

# ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

VICTOR HERMAN

## **La caractérisation fonctionnelle de la fonction rationnelle d'une variable complexe**

*Annales scientifiques de l'É.N.S. 3<sup>e</sup> série*, tome 83, n° 3 (1966), p. 187-189

[http://www.numdam.org/item?id=ASENS\\_1966\\_3\\_83\\_3\\_187\\_0](http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1966_3_83_3_187_0)

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1966, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (<http://www.elsevier.com/locate/ansens>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

# LA CARACTÉRISATION FONCTIONNELLE

## DE LA

### FONCTION RATIONNELLE D'UNE VARIABLE COMPLEXE

PAR VICTOR HERMAN

à Cluj.

P. Montel ([1], [2], [3]) a donné des théorèmes pour la caractérisation fonctionnelle des polynômes de variables réelles ou complexes. En étendant ces résultats, on peut faire la caractérisation fonctionnelle des fonctions rationnelles d'une ou plusieurs variables réelles ou complexes.

On va présenter les résultats concernant la fonction rationnelle d'une variable complexe. Nous considérons les domaines  $S_z$  et  $S'_z$  des variables complexes  $z$  et  $h$  définis par

$$\begin{aligned} S_z: z &= re^{i\theta}, & \alpha_0 < \theta < \alpha_1, & & r > 0; \\ S'_z: h &= \rho e^{i\varphi}, & \alpha_0 < \varphi < \alpha_1, & & \rho > 0; \end{aligned}$$

où  $\alpha_0$  et  $\alpha_1$  sont des constantes données. L'utilisation de ces domaines est imposée par la forme de l'équation fonctionnelle utilisée.

LEMME 1. — *Les équations fonctionnelles*

$$(1) \quad E_{n,m}[f(z), h] = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 1 & f_0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & f_1 & f_1 & \dots & f_1 \\ 1 & 2 & 2^2 & \dots & 2^n & f_2 & 2f_2 & \dots & 2^m f_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 1 & p & p^2 & \dots & p^n & f_p & pf_p & \dots & p^m f_p \end{vmatrix} = 0,$$

$$(2) \quad E'_{n,m}[f(z), h] = \begin{vmatrix} 1 & z & z^2 & \dots & z^n & f_0 & zf_0 & \dots & z^m f_0 \\ 1 & z+h & (z+h)^2 & \dots & (z+h)^n & f_1 & (z+h)f_1 & \dots & (z+h)^m f_1 \\ 1 & z+2h & (z+2h)^2 & \dots & (z+2h)^n & f_2 & (z+2h)f_2 & \dots & (z+2h)^m f_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 1 & z+ph & (z+ph)^2 & \dots & (z+ph)^n & f_p & (z+ph)f_p & \dots & (z+ph)^m f_p \end{vmatrix} = 0,$$

$$[f_k = f(z+kh), k = 0, 1, \dots, p; p = n + m + 1],$$

$n$  et  $m$  étant les degrés respectifs du numérateur et du dénominateur de la fraction sont équivalentes quelle que soit la fonction  $f(z)$  analytique et uniforme à l'intérieur de l'angle  $S_\alpha$ , quel que soit le vecteur-période  $h$  à l'intérieur de l'angle  $S'_\alpha$ .

**THÉORÈME.** — Une fonction  $f(z)$  analytique et uniforme à l'intérieur de l'angle  $S_\alpha$ , satisfaisant à la relation

$$f(z) = f(kz) \quad (k = 1, 2, 3, \dots)$$

se réduit à une constante.

