\mathrm{PL}_n) \to \pi_{n-1}(\mathrm{PL}/\mathrm{A}_n),$$

α est surjectif d'après ce qui précède, et les deux derniers groupes sont nuls d'après [25]. Il en résulte que $\pi_{n-1}(\mathrm{A}_n/\mathrm{PL}_n)$ est nul, ce qui permet d'énoncer :

THÉORÈME 1 *bis*. — *Soit* V *une sous-variété de la variété* M, *supposons que* V *ait le type d'homotopie d'un complexe de dimension* k, *et que*

$\dim M - \dim V = n \geqq 3$; *alors si* $k \leqq n$, *il existe un microfibré normal à* V *dans* M. *Si* $k \leqq n-1$, *deux tels microfibrés ont des projections pseudo-isotopes.*

Supposons maintenant que V et M étant donnés comme ci-dessus, le tube normal à V dans M soit stablement équivalent à un fibré vectoriel; alors si $k \leqq 2n-2$, le tube normal à V dans M est le tube sous-jacent à un fibré vectoriel; ce fibré est déterminé de façon unique si $k \leqq 2n-3$. On peut donc énoncer :

THÉORÈME 2. — *Soit* V *une sous-variété de la variété* M, *supposons que* V *ait le type d'homotopie d'un complexe de dimension k, et que*

$$\dim M - \dim V = n \geqq 3.$$

Alors, si $k \leqq 2n-2$, *et si le tube normal à* V *dans* M *est stablement équivalent à un fibré vectoriel,* V *a un microfibré normal dans* M; *ce microfibré n'est peut-être pas unique, mais si* $k \leqq 2n-3$, *il y a un microfibré normal et un seul (à pseudo-isotopie de projections près) dont le groupe structural peut être réduit à* $SO(n)$.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] J. CERF, *Les travaux de Smale sur la structure des variétés* (*Séminaire Bourbaki*, 1961-1962, n° 230).

[2] J. CERF, *Topologie de certains espaces de plongements* (*Bull. Soc. math. Fr.*, t. 89, 1961, p. 227-380).

[3] A. HAEFLIGER, *Knotted* $(4k-1)$*-spheres in* $6k$*-spaces* (*Ann. of Math.*, vol. 75, 1962, p. 452-466).

[4] A. HAEFLIGER, *Plongements différentiables dans le domaine stable* (*Comm. Math. Helv.*, vol. 37, 1963, p. 155-176).

[5] A. HAEFLIGER, *Sphères d'homotopie nouées* (*Séminaire Bourbaki*, 1964-1965, n° 280).

[6] M. HIRSCH, *On combinatorial submanifolds of differentiable manifolds* (*Comm. Math. Helv.*, vol. 36, 1961, p. 103-111).

[7] J. F. P. HUDSON, *Extending piecewise linear isotopies* (*Proc. London Math. Soc.*, vol. 16, 1966, p. 651-668).

[8] J. F. P. HUDSON, *Piecewise linear embeddings* (*Ann. of Math.*, vol. 85, 1967, p. 1-31).

[9] M. C. IRWIN, *Embeddings of polyedral manifolds* (*Ann. of Math.*, vol. 82, 1965, p. 1-74).

[10] M. KERVAIRE et J. MILNOR, *Groups of homotopy spheres*, I (*Ann. of Math.*, vol. 77, 1963, p. 504-507).

[11] J. LEVINE, *A classification of differentiable knots* (*Ann. Math. Princeton*, vol. 82, 1965, p. 15-50).

[12] J. W. MILNOR, *Microbundles and differentiable structures*, Princeton University (multigraphié).

[13] J. W. MILNOR, *Microbundles*, I (*Topology*, vol. 3, suppl. 1, 1964, p. 53-86).

[14] C. MORLET, *Le lemme de Thom et les théorèmes de plongement de Whitney* (*Séminaire H. Cartan*, 1961-1962, n°s 6, 7, 8 et 9).

[15] C. MORLET, *Les voisinages tubulaires des variétés semi-linéaires* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 262, série A, 1966, p. 740-743).

[16] S. SMALE, *On the structure of manifolds* (*Amer. J. Math.*, vol. 84, 1962, p. 387-399).

[17] R. Thom, *Un lemme sur les applications différentiables* (*Bol. Soc. Math. Mexicana*, 1956, p. 59-71).

[18] C. Weber, *L'élimination des points doubles dans le cas combinatoire* (*Comm. Math. Helv.*, vol. 41, 1966-67, p. 179-182).

[19] H. Whitney, *The self intersection of a smooth n-manifold in 2n-space* (*Ann. of Math.*, vol. 45, 1944, p. 220-246).

[20] E. C. Zeeman, *Unknotting combinatorial balls* (*Ann. of Math.*, vol. 78, 1963, p. 501-526).

[21] E. C. Zeeman, *Séminaire à l'I. H. E. S.*, 1962-1963 (multigraphié).

[22] M. Zisman, *Quelques propriétés des fibrés au sens de Kan* (*Ann. Inst. Fourier*, t. 10, 1960, p. 345-457).

[23] C. T. C. Wall, *Locally flat* PL-*manifolds with codimension two* (à paraître).

[24] M. Kervaire, *Le théorème de Barden Mazur Stallings* (*Comm. Math. Helv.*, vol. 40, 1965, p. 31-42).

[25] A. Haefliger et C. T. C. Wall, *Piecewise linear bundles in the stable range* (*Topology*, vol. 4, 1965, p. 209-214).

(Manuscrit reçu le 15 novembre 1967).