**LEMME 2.** — Quelle que soit la fonction  $f(z)$ , analytique et uniforme à l'intérieur de l'angle  $S_\alpha$ , qui vérifie l'équation fonctionnelle

$$(3) \quad E_{n,m}[f(z), h] = 0$$

pour trois périodes  $h_1, h_2, h_3$  indépendantes telles que

$$(4) \quad E'_{n-1,m}[f(z), h] \neq 0, \quad E'_{n,m-1}[f(z), h] \neq 0,$$

il existe des constantes

$$(5) \quad a_0, a_1, \dots, a_n, b_0, b_1, \dots, b_m$$

non toutes nulles telles que le système

$$(6) \quad \begin{cases} a_0 + a_1(z + jh) + \dots + a_n(z + jh)^n \\ + [b_0 + b_1(z + jh) + \dots + b_{m-1}(z + jh)^{m-1}]f_j + b_m(z + jh)^m f_j = 0 \\ (j = 0, 1, \dots, p; p = n + m + 1) \end{cases}$$

de  $p + 1$  équations linéaires et homogènes par rapport au même nombre d'inconnues (5), soit vérifié.

La caractérisation fonctionnelle de la fonction rationnelle résulte de ces lemmes et du

**THÉORÈME DE MONTEL.** — Toute fonction  $f(z)$  d'une variable complexe, analytique et uniforme dans un domaine  $D$ , vérifiant les équations fonctionnelles

$$(7) \quad \Delta_{h_1}^p f(z) = 0, \quad \Delta_{h_2}^p f(z) = 0, \quad \Delta_{h_3}^p f(z) = 0$$

dans lesquelles les périodes  $h_1, h_2, h_3$  sont indépendantes, est un polynôme de degré inférieur à  $p$ .

On dit que les périodes  $h_1, h_2, h_3$  sont indépendantes s'il n'existe entre elles aucune relation de la forme

$$\mu_1 h_1 + \mu_2 h_2 + \mu_3 h_3 = 0,$$

où  $\mu_1, \mu_2, \mu_3$  sont des nombres entiers non tous nuls.

On démontre ensuite le

**THÉORÈME.** — *La condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction  $f(z)$  d'une variable complexe, analytique et uniforme à l'intérieur de l'angle  $S_x$  du plan complexe, représente la fonction rationnelle*

$$\frac{a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n}{b_0 + b_1 z + \dots + b_m z^m}$$

à coefficients arbitraires et  $b_0 + b_1 z + \dots + b_m z^m \neq 0$ , est que  $f(z)$  vérifie l'équation fonctionnelle

$$(8) \quad E_{n,m}[f(z), h] = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & f_0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & f_1 & f_1 & \dots & f_1 \\ 1 & 2 & 2^2 & \dots & 2^n & f_2 & 2f_2 & \dots & p^n f_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & p & p^2 & \dots & p^n & f_p & pf_p & \dots & p^n f_p \end{vmatrix} = 0$$

[ $f_k = f(x + kh)$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots, p$ ;  $p = n + m + 1$ ]

pour trois valeurs  $h_1, h_2, h_3 \in S'_x$  indépendantes et en même temps

$$E_{n-1,m}[f(z), h] \neq 0, \quad E_{n,m-1}[f(z), h] \neq 0.$$

*Remarques.* — 1. Pour  $m = 0$ , l'équation fonctionnelle se réduit à l'équation de Montel qui caractérise les polynomes.

2. On caractérise de même les fonctions rationnelles de plusieurs variables réelles ou complexes par l'extension des résultats correspondants de Montel (1).

BIBLIOGRAPHIE.

[1] P. MONTEL, *Sur un théorème de Jacobi* (C. R. Acad. Sc., t. 201, 1935, p. 586-588).  
 [2] P. MONTEL, *Sur quelques extensions d'un théorème de Jacobi* (Prace Mat. Fis., 1936, p. 315-329).  
 [3] P. MONTEL, *Sur des équations fonctionnelles caractérisant les polynomes* (C. R. Acad. Sc., t. 226, 1948, p. 1053-1055).

---

(1) La caractérisation de la fonction rationnelle dans la classe de fonctions mesurables va paraître dans la *Revue Roumaine de Mathématiques pures et appliquées*.